Calcul de primitives et d'intégrales :

$f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
$f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $f \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Calcul de primitives et d'intégrales

---

1 Primitives de fractions rationnelles :

On calculera une primitive d'une fraction rationnelle $x \mapsto R(x)$, $R(X) \in \mathbb{C}(X)$ en la décomposant en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1.1 Eléments simples de première espèce :

Pour les éléments simples de première espèce, on intégrera comme suit :

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \text{ , } a \text{ et } b \text{ nombres réels.}$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{(ax+b)}$$

et plus généralement $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^k}dx = -\frac{1}{(k-1)a}\frac{1}{(ax+b)^{k-1}} \quad (k \geq 2)$

ATTENTION , ne pas utiliser la formule $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ avec des nombres complxes, ne pas écrire de logarithmes de nombres complexes !

Par exemple les égalités $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-j} = [\ln(x-j)]_0^1 = \ln(1-j) - \ln(-j)$

ou $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-j} = [\ln|x-j|]_0^1 = \left[\ln\sqrt{(x-j)(x-\bar{j})}\right]_0^1 = \left[\ln\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$

sont entièrement fausses !

Comment alors calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-j}$?

Par contre la formule $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^k}dx = -\frac{1}{(k-1)a}\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$ est correcte même si a et b sont complexes à condition que $k \geq 2$.

1.2 Eléments simples de deuxième espèce :

Ce sont les primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{mx+p}{(ax^2+bx+c)^k}dx$ où le polynôme ax^2+bx+c n'a pas de racines réellex $(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$

On écrit ce polynôme sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}) = a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + c\right] = a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2 + \left(\sqrt{\tfrac{-\Delta}{2a}}\right)^2\right]$$

Le changement de variable affine $x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{2a}}\,u$ ramène alors l'intégrale à calculer à:

$$\int \frac{m'u+p'}{(u^2+1)^k}du$$

On sépare en deux intégrales et la première partie s'intègre comme suit :

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^k}du = \frac{1}{2(k-1)(u^2+1)^{k-1}}$$

Lorsque $k=1$, la seconde partie s'intègre immédiatement : $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}du = \mathrm{Arctan}(u)$

Lorsque $k \geq 2$, la seconde partie s'intègre par récurrence :

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \int \frac{1+u^2-u^2}{(u^2+1)^2}du = \mathrm{Arctan}u - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{(u^2+1)^2}udu$$

$$= \mathrm{Arctan}u - \frac{1}{2}\left(\frac{-u}{u^2+1} + \int \frac{1}{u^2+1}du\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,u + \frac{1}{2(u^2+1)}$$

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,u + \frac{1}{2(u^2+1)}$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx$

$$\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx = \int \frac{x-3}{4(x^2+3x+\frac{5}{2})^2}dx = \int \frac{x-3}{4\left((x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right)^2}dx$$

$\displaystyle\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x-3}{\left((x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$

Par le changement de variable $x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}u$, $dx=\frac{du}{2}$

$$\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{\frac{1}{2}u-\frac{3}{2}-3}{\left((\frac{u}{2})^2+\frac{1}{4}\right)^2}du = \int \frac{u-9}{(u^2+1)^2}du = \int \frac{u}{(u^2+1)^2}du - 9\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du$$

$$= \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\int \frac{1+u^2-u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\left(\text{Arctan}\, u - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{(u^2+1)^2}udu\right)$$

$$= \frac{-1}{2(u^2+1)} - 9\text{Arctan}\, u + \frac{9}{2}\left(-\frac{u}{u^2+1} + \int \frac{1}{u^2+1}du\right)$$

$$= \frac{-1}{2(u^2+1)} - \frac{9u}{2(u^2+1)} - \frac{9}{2}\text{Arctan}\, u$$

Revenons à la variable x par le changement inverse : $u=2x+3$:

$$\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx = \frac{-1}{4(2x^2+6x+5)} - \frac{18x+27}{4(2x^2+6x+5)} - \frac{9}{2}\text{Arctan}\,(2x+3)$$

$$\boxed{\int \frac{x-3}{(2x^2+6x+5)^2}dx = -\frac{9x+14}{2(2x^2+6x+5)} - \frac{9}{2}\text{Arctan}\,(2x+3)}$$

2 Primitives se ramenant à des fractions rationnelles :

Règle générale : Puisque l'on sait intégrer toutes les fractions rationnelles, pour calculer une primitive donnée, on cherchera par intégration par parties ou par changement de variable, à se ramener à la primitive d'une fraction rationnelle.

2.1 Fraction rationnelle en exponentielle :

Pour calculer $\displaystyle\int R(e^{\alpha x})dx$ où $R(X)\in\mathbb{R}(X)$, le changement de variable $u=e^{\alpha x}$ permet de se ramener à une primitive de fraction rationnelle : $du=\alpha e^{\alpha x}$

$$\int R(e^{\alpha x})dx = \int \frac{R(e^{\alpha x})}{\alpha e^{\alpha x}}\alpha e^{\alpha x}dx = \int \frac{R(e^u)}{\alpha\, u}du$$

Exemple 1 : Calculer $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx$

On effectue le changement de variable $u=e^x$, $du=e^x dx$:

$$\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx = \int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4}e^x dx = \int \frac{u+4}{u^2+4}du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+4}du + 4\int \frac{1}{u^2+4}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+4) + 4\text{Arctan}\, u$$

$$\boxed{\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+4}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4) + 4\text{Arctan}\, e^x}$$

Exemple 2 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-t}+4}}dt$

• La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-t}+4}}$ est continue sur $[0,+\infty[$

De plus $f(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{2}$, f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$

• On effectue le changement de variable $u=e^{-t}$, $du=e^{-t}dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-t}+4}}dt = \int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{u+4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u+4}} = [2\sqrt{u+4}]_0^1 = 4-2\sqrt{5}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-t}+4}}dt = 4-2\sqrt{5}}$$

2.2 Fraction rationnelle en sinus-cosinus :

Soit à calculer $\displaystyle\int R(\sin(x),\cos(x))dx$ où $R(X,Y)\in\mathbb{R}(X,Y)$.

1- Le changement de variable $t=\tan(\frac{x}{2})$ permet dans tous les cas de se ramener à une fraction rationnelle en t :

• $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ • $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ • $x = 2\text{Arctan}(t)$ donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int R(\sin(x),\cos(x))dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

On est bien ramené au calcul d'une primitive de la fonction rationnelle $S(t) = R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$

2- **Règles de Bioche :**

Cependant, dans certains cas, on peut utiliser un changement de variable qui donne des calculs moins compliqués (expressions de degrés moins élevés)

Pour cela, des tests connus sous le nome de "règles de Bioche" permettent de trouver le bon changement de variable :

• si l'expression $f(x)dx$ est inchangée par le changement de x en $-x$, on esssaie le changement de variable $u = \cos x$

• si l'expression $f(x)dx$ est inchangée par le changement de x en $\pi - x$, on esssaie le changement de variable $u = \sin x$

• si l'expression $f(x)dx$ est inchangée par le changement de x en $\pi + x$, on esssaie le changement de variable $u = \tan x$

• dans les cas désespérés (mais qui sont aussi les plus beaux) où aucun des trois changements précédents ne s'applique, on revient à la première méthode par le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$.

ATTENTION, dans tous les cas on veillera bien à préciser le **domaine de définition de la primitive recherchée** et à préciser le **domaine d'appartenance des nouvelles variables**.

Exemple 1 : Calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$

La fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$, mais s'annule aux points de la forme $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ses primitives sont donc définies sur tout intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$ où la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ est continue.

L'essai des règles de Bioche sur l'élément différentiel $\frac{dt}{\sin t}$ nous montre qu'il est invariant par le changement de t en $-t$ et lui seul.

On essaiera donc le changement de variable $u = \cos(t)$, $du = -\sin t\, dt$

Lorsque t décrit l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $u = \cos(t)$ décrit l'intervalle $]-1, 1[$.

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{\sin^2 t} = \int \frac{-du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+u)+(1-u)}{(u-1)(u+1)}\, du$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\, du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\tfrac{t}{2}\right|}$$

Exemple 2 : Calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{\tan t}{1+\sin 3t}$

Soit f la fonction $t \mapsto \dfrac{\tan t}{1+\sin 3t}$

$1 + \sin 3t = 0 \iff \sin 3t = -1 \iff 3t = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff t = -\frac{\pi}{6}\ [\frac{2\pi}{3}]$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{(4k-1)\pi}{6}$

la fonction f est donc définie et continue sur les intervalles de la forme $J_k =]\frac{(4k-1)\pi}{6}, \frac{(4k+3)\pi}{6}[$. Ses primitives seront définies sur les intervalles J_k.

• Le changement de t en $\pi - t$ laisse l'élément différentiel $\dfrac{\tan t\ dt}{1+\sin 3t}$ inchangé.

On essaiera le changement de variable $u = \sin(t)$, $du = \cos t\ dt$

• $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos 3t + i\sin 3t = (\cos t + i\sin t)^3 = \cos^3 t + 3i\cos^2 t\sin t - 3\cos t\sin^2 t - i\sin^3 t$

donc $\sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t = 3(1-\sin^2 t)\sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t$

$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$

• $$\int \frac{\tan t}{1+\sin 3t}dt = \int \frac{\tan t}{1+3\sin t - 4\sin^3 t}dt = \int \frac{\sin t}{(1+3\sin t-4\sin^3 t)\cos t}dt = \int \frac{\sin t\cos t}{(1+3\sin t-4\sin^3 t)\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{\sin t}{(1+3\sin t-4\sin^3 t)(1-\sin^2 t)}\cos t dt = \int \frac{u\ du}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}$$

$4u^3 - 3u - 1 = (u-1)(4u^2+4u+1) = (u-1)(2u+1)^2$

$$\int \frac{\tan t}{1+\sin 3t}dt = \int \frac{u\ du}{(u-1)(2u+1)^2(u^2-1)} = \frac{1}{108}\int \left(\frac{6}{(u-1)^2} + \frac{5}{u-1} - \frac{27}{u+1} - \frac{48}{(2u+1)^2} + \frac{64}{2u+1}\right) du$$

$$\int \frac{\tan t}{1+\sin 3t}dt = \frac{1}{108}\int \left(\frac{-6}{u-1} + 5\ln|u-1| - 27\ln|u+1| + \frac{24}{2u+1} + 32\ln|2u+1|\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\tan t}{1+\sin 3t}dt = \frac{1}{108}\left(\frac{6}{1-\sin(t)} + 5\ln|\sin(t)-1| - 27\ln|\sin(t)+1| + \frac{24}{2\sin(t)+1} + 32\ln|2\sin(t)+1|\right)}$$

2.3 Intégrales abéliennes de première espèce :

Soit à calculer $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ où $R(X,Y) \in \mathbb{R}(X,Y)$.

1- Le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ permet dans tous les cas de se ramener à une fraction rationnelle en t :

En effet, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n \implies (cx+d)t^n = ax+b \implies x(ct^n - a) = b - dt^n$

$\implies x = -\dfrac{dt^n - b}{ct^n - a} \implies dx = -\dfrac{ndt^{n-1}(ct^n-a) - (dt^n - b)nct^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$

$\implies dx = \dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(at^n - c)^2}\,dt$

donc $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(at^n-c)^2}\,dt$

on est bien ramené au calcul de primitive d'une fonction rationnelle de la variable t.

Exemple : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{t}}dt$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{t}}dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}\,(1+\sqrt{t})}{(1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})}dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}+\sqrt{t-t^2}}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt + \int_0^1 \frac{\sqrt{t-t^2}}{1-t}dt$$

$$= \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}{1-t}dt$$

dans la dernière intégrale on procède au changement de variable $t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin u$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{t}}dt = 2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2 u}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin u}\,\frac{1}{2}\cos u\,du = 2 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{1-\sin u}\,du$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 u}{1-\sin u}\,du = 2 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin u)du = 2 + \frac{1}{2}\left[u - \cos\,u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{t}}\,dt = 2 + \frac{\pi}{2}}$$

2.4 Intégrales abéliennes de seconde espèce :

Soit à calculer $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ où $R(X,Y) \in \mathbb{R}(X,Y)$.

On cherche le ou les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lequel le polynôme sous ax^2+bx+c est positif ou nul.

On écrit ce polynôme sous forme canonique :

$ax^2+bx+c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c\right] = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ et de a, après avoir sorti suivant le cas $\sqrt{a}$ ou $\sqrt{-a}$ du radical, le changement de variable affine $y = x + \frac{b}{2a}$ nous ramène alors un calcul de l'un des trois types suivants:

a) $\displaystyle\int R_2\left(y, \sqrt{y^2+A^2}\right)dy$

b) $\displaystyle\int R_2\left(y, \sqrt{y^2-A^2}\right)dy$

c) $\displaystyle\int R_2\left(y, \sqrt{A^2-y^2}\right)dy$

Afin de faire disparaitre le radical, on fera un changement de variable utilisant les relations :
$\mathrm{sh}^2 + 1 = \mathrm{ch}^2 u$, $\quad \tan^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\quad \mathrm{ch}^2 u - 1 = \mathrm{sh}^2 u \quad \frac{1}{\cos^2 u} - 1 = \tan^2 u$, $\quad 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$.

dans le cas a) on fera le changement de variable $y = A\,\mathrm{sh}u$ ou $y = A\,\tan u$

dans le cas b) on fera le changement de variable $y = A\,\mathrm{ch}u$ ou $y = \frac{A}{\cos u}$

dans le cas c) on fera le changement de variable $y = A\,\sin u$

dans les trois cas, on est ramené à une fraction rationnelle en sinus-cosinus, ou en ch-sh, c'est à dire en exponentielle.

Exemple 1 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2-4t}dt$

$-t^2 - 4t = -t(t+4) \geq 0 \iff t \in [-4, 0]$

La fonction $t \mapsto \sqrt{-t^2-4t}$ est donc définie et continue sur le segment $[-4,0]$ et l'intégrale $\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2-4t}dt$ est bien définie.

$-t^2 - 4t = -(t^2+4t) = -(t+2)^2 + 4$

$\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2-4t}dt = \int_{-4}^0 \sqrt{4-(t+2)^2}dt$

Le changement de variable $t + 2 = 2\sin t$ donne :

$$\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2-4t}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2 u}\,2\cos u\,du = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = 2\pi$$

$$\boxed{\int_{-4}^{0}\sqrt{-t^2-4t}dt=2\pi}$$

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}$

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t\sqrt{t^2+t-6}}$ est définie et continue sur $]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$

• En 2^+, $\dfrac{1}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\dfrac{1}{t\sqrt{(t-2)(t+3)}}\overset{t\to 2}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\dfrac{1}{(t-2)^{1/2}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^3\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}$ est convergente .

• En $+\infty$, $\dfrac{1}{t\sqrt{t^2+t-6}}\overset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}$ est convergente .

Par additivité, l'intégrale $\displaystyle\int_{]2,+\infty[}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}$ est bien définie.

• $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{\left(t+\frac12\right)^2-\frac14-6}}=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{\left(t+\frac12\right)^2-\frac{25}{4}}}$

Le changement de variable $t+\frac12=\frac52\text{ch}u$ donne :

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\frac25\int_0^{+\infty}\frac{\frac52\text{sh}u\,du}{(\frac{5\text{ch}u-1}{2})\sqrt{\text{ch}^2u-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{5\,\text{ch}u-1}du=\int_0^{+\infty}\frac{4}{5e^u+5e^{-u}-2}du$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{4}{5e^{2u}-2e^u+5}du=\frac45\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{e^{2u}-\frac25e^u+1}du=\frac45\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{\left(e^u-\frac15\right)^2+\frac{24}{25}}du$$
$$=\left[\frac45\frac{5}{\sqrt{24}}\text{Arctan}\left(\frac{e^u-\frac15}{\frac{\sqrt{24}}{5}}\right)\right]_0^{+\infty}=\left[\frac{2}{\sqrt6}\text{Arctan}\left(\frac{5e^u-1}{\sqrt{24}}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$=\frac{2}{\sqrt6}\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\sqrt{\frac23}\right)=\frac{2}{\sqrt6}\text{Arctan}\sqrt{\frac32}=\sqrt{\frac23}\text{Arctan}\sqrt{\frac32}$$

Autre calcul possible : le changement de variable $t+\frac12=\frac{5}{2\cos u}$, $dt=\frac{5\sin u}{2\cos^2u}\,du$ donne :

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{\left(t+\frac12\right)^2-\frac{25}{4}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{5\sin u}{2\cos^2u}}{\left(\frac{5}{2\cos u}-\frac12\right)\sqrt{\frac{25}{4\cos^2u}-\frac{25}{4}}}\,du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\frac{\sin u}{\cos^2u}}{\left(\frac{5}{\cos u}-1\right)\tan u}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{5-\cos u}\,du$$

Nous sommes en présence d'une fonction rationnelle en sinus-cosinus, pour laquelle aucune des règles de Bioche ne s'applique. On fera alors le changement de variable : $v=\tan(\frac{u}{2})$

$u=2\text{Arctan}v$, $du=\frac{2\,dv}{1+v^2}$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_0^1\frac{2}{5-\frac{1-v^2}{1+v^2}}\frac{2\,dv}{1+v^2}=2\int_0^1\frac{dv}{3v^2+2}=\frac23\int_0^1\frac{dv}{v^2+\frac23}=\frac23\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\left[\text{Arctan}\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\,v\right]_0^1$$

$$\boxed{\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\sqrt{\frac23}\text{Arctan}\sqrt{\frac32}}$$

Exemple 3 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}$

La fonction $g:t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$

De plus $\dfrac{1}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}\overset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1/3}}$ donc l'intervalle $\displaystyle\int_{]0,1]}f(t)dt$ est convergente.

La fonction f est une fonction rationnelle en $\sqrt[6]{t}$:

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}=\int_0^1\frac{dt}{(\sqrt[6]{t})^3+(\sqrt[6]{t})^2}$$

C'est donc une intégrale Abelienne du premier type.

On procédera au changement de variable $u=\sqrt[6]{t}$. Alors $t=u^6$ et $dt=6u^5du$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}=\int_0^1\frac{6u^5du}{u^3+u^2}=\int_0^1\frac{6u^3du}{u+1}$$

La division de X^3 par $X+1$ donne : $X^3=(X+1)(X^2-X+1)-1$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt t+\sqrt[3]{t}}=6\int_0^1\frac{(u+1)(u^2-u+1)-1}{u+1}du=6\int_0^1\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$
$$=6\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln(u+1)\right]_0^1=6(\tfrac13-\tfrac12+1-\ln(2))=5-6\ln2$$

Remarque : On peut aussi faire le changement de variable $v = u+1$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^3du}{u+1}$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} = 6\int_0^1 \frac{u^3du}{u+1} = 6\int_1^2 \frac{(v-1)^3dv}{v} = 6\int_1^2 \frac{v^3-3v^2+3v-1}{v}dv$$
$$= 6\int_1^2 \left(v^2-3v+3-\frac{1}{v}\right)dv = 5-6\ln 2$$
$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} = 5-6\ln 2}$$

3 Exercices :

Ex. 1 : existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)}$

Ex. 1 : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+2)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

De plus $\dfrac{1}{t(t+2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)}$ est convergente.

La décomposition de la fraction rationnelle en élements simples est de la forme :
$$\frac{1}{t(t+2)} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t+2}$$
En multipliant par t on obtient $\dfrac{1}{t+2} = a+\dfrac{bt}{t+2}$ et en prenant $t=0$, on obtient $a=\frac{1}{2}$

En multipliant par $t+2$ on obtient $\dfrac{1}{t} = \dfrac{a(t+2)}{t}+b$ et en prenant $t=-2$, on obtient $b=-\frac{1}{2}$

ainsi, $\dfrac{1}{t(t+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+2}\right)$

Autre calcul possible : $\dfrac{1}{t(t+2)} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2+t-t}{t(t+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+2}\right)$

Une erreur à éviter serait de décomposer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)}$ en deux intégrales divergentes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+2}\right) \quad ! \quad ! \quad ! \quad !$$
Intégrons entre les bornes 1 et x puis passons à la limite quand $x \to +\infty$
$$\int_1^{x} \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\left(\int_1^{x}\frac{dt}{t}-\int_1^{x}\frac{dt}{t+2}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(t)-\ln(t+2)\right]_0^x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)-\ln\frac{1}{3}\right]$$
$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\ln 3}$$

Ex. 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$

Ex. 2 : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

De plus $\dfrac{1}{t^2+t+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$ est convergente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_1^{+\infty}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_1^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$
$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}$$

Ex. 3 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}$

Ex. 3 : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t^2+4)}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

De plus $\dfrac{1}{(t+1)(t^2+4)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}$ est convergente.

La décomposition de la fraction rationnelle à intégrer en élements simples est de la forme :
$$\frac{1}{(t+1)(t^2+4)} = \frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2+4}$$

En multipliant par $t+1$ et en prenant $t=-1$, on obtient $a=\frac{1}{5}$
En prenant $t=0$, on obtient : $\frac{1}{4}=a+\frac{c}{4}$ donc $c=1-4a=-\frac{1}{5}$
En multipliant par t et en passant à la limite quand $t\to+\infty$, on obtient $0=a+b$ donc $b=-\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+4)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-1}{t^2+4}\right)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-1}{t^2+4}\right)dt=\frac{1}{5}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2+4}+\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}=\frac{1}{5}\ln 2+\frac{\pi}{20}}$$

Ex. 4 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t^2+4)}$

Ex. 4 : La fonction $t\mapsto\frac{1}{t-j}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable.
La fonction à intégrer est à valeurs complexes. On va la séparer en partie réelle et partie imaginaire:

$$\int_0^1\frac{dt}{t-j}=\int_0^1\frac{(\overline{t-j})dt}{(t-j)(\overline{t-j})}dt=\int_0^1\frac{t-\overline{j}}{(t-j)(t-\overline{j})}dt=\int_0^1\frac{t-(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}{t^2+t+1}dt$$

On peut maintenant séparer l'intégrale en partie réelle et partie imaginaire :

$$\int_0^1\frac{dt}{t-j}=\int_0^1\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}dt+i\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{1}{t^2+t+1}dt$$

$$\int_0^1\frac{dt}{t-j}=\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$$

$$\int_0^1\frac{dt}{t-j}=\frac{1}{2}\ln 3+i\left[\text{Arctan}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 3+i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+i\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{\int_0^1\frac{dt}{t-j}=\frac{1}{2}\ln 3+i\frac{\pi}{6}}$$

Ex. 5 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}dt$

Ex. 5 : La décomposition en éléments simples de la fraction
$\dfrac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}$ est de la forme $\dfrac{at+b}{t^2+1}+\dfrac{ct+d}{t^2+4t+5}$
Nous procéderons par réduction au même dénominateur :

$$\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}=\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{ct+d}{t^2+4t+5}=\frac{(at+b)(t^2+4t+5)+(ct+d)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}$$

$$=\frac{(a+c)t^3+(b+4a+d)t^2+(4b+5a+c)+5b+d}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}$$

Identifions les coefficients des polynômes au dénominateur :

$$\begin{cases}a+c=0\\4a+b+d=0\\5a+4b+c=4\\5b+d=-4\end{cases}\iff\begin{cases}c=-a\\d=-4-5b\\4a+b-4-5b=0\\5a+4b-a=4\end{cases}\iff\begin{cases}c=-a\\d=-4-5b\\a-b=1\\a+b=1\end{cases}$$

$$\iff\quad a=1\quad b=0\quad c=-1\quad d=-4$$

$$\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}=\frac{t}{t^2+1}+\frac{-t-4}{t^2+4t+5}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{t+4}{t^2+4t+5}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2t}{t^2+1}-\frac{(2t+4)+4}{t^2+4t+5}\right)dt$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}dt=\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)-\ln(t^2+4t+5)\right]_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+2)^2+1}dt$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}dt=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2+4t+5}\right)\right]_0^{+\infty}-2[\text{Arctan}(t+2)]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{4t-4}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}dt=\frac{1}{2}\ln 5-\pi+2\text{Arctan}(2)}$$

Ex. 6 : Calculer une primitive de la fonction $f\ :\ x\mapsto\text{Arcsin}\sqrt{x}$

Ex. 6 : La fonction Arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$. La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $I=[0,+\infty[$ et le plus grand intervalle de I dont l'image est incluse dans $[-1,1]$ est $J=[0,1]$.
La fonction f est donc définie et continue sur $J=[0,1]$.
Une primitive de f est la fonction $F\ :\ x\mapsto\int_a^x\text{Arcsin}\sqrt{t}dt$ où $a\in]0,1[$

Pour tout $x \in]0,1[$ on peut faire le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $dt = 2udu$

$F(x) = \int_a^x \text{Arcsin}\sqrt{t}dt = \displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} 2u \text{ Arcsin}u \, du$

Les fonctions $u \mapsto \text{Arcsin}u$ et $u \mapsto u^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{a}, \sqrt{x}]$, on peut intégrer par parties comme suit :

$$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} 2u \text{ Arcsin}u \, du = \left[u^2 \text{Arcsin}u\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} - \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du$$

La dernière intégrale est une intégrale abélienne du second ordre. Le polynôme $1-u^2$ est déja écrit sous forme canonique.

Un fait le changement de variable $u = \sin(v)$, $du = \cos v \, dv$ de façon à faire disparaitre la racine carrée :

$$\begin{aligned}
F(x) &= x\text{Arcsin}\sqrt{x} - a\text{Arcsin}\sqrt{a} - \int_{\text{Arcsin}\sqrt{a}}^{\text{Arcsin}\sqrt{x}} \frac{\sin^2 v \cos v}{\sqrt{1-\sin^2 v}} dv \\
&= x\text{Arcsin}\sqrt{x} + cte - \int_{\text{Arcsin}\sqrt{a}}^{\text{Arcsin}\sqrt{x}} \sin^2 v dv \\
&= x\text{Arcsin}\sqrt{x} + cte - \int_{\text{Arcsin}\sqrt{a}}^{\text{Arcsin}\sqrt{x}} \frac{1-\cos 2v}{2} dv \\
&= x\text{Arcsin}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left(\text{Arcsin}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sin(2\text{Arcsin}\sqrt{x})\right) + cte \\
&= (x - \tfrac{1}{2})\text{Arcsin}\sqrt{x} + \frac{1}{4} 2\sin(\text{Arcsin}\sqrt{x})\cos(\text{Arcsin}\sqrt{x}) + cte \\
&= (x - \tfrac{1}{2})\text{Arcsin}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2} \\
&= (x - \tfrac{1}{2})\text{Arcsin}\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}
\end{aligned}$$

une primitive de la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}\sqrt{x}$ est la fonction F :

$x \mapsto (x - \frac{1}{2})\text{Arcsin}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$

Cette fonction est continue en tout point de $[0,1]$ et est nulle en 0 ; c'est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0 :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \int_0^x \text{Arcsin}\sqrt{t}dt = (x - \tfrac{1}{2})\text{Arcsin}\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}}$$

Ex. 6 : Calculer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

Ex. 6 : $12x - 4x^2 - 5 = -4\left(x^2 - 3x + \frac{5}{4}\right) = -4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\right) = 4\left(1 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right)$

$= -4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$

La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[$. Ses primitives sont définies sur cet intervalle :

$$\int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx = \int \frac{8x-3}{\sqrt{4\left(1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)}} dx = \int \frac{8x-3}{2\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} dx$$

Faisons le changement de variable $x - \frac{3}{2} = \sin u$, u décrivant $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ quand x décrit $\left]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[$.

$$\int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx = \int \frac{8(\sin u + \frac{3}{2}) - 3}{2\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u \, du$$

Puisque $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos u \geq 0$ et $\sqrt{1-\sin^2 u} = |\cos u| = \cos u$

$$\int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx = \int 4\sin u + \tfrac{9}{2} \, du = -4\cos u + \tfrac{9}{2}u$$

Revenons à la variable x :

$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-(x-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{-x^2+3x-\frac{5}{4}}$ et $u = \text{Arcsin}(x - \frac{3}{2})$

$$\boxed{\forall x \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}\right[, \int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \tfrac{9}{2}\text{Arcsin}(x - \tfrac{3}{2})}$$

Ex. 7 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ $(a < b)$

Ex. 7 : • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ est définie et continue sur l'ouvert $]a, b[$

Quand $\overset{t>a}{\to} a$, $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}} \dfrac{1}{(t-a)^{1/2}}$ donc f est intégrable sur l'intervalle $]a, \frac{a+b}{2}]$

Etude analogue pour montrer l'intégrabilité sur l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b[$. Par additivité, f est intégrable sur $]a, b[$

• $(b-t)(t-a) = -(t^2 - (a+b)t + ab) = -\left((t - \frac{a+b}{2})^2 + ab - (\frac{a+b}{2})^2\right)$

$(b-t)(t-a) = -\left((t - \frac{a+b}{2})^2 + \frac{4ab-a^2-b^2-2ab}{4}\right) = (\frac{b-a}{2})^2 - \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2 - \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2}}$$

Quand t décrit $[a,b]$, $t - \frac{a+b}{2}$ décrit $\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$ de manière bijective.

Faisons le changement de variable :

$t - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}\sin u$ de sorte que, quand t décrit $[a,b]$, u décrit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$dt = \frac{b-a}{2}\cos u\, du$

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{b-a}{2}\cos u\, du}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2 - \left(\frac{b-a}{2}\sin u\right)^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \frac{\cos u\, du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \pi$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \pi}$$

Ex. 8 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3(2t+1)}$

Ex. 8 : $\displaystyle\frac{1}{t^3(2t+1)} = \frac{a}{t^3} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t} + \frac{d}{2t+1} = \frac{(2c+d)t^3 + (2b+c)t^2 + (2a+b)t + a}{t^3(2t+1)}$

Identifions les coefficients des polynômes au dénominateur :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 0 \\ 2b+c = 0 \\ 2c+d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \\ d = -8 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3(2t+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{4}{t} - \frac{8}{2t+1}\right) dt = \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{2}{t} + 4\ln\left(\frac{t}{2t+1}\right)\right]_1^{+\infty}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3(2t+1)} = \frac{1}{2} - 2 - 4\ln 2 + 4\ln 3$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3(2t+1)} = -\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2}$$

Ex. 9 : Calculer une primitive de la fonction $f \ : \ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{9+4x^4}}$

Ex. 9 : La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{9+4t^4}} dt$

En utilisant la fonction auxiliaire $g(t) = t^2$, $F(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt{9+4g^2(t)}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{9+4g^2}} dg$

$$F(x) = \frac{1}{6}\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}g^2}} dg = \frac{1}{6}\,\frac{3}{2}\left[\operatorname{Argsh}\left(\frac{2g}{3}\right)\right]_0^{x^2} = \frac{1}{4}\operatorname{Argsh}\left(\frac{2x^2}{3}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{2x^2}{3} + \sqrt{1+\frac{4x^4}{9}}\right) = \frac{1}{4}\ \ln\left(2x^2 + \sqrt{4x^4+9}\right) - \frac{1}{4}\ln 3$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int^x \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}\, dx = \ln\left(2x^2 + \sqrt{4x^4+9}\right)}$$

Ex. 10 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}}$

Ex. 10 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{(x+3)^2+1}}$

Faisons le changement de variable $x+3 = \operatorname{sh} u$ $\quad dx = \operatorname{ch} u\, du$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \int_{\operatorname{Argsh} 4}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} u\, du}{(\operatorname{sh} u - 3)\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1}} = \int_{\operatorname{Argsh} 4}^{+\infty} \frac{du}{(\operatorname{sh} u - 3)} = \int_{\operatorname{Argsh} 4}^{+\infty} \frac{2du}{(e^u - e^{-u} - 6)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \int_{\operatorname{Argsh} 4}^{+\infty} \frac{2e^u du}{e^{2u} - 6e^u - 1} = \int_{\ln(4+\sqrt{17})}^{+\infty} \frac{2e^u du}{e^{2u} - 6e^u - 1}$$

Faisons le changement de variable $t = e^u$ $\quad dt = e^u\, du$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \int_{4+\sqrt{17}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2 - 6t - 1} = \int_{4+\sqrt{17}}^{+\infty} \frac{2dt}{(t-3-\sqrt{10})(t-3+\sqrt{10})}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int_{4+\sqrt{17}}^{+\infty} \frac{(t-3+\sqrt{10}) - (t-3-\sqrt{10})}{(t-3-\sqrt{10})(t-3+\sqrt{10})} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int_{4+\sqrt{17}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-3-\sqrt{10}} - \frac{1}{t-3+\sqrt{10}}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[\ln\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right]_{4+\sqrt{17}}^{+\infty}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\ln\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{10}}{1+\sqrt{17}-\sqrt{10}}}$$

Ex. 11 : Calculer une primitive de la fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$

Ex. 11 : La fonction f est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Une primitive de f est la fonction $F : x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t+\sqrt{t-1}}dt$

C'est une intégrale abélienne du premier type.

Faisons le changement de variable $u=\sqrt{t-1},\ \ t=1+u^2\ ,\ \ dt=2u\,du$

$$\forall x\geq 1,\ F(x)=\int_1^x\frac{1}{t+\sqrt{t-1}}dt=\int_0^{\sqrt{x-1}}\frac{2u}{1+u^2+u}\,du=\int_0^{\sqrt{x-1}}\frac{2(u+\frac12)-1}{(u+\frac12)^2+\frac34}\,du$$

$$F(x)=\left[\ln\left(u^2+u+1\right)\right]_0^{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{\sqrt3}\left[\mathrm{Arctan}\frac{u+\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}\right]_0^{\sqrt{x-1}}$$

$$F(x)=\ln(x+\sqrt{x-1})+\frac{2}{\sqrt3}\left[\mathrm{Arctan}\frac{2u+1}{\sqrt3}\right]_0^{\sqrt{x-1}}$$

$$F(x)=\ln(x+\sqrt{x-1})+\frac{2}{\sqrt3}\left(\mathrm{Arctan}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{\forall x\geq 1,\ \int_1^x\frac{1}{t+\sqrt{t-1}}dt=\ln(x+\sqrt{x-1})+\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt3}-\frac{\pi\sqrt3}{9}}$$

Ex. 12 : Calculer une primitive de la fonction $f : x\mapsto\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ en précisant son domaine de définition.

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$

Ex. 12 : La fonction f est définie et continue sur $]1,+\infty[$.

Une primitive de f est la fonction $F : x\mapsto\displaystyle\int_a^x\frac{1}{t\sqrt{t-1}}dt$ où $a\in]1,+\infty[$.

C'est une intégrale abélienne du premier type.

Faisons le changement de variable $u=\sqrt{t-1},\ \ t=1+u^2\ ,\ \ dt=2u\,du$

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ F(x)=\int_a^x\frac{1}{t\sqrt{t-1}}dt=\int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{x-1}}\frac{2u\,du}{u(u^2+1)}=2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x-1})-2\mathrm{Arctan}(\sqrt{a-1}).$$

$$\boxed{\forall x\in]1,+\infty[,\ \int_a^x\frac{1}{t\sqrt{t-1}}dt=2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x-1})-2\mathrm{Arctan}(\sqrt{a-1})}\qquad\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}=\pi}$$

Ex. 13 : Calculer $\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}$

Ex. 13 : La fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\frac{1}{\sqrt{|(x+1)(x-3)|}}$ est définie en continue sur $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ et en particulier sur $[0,3[\cup]3,4]$

Quand $x\to 3,\ f(x)\sim\dfrac{1}{2\sqrt{|x-3|}}=\dfrac{1}{2|t-3|^{1/2}}$ donc f est intégrable sur l'intervalle $[0,3[$ et sur $]3,4]$. Par additivité, f est intégrable sur $[0,3[\cup]3,4]$ et :

$$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}+\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}$$

- $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}}$

Faisons le changement de variable $x-1=2\sin u,\ \ dx=2\cos u\,du$

$$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos u\,du}{\sqrt{4-4\sin^2u}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

- $\displaystyle\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}=\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}$

Faisons le changement de variable $x-1=2\mathrm{ch}u,\ \ dx=2\mathrm{sh}u\,du$

$$\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\int_{\mathrm{Argch}(1)}^{\mathrm{Argch}(\frac32)}\frac{2\mathrm{ch}u\,du}{\sqrt{4\mathrm{sh}^2u-4}}=\mathrm{Argch}\left(\frac32\right)-\mathrm{Argch}(1)$$

$$\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\ln\left(\tfrac32+\sqrt{\tfrac94-1}\right)=\ln(3+\sqrt5)-\ln(2)$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}=\frac{2\pi}{3}+\ln(3+\sqrt5)-\ln(2)}$

Ex. 14 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$

Ex. 14 : La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$ est définie et continue sur la segment $[0,1]$. Elle y est donc intégrable. En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{(1-x^2)-(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

On ne peut pas séparer en deux inégrales car $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ sont des intégrales divergentes ($\frac{\sqrt{1\pm x^2}}{x^2} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$)

On va étudier l'intégrale sur un intervalle du type $[\alpha,1]$ puis passer à la limite quand $\alpha \overset{\alpha>0}{\to} 0$:

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx - \int_\alpha^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\right)$$

Nous avons deux intégrales abéleinne de seconde espèce. Pour faire disparaitre les radicaux et se ramener à des fonctions rationnelles, on fait les changements de variables respectifs :

$x=\mathrm{sh}t$ et $x=\sin u$

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathrm{Argsh}\alpha}^{\mathrm{Argsh}1} \frac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{\mathrm{sh}^2 t}\mathrm{ch}t dt - \int_{\mathrm{Arcsin}\alpha}^{\mathrm{Arcsin}1} \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin^2 u}\cos u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathrm{Argsh}\alpha}^{\mathrm{Argsh}1} \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}dt - \int_{\mathrm{Arcsin}\alpha}^{\mathrm{Arcsin}1} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 u}\, du\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathrm{Argsh}\alpha}^{\mathrm{Argsh}1} \frac{\mathrm{ch}^2 t - 1 + 1}{\mathrm{sh}^2 t}dt - \int_{\mathrm{Arcsin}\alpha}^{\mathrm{Arcsin}1} \frac{\cos^2 t - 1 + 1}{\sin^2 u}\, du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathrm{Argsh}\alpha}^{\mathrm{Argsh}1} 1 + \left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 t}\right)dt - \int_{\mathrm{Arcsin}\alpha}^{\mathrm{Arcsin}1} \left(-1+\frac{1}{\sin^2 u}\right)du\right)$$

Rappelons que $\left(\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2}$ et que $\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = -\frac{1}{\sin^2}$

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} =$$
$$\tfrac{1}{2}\left((\mathrm{Argsh}1-\mathrm{Argsh}\alpha)+(\mathrm{Arcsin}1-\mathrm{Arcsin}\alpha)-\coth(\mathrm{Argsh}1)+\coth(\mathrm{Argsh}\alpha)+\mathrm{cotan}(\mathrm{Arcsin}1)-\mathrm{cotan}(\mathrm{Arcsin}\alpha)\right)$$

Remarquons que : $\mathrm{Arcsin}1 = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Argsh}1 = \ln(1+\sqrt{2})$

$$\coth(\mathrm{Argsh}x) = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}x)}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

et que $\displaystyle \mathrm{cotan}(\mathrm{Arcsin}x) = \frac{\cos(\mathrm{Arcsin}x)}{\sin(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \tfrac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \mathrm{Argsh}\alpha + \tfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}\alpha - \sqrt{2} + \tfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} - \tfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$$

En passant à la limite quand $\alpha \to 0$, le seul terme qui pose problème est $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$ qui présente la forme indéterminée $\infty - \infty$:

$$\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{1+\frac{1}{2}\alpha^2+o(\alpha^2)-(1-\frac{1}{2}\alpha^2+o(\alpha^2))}{\alpha} = \frac{\alpha^2+o(\alpha^2))}{\alpha}$$
$$= \alpha + o(\alpha) \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

4 Partie II

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(F), \quad E_\lambda^F = L(E, E_\lambda^f)}$$