Complexes polynômes - 2010

2 Complexes et polynômes **PSI* - 2010-2011**

0.0.1 Petits calculs simples avec les complexes :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - (2+\sqrt{3})\sin x = -1$

a) en recherchant e^{ix}

b) en transformant le premier membre en $A\cos(x-\varphi)$

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = 3 + i\sqrt{3}$.

0.0.2 Calculs de sommes (CCP)

n est un entier naturel et x un nombre réel.

Calculer $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$, $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(kx)$, $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$

0.0.3 Module et argument :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que : $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$

0.0.4 Module et argument :

On considère trois nombres complexes a, b, c, de module 1, tels que $a+b+c = 1$.

Montrer que l'un au moins des trois nombres a, b, c, est égal à 1.

0.0.5 Complexes et similitudes planes :

Une similitude directe s_O , de centre O , transforme le couple de points (A, B) en (A', B') . La similitude directe s_A , de centre A , qui transforme B en B' , transforme O en un point P et la similitude directe s_B , de centre B , qui transforme A en A' , transforme O en un point Q .

Montrer que P et Q sont symétriques par rapport à O .

0.0.6 $\cos(\pi/10)$ et compagnie :

Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos(\pi/10)$.

0.0.7 $\cos(2\pi/5)$ et compagnie - Construction du pentagone régulier :

a) Calculer sous forme trigonométrique les racines du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

b) En posant $y = x + \frac{1}{x}$, calculer les racines de l'équation $P(x) = 0$ sous forme algébrique .

c) En déduire $\cos(2\pi/5)$ et une méthode de construction du pentagone régulier à la règle et au compas .

0.0.8 Décomposition en produit de polynômes irréductibles :

Soit $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1$

a) Calculer $\cos(5t)$ en fonction de $\cos(t)$.

Déterminer les racines de $P(X)$ qui appartiennent à $[-1, 1]$. Bilan de l'inventaire ?

b) Calculer $PGCD(P(X), P'(X))$

c) En déduire la décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

0.0.9 Division euclidienne :

Le reste de la division d'un polynôme $A(X)$ par $X-1$ vaut 1, celui de $A(X)$ par $X+1$ vaut -1, celui de $A(X)$ par $X-2$ vaut 2.

Quel est le reste de la division de $A(X)$ par $(X-1)(X+1)(X-2)$? (oral Mines PC* 2000)

0.0.10 Equations fonctionnelles :

a) Déterminer les polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(X+3)P(X) = X.P(X+1)$

b)* Déterminer les polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

0.0.11 Relations coefficients-racines :

On note a, b et c les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(X) = X^3 - 5X + \sqrt{2}$.

Calculer $S_2 = a^2 + b^2 + c^2$, $S_3 = a^3 + b^3 + c^3$, $S_4 = a^4 + b^4 + c^4$

$$U = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad V = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab}$$

Pour le calcul de V on pourra utiliser MAPLE

0.0.12 Racines d'un polynôme et géométrie :

Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

a) Les images des racines de P forment un parallélogramme dans le plan complexe .

b) $\exists k \in \mathbb{C}$, tel que $P(X + k)$ soit un polynôme bicarré .

c) P' et P''' ont une racine commune.

0.0.13 * Racines d'un polynôme :

1- Soit n un entier naturel non nul, $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ strictement positifs,

et $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Montrer que Q admet une unique racine dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2- On considère $n+1$ réels $b_0, b_1, ..., b_n$ tels que $0 < b_0 < b_1 < ... < b_n$

et les polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $Q(X) = (X-1)P(X)$

Montrer que si z est une racine complexe de P, alors $Q(|z|) \leqslant 0$ et en déduire que $|z| \leqslant 1$

0.0.14 * Racines d'un polynôme :

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - ... - X - 1$

a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}, \qquad P_n(z) = 0 \iff z^{n+1} - 2z^n + 1 = 0$

b) Déterminer le nombre de racines réelles de P_n et montrer que P_n admet une et une seule racine réelle positive, qu'on notera a_n.

c) Montrer que pour toute racine z de P_n, réelle ou complexe, $|z| \leqslant a_n$.

d) Montrer que la suite (a_n) converge et calculer sa limite.

0.0.15 Calculs :

On considère le polynôme $S(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + ... + X^{2n-2}$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $x^{2n} - 1 = 0$

Démontrer que $S(X) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$

b) en considérant $S(1)$, montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

0.0.16 Calculs :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

a) Montrer que l'application : $x \mapsto \frac{(x+1)^n - 1}{x}$ est polynomiale. On notera P le polynôme ainsi défini.

b) Déterminer les racines de P et montrer que leurs images dans le plan complexe sont situées sur un cercle que l'on précisera.

c) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

CORRIGÉ :

0.0.17 Petits calculs simples avec les complexes :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - (2+\sqrt{3})\sin x = -1$

a) en recherchant e^{ix}

b) en transformant le premier membre en $A\cos(x-\varphi)$

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = 3 + i\sqrt{3}$.

***SOLUTION* :**

1- a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x - (2+\sqrt{3})\sin x = -1 \iff \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - (2+\sqrt{3})\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = -1$

$\iff i(e^{ix}+e^{-ix}) - (2+\sqrt{3})(e^{ix}-e^{-ix}) = -2i$

$\iff e^{ix}(i-2-\sqrt{3}) + e^{-ix}(i+2+\sqrt{3}) = -2i$

$\iff (i-2-\sqrt{3})(e^{ix})^2 + 2i\, e^{ix} + (i+2+\sqrt{3}) = 0$

$\iff e^{ix}$ est racine du polynôme $Q(X) = (i-2-\sqrt{3})X^2 + 2i\,X + (i+2+\sqrt{3})$

$\delta = -4 - 4(i-2-\sqrt{3})(i+2+\sqrt{3})$

$\delta = -4 + 4(2+\sqrt{3}-i)(2+\sqrt{3}+i) = -4 + 4[(2+\sqrt{3})^2+1]$

$\delta = -4 + 4[4+3+4\sqrt{3}+1] = 28 + 16\sqrt{3} = 4(7+4\sqrt{3}) = 4(2+\sqrt{3})^2$

d'où $e^{ix} = \dfrac{-2i+2(2+\sqrt{3})}{2(i-2-\sqrt{3})} = -1$ ou $e^{ix} = \dfrac{-2i-2(2+\sqrt{3})}{2(i-2-\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{2+\sqrt{3}-i} = \dfrac{(2+\sqrt{3}+i)^2}{(2+\sqrt{3})^3+1}$

$e^{ix} = -1$ ou $e^{ix} = \dfrac{6+4\sqrt{3}+2i(2+\sqrt{3})}{8+4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

$$\boxed{e^{ix} = -1 \text{ ou } e^{ix} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$$

- $e^{ix} = -1 \iff \begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \iff x = \pi \quad [2\pi]$

- $e^{ix} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} \iff \begin{cases} \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \iff x = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les réels } x \text{ solutions de l'équation : } \cos x - (2+\sqrt{3})\sin x = -1 \text{ sont :} \\ x = \pi \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]\end{array}}$$

1- b) En notant $A = 1$ et $B = 2+\sqrt{3}$, $A^2+B^2 = 8+4\sqrt{3} = 2(1+\sqrt{3})^2$

En utilisant le calcul : $A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right)$, on obtient :

$$\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\left(\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\cos x - \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\sin x\right) = -1$$

Puisque $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\right)^2 + \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$$

$\cos x - (2+\sqrt{3})\sin x = -1 \iff \sqrt{2}(1+\sqrt{3})[\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x] = -1$

$\iff \cos(x+\varphi) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$

$\iff \cos(x+\varphi) = -\cos\varphi = \cos(\varphi+\pi)$

$$\iff \begin{cases} x+\varphi = \varphi+\pi \quad [2\pi] \\ ou \\ x+\varphi = -\varphi-\pi \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi \quad [2\pi] \\ ou \\ x = -2\varphi-\pi \quad [2\pi] \end{cases}$$

On connait $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Calculons les lignes de 2φ :

$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2.\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} \times \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2(4+2\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}$

$\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 = \dfrac{2}{2(4+2\sqrt{3})} - 1 = \dfrac{1}{4+2\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}+2}{2+\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc $2\varphi = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

Les solutions sont : $x = \pi \quad [2\pi]$ ou $x = -2\varphi - \pi = -\dfrac{5\pi}{6} - \pi = -\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

On retrouve les mêmes résultats que dans la première méthode.

$\varphi = \dfrac{5\pi}{12}\ [\pi]$ a pour cosinus $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$ donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}}$

2- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $e^z = 3 + i\sqrt{3}$.

$|3+i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

d'où $3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

Soit $z = a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$e^z = 3+i\sqrt{3} \iff e^a\,e^{ib} = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} e^a = 2\sqrt{3} \\ et \\ b = \frac{\pi}{6}\quad [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) \\ et \\ b = \frac{\pi}{6}\quad [2\pi]\end{array}\right. \iff \boxed{z = \ln(2) + \tfrac{1}{2}\ln(3) + i\tfrac{\pi}{6} + 2ik\pi,\quad k\in\mathbb{Z}}$$

0.0.18 Calculs de sommes (CCP)

n est un entier naturel et x un nombre réel.

Calculer $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$, $\quad B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k\cos(kx)$, $\quad C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$

SOLUTION :

1 - $A_n(x) = \Re\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(kx)+i\sin(kx))\right) = \Re\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right) = \Re\left(1+e^{ix}\right)^n$

$A_n(x) = \Re\left(e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}})\right)^n = \Re\left(e^{i\frac{nx}{2}}\,2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = 2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)$

$$\boxed{A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

2 - $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k\cos(kx) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} a^k(\cos(kx)+i\sin(kx))\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ikx}\right)$

$B_n(x) = \Re\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(ae^{ix}\right)^k\right) = \Re\left(\dfrac{1-\left(ae^{ix}\right)^{n+1}}{1-ae^{ix}}\right) = \Re\left(\dfrac{(1-a^{n+1}e^{i(n+1)x})(1-ae^{-ix})}{(1-ae^{ix})(1-ae^{-ix})}\right)$

$= \Re\left(\dfrac{1-a^{n+1}e^{i(n+1)x} - ae^{-ix} + a^{n+2}e^{inx}}{1-2a\cos(x)+a^2}\right) = \dfrac{1-a^{n+1}\cos(n+1)x - a\cos x + a^{n+2}\cos(nx)}{1-2a\cos(x)+a^2}$

3 - la fonction $x\mapsto C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$ est la dérivée de la fonction $S_n :\ x\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{inx}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})}\right)$

$= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

0.0.19 Module et argument :

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que : $|1+z|\geq 1$ ou $|1+z^2|\geq 1$

SOLUTION :

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. $\exists\theta\in]-\pi,\pi],\ z = e^{i\theta}$

alors $1+z = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ e^{\frac{i\theta}{2}}$

donc $|1+z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. De la même manière, $|1+z^2| = 2\,|\cos(\theta)|$ (puisque $z^2 = e^{2i\theta}$)

Rappelons que $-\pi < \theta \leqslant \pi$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$

• Supposons que $|1+z| < 1$ et $|1+z^2| < 1$

alors : $2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| < 1 \iff \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| < \frac{1}{2} \iff \frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

$\iff \theta\in\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

et : $2\,|\cos(\theta)| < 1 \iff |\cos(\theta)| < \frac{1}{2} \iff \theta\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$

Les deux ensembles $\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ et $\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$ ayant une intersection vide, les deux conditions $|1+z| < 1$ et $|1+z^2| < 1$ ne peuvent pas être satisfaites en même temps.

Donc $|1+z|\geq 1$ ou $|1+z^2|\geq 1$

0.0.20 Module et argument :

On considère trois nombres complexes a, b, c, de module 1, tels que $a+b+c=1$.

Montrer que l'un au moins des trois nombres a, b, c, est égal à 1.

SOLUTION :

Puisque a, b et c ont pour module 1, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\begin{cases} a = e^{i\alpha} \\ b = e^{i\beta} \\ c = e^{i\gamma} \end{cases}$

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab+ac+bc) + \underbrace{(a+b+c)}_{=1} - 1$$
$$= e^{i\alpha}e^{i\beta}e^{i\gamma} - (e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{i\gamma} + e^{i\beta}e^{i\gamma})$$
$$= e^{i\alpha}e^{i\beta}e^{i\gamma}\left(1 - e^{i\gamma} - e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right) = abc(1-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}) = 1 - (\overline{a+b+c}) = 1 - \overline{1} = 1-1 = 0$$

donc $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$ et l'un au moins des complexes a, b ou c est égal à 1.

Remarque : autre calcul possible sans faire intervenir les arguments α, β, γ :

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab+ac+bc) + \underbrace{(a+b+c)}_{=1} - 1 = abc\left(1 - \tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{c}\right)$$
$$= abc(1-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}) = abc(1 - (\overline{a+b+c})) = 0 \qquad \left(\text{ puisque } \frac{1}{a} = \frac{|a|^2}{a} = \frac{a\overline{a}}{a} = \overline{a}\ \right)$$

0.0.21 Complexes et similitudes planes :

Une similitude directe s_O, de centre O, transforme le couple de points (A, B) en (A', B'). La similitude directe s_A, de centre A, qui transforme B en B', transforme O en un point P et la similitude directe s_B, de centre B, qui transforme A en A', transforme O en un point Q.

Montrer que P et Q sont symétriques par rapport à O.

SOLUTION :

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, rappelons que l'image $M'(z')$ d'un point $M(z) \in \mathscr{P}$ par la similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $k \in \mathbb{R}^+$ et d'angle θ est donnée par la relation :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$$

Réciproquement, la transformation du plan définie par l'expression analytique complexe $z' = \alpha z + \beta$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$ est une translation si $\alpha = 1$, et est une similitude de rapport $k = |\alpha|$, d'angle $\theta = \mathrm{Arg}(\alpha)$, et dont le centre est le point fixe si $\alpha \neq 1$.

La similitude directe s_O, de centre O, transforme le couple de points (A, B) en (A', B'), donc

$\exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad z_{A'} = \alpha\, z_A$ et $z_{B'} = \alpha\, z_B$ (1) et (2)

La similitude directe s_A, de centre A, qui transforme B en B', transforme O en un point P donc,

$\exists \beta \in \mathbb{C}^*, \quad z_{B'} - z_A = \beta(z_B - z_A)$ et $z_P - z_A = \beta(0 - z_A)$ (3) et (4)

La similitude directe s_B, de centre B, qui transforme A en A', transforme O en un point Q, donc

$\exists \gamma \in \mathbb{C}^*, \quad z_{A'} - z_B = \gamma(z_A - z_B)$ et $z_Q - z_B = \gamma(0 - z_B)$ (5) et (6)

Pour montrer que P et Q sont symétriques par rapport à O, il suffit de montrer que $z_Q = -z_P$, ou que $z_P + z_Q = 0$.

(4) $\Longrightarrow z_P = (1-\beta)z_A$ $\qquad$ (3) et (2) $\Longrightarrow \beta = \dfrac{z_{B'} - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\alpha\, z_B - z_A}{z_B - z_A}$

d'où : $z_P = (1-\beta)z_A = \left(1 - \dfrac{\alpha\, z_B - z_A}{z_B - z_A}\right) z_A = \dfrac{z_B - \alpha\, z_B}{z_B - z_A} z_A = \dfrac{z_A z_B(1-\alpha)}{z_B - z_A}$

un calcul analogue montre que : $z_Q = \dfrac{z_B z_A(1-\alpha)}{z_A - z_B}$

On obtient alors $z_P + z_Q = 0$, ce qui montre que P et Q sont symétriques par rapport à O.

0.0.22 $\cos(\pi/10)$ et compagnie :

Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos(\pi/10)$.

SOLUTION :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left[(\cos(x))^{5-k}(i\sin(x))^k\right]$$
$$= \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x)$$

en prenant les parties réelles,

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$

$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2$

$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 10\cos^5(x) + 5\cos(x) - 10\cos^3(x) + 5\cos^5(x)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)}$

• En prenant $x = \frac{\pi}{10}$, on obtient :

$\cos\left(5\dfrac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 = 16\cos^5\left(\dfrac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\dfrac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$

donc le réel $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $Q(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

$Q(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5) = X(16(X^2)^2 - 20(X^2) + 5)$

or $16Y^2 - 20Y + 5 = 16(Y - \frac{5+\sqrt{5}}{8})(Y - \frac{5-\sqrt{5}}{8})$ (calcul des racines d'un trinôme, sans difficulté)

donc $Q(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X = 16X(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8})(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8})$

Les cinq racines du polynôme $Q(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$ sont donc : $\begin{cases} x_0 = 0 & \\ x_1 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} & x_2 = -x_1 \\ x_3 = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} & x_4 = -x_3 \end{cases}$

L'une de celles-ci est $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$. Laquelle ?

• Plus généralement,

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ Q(\cos(x)) = 0 \iff \cos(5x) = 0 \iff 5x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x = \dfrac{\pi}{10}\ \left[\dfrac{\pi}{5}\right]$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5}$

En prenant $k = 0, 1, 2, 3, 4$ on obtient pour x les valeurs $\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{3\pi}{10}, \dfrac{5\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{10}, \dfrac{9\pi}{10}$ qui sont 5 réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$. Or la fonction cosinus est injective sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Les réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$ sont donc 5 racines distinctes du polynôme $Q(X)$. Celui-ci étant de degré 5, on a là toutes ses racines.

Donc globalement $\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right), \cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right), 0, \cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right), \cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)\right\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Reste encore à reconnaître qui est qui ...

Or $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < x_4 = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < 0 < x_3 = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < x_1 = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

et, par décroissance de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-1, 1]$,

$\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right) < \cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right) < 0 < \cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) < \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$

des lors, on peut indentifier les termes de ces deux ensembles, du plus petit au plus grand, en particulier :

$$\boxed{x_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$$

0.0.23 cos(2π/5) et compagnie - Construction du pentagone régulier :

a) Calculer sous forme trigonométrique les racines du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

b) En posant $y = x + \frac{1}{x}$, calculer les racines de l'équation $P(x) = 0$ sous forme algébrique .

c) En déduire $\cos(2\pi/5)$ et une méthode de construction du pentagone régulier à la règle et au compas .

SOLUTION :

a) 1 n'est pas racine du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

$\forall z \in \mathbb{C} - \{1\},\ P(z) = 0 \iff 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \iff \dfrac{1 - z^5}{1 - z} = 0$

$\iff z$ est une racine cinquième de l'unité autre que 1

$\iff \exists k \in \{1, 2, 3, 4\},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ ($k = 0$ est exclu puisque $z \neq 1$)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les racines du polynôme } P(X) \text{ sont donc :} \\ z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \quad z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \quad z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = \overline{z_2}, \quad z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = \overline{z_1}\end{array}}$$

b) 0 n'est pas racine du polynôme P, d' où :

$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0 \iff 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \iff \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 0$ (en divisant par z qui n'est pas nul, puisque 0 n'est pas racine)

En posant $y = z + \dfrac{1}{z}$, $y^2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}$

d'où : $P(z) = 0 \iff z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} + z + \dfrac{1}{z} - 1 = 0 \iff y^2 + y - 1 = 0$

Les racines du polynôme $Q(Y) = Y^2 + Y - 1$ sont $y_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Reste encore à résoudre les équations $z + \dfrac{1}{z} = y_1$ et $z + \dfrac{1}{z} = y_2$

On fera un seul calcul en résolvant l'équation (E_ε) : $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{-1 + \varepsilon\sqrt{5}}{2}$ où $\varepsilon = 1$ pour la première des deux équations, et $\varepsilon = -1$ pour la seconde équation. :

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{2} \iff z^2-\left(\frac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)z+1=0$$

$$\delta_\varepsilon=\left(\frac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=\frac{1+5-2\varepsilon\sqrt{5}-16}{4}=\frac{-10-2\varepsilon\sqrt{5}}{4}=\frac{-5-\varepsilon\sqrt{5}}{2}$$

Les deux racines carrées complexes de δ_ε sont $\pm i\dfrac{\sqrt{5+\varepsilon\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

L'équation (E_ε) a pour solutions : $\dfrac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{4}\pm i\dfrac{\sqrt{5+\varepsilon\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Les racines du polynôme $P(X)$ sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\quad u_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\overline{u_1}\ ,\\ u_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},\quad u_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\overline{u_3}\end{array}}$$

c) Reste à identifier les expressions trigonométriques et algébriques des racines de P trouvées respectivement dans les questions a) et b).

Pour cela, il suffit de regarder les signes des parties réelles et imaginaires dans l'une et l'autre des expressions:
u_1 et z_1 sont les seuls dont à la fois la partie réelle et la partie imaginaire sont positives, donc $z_1=u_1$
u_2 et z_4 sont les seuls dont la partie réelle est positive et la partie imaginaire négative, donc $z_4=u_2$
etc...

d'où
$$\boxed{\begin{array}{l} u_1=z_1=e^{\frac{2i\pi}{5}}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\\ u_2=z_4=e^{\frac{8i\pi}{5}}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\\ u_3=z_2=e^{\frac{4i\pi}{5}}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\\ u_4=z_3=e^{\frac{6i\pi}{5}}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\end{array}}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de ces nombres, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} & \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\\ \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} & \sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\end{array}}$$

• **Construction du pentagone régulier à la règle et au compas :**

B apour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, et son projeté orthogonal H sur l'axe des abscisses a pour abscisse $x_H=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Pour construire le pentagone, il suffit de construire le point H, soit la longueur $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. On le remontera alors en B sur le cercle, et on répétera la longueur AB avec le compas, à partir du point B et des suivants, pour construire les autres points du pentagone.

On sait construire à la règle et au compas le milieu d'un segment donné.

Costruisons I, milieu de (A',O), puis J milieu de (O,I) , K milieu de (O,C)

Les coordonnées de J sont $\left(-\frac{1}{4},0\right)$, et celles de K sont $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, et d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OJK, $IJ=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

On construit alors le cercle de centre J et de rayon $IJ=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, qui coupe l'axe des abscisses au point H recherché, car $\overline{OH}=\overline{JH}-\overline{JO}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

0.0.24 Décomposition en produit de polynômes irréductibles :

Soit $P(X)=16X^5-20X^3+5X-1$

a) Calculer $\cos(5t)$ en fonction de $\cos(t)$.

Déterminer les racines de $P(X)$ qui appartiennent à $[-1,1]$. Bilan de l'inventaire ?

b) Calculer $PGCD(P(X),P'(X))$

c) En déduire la décomposition de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

SOLUTION :

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left[(\cos(x))^{5-k}(i\sin(x))^k\right]$

$= \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x)$

en prenant les parties réelles,

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$

$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2$

$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 10\cos^5(x) + 5\cos(x) - 10\cos^3(x) + 5\cos^5(x)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)}$

- Soit $t \in [-1,1]$. $\exists \theta \in [0,\pi], t = \cos(\theta)$ (ce qui revient à poser $\theta =$Arctan(t))

t est racine de $P \iff 16t^5 - 20t^3 + 5t - 1 = 0$

$\iff 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta) = 1$

$\iff \cos(5\theta) = 1$

$\iff 5\theta = 0 \quad [2\pi]$

$\iff \theta = 0 \quad [\frac{2\pi}{5}]$

$\iff \theta \in \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$ (puisque $\theta \in [0,\pi]$)

$\iff t \in \left\{\cos(0) = 1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\}$

Donc, $\boxed{\text{les racines de } P(X) \text{ qui appartiennent à } [-1,1] \text{ sont } 1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\ .}$

On a trouvé seulement 3 racines à P, qui est de degré 5. Donc P doit avoir d'autres racines, réelles ou complexes, en dehors du segment $[-1,1]$, ou avoir des racines multiples.

Pour le calcul du PGCD de P et P' on procédera suivant l'**algorithme d'Euclide** :

On commence par écrire la division euclidienne de P par P' :

$P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1$

$P'(X) = 80X^4 - 60X^2 + 5 = 5(16X^4 - 12X^2 + 1)$

$16X^5 - 20X^3 + 5X - 1 = X\underbrace{(16X^4 - 12X^2 + 1)}_{diviseur}\underbrace{-8X^3 + 4X - 1}_{reste}$

donc $\text{PGCD}(16X^5 - 20X^3 + 5X - 1,\ 16X^4 - 12X^2 + 1) = \text{PGCD}(16X^4 - 12X^2 + 1,\ 8X^3 - 4X + 1)$

$16X^4 - 12X^2 + 1 = 2X(8X^3 - 4X + 1) - 4X^2 - 2X + 1$

donc $\text{PGCD}(16X^4 - 12X^2 + 1,\ 8X^3 - 4X + 1) = \text{PGCD}(8X^3 - 4X + 1,\ 4X^2 + 2X - 1)$

$8X^3 - 4X + 1 = (2X-1)(4X^2 + 2X - 1)$ (reste nul)

donc $\text{PGCD}(8X^3 - 4X + 1,\ 4X^2 + 2X - 1) = 4X^2 + 2X - 1$

et finalement, $\boxed{\text{PGCD}(P, P') = 4X^2 + 2X - 1}$

Le polynôme $4X^2 + 2X - 1$ a pour racines $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\beta = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$

$4X^2 + 2X - 1 = 4(X-\alpha)(X-\beta)$

α et β sont racines de P et de P'. Ce sont donc des racines doubles de $P(X)$. La cinquième racine est 1, déja trouvée.

donc $\boxed{P(X) = 4(X-1)(X-\alpha)^2(X-\beta)^2 = 4(X-1)\left(X - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(X + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$

c'est la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

$\boxed{\text{Dans } \mathbb{Q}[X], \text{ la décomposition est : } P(X) = (X-1)(4X^2 + 2X - 1)^2}$

Remarque : En comparant avec la première question, les racines de $P(X)$ sont :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < 1$$

Puisque $\beta = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4} < \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} < 1$ on en déduit que : $\boxed{\begin{array}{c} \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \end{array}}$

0.0.25 Division euclidienne :

Le reste de la division d'un polynôme $A(X)$ par $X-1$ vaut 1, celui de $A(X)$ par $X+1$ vaut -1, celui de $A(X)$ par $X-2$ vaut 2.

Quel est le reste de la division de $A(X)$ par $(X-1)(X+1)(X-2)$? (oral Mines PC* 2000)

SOLUTION : Il existe des polynômes Q, R, T tels que : $\begin{cases} A(X) = (X-1)Q(X) + 1 \\ A(X) = (X+1)R(X) - 1 \\ A(X) = (X-2)S(X) + 2 \end{cases}$

La division euclidienne de $AtX)$ par $(X-1)(X+1)(X-2)$ s'écrit :

$$A(X) = (X-1)(X+1)(X-2)T(X) + aX^2 + bX + c \quad \text{où } T \in \mathbb{R}[X] \text{ et } (a,b,x) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} A(1) = 1 = a + b + c \\ A(-1) = -1 = a - b + c \\ A(2) = 2 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$ est de Cramer et a pour solution unique $(a, b, c) = (0, 1, 0)$

Le reste de la division de $A(X)$ par $(X-1)(X+1)(X-2)$ est le polynôme X.

0.0.26 Equations fonctionnelles :

a) Déterminer les polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(X+3)P(X) = X.P(X+1)$

b)* Déterminer les polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

SOLUTION **:**

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $(X+3)P(X) = X.P(X+1)$

alors $3P(0) = 0\pounds(1)$ donc 0 est racine de P,

$0.P(-3) = -3P(-2)$ donc -2 est racine de P,

$2.P(-1) = -1.\underbrace{P(0)}_{=0}$ donc -1 est racine de P,

donc $P(X)$ est divisible par X, par $X+1$, par $X+2$, et par leur produit puisque ces polynômes sont deux deux premiers entre eux :

$\exists Q(X) \in \mathbb{C}[X],\ P(X) = X(X+1)(X+2)Q(X)$

$(X+3)P(X) = X.P(X+1) \implies X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X+1)$

$\implies Q(X) = Q(X+1)$

Si Q est de degré supérieur ou égal à 1, Q admet au moins une racines $a \in \mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert - Gauss). la relation $Q(a) = Q(a+1)$ entraîne alors que $a+1$ est aussi racine de Q, puis $a+2,\ a+3$, ... etc... sont racines que Q. Q admet alors une infinité de racines, ce qui est absurde.

Donc Q est de degré inférieur strictement à 1, c'est à dire est un polynôme constant.

Donc $\boxed{P(X) \text{ est de la forme } \lambda X(X+1)(X+2) \text{ où } \lambda \text{ est une constante complexe.}}$

On vérifie sans difficulté que tous les polynômes de ce type sont bien solutions.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

- Si P est un polynôme constant de valeur $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda = \lambda^2$ dont $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$
- Si P est un polynôme de degré ≥ 1, il admet des racines dans $\mathbb{C}$. Soit a l'une de ces racines.

alors $P(a) = 0 \implies P(a^2) = P(a)P(a-1) = 0$ donc a^2 est aussi racine de P. Il en est de même de $(a^2)^2 = a^4$, puis de a^8, et, par récurrence immédiate de a^{2^n} pour tout entier naturel n.

Or un polynôme n'admet qu'un nombre fini de racines. Donc les termes de la suite $(a^{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne prennent q'un nombre fini de valeurs. Donc $\exists (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ m \neq n$ et $a^{2^m} = a^{2^n}$

Si 0 est racine de P, alors $P(1^2) = P(1)\underbrace{P(1-1)}_{=0} = 0$ donc $P(1) = 0$, et 1 est racine de P. Alors $P(2^2) = P(2)\underbrace{P(2-1)}_{=0} = 0$ et 4 est racine de P. On sait qu'alors $4^2 = 16,\ 16^2 = 256$ etc... sont racines de P, ce qui est absurde car on aboutit à une infinité de racines.

$\boxed{\text{Donc 0 n'est pas racine de } P.}$

Reprenons l'étude générale :

Puisque $m \neq n$, on peut supposer par exemple $m < n$.

Puisque $a \neq 0$, on peut simplifier l'égalité $a^{2^m} = a^{2^n}$ par a^{2^m}. On obtient : $a^{2^n - 2^m} = 1$ et a est une racine $(2^n - 2^m)$-ième de l'unité. Donc $|a| = 1$

$P((a+1)^2) = P(a+1)\underbrace{P(a)}_{=0} = 0$ donc $(a+1)^2$ est une racine de P, qui ne peut pas être nulle d'après l'étude précédente. Donc là aussi $|a+1| = 1$

$$\begin{cases} |a| = 1 \\ |a+1| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a\overline{a} = 1 \\ a\overline{a} + a + \overline{a} + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a\overline{a} = 1 \quad (= P) \\ a + \overline{a} = -1 \quad (= S) \end{cases}$$

donc a et $\overline{a}$ sont les racines du polynôme $X^2 - SX + P = X^2 + X + 1$

donc $a = j$ ou $a = \overline{j} = j^2$

donc $P(X)$ est de la forme $\lambda(X-j)^p(X-j^2)^q$ où p et q sont des entiers naturels.

alors $P(X^1) = P(X)P(X-1) \implies \lambda(X^2-j)^p(X^2-j^2)^q = \lambda^2(X-j)^p(X-j^2)^q(X-j-1)^p(X-j^2-1)^q$

or $j = j^4$ donc $X^2 - j = X^2 - j^4 = (X-j^2)(X+j^2)$

$j^2 + j + 1 = 0$ donc $X - j - 1 = X + j^2$ et $X - j^2 - 1 = X + j$

d'où $\lambda[(X-j^2)(X+j^2)]^p[(X-j)(X+j)]^q = \lambda^2(X-j)^p(X-j^2)^q(X+j^2)^p(X+j)^q$

$\lambda(X-j)^q(X-j^2)^p(X+j^2)^p(X+j)^q = \lambda^2(X-j)^p(X-j^2)^q(X+j^2)^p(X+j)^q$

Par unicité du terme dominant et de la décomposition d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles, $\lambda = \lambda^2$ et $p = q$

$\lambda = \lambda^2 \implies \lambda = 1$ car $\lambda \neq 0$

donc, finalement, $P(X) = (X - j)^p(X - j^2)^p = (X^2 + X + 1)^p$

Réciproquement, si $P(X) = (X^2 + X + 1)^p$, alors,

$$\begin{aligned}P(X)P(X-1) &= (X^2+X+1)^p[(X-1)^2+(X-1)+1]^p\\ &= (X^2+X+1)^p(X^2-X+1)^p\\ &= [(X^2+X+1)(X^2-X+1)]^p\\ &= (X^4+X^2+1)^p = P(X^2)\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\begin{array}{c}\text{les polynômes de } \mathbb{C}[X] \text{ qui vérifient l'égalité : } P(X^2) = P(X)P(X-1)\\ \text{sont les polynômes de la forme : } P(X) = (X^2+X+1)^p,\ p \in \mathbb{N}\end{array}}$

0.0.27 Relations coefficients-racines :

On note a, b et c les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(X) = X^3 - 5X + \sqrt{2}$.

Calculer $S_2 = a^2 + b^2 + c^2$, $S_3 = a^3 + b^3 + c^3$, $S_4 = a^4 + b^4 + c^4$

$$U = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad V = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab}$$

Pour le calcul de V on pourra utiliser MAPLE

SOLUTION :

Les relations coefficients-racines pour le polynôme P s'écrivent :

$$\begin{cases}\sigma_1 = a+b+c = 0\\ \sigma_2 = ab+ac+bc = -5\\ \sigma_3 = abc = -\sqrt{2}\end{cases}$$

(on les retrouve facilement à partir de l'égalité $X^3 - 5X + \sqrt{2} = (X-a)(X-b)(X-c)$ en développant le terme de droite)

• $\sigma_1^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ donc $\boxed{S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 10}$

• a, b et c sont racines de $P(X) = X^3 - 5X + \sqrt{2}$, donc :

$$\begin{cases}a^3 - 5a + \sqrt{2} = 0\\ b^3 - 5b + \sqrt{2} = 0\\ c^3 - 5c + \sqrt{2} = 0\end{cases} \qquad \text{en additionnant terme à terme :}$$

$$S_3 - 5\sigma_1 + 3\sqrt{2} = 0 \qquad \boxed{S_3 = 5\sigma_1 - 3\sqrt{2} = -3\sqrt{2}}$$

• Reprenons les trois égalités précedentes et multiplions les respectivement par a, b et c :

$$\begin{cases}a^4 - 5a^2 + a\sqrt{2} = 0\\ b^4 - 5b^2 + b\sqrt{2} = 0\\ c^4 - 5c^2 + c\sqrt{2} = 0\end{cases} \qquad \text{et ajoutons terme à terme :}$$

$$S_4 - 5S_2 + \sigma_1\sqrt{2} = 0 \qquad \boxed{S_4 = 5S_2 - \sigma_1\sqrt{2} = 50}$$

• $U = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{ab+ac+bc}{abc} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3} = \dfrac{-5}{-\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \boxed{U = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}}$

• $V = \dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ac} + \dfrac{1}{c+ab}$

Définissons V avec MAPLE et réduisons au même dénominateur :

>restart; V:=1/(a+b*c)+1/(b+a*c)+1/(c+a*b);

normal(V);

$$\frac{ab+ac+bc+ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2+a^2bc+ab^2c+abc^2}{(a+bc)(b+ac)(c+ab)}$$

Par copié-collé récupérons le numérateur $N = ab+ac+bc+ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2+a^2bc+ab^2c+abc^2$ et le dénominateur $D = (a+bc)(b+ac)(c+ab)$

$$\begin{aligned}N &= (ab+ac+bc) + ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2+abc(a+b+c)\\ &= \sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2\end{aligned}$$

Il nous faut calculer $T = ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2$:

Pour cela, $\sigma_1\sigma_2 = (a+b+c)(ab+ac+bc) = ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+a^2b+bc^2+3abc = T + 3\sigma_3$

donc $T = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 3\sqrt{2}$ et $N = \sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + T = -5 + 3\sqrt{2}$ $\qquad \boxed{N = -5 + 3\sqrt{2}}$

calculons $D = (a+bc)(b+ac)(c+ab)$:

> d:=expand((a+b*c)*(b+a*c)*(c+a*b));

ATTENTION, pour MAPLE, **la lettre D majuscule est réservée** à l'opérateur de dérivation de fonctions.

$$\begin{aligned}D &= abc + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + a^3cb + b^3ca + bc^3a + b^2c^2a^2\\ &= abc + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + abc(a^2+b^2+c^2) + (abc)^2\\ &= \sigma_3 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + \sigma_3S_2 + \sigma_3^2\end{aligned}$$

Il nous faut calculer $W = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$:

Pour cela, $\sigma_2^2 = (ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2) = W + 2\sigma_1\sigma_3$
donc $W = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = 25$ et $D = \sigma_3 + W + \sigma_3 S_2 + \sigma_3^2 = -\sqrt{2}+25-10\sqrt{2}+2$ $\boxed{D = 27-11\sqrt{2}}$

Enfin, $V = \dfrac{N}{D} = \dfrac{-5+3\sqrt{2}}{27-11\sqrt{2}} = \dfrac{(-5+3\sqrt{2})(27+11\sqrt{2})}{27^2-2.11^2} = \dfrac{-69+26\sqrt{2}}{487}$ $\boxed{V = \dfrac{-69+26\sqrt{2}}{487}}$

0.0.28 Racines d'un polynôme et géométrie :

Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

a) Les images des racines de P forment un parallélogramme dans le plan complexe .

b) $\exists k \in \mathbb{C}$, tel que $P(X+k)$ soit un polynôme bicarré .

c) P' et P''' ont une racine commune.

SOLUTION :

• Supposons a) : Les images des racines de P forment un parallélogramme dans le plan complexe.

Notons (a,b,c,d) les racines de P et (A,B,C,D) leurs images respectives.

Elles forment un quadrilatère de centre Ω d'affixe ω. En notant $\alpha = a-\omega$, $\beta = b-\omega$, on a $c = \omega-\alpha$ et $d = \omega-\beta$ car $\overrightarrow{\Omega C} = -\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega D} = -\overrightarrow{\Omega B}$

$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d) = (X-\omega-\alpha)(X-\omega-\beta)(X-\omega+\alpha)(X-\omega+\beta)$
$= \left[(X-\omega)^2-\alpha^2\right]\left[(X-\omega)^2-\beta^2\right]$

En posant $Q(Y) = (Y^2-\alpha^2)(Y^2-\beta^2) = Y^4-(\alpha^2+\beta^2)Y^2+\alpha^2\beta^2$, Q est un polynôme bicarré et $Q(X) = P(X+\omega)$

• Supposons b) : $\exists k \in \mathbb{C}$, tel que $P(X+k)$ soit un polynôme bicarré : $P(X+k) = X^4+pX^2+Q \quad (p,q)\in\mathbb{C}^2$

$P(X) = (X-k)^4 + p(X-k)^2 + Q$

$\Longrightarrow$ $P'(X) = 4(X-k)^3 + 2p(X-k)$

$P''(X) = 12(X-k)^2+2p$

$P'''(X) = 24(X-k)$

$\Longrightarrow$ k est racine commune aux polynômes P' et P'''

• Supposons c) : P' et P''' ont une racine commune, qu'on notera λ.

Alors $P'''(X) = 24(X-\lambda)$

$P''(X) = 12(X-\lambda)^2+\mu$

$P'(X) = 4(X-\lambda)^3+\mu(X-\lambda)+\nu$ et $\nu = 0$ puisque λ est racine de P'

$P'(X) = 4(X-\lambda)^3+\mu(X-\lambda)$

$P(X) = (X-\lambda)^4+\frac{\mu}{2}(X-\lambda)^2+\nu$

Si $\nu = 0$, λ est racine double de P. Les racines ne forment pas un quadrilatère.

Si $\nu \neq 0$, notons u et v les racines dans $\mathbb{C}$ du binôme $X^2+\frac{\mu}{2}X+\nu$, qui ont pour racines carrées complexes respectives u_1 et $-u_1$, v_1 et $-v_1$

alors les racines de P sont : $\begin{cases} a = \lambda+u_1 \\ b = \lambda-u_1 \\ c = \lambda+v_1 \\ d = \lambda-v_1 \end{cases}$

La relation $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{c+d}{2} = \lambda$ montrent que les bipoints (A,B) et (C,D) ont même milieu, et donc que $ACBD$ est un parallélogramme.

• On a ainsi montré que $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow a)$. Les trois propositions sont équivalentes.

0.0.29 * Racines d'un polynôme :

1- Soit n un entier naturel non nul, $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ strictement positifs,

et $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = a_nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$

Montrer que Q admet une unique racine dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

2- On considère $n+1$ réels $b_0, b_1, ..., b_n$ tels qoe $0 < b_0 < b_1 < ... < b_n$

et les polynômes $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$ et $Q(X) = (X-1)P(X)$

Montrer que si z est une racine complexe de P, alors $Q(|z|) \leqslant 0$ et en déduire que $|z| \leqslant 1$

SOLUTION :

1- Raisonnons par récurrence sur l'entier n.

• Si $n = 1$, le polynôme $Q_1(X) = a_1X - a_0$ a une seule racine, $\alpha = \frac{a_0}{a_1}$, qui appartient à l'intervalle $]0,+\infty[$.

• Supposons que pour tout suite de n réels strictement positifs $a'_0, a'_1, ..., a'_{n-1}$, le polynôme

$Q(X) = a'_{n-1}X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a'_k X^k$ ait une unique racine α_{n-1} dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et soit alors

$S(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des réels strictement positifs.

alors d'après l'hypothèse de récurrence, $S'(X) = na_n X^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k X^k$ possède une unique racine α_{n-1} dans l'intervalle $]0, +\infty[$. S' étant une fonction continue, qui ne s'annule pas sur les intervalles $]0, \alpha_{n-1}[$ et $]\alpha_{n-1}, +\infty[$, garde un signe constant sur ces intervalles, à savoir :

- $\forall x \in [0, \alpha_{n-1}[,\ S'(x) < 0$ puisque $S'0) = -a_1 < 0$
- $\forall x \in]\alpha_{n-1}, +\infty[,\ S'(x) > 0$ puisque $\lim_{x \to +\infty} S'(x) = +\infty \quad (a_n > 0)$

On peut alors dresser le tableau de variations de S :

x	0		α_{n-1}		$+\infty$
$S'(x)$	$-a_1$	$-$	0	$+$	
$S(x)$	$-a_0$	$\searrow$	$m < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

$S(0) = -a_0 < 0$ et S est décroissante sur $[0, \alpha_{n-1}[$ (puisque $S'(x) < 0$), $S(x)$ reste < 0 quand $x \in [0, \alpha_{n-1}]$

S est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[\alpha_{n-1}, +\infty[$, passe d'une valeur négative $S(\alpha_{n-1})$ à une limite positive en $+\infty$, donc s'annule sur l'intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. La stricte croissance fait que S ne s'annule qu'une seule fois sur cet intervalle.

• On a ainsi montré par récurrence sur l'entier n que pour tout suite de $n+1$ réels strictement positifs $a_0, a_1, ..., a_n$, le polynôme $Q(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ a une unique racine α_{n-1} dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2- On considère $n+1$ réels $b_0, b_1, ..., b_n$ tels qoe $0 < b_0 < b_1 < ... < b_n$

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et

$$\begin{aligned}
Q(X) &= (X-1)P(X) = (X-1)\sum_{k=0}^{n} b_k X^k \\
&= b_n X^{n+1} + (b_{n-1} - b_n)X^n + (b_{n-2} - b_{n-1})X^{n-1} + ... + (b_0 - b_1)X - b_0 \\
&= b_n X^{n+1} - \big((b_n - b_{n-1})X^n + (b_{n-1} - b_{n-2})X^{n-1} + ... + (b_1 - b_0)X + b_0\big)
\end{aligned}$$

Posons alors $c_{n+1} = b_n,\ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}, c_k = b_k - b_{k-1},\ c_0 = b_0$

de sorte que $Q(X) = c_{n+1}X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec $\forall k,\ c_k > 0$

• Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P.

Alors $Q(z) = (z-1)P(z) = 0 = c_{n+1}z^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow c_{n+1}z^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \\
&\Longrightarrow |c_{n+1}z^{n+1}| = \left|\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \underbrace{c_k}_{>0} |z|^k \\
&\Longrightarrow c_{n+1}|z|^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k |z|^k \leqslant 0 \\
&\Longrightarrow Q(|z|) \leqslant 0
\end{aligned}$$

• le polynôme $Q(X) = (X-1)P(X) == c_{n+1}X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ satisfait aux hypothèses de la première question. Donc il s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et cette racine est 1 puisque $Q(1) = 0$.

Rappelons le tableau de signe du polynôme Q :

x	0		1		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	

La lecture de ce tableau montre que la condition $Q(|z|) \leqslant 0$ n'est possible que si $|z| \leqslant 1$

0.0.30 * Racines d'un polynôme :

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - ... - X - 1$

a) Montrer que $\forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, \qquad P_n(z) = 0 \iff z^{n+1} - 2z^n + 1 = 0$

b) Déterminer le nombre de racines réelles de P_n et montrer que P_n admet une et une seule racine réelle positive, qu'on notera a_n.

c) Montrer que pour toute racine z de P_n, réelle ou complexe, $|z| \leqslant a_n$.

d) Montrer que la suite (a_n) converge et calculer sa limite.

SOLUTION :

a) $\forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, \qquad P_n(z) = 0 \iff z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} \iff z^n = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$

$$\iff z^n(1 - z) = 1 - z^n \iff z^{n+1} - 2z^n + 1 = 0$$

Remarquons cependant que 1 est racine du polynôme $Q_n(X) = X^{n+1} - 2X^n + 1$, mais pas du polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - ... - X - 1$ lorsque $n \geq 2$. $\qquad (P_n(1) = 1 - n)$

b) De la question a) il résulte que les racines de P_n sont celles de $Q_n(X) = X^{n+1} - 2X^n + 1$, auxquelles il faut retirer le réel 1.

Recherchons donc les racines réelles de Q_n et pour cela dressons son tableau de variations :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ Q'_n(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x - 2n)$

$$Q'_n(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

• Cas n impair :

x	$-\infty$	b_n	0	1	$\frac{2n}{n+1}$	a_n	$+\infty$
$Q'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$			$\nearrow$
$Q_n(x)$		0		0		0	
	$\nearrow$				$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$				$m < 0$		

Dans le cas où n est impair, la fonction polynomiale Q_n est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et continue, passe d'une limite négative en $-\infty$ à une valeur positive au point 0. Elle s'annule donc sur cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et une seule fois, puisqu'elle est strictement croissante. On peut noter b_n cette valeur où Q_n s'annule.

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$ la dérivée $Q'_n(x)$ est négative, la fonction Q_n est strictement décroissante et continue. Elle s'annule au plus une fois, et cette racine est le réel 1 puisque $Q_n(1) = 0$, mais qui n'est pas racine de P_n, comme cela a été vu plus haut.

Par décroissance de Q_n, $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = m < 0$, puisque $\frac{2n}{n+1} > 1$

Sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}, +\infty\right[$ la fonction Q_n est strictement croissante et continue, passe d'une valeur négative $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = m$ à une limite positive en $+\infty$. Elle s'annule donc sur cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et une seule fois, puisqu'elle est strictement croissante. On notera a_n cette valeur positive où Q_n s'annule.

En concusion, dans le cas étudié, P_n admet une et une seule racine réelle positive, que l'on notera a_n.

• Cas n pair :

x	$-\infty$	b_n	0	1	$\frac{2n}{n+1}$	a_n	$+\infty$
$Q'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$+\infty$						$+\infty$
		$\searrow$					$\nearrow$
			1				
$Q_n(x)$			$\searrow$			0	
				0			
				$\searrow$		$\nearrow$	
					$m < 0$		

L'étude de ce cas est analogue au cas précédent. Mais ici P_n admet une et une seule racine réelle, qui est positive, et que l'on notera encore a_n.

c) Soit z une racine complexe de P_n :

$P_n(z) = 0 \implies z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$

$\implies |z^n| = |1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}| \leqslant 1 + |z| + |z|^2 + ... + |z|^{n-1}$

$\implies P_n(|z|) = |z^n| - (1 + |z| + |z|^2 + ... + |z|^{n-1}) = \leqslant 0$

$\forall s \in \mathbb{C} - \{1\}, \ P_n(z) = z^n - z^{n-1} - z^{n-2} - ... - z - 1 = z^n - \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = \dfrac{z^n - z^{n+1} + z^n - 1}{1 - z} = \dfrac{Q_n(z)}{z - 1}$

Cette relation permet de tracer le tableau de signe de $P_n(x)$ lorsque $x \geq 0$:

x	0		1		$\frac{2n}{n+1}$		a_n		$+\infty$
$Q_n(x)$	1	$+$	0	$-$	$m<0$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0		$+$				
$P_n(x)=\dfrac{Q_n(x)}{x-1}$	-1	$-$	$1-n<0$		$-$		0	$+$	

A la lecture de ce tableau, la relation $P_n(|z|) \leqslant 0$ permet alors de conclure que $|z| \in [0, a_n]$. Donc $\boxed{|z| \leqslant a_n}$

d) $P_n(2) = \dfrac{Q_n(2)}{2-1} = 1 > 0$ donc $a_n \leqslant 2$ (voir tableau de signe précédent)

ainsi, $\forall n \geq 2$, $\dfrac{2n}{n+1} \leqslant a_n \leqslant 2$, ce qui montre, par le théorème d'encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2}$

0.0.31 Calculs :

On considère le polynôme $S(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + ... + X^{2n-2}$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $x^{2n} - 1 = 0$

Démontrer que $S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$

b) en considérant $S(1)$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

SOLUTION :

a) Ni 1 ni -1 ne sont racines de $S(X)$.

Donc, $\forall z \in \mathbb{C}$, $S(z) = 0 \iff 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2n-2} = 0 \iff 1 + z^2 + (z^2)^2 + ... + (z^2)^{n-1} = 0$

$\iff \dfrac{1 - z^{2n}}{1 - z^2} = 0$ et $1 - z^2 \neq 0 \iff z^{2n} = 1$ et $z^2 \neq 1$

$\iff z$ est une racine $(2n)^e$ de l'unité autre que -1 et 1

$\iff \exists k \in \{0, 1, ..., 2n-1\} - \{0, n\},\ z = e^{2i\frac{k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$

$\iff \exists k \in \{1, 2, ..., n-1\} \cup \{n+1, ..., 2n-1\},\ z = e^{i\frac{k\pi}{n}}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les racines du polynôme } S(X) \text{ sont les } 2n-2 \text{ complexes } x_k \text{ définis par :}\\ x_k = e^{i\frac{k\pi}{n}},\ k \in \{1,2,...,n-1\} \cup \{n+1,...,2n-1\}\end{array}}$$

• Alors $S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right)$

$S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}} \right)$ (changement d'indice $k = 2n - k'$ dans le deuxième produit)

$S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \left(X - e^{i\frac{-k\pi}{n}} \right)$ (car $e^{2i\pi} = 1$)

$S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - (e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}})X + 1 \right)$

Finalement, $\boxed{S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)}$

b) $S(1) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) \right)$

rappelons que $\cos(2t) = 2\cos^2(2t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

donc $1 - \cos(2t) = 2\sin^2(t)$ et $2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 4\sin^2(\left(\frac{k\pi}{2n}\right))$

$S(1) = 1 + 1 + ... + 1 = n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

d'où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n}{4^{n-1}}$

Lorsque k décrit les valeurs $1, 2, ..., n-1$, $\dfrac{k\pi}{2n}$ reste dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ est toujours positif.

En prenant la racine carrée dans l'égalité précédente, on obtient alors : $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}$

• Remplaçons l'indéterminée par i de façon à ce que dans les termes $X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1$ ne restent que les cosinus :

$$S(i) = 1 + i^2 + i^4 + i^6 + ... + i^{2n-2} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2i\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^{n-1} = 2^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = 2^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{1-(-1)^n}{2^n i^{n-1}}$$

•– $\boxed{\text{Si } n = 2p \text{ est pair, } \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right) = 0}$ (ce qu'on aurait pu prévoir puisque dans le produit, pour $k = p = n/2$, figure le facteur $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

•– $\boxed{\text{Si } n = 2p+1 \text{ est impair, } \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right)} = \frac{1-(-1)^n}{2^n i^{n-1}} = \frac{2}{2^{2p+1} i^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p} \boxed{= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}}$

0.0.32 Calculs :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

a) Montrer que l'application : $x \mapsto \dfrac{(x+1)^n - 1}{x}$ est polynomiale. On notera P le polynôme ainsi défini.

b) Déterminer les racines de P et montrer que leurs images dans le plan complexe sont situées sur un cercle que l'on précisera.

c) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

SOLUTION :

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{(x+1)^n - 1}{x} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k - 1}{x} = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$ (les termes constants se sont simplifiés)

$$\frac{(x+1)^n - 1}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

En posant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1}$, P est bien un polynôme, et f est la fonction polynomiale associée.

b) remarquons que 0 n'est pas racine de P car $P(0) = \binom{n}{1} = n \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P(x) = 0 \iff \dfrac{(x+1)^n - 1}{x} = 0 \iff (x+1)^n = 1$

$\iff x + 1$ est une racine n^e de l'unité

$\iff \exists k \in \{0, 1, ..., n-1\},\ x + 1 = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$

Remarquons que pour $k = 0$, on parviendrait à l'égalité $x + 1 = e^0 = 1$, qui est impossible puisque $x \neq 0$.

Donc :$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P(x) = 0 \iff \exists k \in \{1, 2, ..., n-1\},\ x + 1 = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$

$\iff \exists k \in \{1, 2, ..., n-1\},\ x = e^{2i\frac{k\pi}{n}} - 1$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les racines du polynôme } P \text{ sont les } n-1 \text{ complexes } x_k \text{ définis par :}\\ x_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}} - 1,\ k \in \{1, 2, ..., n-1\}\end{array}}$$

• Remarquons que $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\},\ |x_k - (-1)| = |x_k + 1| = \left|e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right| = 1$

Les images des racines x_k sont sur le cercle de centre le point A d'affixe -1 et de rayon 1.

c) $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}, x_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}} - 1 = x_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = 2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} = X^{n-1} + \binom{n}{n-1} X^{n-2} + ... + \binom{n}{2} X + \binom{n}{1}$$

Les relations liant coefficients et racines du polynôme P donnent :

$$\prod_{k=1}^{n-1} x_k = (-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{1}}{1} = (-1)^{n-1}n$$

donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(2ie^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = (-1)^{n-1}n$

$\displaystyle\Longrightarrow\ (2i)^{n-1}e^{i\frac{(1+2+3+\ldots+(n-1))\pi}{n}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}n$

$\displaystyle\Longrightarrow\ (2i)^{n-1}e^{i\frac{\frac{n(n-1)}{2}\pi}{n}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}n$

$\displaystyle\Longrightarrow\ (2i)^{n-1}e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}n$

$\displaystyle\Longrightarrow\ (2i)^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}n$

or $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc $(2i)^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} = 2^{n-1}i^{n-1}i^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{n-1}$

d'où $\displaystyle 2^{n-1}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1}n$

et finalement : $\displaystyle\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$