Algèbre linéaire 1

1 Applications linéaires :

1.1 Rang de f^2 :

E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$

1- Montrer que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f - \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$

2- En déduire que $\dim(\ker f^2) \leq 2 \dim(\ker f)$

SOLUTION :

1- Introduisons $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\operatorname{Im} f$. $\quad \widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Alors $\operatorname{Im}(\widetilde{f}) = f(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Im}(f^2)$ et $\ker(\widetilde{f}) = \ker f \cap \operatorname{Im} f$

Le théorème du rang appliqué à $\operatorname{Im} f$ donne :

$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im}(\widetilde{f})) + \dim(\ker(\widetilde{f}))$

soit : $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2) + \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$, ce qui donne bien la formule demandée.

2- Par le théorème du rang,

$n - \dim(\ker f) = n - \dim(\ker f^2) + \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$

et donc $\dim(\ker f^2) = \dim(\ker f) + \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$

enfin $\dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) \leq \dim(\ker f)$ puisque $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \ker f$

donc $\dim(\ker f^2) \leq 2 \dim(\ker f)$

* *

1.2 Dimension de l'image d'un sous espace :

E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et G un sous espace de E.
Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\ker f \cap G)$

SOLUTION :

Introduisons $\widetilde{f}$ la restriction de f à G. $\quad \widetilde{f} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Alors $\operatorname{Im}(\widetilde{f}) = f(G)$ et $\ker(\widetilde{f}) = \ker f \cap G$

Le théorème du rang appliqué à $\operatorname{Im} f$ donne :

$\dim(G) = \dim(\operatorname{Im}(\widetilde{f})) + \dim(\ker(\widetilde{f}))$

soit : $\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(\ker f \cap G)$ ce qui est bien la relation demandée.

* *

1.3 Dimension de l'image réciproque :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$, $f \in L(E, F)$ et G un sous espace vectoriel de F.

a) Montrer que $f^{-1}(G)$ est un sous espace vectoriel de E.

b) Montrer que $\dim(f^{-1}(G)) = \dim(G \bigcap \operatorname{Im}(f) + \dim(\ker f)$

SOLUTION :

a) $f(0_E) = 0_F \in G$ donc $0_E \in f^{-1}(G)$ et $f^{-1}(G)$ n'est pas vide.

$\forall x, y \in f^{-1}(G), \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(x + \lambda y) = \underbrace{f(x)}_{\in G} + \lambda \underbrace{f(y)}_{\in G} \in G$ donc $x + \lambda y \in f^{-1}(G)$

$f^{-1}(G)$ est donc un sous espace vectoriel de E.

b) Soit $\widetilde{f}$ la restriction de f à $f^{-1}(G)$: $\quad f^{-1}(G) \xrightarrow{\widetilde{f}} F$

- $\ker(f) \subset f^{-1}(G)$ donc $\ker(\widetilde{f}) = f^{-1}(G) \bigcap \ker(f) = \ker(f)$
- Soit $y \in \mathrm{Im}(\widetilde{f})$, $\exists x \in f^{-1}(G)$, $y = \widetilde{f}(x) = f(x)$ donc $y \in G \bigcap \mathrm{Im}(f)$

  d'où il résulte que $\mathrm{Im}(\widetilde{f}) \subset G \bigcap \mathrm{Im}(f)$

  Réciproquement, soit $y \in G \bigcap \mathrm{Im}(f)$ alors $y \in G$ et $\exists x \in E$, $y = f(x)$

  puisque $y = f(x) \in G$, $x \in f^{-1}(G)$ et donc $y = f(x) = \widetilde{f}(x) \in \mathrm{Im}(\widetilde{f})$

  d'où il résulte l'inclusion réciproque et finalement l'égalité $\mathrm{Im}(\widetilde{f}) = G \bigcap \mathrm{Im}(f)$

  La formule du rang appliquée à $\widetilde{f}$ nous donne alors :

$$\dim(f^{-1}(G)) = \dim(G \bigcap \mathrm{Im}(f) + \dim(\ker f)$$

* *

1.4 Somme de deux projecteurs :

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{K}$.

1- Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $p + q$ est un projecteur.

b) $p_o q + q_o p = 0$

c) $p_o q = q_o p = 0$

2- On suppose que $p + q$ est un projecteur.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$ et que $\ker p + \ker q = E$.

b) Préciser les caractéristiques du projecteur $p + q$

SOLUTION :

1- p et q sont des projecteurs, donc $p_o p = p$ et $q_o q = q$

- $p + q$ est un projecteur $\iff (p+q)^2 = p + q$

$$\iff \underbrace{p_o p}_{=p} + p_o q + q_o p + \underbrace{q_o q}_{=q} = p + q$$

$$\iff p_o q + q_o p = 0$$

On a ainsi montré que $a) \iff b)$

- Il est clair que $c) \implies b)$

Réciproquement, $b) \implies p_o q + q_o p = 0$

$\implies p_o p_o q + p_o q_o p = 0$ (en composant à gauche par p)

$\implies p_o q + p_o q_o p = 0$ (*)

et en composant à droite par p, $p_o q_o p + q_o p_o p = 0$

$\implies p_o q_o p + q_o p = 0$ (*)

par différence des deux (*), $p_o q - q_o p = 0$ donc $p_o q = q_o p = 0$ puisque leur somme est nulle.

On a ainsi montré que $b) \iff c)$ et les trois propositions a), b) et c) sont équivalents.

2- a) On suppose que $p + q$ est un projecteur.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. $\exists t \in E$, $\exists z \in E$, $x = p(t) = q(z)$

  alors $p(x) = p_o p(t) = p(t) = x = p_o q(z) = 0$ car $p_o q = 0$

donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$

- $\forall x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$

  $q(p(x)) = q_o p(x) = 0$ car $q_o p = 0$ donc $p(x) \in \ker q$

  $p(x - p(x)) = p(x) - p_o p(x) = 0$ car p est un projecteur, donc $x - p(x) \in \ker p$

Donc $E \subset \ker p + \ker q$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie, il y a égalité.

2- b) • $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$ (immédiat)

Or $\dim(\mathrm{Im}(p+q)) = \mathrm{rg}(p+q) = \mathrm{tr}(p+q)$ (car $p + q$ est un projecteur)

$= \mathrm{tr}(p) + \mathrm{tr}(q)$ (la trace est linéaire)

$= \mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q)$ (car p et q sont des projecteurs)

et $\dim(\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)) = \dim(\mathrm{Im}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(q)) - \dim(\mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q)$ (formule de Grassmann)

et puisque $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$ (la somme est directe)

$\dim(\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)) = \dim(\mathrm{Im}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(q))$

L'inclusion et l'égalité des dimensions entraînent que $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}$

- Il est clair que $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$

réciproquement, si $x \in \ker(p+q)$ alors $p(x) = -q(x)$

or $p(x) \in \mathrm{Im} p$ et $q(x) \in \mathrm{Im} q$ donc $p(x) \in \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q = \{0\}$ donc $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$

et $x \in \ker p \cap \ker q$

Par double inclusion, on a montré que $\boxed{\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q}$

Donc $p + q$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\ker p \cap \ker q$

* *

1.5 Projecteurs

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

On suppose que $\text{rg}(f) + \text{rg}(Id_E - f) \leq n$. Montrer que f est un projecteur de E.

SOLUTION :

Pour tout $x \in E$, $\quad x = f(x) + (Id_E - f)(x)$

donc $E \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(Id_E - f)$. L'inclusion inverse étant vraie, il y a égalité.

D'après la formule de Grassmann,

$$\underbrace{\dim\Big(\text{Im}(f) + \text{Im}(Id_E - f)\Big)}_{=n} = \underbrace{\dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}(Id_E - f))}_{\leq n \text{ par hypothese}} - \underbrace{\dim\Big(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(Id_E - f)\Big)}_{\geq 0}$$

Donc $\quad \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}(Id_E - f)) = n \quad$ et $\quad \text{Im}(f) \cap \text{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

Pour tout $x \in E$, $\quad f^2(x) - f(x) = f\big(f(x) - x\big) = (Id_E - f)\big(-f(x)\big) \in \text{Im}(f) \cap \text{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

donc $f^2(x) = f(x)$ et f est un projecteur.

* *

1.6 $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

Montrer que $\qquad \text{rg}(f) = \text{rg}(f^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$

SOLUTION :

Dans tous les cas $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f \quad$ et $\quad \ker f \subset \ker f^2 \qquad$ (immédiat)

• Supposons que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$

$\text{Im}f$ est stable par f. Soit $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}f$

$\ker \tilde{f} = \text{Im}f \cap \ker f = \{0\}$, donc $\tilde{f}$ est injective.

$\forall x \in \text{Im}f^2,\ \exists t \in E,\ x = f^2(t) = f(\underbrace{f(t)}_{\in Im(f)}) = \tilde{f}(f(t))$, donc $\tilde{f}$ est surjective.

$\tilde{f}$ est une bijection linéaire de $\text{Im}f$ sur $\text{Im}f^2$ (isomorphisme), donc $\text{Im}f$ et $\text{Im}f^2$ ont même dimension et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$

• Réciproquement, supposons que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.

Par le théorème du rang, $\dim(\ker f) = \dim(\ker f^2)$

et par l'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$, $\ker f = \ker f^2$

Soit $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.

$\exists t \in E,\ x = f(t)$ et $f(x) = 0 \quad$ donc $\quad f^2(t) = f(x) = 0$.

$t \in \ker f^2$ donc $t \in \ker f$ puisque $\ker f = \ker f^2$. Donc $f(t) = 0 = x$

Ainsi $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, la somme $\ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ est directe.

Alors, $\dim(\ker(f) \oplus \text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim E \quad$ (théorème du rang)

et l'inclusion $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) \subset E$ permet de conclure que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$

* *

1.7 Rang d'une somme

Soient f et g deux endomophismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps $\mathbf{K}$.

Montrer que $\quad : \quad \text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\} \\ \text{et} \quad \ker f + \ker g = E \end{cases}$

SOLUTION :

$\forall y \in \text{Im}(f+g), \quad \exists x \in E, \quad y = (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im}f} + \underbrace{g(x)}_{\in \text{Im}g}$

Donc $\text{Im}(f+g) \underbrace{\subset}_{(1)} \text{Im}f + \text{Im}g$

d'où $\text{rg}(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) \underbrace{\leq}_{(1')} \dim(\text{Im}f + \text{Im}g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$

Il y a égalité entre $\text{rg}(f+g)$ et $\text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si l'inégalité (1'), c'est à dire l'inclusion (1) est une égalité et si $\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) = 0$

Donc $\quad \text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g \\ \text{et } \text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\} \end{cases}$

♣ Supposons que $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$

- alors on vient de voir que $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$
- $\dim(\ker f + \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g) \quad$ (Grassmann)

$= n - \text{rg}f + n - \text{rg}g - \dim(\ker f \cap \ker g)$ (formule du rang)
$= 2n - \text{rg}(f+g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$

Montrons que $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$

l'inclusion $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ est immédiate.

réciproquement soit $x \in \ker(f+g)$:

$(f+g)(x) = 0$ donc $\underbrace{f(x)}_{\in \text{Im} f} = \underbrace{g(-x)}_{\in \text{Im} g}$ et donc $f(x) = g(x) = 0$ puisque $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$

ce qui montre bien que $x \in \ker f \cap \ker g$ et termine la démonstration.

On peut alors écrire :

$\dim(\ker f + \ker g) = 2n - \text{rg}(f+g) - \dim(\ker(f+g)) = 2n - n = n$

(à nouveau th. du rang appliqué à $f+g$)

L'inclusion $\ker f + \ker g \subset E$ et l'égalité des dimensions permettent alors de conclure à l'égalité :

$\ker f + \ker g = E$

♣ Supposons maintenant que $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$

D'après le résultat préliminaire, il suffit de montrer que : $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$

- L'inclusion $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$ ayant déja été montrée, il suffit de prouver que $\text{Im}f + \text{Im}g \subset \text{Im}(f+g)$
- soit $z \in \text{Im}f + \text{Im}g$. $\exists x, y \in E$ tels que $z = f(x) + g(y)$
- Puisque $\ker f + \ker g = E$, il existe $a \in \ker f$ et $b \in \ker g$ tels que $x = a + b$

et il existe $c \in \ker f$ et $d \in \ker g$ tels que $y = c + d$

alors $(f+g)(b+c) = f(b) + \underbrace{f(c)}_{0} + \underbrace{g(b)}_{0} + g(c)$

et $z = f(x) + g(y) = f(a+b) + g(c+d) = \underbrace{f(a)}_{0} + f(b) + g(c) + \underbrace{g(d)}_{0} = f(b) + g(c)$

on a ainsi montré que $z = (f+g)(b+c) \in \text{Im}(f+g)$

et finalement que $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$

* *

1.8 Rang d'une composée :

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$. Soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G, \qquad E \xrightarrow{g_o f} G$$

a) Montrer que : $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}(f) - \dim(\ker g \cap \text{Im} f)$

b) Montrer que : $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}(g) + \dim(\ker g + \text{Im} f) - \dim F$

c) En déduire à quelle condition $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}(f)$ et à quelle condition $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}(g)$

SOLUTION :

a) Soit $\widetilde{g}$ la restriction de g à $\text{Im}(f)$: $\begin{array}{ccc} \text{Im}(f) & \xrightarrow{\widetilde{g}} & G \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$

$\text{Im}(g_o f) = g(\text{Im}(f)) = \text{Im}(\widetilde{g})$

$\ker(\widetilde{g}) = \text{Im}(f) \cap \ker g$

En appliquant le théorème du rang à $\widetilde{g}$, on obtient : $\dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Im}\widetilde{g}) + \dim(\ker \widetilde{g})$

soit : $\text{rg}f = \text{rg}(g_o f) + \dim(\text{Im}(f) \cap \ker g)$

b) D'après la formule de Grassmann puis le théorème du rang,

$\dim(\text{Im}(f) + \ker(g)) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\ker g) - \dim(\text{Im}f \cap \ker g)$

$= \text{rg}f + \dim(F) - \text{rg}g - \dim(\text{Im}f \cap \ker g)$

En reportant dans la formule de la question précédente, on obtient :

$\text{rg}(g_o f) = \text{rg}f - \dim(\text{Im}(f) \cap \ker g)$

$= \text{rg}f + \dim(\text{Im}(f) + \ker(g)) - \text{rg}f - \dim(F) + \text{rg}g$

soit $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}g \dim(\text{Im}f + \ker g) - \dim(F)$

c) • De la formule a) : $\text{rg}f = \text{rg}(g_o f) + \dim(\text{Im}f \cap \ker g)$

on déduit que $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}f \iff \text{Im}f \cap \ker g = \{0\}$

• De la formule b) : $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}g + \dim(\text{Im}f + \ker g) - \dim(F)$

on déduit que $\text{rg}(g_o f) = \text{rg}g \iff \dim(\text{Im}f + \ker g) = \dim(F)$

$\iff \text{Im}f + \ker g = F$ (compte tenu de l'inclusion $\text{Im}f + \ker g \subset F$)

* *

1.9 Noyau et image d'une composée

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$. Soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$.

a) Montrer que : $\mathrm{Im}(g_o f) = \mathrm{Im}(g) \iff \ker g + \mathrm{Im}(f) = F$

b) Montrer que : $\ker(g_o f) = \ker(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$

SOLUTION :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

a) On a toujours $\mathrm{Im}(g_o f) \subset \mathrm{Im}(g)$

• Supposons que $\mathrm{Im}(g_o f) = \mathrm{Im}(g)$

Soit $x \in F$. Alors $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g_o f)$ donc $\exists t \in E,\ \ g(x) = g_o f(t)$

On peut alors écrire $x = f(t) + (x - f(t))$ avec $f(t) \in \mathrm{Im}(f)$ et $x - f(t) \in \ker g$

(car $g(x - f(t)) = g(x) - g_o f(t) = 0$)

On a ainsi montré que $F \subset \ker g + \mathrm{Im}(f)$ et il y a égalité car $\ker g$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces de F.

• Réciproquement, supposons que $\ker g + \mathrm{Im}(f) = F$

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. $\exists x \in F,\ y = g(x)$.

Mais puisque $\ker g + \mathrm{Im}(f) = F,\ \exists a \in \ker g,\ \exists b \in \mathrm{Im}(f),\ x = a + b$ et $\exists c \in E,\ b = f(c)$

alors $y = g(x) = g(a+b) = \underbrace{g(a)}_{0} + g(b) = g(f(c)) \in \mathrm{Im}(g_o f)$

Donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g_o f)$ et il y a égalité.

b) On a toujours $\ker(f) \subset \ker(g_o f)$

• Supposons que $\ker(f) = \ker(g_o f)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker g$: $\exists x \in E,\ y = f(x)$ et $g(y) = 0$ donc $g(f(x)) = 0$ et $x \in \ker(g_o f) = \ker(f)$

d'où $f(x) = 0$ et $y = f(x) = 0$

Donc $\mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$

• Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$.

Soit $x \in \ker(g_o f)$ alors $g_o f(x) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \ker f$

On a ainsi montré que $\ker(f) \subset \ker(g_o f)$

* *

1.10 Sous-espace de $\mathscr{L}(E,F)$:

E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et G est un sous espace de E.

On considère $W = \{u \in \mathscr{L}(E,F),\ G \subset \ker u\}$

1- Montrer que W est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$

2- Calculer sa dimension en fonction de celles de E, F et G

SOLUTION :

1- Notons ω l'application nulle de E dans F.

• Puisque $\ker(\omega) = E$, on a bien $G \subset \ker \omega$ de sorte que $\omega \in G$ et W n'est pas vide.

• Soient u et $v \in W$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

u et v sont deux applications liéaires de E dans F telles que $G \subset \ker u$ et $G \subset \ker v$

$\forall x \in G,\ u(x) = v(x) = 0$ donc $\forall x \in G,\ (u + \lambda v)(x) = 0$ et $G \subset \ker(u + \lambda v)$

il en résulte que $u + \lambda v \in W$

W est donc un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$

2- Soient $n = \dim(E),\ p = \dim(F)$ et $m = \dim(G)$

G admet un sous espace supplémentaire H dans E : $G \oplus H = E$

• Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Notons $u_{|_G}$ et $u_{|_H}$ les restrictions respectives de u à G et à H.

$\forall x \in E,\ \exists x_1 \in G,\ \exists x_2 \in H,\ x = x_1 + x_2$

$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_{|_G}(x_1) + u_{|_H}(x_2)$

$u \in W \iff G \subset \ker u \iff \forall x_1 \in G, u(x_1) = 0 \iff \forall x_1 \in G, u_{|_G}(x_1) = 0 \iff u_{|_G} = \omega$

• Considérons alors l'application Φ de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(G,F)$ qui à $u \in \mathscr{L}(E,F)$ fait correspondre $u_{|_G}$:

$$\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(G,F) \\ u & \mapsto & u_{|_G} \end{array} :$$

L'équivalence $u \in W \iff u_{|_G} = \omega \iff \Phi(u) = \omega$ montre que $W = \ker \Phi$

Par le théorème du rang, on peut écrire :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(\underbrace{\ker \Phi}_{W}) + \dim(\mathrm{Im}\Phi)$$

soit $\dim(W) = \dim(\mathscr{L}(E,F)) - \dim(\mathrm{Im}\Phi)$

Il reste enfin à montrer que Φ est surjective : Pour tout application linéaire $v \in \mathscr{L}(G,F)$, considérons l'application $w \in \mathscr{L}(E,F)$ qui coïncide avec v sur G et qui est nulle sur H. Une telle application existe bien puisque $E = G \oplus H$.

Alors $\Phi(w) = w_{|G} = v$, ce qui montre que Φ est surjective, c'est à dire que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathscr{L}(G,F)$

Finalement,

$$\dim(W) = \dim(\mathscr{L}(E,F)) - \dim(\mathrm{Im}\Phi) = \dim(\mathscr{L}(E,F)) - \dim(\mathscr{L}(G,F))$$
$$= \dim(E)\dim(F) - \dim(G)\dim(F)$$
$$\boxed{\dim(W) = \dim(F).(\dim(E) - \dim(G))}$$

* *

1.11 Endomorphisme commutant avec tous les autres

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ et $f \in L(E)$

a) Montrer que si $\forall x \in E,\ f(x)$ est colinéaire à x alors f est une homothétie.

b) Montrer que si $f \in L(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E, alors f est une homothétie.

c) Déterminer les matrices $M \in M_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices inversibles.

$$(\ \forall N \in GL_n(\mathbf{K}), \quad M.N = N.M)$$

SOLUTION :

a) Par hypothèse, $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x.x$

Si $x \neq 0, \lambda_x$ est unique car $\lambda_1.x = \lambda_2.x \implies (\lambda_1 - \lambda_2).x = 0$
$\implies \lambda_1 = \lambda_2 \quad$ car $\quad x \neq 0$.

Soient x et y non nuls.

- Si x et y sont liés, $\exists \mu \in \mathbf{K},\ y = \mu x$
  $f(y) = \lambda_y.y = f(\mu.x) = \mu.f(x) = \mu.\lambda_x.x = \lambda_x\mu.x = \lambda_x.y$
  donc $(\lambda_x - \lambda_y).y = 0 \quad$ et $\quad \lambda_x = \lambda_y$
- Si (x,y) est libre, $f(x+y) = \lambda_{x+y}.(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y$
  donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x).x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y).y = 0$
  $\implies \quad \lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$ puisque (x,y) est libre.
  donc $\lambda_x = \lambda_y$

Ainsi, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda.x$ et donc $\boxed{f = \lambda.Id_E}$.

b) Soit $f \in L(E)$ qui commute avec tous les endomorphismes de E.

Soit x un vecteur quelconque non nul de E.

Considérons alors la projection p sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un hyperplan H supplémentaire de cette droite.

Par hypothèse sur f, $\quad f_o p = p_o f$

donc $f(\underbrace{p(x)}_{=x}) = \underbrace{p(f(x))}_{\in Im(p)}$

donc $f(x) \in Im(p) = \mathrm{Vect}(x)$ et $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x.x$

Il s'ensuit alors d'après a) que f est une homothétie.

c) Soit $M \in M_n(\mathbf{K})$ qui commute avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbf{K})$.

$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2,\ I_n + E_{i,j} \in GL_n(\mathbf{K}), \quad$ donc $\quad M.(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j}).M$

$\implies \quad M + M.E_{i,j} = M + E_{i,j}.M$

$\implies \quad M.E_{i,j} = E_{i,j}.M \quad$ et par linéarité, M commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbf{K})$.

Alors, d'aprés a) appliqué aux matrices, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ M = \lambda I_n$

* *

1.12 * Rangs de f^k ; indice de nilpotence

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K et $f \in L(E)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soient $r_k = \mathrm{rg}(f^k)$ et $\delta_k = r_k - r_{k+1} \quad$ (on convient que $f^0 = Id_E$)

1-a) Montrer que $\delta_k = \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} f^{k+1})$

(on pourra considérer la restriction $\widetilde{f_k}$ de f à $\mathrm{Im} f^k$))

En déduire que (δ_k) est une suite décroissante.

Montrer que pour tout k, $\delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}$. En déduire que la suite (δ_k) est nulle à partir d'un certain rang.

b) Soit p le plus petit entier tel que $\delta_p = 0 \quad$ (donc $\delta_{p-1} \neq 0$)

Montrer que - si $k < p$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(f^k)$

et que - si $k \geq p$, $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$

2-a) On suppose que f est nilpotente d'ordre 2. $(f \neq 0$ et $f^2 = 0\ )$

Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dfrac{n}{2}$

b) Plus généralement, on suppose que f est nilpotent d'ordre p. $(f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0\ )$

Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dfrac{p-1}{p} n$

SOLUTION :

1-a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{f_k}$ la restriction de f à $\text{Im}f^k$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}f^k & \xrightarrow{\widetilde{f_k}} & E \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Recherchons noyau et image de $\widetilde{f_k}$:

$\bullet \forall x \in \text{Im}f^k,\ x \in \ker(\widetilde{f_k}) \iff \widetilde{f_k}(x) = 0$

$\iff f(x) = 0$

donc $\ker(\widetilde{f_k}) = \text{Im}f^k \cap \ker f$

$\bullet \forall y \in E,\ y \in \text{Im}(\widetilde{f_k}) \iff \exists x \in \text{Im}f^k,\ y = \widetilde{f_k}(x) = f(x)$

$\iff \exists t \in E,\ y = f(f^k(t))$

$\iff y \in \text{Im}f^{k+1}$

donc $\text{Im}(\widetilde{f_k}) = \text{Im}f^{k+1}$

Le théorème du rang appliqué à $\widetilde{f_k}$ permet d'écrire : $\dim(\text{Im}f^k) = \dim(\text{Im}f^{k+1}) + \dim(\text{Im}f^k \cap \ker f)$

soit aussi : $r_k = r_{k+1} + \dim(\text{Im}f^k \cap \ker f)$

et par différence, $\boxed{\delta_k = r_k - r_{k+1} = \dim(\text{Im}f^k \cap \ker f)}$

• Si $x \in \text{Im}f^{k+1}$, alors $\exists t \in E,\ x = f^{k+1}(t) = f^k(f(t))$ donc $x \in \text{Im}f^k$.

d'où $\text{Im}f^{k+1} \subset \text{Im}f^k$

alors $\text{Im}f^{k+1} \cap \ker f \subset \text{Im}f^k \cap \ker f$, et en passant aux dimensions, $\delta_{k+1} \leq \delta_k$

$\boxed{\text{La suite } (\delta_k) \text{ est donc décroissante (au sens large)}}$

Remarque : Cette décroissance de δ s'écrit aussi $\delta_{k+1} = r_{k+1} - r_{k+2} \leq \delta_k = r_k - r_{k+1}$,

ou encore $r_{k+1} \leq \dfrac{r_k + r_{k+2}}{2}$

On dit alors, par analogie aux fonctions, que **la suite** (r_k) **est convexe**.

• $\delta_0 = r_0 - r_1 = n - r_1$

$\delta_1 = r_1 - r_2$

$\delta_2 = r_2 - r_3$

....

$\delta_k = r_k - r_{k+1}$

En additionnant membre à membre,

$\underbrace{\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_k}_{\geq (k+1)\delta_k} = \underbrace{n - r_{k+1}}_{\leq n}$ donc $(k+1)\delta_k \leq n$ d'où $\boxed{\delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}}$

• L'inégalité $0 \leq \delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}$ montre que $\lim\limits_{k \to +\infty} \delta_k = 0$

Mais comme (δ_k) est une suite d'entiers naturels, puisqu'elle est de limite nulle, elle est nulle à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite)

b)• Si p est le plus petit entier tel que $\delta_p = 0$, la suite (δ_k) étant décroissante,

$\forall k < p,\ \delta_k = r_k - r_{k+1} \geq 1$ donc $r_k = \text{rg}(f^k) > r_{k+1} = \text{rg}(f^{k+1})$

L'inclusion $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ est donc **stricte**.

• La suite (δ_k) étant stationnaire nulle à partir du rang p, $\forall k \geq p,\ \delta_k = r_k - r_{k+1} = 0$,

l'inclusion $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ à laquelle s'ajoute l'égalité des dimensions entraîne alors l'égalité $\text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^k)$

La suite des images itérées, $(\text{Im}f^k)$ est donc **strictement décroissante** jusqu'au rang p, puis **stationnaire** à partir de ce rang p.

2-a) Si $f_o f = 0$ alors $\text{Im}f \subset \ker f$ et donc $\dim(\text{Im}f) \leq \dim(\ker f)$

or, par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}f) + \dim(\ker f) = n$

d'où $2\dim(\text{Im}f) \leq n$ et $\boxed{\text{rg}(f) \leq \dfrac{n}{2}}$

2-b) Supposons que f soit nilpotente d'ordre p. Alors $\text{Im}f^p = \{0\}$ donc $r_p = 0$ et $\delta_p = 0$.

Le même calcul de sommation fait en 1-a) montre que :

$\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{p-1} = n - r_p = n$

La suite (δ_k) étant décroissante, $n = \delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{p-1} \leq p.\delta_0 = p(n - r_1)$

donc $\quad p.r_1 \leq (p-1)n \quad$ et finalement, $\boxed{r_1 = \text{rg}(f) \leq \dfrac{p-1}{p} n}$

Note : Ce résultat généralise celui de la question précédente :

Si f est nilpotente d'ordre 3, alors $\text{rg}(f) \leq \dfrac{2}{3} n$

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Produit de matrices rectangulaires :

Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $A.B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $BA = I_2$ (on pourra d'abord calculer $(AB)^2$ puis déterminer $\text{rg}(AB)$, $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$, $\text{rg}(BA)$....)

SOLUTION :

• $(AB)^2 = A.B$. Si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de $A.B$, on constate que $C_3 = 2(C_1 + C_2)$, que C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles donc sont linéairement indépendantes. Donc $\text{rg}(AB) = 2$

• $\text{rg}(A) \leq 2$ car $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et pour une raison analogue, $\text{rg}(B) \leq 2$

Or $2 = \text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(A) \leq 2$ donc $\text{rg}(A) = 2$

Pour la même raison, $\text{rg}(B) = 2$

$\text{rg}(B.A) \leq 2$ car $B.A \in M_2(\mathbb{R})$

• $\text{rg}(A.(B.A).B) = \text{rg}(A.B) = 2 \leq \text{rg}(B.A)$ donc $\text{rg}(B.A) \geq 2$ donc $\text{rg}(B.A) = 2$

$B.A \in M_2(\mathbb{R})$, est de rang 2, donc est inversible.

alors $(AB)^2 = A.B \implies B.(A.B.A.B).A = B.(A.B).A$ et en multipliant deux fois par $(B.A)^{-1}$, on obtient $B.A = I_2$

****

2.2 Matrice d'une application linéaire :

On note considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui au vecteur (x, y, z) fait correspondre le vecteur (x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + z \\ z' = 3x - 2y - z \end{cases}$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et calculer sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Déterminer le noyau et l'image de f. Donner une équation de cette image.

b) Calculer la matrice de l'endomorphisme f^2.

Sans aucun autre calcul, en déduire une base de $\text{Im}(f^2)$ et montrer que l'endomorphisme f est nilpotent en précisant son ordre de nilpotence.

SOLUTION :

a) f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, linéaire (immédiat); c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Notons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour e_1, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ et $(x', y', z') = (1, -1, 3)$ donc $f(e_1) = e_1 - e_2 + 3e_3$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour première colonne de A.

Calcul analogue pour les autres colonnes, ce qui donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

• $(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \iff (x, y, z) = x.(1, 1, 1)$

Ainsi, $\boxed{\ker(f) \text{ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur } u = (1, 1, 1)}$

Le théorème Durand nous permet alors d'en déduire que $\text{Im}(f)$ a pour dimension $3 - 1 = 2$

• $\text{Im}(f)$ est engendré par les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$, donc par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

Sachant que c'est un plan, on peut en prendre pour base tout sous ensemble de deux de ces trois vecteurs, qui soit libre, par exemple les 2^e et 3^e colonnes (pour un peu plus de simplicité).

Ainsi, $\text{Im}(f)$ a pour base $(1,0,2),(0,1,-1)$

Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\text{Im}(f) \iff ((1,0,2),(0,1,-1),(x,y,z))$ est lié

$\iff \det((1,0,2),(0,1,-1),(x,y,z)) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \iff -2x+y+z=0$$

Finalement, $\boxed{\text{Im}(f) \text{ est le plan d'équation } -2x+y+z}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (calcul immédiat)

A^2 est une matrice de rang 1, puisque chacune de ses colonnes est multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Im}(f^2)$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1,1,1)$

On remarque ainsi que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$

Dès lors, $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ f^2(X) \in \ker(f)$ donc $f[f^2(X)] = 0$

Il s'ensuit que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme nilpotent d'ordre 3}}$ (puisque $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$)

****

2.3 Réduction **Mines**

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 3, non nulle telle que $A^3 = -A$

Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$ non nulle telle que $A^3 = -A$

$\det(A^3) = (\det A)^3 = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$

donc $\det(A)\underbrace{((\det A)^2 + 1)}_{\neq 0} = 0$ donc $\det(A) = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$f^3 + f = 0$ et $\ker(f) \neq \{0\}$

♣ Montrons que $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + Id_{\mathbf{R}^3}) = E$

- c'est immédiat si on dispose du th. de décomposition des noyaux, car les polynômes X et X^2+1 étant premiers entre eux, la relation $f(f^2+I) = \omega$ entraine alors :

$\ker(f) \oplus \ker(f^2+I) = \ker\omega = E$ (ω endomorphisme nul)

- ce théorème ne figurant pas au programme, démontrons le résultat annoncé :

soit $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2+I)$: $f(x) = 0$ et $f(\underbrace{f(x)}_{0}) = -x$

donc $x = 0$, la somme $\ker(f) \oplus \ker(f^2+I)$ est directe.

soit $x \in \mathbf{R}^3$, posons $a = f^2(x) + x$ et $b = -f^2(x)$

$f(a) = f^3(x) + f(x) = 0$ donc $a \in \ker f$

$(f^2+I)(b) = -f^4(x) - f^2(x) = -f(f^3(x) + f(x)) = -f(0) = 0$ donc $b \in \ker(f^2+I)$

Comme $x = a+b$, $\ker(f) \oplus \ker(f^2+I) = \mathbf{R}^3$

♣ $\ker(f) \neq \mathbf{R}^3$, sinon f serait nul, donc $\ker(f^2+I) \neq \{0\}$

Soit y une vecteur non nul de $\ker(f^2+I)$, $f^2(y) = -y$. Montrons que $(y, f(y))$ est libre.

Soient λ et μ réels tels que $\lambda y + \mu f(y) = 0$, alors $\lambda f(y) + \mu f^2(y) = \lambda f(y) - \mu y = 0$

En multipliant la première égalité par λ , la deuxième par $-\mu$ et en ajoutant, on obtient :

$(\lambda^2 + \mu^2).y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \mu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$

Donc le système $(y, f(y))$ est libre et $\dim(\ker(f^2+I)) \geq 2$

Puisque $\dim(\ker f) \geq 1$ $(\ker(f) \neq \{0\})$, nécessairement,

$\dim(\ker(f^2+I)) = 2$ et $\dim(\ker f) = 1$

Soit alors a une base de $\ker f$, y un vecteur non nul de $\ker(f^2+I)$ de sorte que $(y, f(y))$ est une base de $\ker(f^2+I)$. Alors $(a, y, f(y))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ car $\ker(f) \oplus \ker(f^2+I) = \mathbf{R}^3$

et puisque $f(f(y)) = -y$ la matrice de f dans la base $(a, y, f(y))$ est m Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A et B étant les matrices de f dans deux bases distinctes , elles sont semblables.

* *

2.4 * Matrices de trace nulle

Soit $M \in M_n(\mathbf{K})$.

Montrer que : $\operatorname{tr}(M) = 0 \iff M$ est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

SOLUTION :

• Si M est semblable à une matrice N dont tous les éléments diagonaux sont nuls, alors $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N) = 0$.

• Montrons l'implication réciproque, pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n, par récurrence sur n.

- Pour $n = \dim(E) = 1$, $\operatorname{mat}(f) = (\lambda)$, donc $\operatorname{tr}(f) = \lambda = 0$ et $\operatorname{mat}(f) = 0$, la propriété est vérifiée.

- Supposons que tout endomorphisme de trace nulle d'un espace de dimension $n-1$ admette une base dans laquelle les éléments diagonaux de sa matrice soient tous nuls.

Soit alors $f \in L(E)$, E espace vectoriel de dimension n, tel que $\operatorname{tr}(f) = 0$.

- si $f = \lambda.Id_E$ est une homothétie, alors $\operatorname{tr}(f) = \lambda.n = 0$ donc $\lambda = 0$ et $f = 0$ vérifie bien la propriété demandée.

- si f n'est pas une homothétie, alors il existe $x_1 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1))$ soit un système libre.

(cf. exercice précédent)

Prenons alors $x_2 = f(x_1)$ et complétons le système libre (x_1, x_2) en une base $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ de E.

$$\operatorname{Mat}_{(x_1,\dots,x_n)} f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a_{1,2} \ \dots \ a_{1,n} \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \text{ avec } B = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Considérons ensuite p le projecteur sur l'hyperplan $H = \operatorname{Vect}(x_2, x_3, ..., x_n)$ parallèlement à la droite $\operatorname{Vect}(x_1)$ et g la restriction de $p_o f$ à H.

g est un endomorphisme de H, dont la matrice dans la base $(x_2, ..., x_n)$ est :

$$\operatorname{Mat}_{(x_2,\dots,x_n)} g = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = B$$

alors $\operatorname{tr}(g) = \operatorname{tr}(B) = a_{2,2} + ... + a_{n,n} = \operatorname{tr}(f) = 0$

On peut donc appliquer à g l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(y_2, ..., y_n)$ de H dans laquelle la matrice de g possède une diagonale nulle : $\operatorname{Mat}_{(y_2,\dots,y_n)} g = C = \begin{pmatrix} 0 & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,2} & 0 & \dots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}_{n-1}$

Alors, la matrice de f dans la base $(x_1, y_2, ..., y_n)$ est :

$$\operatorname{Mat}_{(x_1,y_2,\dots,y_n)} f = A' = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & 0 & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ \times & c_{3,2} & 0 & \dots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & c_{n,2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 \end{array}\right)_n \quad \text{(les } \times \text{ représentent des éléments quelconques de } \mathbf{K} \text{)}$$

On a ainsi construit une base de E dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice de f sont nuls.

* *

2.5 * Groupe multiplicatif de matrices

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $G = \{M_1, M_2, ..., M_p\}$ un sous ensemble fini de matrices de $M_n(K)$ formant un groupe pour la multiplication $\times$.

a) Donner un exemple d'un tel sous ensemble G.

G est il nécessairement un sous groupe de $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$?

b) Montrer que toutes les matrices de G ont même rang.

c) Montrer que $P = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} M_k$ est une matrice de projection.

SOLUTION :

a) Prenons $M_k = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^k = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta^k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$

où $\theta = \dfrac{2\pi}{p}$ et $M_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Alors $M_k.M_j = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta^{k+j} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = M_{(k+j)\ [p]}$ et $M_p = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ est élément neutre de G pour la multiplication.

Autre exemple :

• Si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$: Soit G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \alpha_m & .... & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où α_1 est une racine primitive p_1-ème de l'unité, α_2 une racine p_2-ème de l'unité,..., α_m une racine p_m-ème de l'unité.

G est un groupe pour la loi $\times$, de cardinal $p_1.p_2.....p_m$.

• Si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$: Soit G l'ensemble des matrices de la forme précédente, avec $\alpha_i = \pm 1$

G est un groupe pour la loi $\times$, de cardinal 2^m.

• Ces exemples montrent que G n'est pas nécessairement un sous groupe de $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$

b) Soient M_1 et M_2 deux matrices de G. Soit J l'élément neutre du groupe $(G, \times)$ (qui n'est pas forcément la matrice unité I_n)

Soit M_2^{-1} le symétrique de M_2 dans G pour cette loi $\times$.

Alors, $M_1 = (M_2 \times M_2^{-1}) \times M_1 = M_2 \times (M_2^{-1} \times M_1)$, ce qui montre que $\text{rg}(M_1) \leq \text{rg}(M_2)$

(car $\text{rg}(A \times B) \leq \text{rg}(A)$)

Pour un raison analogue, $\text{rg}(M_2) \leq \text{rg}(M_1)$ et donc $\text{rg}(M_1) = \text{rg}(M_2)$

c) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, l'application $f_k\ :\ M \longrightarrow M_k.M$ est une bijection de G dans G :

- elle est injective : $\forall M, N \in G,\ f_k(M) = f_k(N) \implies M_k.M = M_k.N$

$\implies M_k^{-1}(M_k.M) = M_k^{-1}(M_k.N) \implies M = N$

(M_k^{-1} désigne l'inverse de M_k dans le groupe $(G, \times)$)

- elle est surjective : $\forall M \in G,\ M = M_k.(M_k^{-1}.M) = f_k(M_k^{-1}.M)$

Donc quand M décrit G, $M_k.M$ décrit G aussi.

$$P^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{p} M_k\right).\left(\sum_{j=1}^{p} M_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} \underbrace{M_k.M_j}_{decrit\ G}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\underbrace{(M_1 + M_2 + ... + M_p)}_{independant\ de\ k}$$

$$P^2 = \frac{1}{n^2}\, n\,(M_1 + M_2 + ... + M_p) = \frac{1}{n}(M_1 + M_2 + ... + M_p) = P$$

$\boxed{\text{Donc } P \text{ est une matrice de projection.}}$

3 Systèmes linéaires

3.1 Matrice inversible :

Soit $A \in GL_n(K),\ L \in \mathscr{M}_{1,n}(K),\ C \in \mathscr{M}_{n,1}(K),\ b \in K$ et B la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(K)$ définie par blocs comme suit :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline L & b \end{array}\right)$$

Montrer que B est inversible si et seulement si $b \neq LA^{-1}C$.

SOLUTION :

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n+1}$

La matrice B est inversible si et seulement si :

$\forall X \in \mathbb{C}^{n+1},\ B.X = 0 \implies X = 0$

$$\forall X \in \mathbb{C}^{n+1},\ B.X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n + c_1 x_{n+1} = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n + c_2 x_{n+1} = 0 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n + c_n x_{n+1} = 0 \\ l_1 x_1 + l_2 x_2 + ... + l_n x_n + b x_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} A.X' + x_{n+1}C = 0 \\ L.X' + bx_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} X' = -x_{n+1}A^{-1}C \quad \text{(puisque } A \text{ est inversible)} \\ -x_{n+1}L.A^{-1}.C + bx_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} X' = -x_{n+1}A^{-1}C & (1) \\ (-L.A^{-1}.C + b)x_{n+1} = 0 & (2) \end{array} \right.$$

• Si $-L.A^{-1}.C + b \neq 0$ alors $(2) \Longrightarrow x_{n+1} = 0$ et $(1) \Longrightarrow X' = 0$ et finalement $X = 0$.
Dans ce cas la matrice B est inversible.

• Si $-L.A^{-1}.C + b \neq 0$ alors (2) admet des solutions non nulles, par exemple $x_{n+1} = 1$ et en prenant $X' = A^{-1}C$ on obtient une matrice colonne X non nulle telle que $B.X = 0$.
Dans ce cas la matrice B n'est pas inversible.
Finalement, $\boxed{B \text{ est inversible si et seulement si } b \neq LA^{-1}C}$

****

3.2 Polygone de milieux de cotés donnés :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on considère n points $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ d'affixes respectives $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Existe-t-il un polygone $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ tel que :
- A_1 soit le milieu de (M_1, M_2) ,
- A_2 soit le milieu de (M_2, M_3) , ...
- ....
- A_{n-1} soit le milieu de (M_{n-1}, M_n)
- et A_n le milieu de (M_n, M_1)

(On pourra dans certains cas donner une condition portant sur les points I et J, barycentres respectifs de $A_1, A_3, A_5, ...$ d'une part et de $A_2, A_4, A_6, ...$ d'autre part).

SOLUTION :

Soient $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ les affixes respectives des points $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$.
Les conditions :
- A_1 soit le milieu de (M_1, M_2) ,
- A_2 soit le milieu de (M_2, M_3) , ...
- ....
- A_{n-1} soit le milieu de (M_{n-1}, M_n)
- A_n le milieu de (M_n, M_1)

se traduisent par les égalités : $\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{z_1 + z_2}{2} = a_1 \\ \dfrac{z_2 + z_3}{2} = a_2 \\ ... \\ \dfrac{z_{n-1} + z_n}{2} = a_{n-1} \\ \dfrac{z_n + z_1}{2} = a_n \end{array} \right.$

Le problème a des solutions si et seulement si le système :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} z_1 + z_2 & & & = 2a_1 \\ & z_2 + z_3 & & = 2a_2 \\ & & ... & \\ & & z_{n-1} + z_n & = 2a_{n-1} \\ z_1 + & & z_n & = 2a_n \end{array} \right. \quad \text{possède des solutions.}$$

C'est un système linéaire de n équations aux n inconnues $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$.
Le déterminant de ce système est :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & ... & 1 & 1 \\ 1 & \dots & & \dots & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ ... & ... & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$\Delta_n = 1 + (-1)^{n+1}$

• Si n est impair, alors $\Delta_n = 2 \neq 0$, le système est de Cramer. Il admet alors une solution unique $(z_1, z_2, z_3, ..., z_n)$ et il existe un et un seule polygone répondant aux conditions posées.

• Si n est pair, alors $\Delta_n = 0$, le système n'est pas de Cramer. Il est de rang $n-1$ car le premier déterminant d'ordre $n-1$ qui intervient dans le calcul précédent est un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul.

Pour que le système soit compatible, il faut que

$$(z_1+z_2)-(z_2+z_3)+(z_3+z_4)-(z_4+z_5)+...+(z_{n-1}+z_2)-(z_n+z_1) = 0 = 2(a_1-a_2+a_3-a_4+...+a_{n-1}+a_n) = 0.$$

c'est à dire que $a_1 + a_3 + a_5 + ... = a_2 + a_4 + a_6 + ...$

ou encore que $I = J$

Si $I \neq J$ alors le problème n'a pas de solutions,

Si $I = J$ alors le système admet une infinité de solutions.

4 Formes linéaires

4.1 Formes linéaires sur $M_n(\mathbb{C})$

On note E l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ et E^* son dual.

a) Montrer que $\forall f \in E^*,\ \exists A \in E,$ unique, $\forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X) = \mathrm{tr}(A.X)$

b) Trouver toutes les formes linéaires $f \in E^*$ telles que $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X.Y) = f(Y.X)$

c) Trouver toutes les formes linéaires $f \in E^*$ telles que $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X.Y) = f(X).f(Y)$

SOLUTION :

a) Soit $f \in E^*$.

Analyse : Soit$A \in E,$ telle que, $\forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X) = \mathrm{tr}(A.X)$

En particulier, pour tout $(i,j) \in \{1, 2, ..., n\},\ f(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(A.E_{i,j})$

Or $(A.E_{i,j})_{h,k} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_{h,l}(E_{i,j})_{l,k} = a_{h,i}\delta_{j,k}$

donc $f(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(A.E_{i,j}) = \displaystyle\sum_{h=1}^{n}(A.E_{i,j})_{h,h} = \sum_{h=1}^{n} a_{h,i}\delta_{j,h} = a_{j,i}$

Ainsi, pour tout $(i,j) \in \{1, 2, ..., n\},\ a_{j,i} = f(E_{i,j})$, ce qui montre l'unicité d'une eventuelle matrice A solution et donne une formule pour définir les coefficients de cette matrice.

Synthèse : Soit $A \in M_n(\mathbb{C}),$ définie par :

$\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\},\ a_{j,i} = f(E_{i,j})$

Le calcul précédent montre que pour tout (i,j), $\mathrm{tr}(A.E_{i,j}) = a_{j,i} = f(E_{i,j})$

Par linéarité, en décomposant toute matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ sur la base $(E_{i,j})_{i=1...n,j=1...n}$,

on obtient : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{tr}(A.X) = f(X)$

b) Soit $f \in E^*$ telles que $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X.Y) = f(Y.X)$

alors, $\forall (i,j), (h,k) \in \{1, 2, ..., n\},\ f(E_{i,j}.E_{h,k}) = f(E_{h,k}.E_{i,j})$

• si $i \neq j$, $f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}.E_{j,j}) = f(E_{j,j}.E_{i,j}) = f(\delta_{j,i}E_{j,j}) = f(0) = 0$

• pour tous i et j , $f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}.E_{j,i}) = f(E_{j,i}.E_{i,j}) = f(E_{j,j})$

En notant λ la valeur commune aux $f(E_{i,i}),\ i = 1, ..., n$, on obtient :

$$\forall X = (x_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C}),\ f(X) = f\left(\sum_{(i,j)} x_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)} x_{i,j}f(E_{i,j})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}f(E_{i,i}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_{i,i} = \lambda.\mathrm{tr}(X)$$

Donc $f = \lambda.\mathrm{tr}$ et on vérifie réciproquement que toute forme linéaire colinéaire à la trace est solution.

****

4.2 Egalité des noyaux de formes linéaires

Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel de dimension finie E.

Montrer que : $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2 \iff (\varphi_1, \varphi_2)$ est un système lié.

SOLUTION :

- Si (φ_1, φ_2) est un système lié, alors il existe un scalaire λ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$
  $\forall x \in \ker\varphi_2,\ \ \varphi_1(x) = \lambda \underbrace{\varphi_2(x)}_{=0} = 0$ donc $\ker\varphi_2 \subset \ker\varphi_1$

  λ est non nul (sinon, $\varphi_1 = 0$) donc $\varphi_2 = \dfrac{1}{\lambda}\varphi_1$ et par le même raisonnement, $\ker\varphi_1 \subset \ker\varphi_2$

  Ainsi, $\boxed{(\varphi_1, \varphi_2) \text{ est lié} \implies \ker\varphi_1 = \ker\varphi_2}$

- Réciproquement, supposons que $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$

Soit $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ une base de l'hyperplan $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan)

Complètons ce système libre en une base $(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ de E. (théorème de la base incompléte)

$\varphi_1(e_n)$ n'est pas nul. (sinon, $e_n \in \ker\varphi_1$ et $\ker\varphi_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n) = E$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\varphi_1 \neq 0$)

Alors, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ \varphi_2(e_k) = \dfrac{\varphi_2(e_n)}{\varphi_1(e_n)}\varphi_1(e_k)$ (cette égalité s'écrit $0 = 0$ pour tout $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$

et $\varphi_2(e_n) = \dfrac{\varphi_2(e_n)}{\varphi_1(e_n)}\varphi_1(e_n)$ pour $k = n$)

L'égalité $\varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_2(e_n)}{\varphi_1(e_n)}\varphi_1(x)$ est vérifiée sur tous les vecteurs d'une base de E. Elle est donc vraie par linéarité pour tout vecteur x de E.

Donc $\varphi_2 = \underbrace{\dfrac{\varphi_2(e_n)}{\varphi_1(e_n)}}_{\in \mathbf{K}}\varphi_1$ et $\boxed{\text{le système } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ est lié.}}$

****

4.3 Dimension d'une intersection d'hyperplans

Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p, \psi$, $p+1$ formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie n.

a) Montrer que : ψ est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p) \iff \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\psi$

b) Montrer que : $\dim\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i\right) = n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$

SOLUTION :

a) • Si ψ est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$, alors, $\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{K}^p,\ \psi = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$

Pour tout $x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i,\ \ \psi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\varphi_i(x)}_{0} = 0 \implies x \in \ker\psi$

donc $\boxed{\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\psi}$

- Réciproquement, supposons que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\psi$

  ◦ Supposons d'abord que $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est un système libre de E^*.

On peut alors le compléter en une base $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p, \varphi_{p+1}, ..., \varphi_n)$ de E^*. Considérons la base préduale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ dans E. $(\forall i, j,\ \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$)

ψ se décompose dans la base $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ de E^* : $\psi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i$

Montrons que pour $j > p,\ \lambda_j = 0$

$\forall j > p,\ \psi(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\varphi_i(e_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j$

Mais puisque $j > p$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\},\ \varphi_i(e_j) = 0$ (car $i \neq j$)

donc $e_j \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\psi$ et $\psi(e_j) = 0$ et donc $\lambda_j = 0$

Les termes d'indices $> p$ étant nuls, il reste $\psi = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$, qui montre que ψ est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$.

◦ En considérant maintenant un système $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ quelconque de E^*, on en extrait un système libre maximal, qu'on suppose être $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$, $q \leq p$, quitte à renuméroter éventuellement les φ_i.

Ainsi, Vect$(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ =Vect$(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$
chaque $\varphi_j,\ j > q$, est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$ par le caractère maximal de ce système.

donc $\forall j > q,\ \bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi_j$, d'après la premiére implication déja établie.

Il en résulte par double inclusion que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i$

De l'hypothèse $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i \subset \ker \psi$ on déduit par l'étude précédente que $\boxed{\psi \text{ est combinaison linéaire}}$ de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$ et donc $\boxed{\text{de } (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)}$

b) Soit, comme précédemment, $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$ un système libre maximal extrait de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$, de sorte que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i$ et $q = \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$.

On complète $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$ en une base $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p, \psi_{p+1}, ..., \psi_n)$ de E^* et on considére la base préduale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ dans E.

Alors $\bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i = \mathrm{Vect}(e_{q+1}, ..., e_n)$ (justifier)

et donc $\boxed{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i\right) = n - q = n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)}$

****

4.4 Matrices magiques :

Sur l'espace vectoriel $E = M_n(\mathbf{K})$ on définit les formes linéaires $L_1, ..., L_n, C_1, ..., C_n, D_1, D_2$ suivantes:

$$\forall M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbf{K}),\ L_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}, \quad C_j(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j},$$

$$D_1(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}, \quad D_2(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{n+1-i,i}$$

Une matrice de $M_n(\mathbf{K})$ est dite **magique** si : $\forall i, j, k,\ L_i(M) = C_j(M) = D_k(M)$
G désigne l'ensemble des matrices magiques.
G_0 désigne l'ensemble des matrices telles que $\forall i, j, k,\ L_i(M) = C_j(M) = D_k(M) = 0$
On admet que si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ sont des formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n, alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i\right) = n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$$

1- a) Montrer que G est un espace vectoriel sur K et que G_0 est un sous espace vectoriel de G.

b) Soit J la matrice dont tous les coefficients valent 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que G_0 et Vect(J) sont deux sous espaces supplémentaires de G.

2- a) Montrer que $(L_1, L_2, ..., L_n)$ est un système libre de l'espace dual E^*.
b) Le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_n)$ est-il un système libre ?
(une remarque très simple permet de répondre à la question)
Quel est le rang du système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_n)$?
c) Déterminer le rang du système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_n, D_1, D_2)$?
En déduire la dimension de G.
Donner une base de G lorque $n = 3$

SOLUTION :

1- a) pas de difficulté.
b) procéder par analyse-synthèse pour décomposer une matrice de G en somme d'une matrice de G_0 et d'une matrice λJ

2- a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n = 0$
En appliquant cette égalité, pour tout indice i quelconque, à la matrice élémentaire $E_{i,1}$ dont seul le terme d'indice $(i, 1)$ est non nul et vaut 1, on obtient :

$\lambda_1 \underbrace{L_1(E_{i,1})}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{L_2(E_{i,1})}_{=0} + ... + \lambda_i \underbrace{L_i(E_{i,1})}_{=1} + ... + \lambda_n \underbrace{L_n(E_{i,1})}_{=0} = 0$

Donc pour tout $i, \lambda_i = 0$ et le système $(L_1, L_2, ..., L_n)$ est un système libre.

b) Pour toute matrice M, la somme de toutes les colonnes est égale à la somme de toutes les lignes, donc Le système $L_1 + L_2 + ... + L_n = C_1 + C_2 + ... + C_n$ et le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_n)$ est lié.

Montrons que le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}) \in \mathbf{K}^{2n-1}$ tel que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + ... + \mu_{n-1} C_{n-1} = 0$

En appliquant cette égalité pour un indice i quelconque à la matrice élémentaire $E_{i,n}$, on obtient :

$\lambda_1 \underbrace{L_1(E_{i,n})}_{=0} + ... + \lambda_i \underbrace{L_i(E_{i,n})}_{=1} + ... + \lambda_n \underbrace{L_n(E_{i,n})}_{=0} + \mu_1 \underbrace{C_1(E_{i,n})}_{=0} + \mu_2 \underbrace{C_2(E_{i,n})}_{=0} + ... + \mu_{n-1} \underbrace{C_{n-1}(E_{i,n})}_{=0} = 0$

et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1...n$

Reste l'égalité $\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + ... + \mu_{n-1} C_{n-1} = 0$ qui donne $\mu_j = 0$ en l'appliquant à la matrice élémentaire $E_{1,j}$ pour $j = 1...n-1$

Le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ est donc libre. Et puisque le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n)$ est lié, on en conclut que $\boxed{\operatorname{rg}(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n) = 2n-1}$

c) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}, \nu_1, \nu_2) \in \mathbf{K}^{2n-1}$ tel que

$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + ... + \mu_{n-1} C_{n-1} + \nu_1 D_1 + \nu_2 D_2 = 0$

• si $n > 3$, en appliquant l'égalité ci-dessus à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\nu_1 = 0$ puisque cette matrice annule toutes les formes linéaires considérées, sauf D_1.

- en appliquant l'égalité ci-dessus à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\nu_2 = 0$ puisque cette matrice annule toutes les formes linéaires considérées, sauf D_2.

on est alors ramenée à l'égalité $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + ... + \mu_{n-1} C_{n-1} = 0$ déjà traitée à la question b), et tous les scalaires sont nuls.

Le système $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, D_1, D_2)$ est donc libre et $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n, D_1, D_2)$ a pour rang $2n+1$

• si $n = 3$ l'étude précédente n'est pas valable.

En considérant les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient respectivement $\nu_1 = 0$ et $\nu_2 = 0$ et la démonstration se termine comme précédemment. La formule précédente est encore vraie.

En appliquant la formule rappelée, $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i\right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$, aux formes linéaires $(L_1, L_2, ..., L_n, C_1, C_2, ..., C_n, D_1, D_2)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \dim(G_0) &= \dim(M_n(K)) - \operatorname{rg}(L_1, ..., L_n, C_1, ..., C_n, D_1, D_2) \\ &= n^2 - (2n+1) = n^2 - 2n - 1 \end{aligned}$$

Et puisque $G = G_0 \oplus \operatorname{Vect}(J)$, $\dim G = n^2 - 2n$

• Dans le cas où $n = 3$, $\dim(G_0) = 2$,

une base de G_0 est formée des matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

une base de G est formée des matrices M_1, M_2 et J.

Toute matrice magique d'ordre 3 est combinaison linéaire des matrices M_1, M_2 et J.

* *

4.5 * Polynômes d'interpolation de Lagrange et de Hermite :

E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbf{K}$, et $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ sont p formes linéaires sur E.

1- On considère l'application Φ de E dans $\mathbf{K}^p$: $x \xrightarrow{\Phi} (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_p(x))$

A quelle condition Φ est elle injective ? surjective ?

2- **Application : polynômes d'interpolation de Lagrange et de Hermite.**

a) a étant un élément de $\mathbf{K}$ donné, l'application qui à $P \in \mathbf{K}_n[X]$ fait correspondre $P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{K}_n[X]$, qu'on notera φ_a.

Des éléments $a_1, a_2, ..., a_p$ distincts ou non de $\mathbf{K}$ étant donnés, à quelle condition le système $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, ..., \varphi_{a_p})$ est il libre ?

b) On se donne $x_1, x_2, ..., x_n$ deux à deux distincts dans $\mathbf{K}$ et $y_1, y_2, ..., y_n$ dans $\mathbf{K}$ distincts ou non.

En considérant l'application Φ : $\mathbf{K}_{n-1}[X] \xrightarrow{\Phi} \mathbf{K}^n$

$$P \longrightarrow (\varphi_{a_1}(P), \varphi_{a_2}(P), ..., \varphi_{a_n}(P)) = (P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n))$$

montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ P(x_k) = y_k$

Donner une expression de ce polynôme P.

(on pourra introduire les polynômes $L_k(X) = \dfrac{(X - x_1)...(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})...(X - x_n)}{(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} = \prod\limits_{i=1..n}^{i \neq k} \dfrac{X - x_i}{x_k - x_i}$)

c) Par une méthode analogue, n scalaires deux à deux distincts $x_1, x_2, ..., x_n$ et $2n$ scalaires quelconques $y_1, y_2, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_n$ étant donnés, montrer qu'il existe un et un seul polynôme $H \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = z_k$

Vérifier que $H(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k^2(X)}{Q_k^2(x_k)} \left(\left(1 - 2(X - x_k) \frac{Q_k'(x_k)}{Q_k(x_k)}\right) y_k + (X - x_k) z_k \right)$

où $Q_k(X) = (X - x_1)...(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})...(X - x_n) = \displaystyle\prod_{i=1..n}^{i \neq k} (X - x_i)$

SOLUTION :

1- On utilisera le résultat de l'exercice précédent, qui affirme que $\dim \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \right) = n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$

$\ker \Phi = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$, donc $\mathrm{rg}(\Phi) = n - \dim(\ker \Phi) = n - \dim \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \right) = n - \Big(n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)\Big)$

$\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$

Dès lors,

- Φ est injective $\iff \ker \Phi = \{0\} \iff n - \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p) = 0$
  $\iff \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p) = n = \dim E^*$
  $\iff (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est un système générateur de E^*.
- Φ est surjective $\iff \mathrm{rg}\Phi = p \iff \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p) = p$
  $\iff (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est un système libre de E^*.

Φ est injective $\iff (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est un système générateur de E^*.
Φ est surjective $\iff (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est un système libre de E^*.
$\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$

2- a) Si deux des scalaires a_i et a_j sont égaux, alors $\varphi_{a_i} = \varphi_{a_j}$ et le système $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, ..., \varphi_{a_p})$ est lié.

- si $p > n + 1 = \dim \mathbf{K}_n[X]$, le système $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, ..., \varphi_{a_p})$ ayant plus d'éléments que la dimension de l'espace dual $(\mathbf{K}_n[X])^*$ qui le contient est encore lié.

- enfin, supposons que $p \leq n + 1$ et que $a_1, a_2, ..., a_p$ sont deux à deux distincts.

soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \varphi_{a_i} = 0$

alors $\forall P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \varphi_{a_i}(P) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, P(a_i) = 0$

prenons pour $P(X)$ le polynôme $Q_j(X) = \displaystyle\prod_{h=1...n}^{h \neq j} (X - a_h)$ qui appartient bien à $\mathbf{K}_{n-1}[X]$.

($j \in \{1, 2, ..., n\}$ quelconque)

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \varphi_{a_i}(Q_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, Q_j(a_i) = \lambda_j\, Q_j(a_j) = \lambda_j \underbrace{\prod_{h=1...n}^{h \neq j} (a_j - a_h)}_{\neq 0} = 0 \text{ donc } \lambda_j = 0$$

On a ainsi montré que le le système $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, ..., \varphi_{a_p})$ est libre.

En conclusion, $\boxed{(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, ..., \varphi_{a_p}) \text{ est libre } \iff p \leq n + 1 \text{ et les } a_i \text{ sont deux à deux distincts.}}$

b) Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ deux à deux distincts dans $\mathbf{K}$ et $y_1, y_2, ..., y_n$ quelconques dans $\mathbf{K}$.

Considérons l'application Φ : $\mathbf{K}_{n-1}[X] \xrightarrow{\Phi} \mathbf{K}^n$

$$P \longrightarrow (\varphi_{x_1}(P), \varphi_{x_2}(P), ..., \varphi_{x_n}(P)) = (P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n))$$

Trouver un polynôme P tel que $\forall k \in \{1,2,...,n\},\ P(x_k) = y_k$ équivaut à trouver un polynôme P tel que $\Phi(P) = (y_1, y_2, ..., y_n)$

Pour qu'il y ait existence et unicité d'un tel polynôme il suffit que Φ soit surjective (existence) et injective (unicité).

Or, d'après 2-a), puisque $x_1, x_2, ..., x_n$ sont deux à deux distincts et en nombre $\leq n = \dim(\mathbf{K}_{n-1}[X])$, le système $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, ..., \varphi_{x_n})$ est libre. D'après 1) Φ est alors surjective.

Mais $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, .., \varphi_{x_n})$ est un système libre de $(\mathbf{K}_{n-1}[X])^*$, c'en est donc une base puisque $\dim(\mathbf{K}_{n-1}[X]) = n$

D'après 1), $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, .., \varphi_{x_n})$ étant générateur, Φ est surjective.

Φ est bijective. Il existe donc un et un seulement $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $\Phi(P) = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

$\boxed{P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\prod_{h=1..n}^{h \neq i} \frac{X - x_h}{x_i - x_h} \right)}$ est ce polynôme.

(**polynôme d'interpolation de Lagrange**)

c) Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n scalaires deux à deux distincts et $y_1, y_2, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_n$ $2n$ scalaires quelconques.

φ_a est la forme linéaire qui à $P \in \mathbf{K}_{2n-1}[X]$ fait correspondre $P(a)$.

Notons φ'_a est la forme linéaire qui à $P \in \mathbf{K}_{2n-1}[X]$ fait correspondre $P'(a)$.

• Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_n \in K$ tels que

$\lambda_1\, \varphi_{x_1} + \lambda_2\, \varphi_{x_2} + ... + \lambda_n\, \varphi_{x_n} + \lambda'_1\, \varphi'_{x_1} + \lambda'_2\, \varphi'_{x_2} + ... + \lambda'_n\, \varphi'_{x_n} = 0$

En prenant l'image du polynôme $R_j(X) = \prod_{h=1...n}^{h \neq j} (X - x_h)^2 (X - x_j)$, qui vérifie :

$\forall h,\ R_j(x_h) = 0$ et $\forall h \neq j,\ R'_j(x_h) = 0$, on obtient $\lambda'_j = 0$, ceci pour tout j.

Il reste alors $\lambda_1\, \varphi_{x_1} + \lambda_2\, \varphi_{x_2} + ... + \lambda_n\, \varphi_{x_n} = 0$ et on montre que $\forall j,\ \lambda_j = 0$ comme précédemment.

Le système $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, ..., \varphi_{x_n}, \varphi'_{x_1}, \varphi'_{x_2}, ..., \varphi'_{x_n})$ est donc libre dans $(\mathbf{K}_{2n-1}[X])^*$

• Considérons l'application $\Psi :\ \mathbf{K}_{2n-1}[X] \xrightarrow{\Psi} \mathbf{K}^{2n}$, qui au polynôme P associe :

$$\begin{aligned}\Psi(P) &= (\varphi_{x_1}(P), \varphi_{x_2}(P), ..., \varphi_{x_n}(P), \varphi'_{x_1}(P), \varphi'_{x_2}(P), ..., \varphi'_{x_n}(P)) \\ &= (P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n), P'(x_1), P'(x_2), ..., P'(x_n))\end{aligned}$$

D'après la question 1), $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, ..., \varphi_{x_n}, \varphi'_{x_1}, \varphi'_{x_2}, ..., \varphi'_{x_n})$ étant un système libre, Ψ est surjective. Mais $(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, ..., \varphi_{x_n}, \varphi'_{x_1}, \varphi'$ système libre de $2n$ éléments dans un espace de diemension $2n$, en est une base et est donc un système générateur de l'espace dual $(\mathbf{K}_{2n-1}[X])^*$. Et d'après la question 1), Ψ est injective.

Le $2n$ - uplet $(y_1, y_2, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbf{K}^{2n}$ étant donné, il admet un unique antécédent par Ψ :

Il existe $H \in \mathbf{K}_{2n-1}[X]$, unique tel que :

$\forall i \in \{1,2,...,n\},\ H(x_i) = y_i$ et $H'(x_i) = z_i$

• Vérifions que le polynôme $S(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k^2(X)}{Q_k^2(x_k)} \left(\left(1 - 2(X - x_k) \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)} \right) y_k + (X - x_k) z_k \right)$ satisfait ces relations :

$\triangleright\ S(x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overbrace{Q_k^2(x_i)}^{=0\ si\ k \neq i}}{Q_k^2(x_k)} \left(\left(1 - 2(x_i - x_k) \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)} \right) y_k + (x_i - x_k) z_k \right)$

$S(x_i) = \left(1 - 2(x_i - x_i) \frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} \right) y_i + (x_i - x_i) z_i = y_i$

$\triangleright\ S'(X) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(X) Q'_k(X)}{Q_k^2(x_k)} \left(\left(1 - 2(X - x_k) \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)} \right) y_k + (X - x_k) z_k \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k^2(X)}{Q_k^2(x_k)} \left(-2 \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)} y_k + z_k \right)$

$S'(x_i) = 2 \frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} y_i + \frac{Q_i^2(x_i)}{Q_i^2(x_i)} \left(-2 \frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} y_i + z_i \right) = z_i$

L'unicité ayant été établie précédemment,

le polynôme $H(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k^2(X)}{Q_k^2(x_k)} \left(\left(1 - 2(X - x_k) \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)} \right) y_k + (X - x_k) z_k \right)$ est l'unique polynôme de $\mathbf{K}_{2n-1}[X]$ qui vérifie les relations : $\forall i \in \{1,2,...,n\},\ H(x_i) = y_i$ et $H'(x_i) = z_i$

On l'appelle **polynôme d'interpolation de Hermite**, relativement aux scalaires $x_i, y_i, z_i,\ i = 1...n$.

FIN

$* *$

4.6 Ex. 33

Solution :

$* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *$

$$\boxed{\forall r \in]-1,1[, \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta = 2\pi f(0,0)}$$

$$A \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad B$$

$$A \overset{x\to b}{\sim} B$$

$x \xrightarrow[n\to+\infty]{b} y$

5 Chantier :

$\mathscr{S}$

6 Déterminants

6.1 Matrice inversible

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{K})$.

A qeulle condition la matrice $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$ est elle inversible .

Solution :

En ajoutant à une colonne une combinaison linéaire d'autres colonnes, on ne change pas le rang d'une matrice.

Ajoutons à la $n+1$ ième colonne de M la première, à la $(n+2)^e$ la deuxième, ..., à la $(n+k)^e$ colonne la k^e :

$M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & 2A \\ A-B & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix}$

Soustrayons la $(n+k)^e$ colonne à la k^e :

$\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix}$

Ajoutons la k^e ligne à la $(n+k)^e$:

$\begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A).\det(B)$

Donc M est inversible si et seulement si A et B le sont.

$* *$

6.2 Calcul de déterminant :

Calculer le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & & & \\ & \ddots & & (b) \\ & & & \\ (a) & & \ddots & \\ & & & a+b \end{vmatrix}$

Solution : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b^n$

par récurrence, $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ si $a \neq b$

* *

7 Réserve

7.1 Projecteurs ENSI

Soient f et g deux endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie.

Si $f_o g$ est un projecteur, montrer que $\mathrm{rg}(g_o f) \geq \mathrm{rg}(f_o g)$

Solution :

$f_o g$ est un projecteur, donc $f_o g_o f_o g = f_o g$

Or on sait que $\mathrm{rg}(u_o v) \leq \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u_o v) \leq \mathrm{rg}(v)$, donc :

$\mathrm{rg}(f_o g) = \mathrm{rg}(f_o (g_o f)_o g) \leq \mathrm{rg}(f_o (g_o f)) \leq \mathrm{rg}(g_o f)$

* *

7.2 Rang d'une composée (2)

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$. Soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$.

a) Montrer qu'on a toujours : $\mathrm{rg}(g_o f) \leq \mathrm{rg}(g)$

et que : $\mathrm{rg}(g_o f) = \mathrm{rg}(g) \iff \ker g + \mathrm{Im}(f) = F$

b) Montrer qu'on a toujours : $\mathrm{rg}(g_o f) \leq \mathrm{rg} f$

et que : $\mathrm{rg}(g_o f) = \mathrm{rg} f \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$

Solution :

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g_o f}$$

a) On a toujours $\mathrm{Im}(g_o f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et donc $\mathrm{rg}(g_o f) \leq \mathrm{rg}(g)$

• Supposons que $\mathrm{rg}(g_o f) = \mathrm{rg}(g)$, alors l'inclusion et l'égalité des dimensions entraînent que $\mathrm{Im}(g_o f) = \mathrm{Im}(g)$

Soit $x \in F$. Alors $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g_o f)$ donc $\exists t \in E,\ \ g(x) = g_o f(t)$

On peut alors écrire $x = f(t) + (x - f(t))$ avec $f(t) \in \mathrm{Im}(f)$ et $x - f(t) \in \ker g$

(car $g(x - f(t)) = g(x) - g_o f(t) = 0$)

On a ainsi montré que $F \subset \ker g + \mathrm{Im}(f)$ et il y a égalité car $\ker g$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces de F.

• Réciproquement, supposons que $\ker g + \mathrm{Im}(f) = F$

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. $\exists x \in F,\ y = g(x)$.

Mais puisque $\ker g + \mathrm{Im}(f) = F,\ \exists a \in \ker g,\ \exists b \in \mathrm{Im}(f),\ x = a + b$ et $\exists c \in E,\ b = f(c)$

alors $y = g(x) = g(a+b) = \underbrace{g(a)}_{0} + g(b) = g(f(c)) \in \mathrm{Im}(g_o f)$

Donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g_o f)$ et il y a égalité.

b) Soit $\widetilde{g}$ la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$: $\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \xrightarrow{\widetilde{g}} & G \\ x & \longrightarrow & g(x) \end{array}$

$\mathrm{Im}(g_o f) = g(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(\widetilde{g})$

$\ker(\widetilde{g}) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker g$

En appliquant le théorème du rang à $\widetilde{g}$, on obtient : $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathrm{Im}\widetilde{g}) + \dim(\ker \widetilde{g})$

soit : $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(g_o f) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker g)}_{\geq 0}$

On en déduit que $\mathrm{rg}(g_o f) \leq \mathrm{rg}(f)$ et que : $\mathrm{rg}(g_o f) = \mathrm{rg} f \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker g = \{0\}$