# Déterminants

− − − − − − − − − − − − − − − −

## Calculs de déterminants :

### Calcul de déterminant 1 :

On considère trois complexes $a, b$ et $c$ et le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}_n$ d'ordre $n$.

Trouver une relation entre $\Delta_n,\ \Delta_{n-1}$ et $\Delta_{n-2}$

Calculer $\Delta_n$ en fonction des racines du polynôme $X^2 - aX + bc$

***SOLUTION*** **:**

• Développons $\Delta_n$ suivant la première colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}_n = a \begin{vmatrix} a & c & \dots & 0 \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}_{n-1} - b \begin{vmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

en développant le dernier déterminant suivant sa première ligne : $\boxed{\Delta_n = a\ \Delta_{n-1} - bc\ \Delta_{n-2}}$

• La suite $(\Delta_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire, d'odre 2, à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est : $r^2 - ar + bc = 0$ (*)

• Premier cas : Supposons que l'équation (*) admette deux racines complexes distinctes $r_1$ et $r_2$.
Ces deux racines sont reliées aux coefficients par les relations : $r_1 + r_2 = a$ et $r_1.r_2 = bc$
alors $\exists(\lambda, \mu),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
Pour calculer $(\lambda, \mu)$, on utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} \lambda r_1 + \mu\, r_2 = \Delta_1 = a & (1) \\ \lambda r_1^2 + \mu\, r_2^2 = \Delta_2 = a^2 - bc & (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par $r_2$ et retranchons (2) : $\lambda r_1(r_2 - r_1) = ar_2 - a^2 + bc$

$$\lambda = \frac{ar_2 - a^2 + bc}{r_1(r_2 - r_1)} = \frac{(r_1 + r_2)r_2 - (r_1 + r_2)^2 + r_1.r_2}{r_1(r_2 - r_1)} = \frac{-r_1}{r_2 - r_1}$$

alors $\mu\, r_2 = a - \lambda r_1 = r_1 + r_2 + \dfrac{r_1^2}{r_2 - r_1} = \dfrac{r_2^2 - r_1^2 + r_1^2}{r_2 - r_1} = \dfrac{r_2^2}{r_2 - r_1}$

et donc $\mu = \dfrac{r_2}{r_2 - r_1}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \dfrac{-r_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \dfrac{r_2}{r_2 - r_1} r_2^n = \dfrac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2 - r_1}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2 - r_1}}$$

### Calcul de déterminant 2 :

On considère le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}_n$ d'ordre $n$.

Trouver une relation entre $\Delta_n,\ \Delta_{n-1}$ et $\Delta_{n-2}$

Calculer $\Delta_n$ (réponse $\Delta_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$)

***SOLUTION*** **:**

• Développons $\Delta_n$ suivant la dernière colonne :

$$\Delta_n = 2\cos(\theta)\begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}_{n-1}$$

Le premier déterminant est $\Delta_{n-1}$, le dévelopement du second déterminant par rapport à la prémière ligne fait apparaitre $\Delta_{n-2}$

donc, pour tout $n \geqslant 3$, $\boxed{\Delta_n = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}}$

• La suite $(\Delta_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire, d'odre 2, à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$ (*)

$$\begin{aligned} r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0 &\iff (r-\cos\theta)^2 + 1 - \cos^2(\theta) = 0 \\ &\iff (r-\cos\theta)^2 = \sin^2(\theta) \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} r - \cos\theta = i\sin\theta \\ \text{ou} \\ r - \cos\theta = -i\sin\theta \end{array}\right. \\ &\iff r = e^{i\theta} \text{ ou } r = e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Les suites qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\cos(\theta)u_{n-1} - u_{n-2}$

sont les suites de la forme $(u_n) = \lambda(e^{in\theta}) + \mu(e^{-in\theta})$

donc $\exists(\lambda,\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}$

Pour calculer $(\lambda,\mu)$, on utilise les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = \Delta_1 = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} & (1) \\ \lambda e^{2i\theta} + \mu e^{-2i\theta} = \Delta_2 = 4\cos^2(\theta) - 1 = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1 & (2) \end{array}\right.$$

On multiplie (1) par $e^{i\theta}$ et on retranche (2) :

$$\mu - \mu e^{-2i\theta} = e^{2i\theta} + 1 - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1) = -e^{-2i\theta}$$

d'où $\mu = \dfrac{-e^{-2i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} = \dfrac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \dfrac{-e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} = \dfrac{i\ e^{-i\theta}}{2\sin\theta}$

en reportant dans (1) : $\lambda e^{i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} - \mu e^{-i\theta}$

$$\lambda e^{i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}e^{-i\theta} = \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta}}{2i\ \sin\theta}$$

donc $\lambda = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\ \sin\theta}$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\ \sin\theta}e^{in\theta} - \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\ \sin\theta}e^{-in\theta} = \dfrac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i\ \sin\theta}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}}$$

## Déterminant de VanderMonde :

Lorsque $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des éléments du corps $\mathbf{K}$, on définit :

$$W(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_n$$

a) Calculer $W(x_1, x_2, ..., x_n)$

b) Avec un minimum de calculs, calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & x \end{vmatrix}$

***SOLUTION*** **:**

a) Fixons les scalaires $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ appartenant à $\mathbf{K}$ et considérons la fonction $f$ de la variable $y$ définie par :

$$f(y) = W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \end{vmatrix}_n$$

En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$f(y) = W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y) = 1.A_{n,1} + y.A_{n,2} + y^2.A_{n,3} + ... + y^{n-1}.A_{n,n}$$

où les les $A(n,j)$ sont les cofacteurs de la dernière ligne. Aucun d'entre eux ne contient le facteur $y$. Ce sont des scalaires appatenant à $\mathbf{K}$.

$f(y)$ est donc une fonction polynomiale de la variable $y$.

Son terme de plus haut degré est $y^{n-1}.A_{n,n} = y^{n-1}.W(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$

Par ailleurs $f(x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \end{vmatrix}_n = 0$ puisque la ligne $(1\ x_1\ x_1^2\ \dots\ x_1^{n-1})$ est répétée deux fois.

De même, $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_{n-1}) = 0$

Le polynôme $f(y)$ est donc divisible par $(y - x_1),\ (y - x_2),\ ...\ (y - x_{n-1})$

Puisque $f(y)$ est de degré $n-1$, $f(y) = W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).(y - x_1).(y - x_2)...(y - x_{n-1})$

En remplaçant $y$ par $x_n$, on obtient lé relation de récurrence :

$W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).(x_n - x_1).(x_n - x_2)...(x_n - x_{n-1})$

A partir de l'initialisation $W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$ , on obtient finalement :

$$\boxed{W(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)}$$

b) En développant par rapport à dernière ligne $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & x \end{vmatrix}$ , on voit que $\Delta(x)$ est une fonction polynomiale de $x$, de degré 1, c'est à dire une fonction affine de $x$.

$\exists (a, b) \in \mathbf{K}^2,\ \Delta(x) = ax + b$

La coefficient de $x$ est le cofacteur de $x$, c'est à dire $W(2, 3, 4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = (3 - 2)(4 - 2)(4 - 3) = 2$

donc $\Delta(x) = 2x + b$

En prenant $x = 125 = 5^3$ , on obtient :

$\Delta(125) = W(2, 3, 4, 5) = (3 - 2)(4 - 2)(4 - 3)(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4) = 12$

donc $\Delta(125) = 2.125 + b = 12$ et donc $b = -238$

Finalement, $\boxed{\Delta(x) = 2x - 238}$

## Calcul de déterminant 3 :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n, b, c$ des réels tels que $b \neq c$

et $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}_n$

Montrer que $\Delta_n$ est une fonction affine, et calculer $\Delta_n(x)$ en faisant intervenir le polynôme

$Q(X) = (a_1 - X)(a_2 - X)...(a_n - X) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - X)$

***SOLUTION*** **:**

a) On retranche la prémière colonne de chacune des colonnes :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b - a_1 & b - a_1 & \cdots & b - a_1 \\ c + x & a_2 - c & b - c & \cdots & b - c \\ c + x & 0 & a_3 - c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b - c \\ c + x & 0 & \cdots & 0 & a_n - c \end{vmatrix}_n$$

en développant suivant la première colonne, $\Delta_n(x)$ apparait comme une somme de polynômes de degré 1 en $x$. Donc $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de $x$.

Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \Delta_n(x) = Ax + B$

• $\Delta_n(-b) = \begin{vmatrix} a_1 - b & 0 & \cdots & 0 \\ c - b & a_2 - b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c - b & \cdots & c - b & a_n - b \end{vmatrix}_n = (a_1 - b)(a_2 - b)...(a_n - b) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - b) = Q(b)$

$$\Delta_n(-c)=\begin{vmatrix} a_1-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a_2-c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ 0 & \cdots & 0 & a_n-c \end{vmatrix}_n = (a_1-c)(a_2-c)...(a_n-c)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)=Q(c)$$

• On on obtient les deux équations : $\begin{cases} \Delta_n(-b)=-Ab+B=Q(b) & (1) \\ \Delta_n(-c)=-Ac+B=Q(c) & (2) \end{cases}$

par différence $A=\dfrac{Q(b)-Q(c)}{c-b}$ puis $B=\dfrac{c\,Q(b)-b\,Q(c)}{c-b}$

Finalement, $\boxed{\Delta_n(x)=\dfrac{Q(b)-Q(c)}{c-b}\,x+\dfrac{c\,Q(b)-b\,Q(c)}{c-b}}$

## Calcul de déterminant4 :

Calculer le déterminant d'ordre $n$ : $\Delta_n=\begin{vmatrix} a+b & & \\ & \ddots & (b) \\ (a) & \ddots & \\ & & a+b \end{vmatrix}$

***SOLUTION*** : $\Delta_n=a\Delta_{n-1}+b^n$

Par récurrence, $\boxed{\Delta_n=\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\text{ si } a\neq b}$

## *Déterminant de Hilbert :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle déterminant de Hilbert d'ordre $n$ : $H_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac1n & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}_n$

a) On pose, pour tout $x$ réel, $\Delta_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac1x & \frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & \cdots & \frac{1}{x+n-1} \end{vmatrix}_n$

Montrer qu'il existe $Q_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X], \forall x\in\mathbb{R},\ \Delta_n(x)=\dfrac{Q_n(x)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$

puis qu'il existe $\lambda_n\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ Q_n(x)=\lambda_n(x-1)(x-2)...(x-n+1)$

b) Vérifier que $H_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{(k!)^4}{((2k)!)^2}\right)\dfrac{2^n\ n!}{(2n)!}$

***SOLUTION*** :

a) En développant $\Delta_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac1x & \frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & \cdots & \frac{1}{x+n-1} \end{vmatrix}_n$ par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\Delta_n(x)=\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+...+\frac{a_{n-1}}{x+n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x+k}$$

où $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont des réels indépendants de $x$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\Delta_n(x)=\frac{a_0(x+1)(x+2)...(x+n-1)+...+a_{n-1}\ x\ (x+1)(x+2)...(x+n-2)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$$

$$\Delta_n(x)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1}(x+i)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}=\frac{Q_n(x)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$$

où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

• Pour $x=1$, $\Delta_n(1) = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \end{vmatrix}_n = 0$ puisque les première et dernière ligne sont égales.

donc $Q_n(1)=0$ et $Q_n(X)$ est divisible par $X-1$

Un raisonnement analogue montre que $Q_n(X)$ est divisible par $X-2, X-3, ..., X-n+1$

Ces polynômes étant premiers entre eux deux à deux, $Q_n(X)$ est divisible par le produit $(X-1)(X-2)(X-3)...(X-n+1)$

Puisqu'il est de degré $\leqslant n-1$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q_n(X) = \lambda_n(X-1)(X-2)...(X-n+1)$

donc $\Delta_n(x) = \dfrac{\lambda_n(X-1)(X-2)...(X-n+1)}{X(X+1)(X+2)...(X+n-1)}$

b) • Multiplions par $(x+n-1)$ l'égalité

$$\Delta_n(x) = \frac{\lambda_n(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac1x & \frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & \cdots & \frac{1}{x+n-1} \end{vmatrix}_n :$$

On obtient : $$\frac{\lambda_n(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-2)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{x+n-1}{x} & \frac{x+n-1}{x+1} & \cdots & \frac{x+n-1}{x+n-2} & 1 \end{vmatrix}_n$$

En remplaçant $x$ par $1-n$, on obtient :

$$\frac{\lambda_n(-n)(-n-1)...(-2n+2)}{(1-n)(2-n)(3-n)...(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n$$

et en développant le dernier déterminant par rapport à la dernière ligne,

$$\frac{\lambda_n \,.\, n(n+1)(n+2)...(2n-2)}{(n-1)!} = H_{n-1} \text{ donc } \lambda_n = \frac{(n-1)!}{n(n+1)(n+2)...(2n-2)}H_{n-1}$$

donc $\Delta_n(x) = \dfrac{(n-1)!}{n(n+1)(n+2)...(2n-2)}H_{n-1}\dfrac{(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$

Enfin, $H_n = \Delta_n(n) = \dfrac{(n-1)!}{n(n+1)(n+2)...(2n-2)}H_{n-1}\dfrac{(n-1)(n-2)...(+1)}{n(n+1)(n+2)...(2n-1)}$

$$= \frac{((n-1)!)^2}{(n(n+1)(n+2)...(2n-2))^2\ \ (2n-1)}H_{n-1}$$

On obtient la relation de récurrence :

$$\boxed{H_n = \frac{((n-1)!)^2}{(n(n+1)(n+2)...(2n-2))^2\ \ (2n-1)}H_{n-1}}$$

• $H_1 = 1$ , $H_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 \\ \frac12 & \frac13 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{12}$

En multipliant haut et bas par $((n-1)!)^2$, on obtient :

$$H_n = \frac{((n-1)!)^2}{(n(n+1)(n+2)...(2n-2))^2\ \ (2n-1)}H_{n-1} = \frac{((n-1)!)^4}{((2n-2)!)^2\ \ (2n-1)}H_{n-1}$$

Par une récurence immédiate, $H_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{((k-1)!)^4}{((2k-2)!)^2\ \ (2k-1)}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(k!)^4}{((2k)!)^2\ \ (2k+1)}\right)$

$$H_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(k!)^4}{((2k)!)^2}\right)\frac{1}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,(2n-1)} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(k!)^4}{((2k)!)^2}\right)\frac{2\,.\,4\,.\,...\,.\,2n}{(2n)!}$$

$$\boxed{H_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(k!)^4}{((2k)!)^2}\right)\frac{2^n\ n!}{(2n)!}}$$

## Matrice inversible :

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbf{K})$.

A quelle condition la matrice $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$ est elle inversible .

***SOLUTION*** : En ajoutant à une colonne une combinaison linéaire d'autres colonnes, on ne change pas le rang d'une matrice. Ajoutons à la $n+1$ ième colonne de $M$ la première, à la $(n+2)^e$ la deuxième, ..., à la $(n+k)^e$ colonne la $k^e$ :

$M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & 2A \\ A-B & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix}$

Pour $k = 1, 2, ..., n$, soustrayons la $(n+k)^e$ colonne à la $k^e$ :

$\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix}$

Pour $k = 1, 2, ..., n$, ajoutons la $k^e$ ligne à la $(n+k)^e$ :

$\begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A).\det(B)$

Donc $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ le sont.}}$

## Calcul par blocs :

Soient $A, B, C, D$ quatre matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $C.D = D.C$, et $D$ est inversible, et $M$ la matrice de définie par : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

En multipliant $M$ par une matrice triangulaire par blocs bien choisie de façon à obtenir une deuxième matrice triangulaier par blocs, montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$

Le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & G \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} AE+BF & BG \\ CE+DF & DG \end{pmatrix}$

Prenons alors $F = -D^{-1}CE$ :

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}CE & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE - BD^{-1}CE & BG \\ 0 & DG \end{pmatrix}$

Prenons $E = D$ et $G = I_n$ :

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} D & 0 \\ -D^{-1}CD & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BD^{-1}CD & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$

d'où : $\det(M).det(D) = \det(AD - BC).\det(D)$ et puisque $D$ étant supposée inversible, $\det(D) \neq 0$,

$\boxed{\det(M) = \det(AD - BC)}$

# 1 Système d'équations linéaires :

## 1.1 Système d'équations (pour collégiens) :

1- Dans un troupeau composé de chameaux et de dromadaires, on dénombre 53 têtes et 72 bosses. Quelle est la composition de ce troupeau ?

2- "J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons 117 ans à nous deux".

Quels sont les âges, aujourd'hui, des deux personnes en question ?

***SOLUTION*** : 1- Le plus difficile dans cette histoire est de savoir qui a une bosse et qui en a deux.

Notons $x$ le nombre de dromadaires du troupeau (à une bosse) et $y$ le nombre de chameaux (à deux bosses).

Alors $\begin{cases} x + y = 53 \\ x + 2y = 72 \end{cases}$ $\boxed{\text{d'où } x = 34 \text{ et } y = 19}$

2 - Notons $x$ l'âge de l'orateur et $y$ l'âge de son interlocuteur aujourd'hui.

Notons $d$ la différence : $y = x - d$

On peut résumer le premier renseignement par le tableau suivant :

| avant | aujourd'hui | plus tard |
|---|---|---|
| $y = x - d$ | $x$ | $x + d$ |
| $y - d = x - 2d$ | $y = x - d$ | $x = y + d$ |

d'où l'on tire la première équation : l'âge de l'orateur ( $x$ ) est deux fois l'âge qu'avait l'interlocuteur avant:

$x = 2(x - 2d)$

Plus tard, la somme des âges sera 117 ans : $(x + d) + x = 117$

On obtient le système : $\begin{cases} x = 4d \\ 2x + d = 117 \end{cases}$ $\boxed{\text{d'où } d = \frac{117}{9} = 13,\ x = 52 \text{ et } y = x - d = 39}$

## 1.2 Un peu d'alchimie :

Equilibrer les réactions chimiques suivantes :

a) $NH_3 + O_2 \longrightarrow NO + H_2O$

b) $Pb + HNO_3 \longrightarrow Pb(NO_3)_2 + NO + H_2O$

***SOLUTION*** : a) Notons $a, b, c$ et $d$ les coefficients stoechiométriques inconnus :

$a\ NH_3 + b\ O_2 \longrightarrow c\ NO + d\ H_2O$

Par conservation de l'azote, de l'hydrogène et de l'oxygène, on obtient :

$$\begin{cases} a = c \\ 3a = 2d \\ 2b = c + d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = \frac{3}{2}a \\ b = \frac{c}{2} + \frac{d}{2} = \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} = \frac{5}{4}a \end{cases}$$

Pour avoir des coefficients entiers, prenons $a = 4$. Alors $b = 5,\ c = 4,\ d = 6$

Ainsi, $\boxed{4\ NH_3 + 5\ O_2 \longrightarrow 4\ NO + 6\ H_2O}$

b) Raisonnement analogue pour la deuxième réaction :

$a\ Pb + b\ HNO_3 \longrightarrow c\ Pb(NO_3)_2 + d\ NO + e\ H_2O$

$$\begin{cases} a = c \\ b = 2e \\ b = 2c + d \\ 3b = 6c + d + e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = a \\ e = \frac{b}{2} \\ d = b - 2c = b - 2a \\ 3b = 6a + (b - 2a) + \frac{b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = a \\ e = \frac{b}{2} \\ d = b - 2a \\ \frac{3}{2}b = 4a \end{cases}$$

En prenant $b = 8$, on obtient : $a = c = 3,\ d = 2,\ e = 4$

$\boxed{3\ Pb + 8\ HNO_3 \longrightarrow 3\ Pb(NO_3)_2 + 2\ NO + 4\ H_2O}$

# Divers

## Déterminant et trace :

$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie $n$.

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de $E$.

Montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n,\ \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., f(x_j), ..., x_n) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$$

***SOLUTION*** :

• Posons : $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n,\ \Phi(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., f(x_j), ..., x_n)$

$f$ étant une application linéaire, on vérifie sans difficulté que $\boxed{\Phi \text{ est une forme multilinéaire sur } E.}$

De plus, si $x_2 = x_1$,

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), x_2, ..., x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, f(x_2), ..., x_n) + \sum_{j=3}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., f(x_j), ..., x_n)$$

$$\Phi(x_1, x_1, ..., x_j, ..., x_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), x_1, ..., x_n) - \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), x_1, ..., x_n) + \sum_{j=3}^{n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., f(x_j), ..., x_n)}_{=0}$$

donc $\boxed{\Phi \text{ est une forme } n\text{-linéaire alternée sur } E.}$

• On sait que l'ensemble des formes $n$-linéaires alternées sur $E$ est une droite vectorielle, dont une base est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ .

donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \Phi = \lambda. \det_{\mathcal{B}}$

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n,\ \Phi(x_1, ..., x_n) = \lambda. \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$

En particulier $\Phi(\mathcal{B}) = \Phi(e_1, ..., e_n) = \lambda. \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1} = \lambda$

Ainsi, $\lambda = \Phi(e_1, ..., e_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., f(e_j), ..., e_n)$

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1,...,f(e_j),...,e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_{n-2,j} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_{n-1,j} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,j} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(e_1,...,f(e_j),...,e_n) = a_{j,j}$

et finalement $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f)$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,...,x_n) \in E^n,\ \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1,...,f(x_j),...,x_n) = \mathrm{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_j,...,x_n)}$$

## Endomorphisme qui vérifie $f^2 = -4Id_E$ :

$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -4Id_E$.

a) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$

$f$ est il inversible ? Si oui, déterminer $f^{-1}$

b) Montrer que $n = \dim_{\mathbb{R}}(E)$ est un nombre pair.

(on pourra utiliser un déterminant)

c) Montrer que pour tout $x \in E$ , si $x \neq 0$ , alors $(x, f(x))$ est un système libre.

d) On suppose dans cette question que $n = 4$

Montrer qu'il existe une base $V$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

***SOLUTION*** :

a) $f^2 = -4Id_E$ donc $f_o(-\frac{1}{4}f) = Id_E$

$f$ est inversible et $f^{-1} = -\frac{1}{4}f$

$f$ est alors $\mathrm{Im}(f) = E$ et $\ker f = \{0\}$

b) $f^2 = -4Id_E \implies \det(f^2) = (\det f)^2 = \det(-4Id_E) = (-4)^n \det(Id_E) = (-4)^n$

alors $(-4)^n > 0$ et $n$ est un entier pair.

c) Soit $x \in E$ non nul.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0$ .

En composant par $f$, $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$

donc $\begin{cases} \lambda x + \mu f(x) = 0 & (1) \\ \lambda f(x) - 4\mu x = 0 & (2) \end{cases}$

En multipliant (1) par $\lambda$ , en multipliant (2) par $-\mu$ et en ajoutant, on obtient :

$(\lambda^2 + 4\mu^2)x = 0$

$\implies \lambda^2 + 4\mu^2 = 0 \implies \lambda = \mu = 0$

$\boxed{(x, f(x)) \text{ est donc un système libre.}}$

d) On suppose dans cette question que $n = 4$

Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Alors $(x, f(x))$ est un système libre.

L'espace engendré par $(x, f(x))$ est donc un plan, strictement inclus dans $E$. Il existe donc un vecteur non nul $y$ qui n'appartient pas à ce plan.

• Montrons qu'alors le système $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ax + b\,f(x) + cy + d\,f(y) = 0$ (1)

en composant par $f$ : $af(x) - 4b\,x + cf(y) - 4d\,y = 0$ (2)

En ajoutant $c(1) - d(2)$ : $(ac + 4bd)x + (bc - ad)\,f(x) + (c^2 + 4d^2)y = 0$

Si $c^2 + 4d^2$ n'était pas nul, on aurait $y = -\dfrac{(ac + 4bd)x + (bc - ad)\,f(x)}{c^2 + 4d^2}$,

ce qui est exclu puisque $y \notin \mathrm{Vect}(x, f(x))$.

donc $c^2 + 4d^2 = 0$ et $c = d = 0$

La relation (1) devient alors $ax + b\,f(x) =$ qui entraîne que $a = b = 0$ comme on l'a vu à la question c).

On ainsi montré que $(x, f(x), y, f(y))$ était un système libre.

En notant $v_1 = x,\ v_2 = f(x),\ v_3 = y,\ v_4 = f(y)$ , $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est un système libre de $E$, donc une base de $E$ puisque $E$ est de dimension 4.

Les relations $f(v_1) = v_2,\ f(v_2) = -4v_1,\ f(v_3) = v_4,\ f(v_4) = -4v_3$ montrent que la matrice de $f$ dans la base $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## Dérivation d'un déterminant :

$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de $E$.

$X_1, X_2, ..., X_n$ sont des fonctions vectorielles, d'un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ dans $E$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que l'application $f : \begin{cases} J \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que :

$$\forall t \in J,\ f'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1(t), ..., X_{k-1}(t), X_k'(t), X_{k+1}(t), ..., X_n(t))$$