Réduction de matrices et endomorphismes :

1 Diagonalisation d'endomorphismes ou de matrices

1.1 Système libre :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$ m réels distincts, et pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$
Montrer que le famille $(f_1, ..., f_m)$ est libre . (Indication : utiliser la dérivation).

SOLUTION **:** Considérons l'espace vectoriel E des fontions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La dérivation D est un endorphisme de E. $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$, $D(f_i) = \lambda_i f_i$.

Donc $f_1, ..., f_m$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme D, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$ deux à deux distinctes. $\boxed{\text{Ils forment donc un système libre}}$.

1.2 Matrices vérifiant $AB - BA = A$:

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est à dire que : $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$.

On considère l'application ψ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM \end{array} \right.$

1- Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\psi(A^k) = kA^k$.
Calculer la trace de A.

2- Montrer que si A n'est pas nilpotente, alors ψ a une infinité de valeurs propres.
Conclure.

SOLUTION : 1- • ψ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: se vérifie sans difficulté.

• L'hypothèse $AB - BA = A$ s'écrit aussi $\psi(A) = A$
- La relation $\psi(A^k) = kA^k$ est ainsi vérifiée pour $k = 1$.
- Supposons la vérifiée à l'ordre k : $\psi(A^k) = kA^k$, c'est à dire $A^k.B - B.A^k = kA^k$
alors $\psi(A^{k+1}) = A^{k+1}B - BA^{k+1}$. or $A^k.B = B.A^k + kA^k$
donc $\psi(A^{k+1}) = A.(B.A^k + kA^k) - BA^{k+1} = kA^{k+1} + (\underbrace{AB - BA}_{=A})A^k = (k+1)A^{k+1}$

On a ainsi montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \psi(A^k) = kA^k}$.

• $\boxed{\text{tr}(A) =}$ $\text{tr}(A.B - B.A) = \text{tr}(A.B) - \text{tr}(B.A)$ $\boxed{= 0}$

2- Si A n'est pas nilpotente, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\psi(A^k) = kA^k$, donc tous les entiers k de $\mathbb{N}$ sont valeurs propres de ψ. ψ aurait alors une infinité de valeurs propres, ce qui n'est pas possible puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Donc A est nilpotente.

1.3 Sans calcul ...

Sans effectuer aucun calcul écrit, dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 1, puisque toutes les colonnes sont proportionnelles à la première. 0 est donc valeur propre de A. La dimension du sous espace propre $E_A(0)$ est donnée par la formule :

$\dim(E_A(0)) = 3 - \text{rg}(A) = 2$

0 est donc valeur propre d'ordre 2 ou 3.

Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A, $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$, alors $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A) = -3$

donc $\lambda_3 = -3$

Au bilan final, 0 est valeur propre double, son sous-espace propre est de dimension 2.

-3 est valeur propre simple.

La somme des dimensions des sous espaces est égale à 3. $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable.}}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1, puisque toutes les colonnes sont proprtionnelles à la première. 0 est donc valeur propre de B. La dimension du sous espace propre $E_B(0)$ est donnée par la formule :

$\dim(E_B(0)) = 3 - \mathrm{rg}(B) = 2$

0 est donc valeur propre d'ordre 2 ou 3.

Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A, $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$, alors $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(B) = 0$

donc $\lambda_3 = 0$

Au bilan final, 0 est valeur propre triple, son sous-espace propre est de dimension 2.

La somme des dimensions des sous espaces ne vaut que 2.

$\boxed{B \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$

1.4 Etude de diagonalisabilité :

Soit n un entier naturel, a un réel non nul, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A = (a_{i,j}) = (a^{j-i})$

1 - Calculer le rang de A et son déterminant. (On pourra remarquer un lien entre une colonne et sa suivante)

2 - Déterminer la dimension et une équation de $\ker u$

Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3 - Avec un minimum de calculs, déterminer les valeurs propres de A et préciser leur ordre de multiplicité. A est elle diagonalisable ?

4 - En utilisant une réduction de la matrice A, calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$¸ A^k en fonction de A.

SOLUTION :

1 - $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \frac{1}{a^{n-2}} & \frac{1}{a^{n-3}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Si C_j désigne la j^e colonne de A, alors $C_j = aC_{j-1}$

Toutes les colonnes sont proportionnelles à la première colonne donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1}$

A n'atant pas inversible, son déterminant est nul : $\boxed{\det(A) = 0}$

2 - Puisque $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u) = 1$, $\mathrm{Im}(u)$ est une droite, dont une base a pour vecteur colonne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ n'importe quelle colonne de A :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est la droite dont une base est le vecteur } V = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix} \text{ ou le vecteur } W = \begin{pmatrix} a^{n-1} \\ a^{n-2} \\ \vdots \\ a \\ 1 \end{pmatrix}}$$

• Par le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = n - \mathrm{rg}(u) = n - 1$

$\boxed{\ker(u) \text{ est un hyperplan dont une équation est}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \frac{1}{a^{n-2}} & \frac{1}{a^{n-3}} & \dots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

soit : $\boxed{x_1 + ax_2 + a^2x_3 + ... + a^{n-1}x_n = 0}$

3 - Puisque A n'est pas inversible ($\mathrm{rg}(A) = 1$), 0 est valeur propre de A.

De plus la dimension du sous espace propre associé est $\dim(E_A^0) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$

Donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$, c'est à dire d'ordre $n-1$ ou d'ordre n.

On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace de A. Il manque une valeur propre encore inconnue, λ, éventuellement nulle. Donc $\underbrace{0 + 0 + ... + 0}_{n-1 \quad fois} + \lambda = \mathrm{tr}(A) = n$

Donc finalement, 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ et $\lambda = n$ est valeur propre d'ordre 1.

La somme des dimensions des sous espaces propres étant égale à n, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

4 - La matrice A est semblable à la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(n, 0, ..., 0) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = P.\Delta.P^{-1}$

Pour tout $k \in \mathbb{N},\ A^k = P.\Delta^k.P^{-1}$

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} n^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = n^{k-1}\Delta \text{ donc } A^k = P.(n^{k-1}\Delta).P^{-1} = n^{k-1}P.\Delta.P^{-1} = n^{k-1}A$$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = n^{k-1}A}$

1.5 Matrice de rang 1 :

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe deux matrices colonnes U et V non nulles telles que $A = U.\,^tV$.

b) Soit A une matrice de rang 1.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

c) Si A est une matrice de rang 1, calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$

SOLUTION :

a)• Si A est de rang 1, toutes ses colonnes $C_{j,\ j=1...n}$ sont proportionnelles à l'une d'entre elles $C_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$:

$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \exists y_j \in \mathbb{C},\ C_j = y_j C_{i_0}$

$$A = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & ... & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & ... & y_nx_2 \\ & & \ddots & \\ ... & ... & & ... \\ y_1x_n & y_2x_n & ... & y_nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} = U \times\, ^tV$$

avec $U = C_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$

Ni U ni V ne sont nulles car sinon A le serait.

• L'étude réciproque est immédiate, si $A = U \times\, ^tV$

avec $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ alors toutes les colonnes de A sont proportionnelles au vecteur colonne U et A est de rang au plus égal à 1.

De plus, les colonnes U et V étant non nulles,

$\exists i_0,\ x_{i_0} \neq 0,\ \exists j_0,\ y_{j_0} \neq 0$ et $a_{i_0,j_0} = x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ donc A n'est pas nulle. Elle est donc de rang 1.

b) Si $A = U \times\, ^tV$ est de rang 1, alors 0 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est de dimension $n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$. Donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$.

La somme des valeurs propres est égale à $\mathrm{tr}(A)$.

- Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors 0 est valeur propres d'ordre n, le sous espace propre associé est seulement de dimension $n - 1$, A n'est pas diagonalisable.

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\lambda = \mathrm{tr}(A)$ est une seconde valeur propre de A, la somme des dimensions des sous espaces propres est au moins égale à $(n - 1) + 1 = n$ et A est diagonalisable.

c) Si A est de rang 1, il exoste deux vecteurs colonnes X et Y tels que $A = U \times\, ^tV$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & ... & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & ... & y_nx_2 \\ & & \ddots & \\ ... & ... & & ... \\ y_1x_n & y_2x_n & ... & y_nx_n \end{pmatrix} = U \times\, ^tV$$

alors, pour toput entier k,

$A^k = (U \times\, ^tV).(U \times\, ^tV).\ \times ... \times\ (U \times\, ^tV) = U \times (^tV.U) \times (^tV.U) \times\ ...\ \times (^tU) \times\, ^tV = U \times (^tV.U)^{k-1}\, ^tV$

$A^k = (^tV.U)^{k-1}.(U \times\, ^tV) = (^tV.U)^{k-1}.A = (\det(A))^{k-1}.A$

1.6 Matrice diagonalisable :

La matrice complexe $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

Donner un exemple simple de matrice complexe symétrique non diagonalisable.

SOLUTION : • Si $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ sont tous réels, alors la matrice A est réelle et symétrique, donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

• Si $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$, alors la matrice A est déjà diagonale.

• Supposons désormais que $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \neq (0, 0, ..., 0)$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un scalaire et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$

$$A.X = \lambda X \iff \begin{cases} a_1x_n = \lambda x_1 \\ a_2x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1}x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Premier cas : Supposons $\lambda \neq 0$

alors $A.X = \lambda X \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{x_n}{\lambda} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \\ a_1^2 \dfrac{x_n}{\lambda} + a_2^2 \dfrac{x_n}{\lambda} + ... + a_{n-1}^2 \dfrac{x_n}{\lambda} + a_nx_n = \lambda x_n \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{x_n}{\lambda} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \\ x_n(\lambda^2 - a_n\lambda - a_1^2 - a_2^2 - ... - a_{n-1}^2) = 0 \end{cases}$$

si $x_n = 0$, alors $X = 0$

si $x_n \neq 0$, le système équivaut à $\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{x_n}{\lambda} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} & (1) \\ \lambda^2 - a_n\lambda - a_1^2 - a_2^2 - ... - a_{n-1}^2 = 0 & (2) \end{cases}$

L'équation (2) est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = a_n^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2)$

• • Les coefficients étant complexes, ce discriminant peut être nul, le trinôme possède alors une racine double, $\lambda_1 = \dfrac{a_n}{2}$

Les vecteurs propres associés sont : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \dfrac{x_n}{\lambda_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$

Le sous espace propre $E_A(\lambda_1)$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$

• • Dans le cs général, le discriminant Δ est non nul.

L'équation (2) possède alors deux racines complexes distinctes λ_1 et λ_2.

Les sous espaces propres associés, $E_A(\lambda_1)$ et $E_A(\lambda_2)$ sont deux droites vectorielles dirigées respectivement par les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

Deuxième cas : Etudions si 0 est valeur propre de A

$$A.X = 0 \iff \begin{cases} x_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0 \end{cases} \iff x_n = 0 \text{ et } a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} = 0$$

(Rappelons que nous sommes dans le cas où $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \neq (0, 0, ..., 0)$)

Donc 0 est valeur propre de A (ce qu'on aurait pu affirmer avant puisque $\text{rg}(A) \leq 2$)

et le sous espace propre associé est l'intersection des hyperplans d'équations respectives

$x_n = 0$ et $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} = 0$

C'est un sous espace de dimension $n-2$ (ce sont les $n-$uplets solutions d'un système linéaire à n inconnues et de rang 2).

Bilan :

- Si $\Delta = a_n^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2)$ est nul, A a pour valeurs propres $\lambda_1 = \frac{a_n}{2}$ et 0.
  La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à $n-1$.
  A n'est pas diagonalisable.
- Si $\Delta = a_n^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2) \neq 0$, A possède trois valeurs propres : 0, λ_1 et λ_2
  La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à $(n-2)+1+1 = n$.
  A est diagonalisable.

Remarque : Il existe des matrices complexes symétriques non diagonalisables :

Prenons $n = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2i$ (de sorte que $\Delta = 0$)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

1.7 Matrices semblables :

a) Montrer avec un minimum de calcul que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 17 & -21 \\ 14 & -18 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$ sont semblables.

b) Avec MAPLE :

Déterminer explicitement une matrice R inversible telle que $B = R^{-1}.A.R$

SOLUTION : a) $\text{tr}(A) = 17 - 18 = -1$, $\det(A) = -17 \times 18 + 21 \times 14 = -306 + 294 = -12$

$\text{tr}(B) = -11 + 10 = -1$, $\det(A) = -110 + 98 = -12$

Les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique, à savoir $\chi(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + X - 12 = (X-3)(X+4)$

A et B ont chacune deux valeurs propres distinctes, 3 et -4, elles sont diagonalisables et semblables toutes les deux à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Par transitivité, elles sont donc semblables entre elles.

b) Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P.\Delta.P^{-1}$

et une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q.\Delta.Q^{-1}$

Alors $\Delta = P^{-1}.A.P$ et $B = Q.\Delta.Q^{-1} = Q.(P^{-1}.A.P).Q^{-1} = (P.Q^{-1})^{-1}.A.(P.Q^{-1})$

La matrice $R = P.Q^{-1}$ vérifie bien la relation : $B = R^{-1}.A.R$

Calcul pratique avec MAPLE :

On définit la matrice A :

>A:=matrix(2,2,[17,-21,14,-18]);

On calcule ses éléments propres :

vp :=eigenvects(A);

On récupère les vecteurs propres, ils formeront les colonnes de la matrice de passage P :

P:=transpose(matrix([seq(op(vp[i][3]),i=1..2)]));

On vérifie le<calcul :

multiply(inverse(P),A,P);

On procède de même pour la matrice B :

>B:=matrix(2,2,[-11,14,-7,10]); wp:=eigenvects(B);

Q:=transpose(matrix([seq(op(wp[i][3]),i=1..2)]));
multiply(inverse(Q),B,Q);

Enfin on calcule $R = P.Q^{-1}$ et on vérifie que $R^{-1}.A.R = B$:
>R:=multiply(P,inverse(Q)); multiply(inverse(R),A,R);

1.8 Endomorphisme de rang 1 :

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = 1$
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
1) $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
2) $f^2 \neq 0$
3) f est diagonalisable.
4) $\mathrm{tr}(f) \neq 0$

SOLUTION :
Remarquons que dans tous les cas, puisque $\mathrm{rg}(f) = 1$, par la formule du rang,
$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = n - 1$
donc $\ker f$ est un hyperplan de E.
C'est aussi le sous espace propre de f associé à la valeur propre 0.

• Supposons 1) : $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
Soit v un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$ (c'est possible puisque $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle)
Donc $v \notin \ker(f)$ et $f(v) \neq 0$
Or $\exists w \in E,\ f(w) = v$ et $f^2(w) = f(v) \neq 0.$ Donc $f^2 \neq 0$

• Supposons 2) : $f^2 \neq 0$
$\ker f$ est déja un sous espace propre de f associé à la valeur propre 0, de dimension $n-1$.
Puisque $f^2 \neq 0,\ \exists t \in E,\ f^2(t) = f(f(t)) \neq 0.$
$y = f(t)$ est un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$, non nul puisque son image par f n'est pas nulle.
C'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisque $\mathrm{Im}(f)$ est une droite. Mais $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ =Vect(y)
Donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ f(y) = \lambda y.$ λ n'est pas nul puisque $f(y) \neq 0$
Donc λ est une valeur propre de f et il existe un autre sous espace propre de f que $E_0(f) = \ker f$.
Donc la somme des dimensions des sous espacess propres est au moins égale à n et f est diagonalisable.

• Supposons 3) : f est diagonalisable.
Puisque $E_0(f) = \ker f$ est déja un sous espace propre de dimension $n-1$, il existe une deuxième valeur propre $\lambda \neq 0$ et le sous espace propre associé $E_\lambda(f)$ est de dimension 1. $E_0(f) \oplus E_\lambda(f) = E$
Dans une base formée de la réunion d'une base de $E_0(f)$ et d'une base de $E_\lambda(f)$, la matrice de f est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{tr}(f) = \lambda \neq 0$$

• Supposons 4) : $\mathrm{tr}(f) \neq 0$
Complétons une base $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ de $\ker f$ en une base $(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ de E.
(théorème de la base incomplète)

dans une telle base, la matrice de f est de la forme : $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & \times \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & ... & 0 & \times \\ 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f est alors $\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ (au signe près)
et f possède une deuxième valeur propre λ =tr$(f) \neq 0$
Donc f est diagonalisable : $E_0(f) \oplus E_\lambda(f) = E$
$\forall x \in E_\lambda(f),\ f(x) = \lambda x$ donc $x = f(\frac{x}{\lambda})$ d'où il résulte que $E_\lambda(f) \subset$Im(f) et $E_\lambda(f)$ =Im(f) par égalité des dimensions, toutes les deux égales à 1.
L'égalité $E_0(f) \oplus E_\lambda(f) = E$ s'écrit alors $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$

• On a montré finalement que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1). Les quatre propositions sont équivalentes.

1.9 Diagonalisation de f et f^2 :

Soit f un endomorphime d'un espace vectoriel E.

1- Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.

2- a) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, μ une racine carrée complexe de λ.
Montrer que $\ker(f^2 - \lambda\, Id_E) = \ker(f - \mu\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu\, Id_E)$

2- b) On suppose que f^2 est diagonalisable. Montrer que f l'est si et seulement si $\ker f = \ker f^2$

SOLUTION :

1- Si l'endomorphisme f est diagonalisable, il existe une base $(e_1, e_1, ..., e_n)$ de E et $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que la matrice de f dans cette base soit diagonale :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors la matrice de f dans cette même base est :

$$Mat_B(f^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$, ce qui montre que f^2 est diagonalisable.

Remarquons que si $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ et si les autres valeurs propres sont non nulles, alors,
$\ker f = \ker f^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_k)$

2- a) Soit $x \in \ker(f^2 - \lambda\, Id_E)$

• Supposons qu'il existe $y \in \ker(f - \mu\, Id_E)$ et $z \in \ker(f + \mu\, Id_E)$ tels que $x = y + z$
alors $f(x) = f(y) + f(z) = \mu y - \mu z$
en divisant par $\mu \neq 0$, $\begin{cases} y + z = x \\ y - z = \frac{f(x)}{\mu} \end{cases}$ donc $y = \frac{1}{2}(x + \frac{f(x)}{\mu})$ et $z = \frac{1}{2}(x - \frac{f(x)}{\mu})$

Une éventuelle décomposition de $x \in \ker(f^2 - \lambda\, Id_E)$ en somme d'un vecteur de $\ker(f - \mu\, Id_E)$ et d'un vecteur de $\ker(f + \mu\, Id_E)$ est unique.

Les deux sous espaces $\ker(f - \mu\, Id_E)$ et $\ker(f + \mu\, Id_E)$ sont donc en somme directe.

• Réciproquement, soit $x \in \ker(f - \lambda\, Id_E)$
soient $y = \frac{1}{2}(x + \frac{f(x)}{\mu})$ et $z = \frac{1}{2}(x - \frac{f(x)}{\mu})$
alors ◇ $y + z = x$
◇ $f(y) = \frac{1}{2}f(x + \frac{f(x)}{\mu}) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{\mu} = \frac{1}{2}(f(x) + \frac{\lambda\, x}{\mu}) = \frac{1}{2}(f(x) + \mu\, x) = \mu\, y$
donc $y \in \ker(f - \mu\, Id_E)$
◇ $f(z) = \frac{1}{2}f(x - \frac{f(x)}{\mu}) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{\mu} = \frac{1}{2}(f(x) - \frac{\lambda\, x}{\mu}) = \frac{1}{2}(f(x) - \mu\, x) = -\mu\, z$
donc $z \in \ker(f + \mu\, Id_E)$

Tout vecteur x de $\ker(f^2 - \lambda\, Id_E)$ se décompose donc en somme d'un vecteur de $\ker(f - \mu\, Id_E)$ et d'un vecteur de $\ker(f + \mu\, Id_E)$

Finalement $\boxed{\ker(f^2 - \lambda\, Id_E) = \ker(f - \mu\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu\, Id_E)}$

2- b) Supposons que f^2 soit diagonalisable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f^2. $\lambda_0 = 0$ peut être aussi une valeur propres de f^2.
Puisque f^2 est diagonalisable, $\ker(f^2) \oplus \ker(f^2 - \lambda_1\, Id_E) \oplus \ker(f^2 - \lambda_2\, Id_E) \oplus ... \oplus \ker(f^2 - \lambda_p\, Id_E) = E$
(en remarquant que $\ker(f^2) = \{0\}$ si $\lambda_0 = 0$ n'est pas valeur propre de f^2)
Pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, soit μ_i l'une des deux racines carrées complexes de λ_i.
d'après la question précédente, pour tout i, $\ker(f^2 - \lambda_i\, Id_E) = \ker(f - \mu_i\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu_i\, Id_E)$.
Donc $E = \ker(f^2) \oplus \ker(f - \mu_1\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu_1\, Id_E) \oplus ..... \oplus \ker(f - \mu_p\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu_p\, Id_E)$
Les sous espaces $\ker(f \pm \mu_p\, Id_E)$ sont, soit des sous espaces propres de f, soit réduits à $\{0\}$

• Si $\ker(f) = \ker(f^2)$ alors l'égalité
$E = \ker(f) \oplus \ker(f - \mu_1\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu_1\, Id_E) \oplus ..... \oplus \ker(f - \mu_p\, Id_E) \oplus \ker(f + \mu_p\, Id_E)$
montre que E est somme des sous espaces propres de f et f est donc diagonalisable.

• Réciproquement, la question 1- a montré que si f est diagonalisable, alors $\ker(f) = \ker(f^2)$.

1.10 Valeurs propres simples :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $\{Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.
(ii) Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.
(iii) Les valeurs propres de f sont simples.

SOLUTION :

• Supposons que les valeurs propres de f soient simples.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ces n valeurs propres distinctes.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base formée de vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres, et soit $x = e_1 + e_2 + ... + e_n$

alors $f(x) = f(e_1 + e_2 + ... + e_n) = f(e_1) + f(e_2) + ... + f(e_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$

de même $f^2(x) = \lambda_1^2 e_1 + \lambda_2^2 e_2 + ... + \lambda_n^2 e_n$

et pour tout entier k, $f^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \lambda_2^k e_2 + ... + \lambda_n^k e_n$

La matrice du système de vecteurs $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est un déterminant de Vandermonde qui est égal à $\displaystyle\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Ce déterminant est donc non nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts.

Le système de vecteurs $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est donc une base de E et est en particulier un système générateur de E.

On a anisi montré que $(iii) \Longrightarrow (ii)$

• Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.

Le système de n vecteurs $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ étant générateur de l'espace E de dimension n, c'en est une base et en particulier un système libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 Id_E + \lambda_2 f + \lambda_3 f^2 + ... + \lambda_n f^{n-1} = \omega$ (endomorphisme nul)

alors, en appliquant cette égalité au vecteur x, on obtient :

$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \lambda_3 f^2(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0_E$

qui entraine que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ puisque $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est un système libre de E.

La famille $\{Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$ est donc libre.

On a anisi montré que $(ii) \Longrightarrow (i)$

• Supposons que les valeurs propres de f ne soient pas simples.

Alors $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$, $p < n$

On sait que $P(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_p) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + a_{p-2}X^{p-2} + ... + a_1 X + a_0$

$P(f) = f^p + a_{p-1}f^{p-1} + a_{p-2}f^{p-2} + ... + a_1 f + a_0 Id_E = \omega$

ce qui montre que la famille $\{Id_E, f, f^2, \ldots, f^p\}$ est liée, et aussi la famille $\{Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$ qui la contient.

On a anisi montré que $non(iii) \Longrightarrow non(i)$ qui équivaut, par contraposée à $(i) \Longrightarrow (iii)$

1.11 Reste de division par un polynôme :

$E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Q est un polynôme fixé de E.

On considère l'application g qui au polynôme $P(X)$ fait correspondre son reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$

Montrer que g est un endomorphisme de E.

Rechercher ses valeurs propres, sous espaces propres et étudier sa diagonalisabilité.

SOLUTION : $g_o g = g$ donc g est un projecteur. Il est diagonalisable.

Soit q le degré de $Q(X)$.

1 est valeur propre, le sous espace propre associé $E_g(1)$ est l'ensemble des invariants de g, à savoir $\mathbb{R}_{q-1}[X]$. Il est de dimension q.

0 est valeur propre, le sous espace propre associé $E_g(0)$ est le noyau de g, à savoir $Q(X).\mathbb{R}_{n-q}[X]$, l'idéal des multiples de $Q(X)$. Il est de dimension $n - q + 1$.

1.12 Diagonalisation de $g \mapsto f_o g$ et de $g \mapsto g_o f$

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K.

a) On considère l'application F de $L(E)$ dans lui-même qui à $g \in L(E)$ fait correspondre $F(g) = f_o g$.

Déterminer les éléments propres de F en fonction de ceux de f.

Montrer que F est diagonalisable si et seulement si f l'est.

b) On considère l'application Φ de $L(E)$ dans lui-même qui à $g \in L(E)$ fait correspondre $\Phi(g) = g_o f$.

Montrer que f et Φ ont mêmes valeurs propres, et que Φ est diagonalisable si et seulement si f l'est.

SOLUTION :

a)• Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(F)$. Il existe $g \in L(E)$, non nul, tel que $F(g) = \lambda g$

g étant non nul, il existe $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) \neq 0$.

Alors $(F(g))(x_0) = f_o g(x_0) = \lambda g(x_0)$ donc $f(\underbrace{g(x_0)}_{\neq 0}) = \lambda g(x_0)$ et λ est valeur propre de f.

Ainsi, $\mathrm{Spec}(F) \subset \mathrm{Spec}(f)$

• Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Il existe $v \in E$, non nul, tel que $f(v) = \lambda v$

Soit p un projecteur sur la droite $\mathrm{Vect}(v)$ parallèlement à un hyperplan supplémentaire H.

alors, $\forall x \in E, p(x) \in \mathrm{Vect}(v)$, donc $f(p(x)) = \lambda p(x)$. Ainsi, $F(p) = f_o p = \lambda p$ et λ est valeur propre de F.

Donc, $\mathrm{Spec}(f) \subset \mathrm{Spec}(F)$ et finalement, $\boxed{\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(F)}$

• Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(F)$, E_λ^f le sous espace propre associé pour f et E_λ^F le sous espace propre associé pour F.

Soit $g \in L(E)$. $\quad g \in E_\lambda^F \iff F(g) = \lambda g$

$$\iff f_o g = \lambda g$$

$$\iff \forall x \in E,\ f_o g(x) = \lambda g(x)$$

$$\iff \forall x \in E,\ g(x) \in E_\lambda^f$$

$$\iff g \in L(E, E_\lambda^f)$$

donc, $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(F), \quad E_\lambda^F = L(E, E_\lambda^f)}$

• Alors, pour tout λ, $\quad \dim(E_\lambda^F) = \dim(L(E, E_\lambda^f)) = \dim(E).\dim(E_\lambda^f)$

donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in Spec(F)} \dim(L(E, E_\lambda^f)) = n. \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(E_\lambda^f)$

d'où, f est diagonalisable $\displaystyle\iff \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(E_\lambda^f) = n$

$$\iff \sum_{\lambda \in Spec(F)} \dim(L(E, E_\lambda^f)) = n.n = \dim(L(E))$$

$\iff$ F est diagonalisable.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \iff F \text{ est diagonalisable.}}$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ et E_λ^Φ le sous espace propre associé.

Soit $g \in L(E)$, non nul. $\quad g \in E_\lambda^\Phi \iff \Phi(g) = \lambda g \iff g_o f = \lambda g$

$$\iff \forall x \in E,\ g_o f(x) = \lambda g(x)$$

$$\iff \forall x \in E,\ g(f(x) - \lambda x) = 0$$

$$\iff \forall x \in E,\ f(x) - \lambda x \in \ker g$$

$$\iff \mathrm{Im}(f - \lambda Id_E) \subset \ker g$$

g n'étant pas nul, $\ker g \neq E$. $\ker g$ est un sous espace vectoriel de E, de dimension $\leq n-1$.

L'inclusion $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E) \subset \ker g$ implique que l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas surjectif, que $\det(f - \lambda Id_E) = 0$, c'est à dire que λ est valeur propre de f.

• Réciproquement, si λ est valeur propre de f, $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E)$ est un sous espace de E strictement inclus dans E et il existe un endorphisme g de E, nul sur $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E)$ et non identiquement nul (il suffit de le définir comme étant non nul sur un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E)$).

Un tel g vérifie $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E) \subset \ker g$, donc $\forall x \in E,\ g(f(x) - \lambda x) = 0$ et finalement $\Phi(g) = g_o f = \lambda g$. Donc λ est valeur propre de Φ.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Spec}(\Phi) = \mathrm{Spec}(f)}$

• De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) = \mathrm{Spec}(f)$, E_λ^Φ est l'ensemble des endomorphismes $g \in L(E)$ tels que $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E) \subset \ker g$.

Si m_λ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda^f = \ker(f - \lambda Id_E)$, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E)) = q_\lambda = n - m_\lambda$

Soit $(e_1, e_2, ..., e_q)$ une base de $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E)$, qu'on complète par des vecteurs $(e_{q+1}, ..., e_n)$ en une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E.

Un endomorphisme $g \in L(E)$ vérifie $\mathrm{Im}(f - \lambda Id_E) \subset \ker g$ si et seulement si sa matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & \times & ... & \times \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \times & ... & \times \\ 0 & ... & 0 & \times & ... & \times \end{pmatrix}$$

Ces endomorphismes forment donc un sous espace de $L(E)$ de dimension $(n-q).n = m_\lambda.n$: $\dim(E_\lambda^\Phi) = m_\lambda.n$

• $\displaystyle\sum_{\lambda \in Spec(\Phi)} \dim(E_\lambda^\Phi) = \sum_{\lambda \in Spec(\Phi)} m_\lambda.n = n. \sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(E_\lambda^f)$

d'où, Φ est diagonalisable $\iff \sum_{\lambda\in Spec(\Phi)} \dim(E_\lambda^\Phi) = \dim(L(E)) = n^2$

$\iff \sum_{\lambda\in Spec(f)} \dim(E_\lambda^f) = n$

$\iff f$ est diagonalisable

1.13 *Matrices définies par blocs :

1- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$

Rechercher les éléments propres de B en fonction de ceux de A. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

2- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 7A & 6A \\ -2A & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

3*- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A est nulle.

SOLUTION :

1- Soient $\mu \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{C}^{2n}$, non nul. $(X', X'' \in \mathbb{C}^n)$

$B.X = \mu.X \iff \begin{cases} A.X'' = \mu X' \\ X' = \mu X'' \end{cases} \iff \begin{cases} A.X'' = \mu^2 X'' \\ X' = \mu X'' \end{cases}$

X'' ne peut pas être nul sinon $X' = \mu X''$ et X le seraient. Donc μ^2 est valeur propre de A et X'' est un vecteur propre associé.

Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ le spectre de A. Aucune des valeurs propres λ_i n'est nulle puisque A est inversible. Pour chaque i, soit μ_i l'une des deux racines carrées complexes de λ_i. L'équivalence ci-dessus montre que $\mathrm{Sp}(B) = \{\mu_1, -\mu_1, \mu_2, -\mu_2, ..., \mu_p, -\mu_p\}$

De plus, l'application $X \mapsto (\mu_i X, X)$ est une injection de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{2n}$, qui transforme $E_A(\lambda_i)$ en $E_B(\mu_i)$. Ces deux espaces ont même dimension.

Donc $\sum_{\mu\in Sp(B)} \dim E_B(\mu) = 2 \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim E_A(\lambda)$

il en résulte que :

A est diagonalisable $\iff \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim E_A(\lambda) = n \iff \sum_{\mu\in Sp(B)} \dim E_B(\mu) = 2n \iff B$ est diagonalisable.

2- La matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 3 et 4, et pour vecteurs propres respectifs $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. (calcul à la main ou avec MAPLE)

En définissant $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et l'égalité : $P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} -I_n & -2I_n \\ 2I_n & 3I_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7A & 6A \\ -2A & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3I_n & 2I_n \\ -2I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3A & -6A \\ 8A & 12A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3I_n & 2I_n \\ -2I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} -I_n & -2I_n \\ 2I_n & 3I_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3I_n & 2I_n \\ -2I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$

En posant $Q = \begin{pmatrix} 3I_n & 2I_n \\ -2I_n & -I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ on a $Q^{-1}B.Q = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix}$

La matrice $B = \begin{pmatrix} 7A & 6A \\ -2A & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix}$ et est diagonalisable si et seulement si cette dernière l'est.

- Si A diagonalisable, il existe une matrice $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $R^{-1}.A.R$ soit une matrice diagonale Δ

alors $\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3R.\Delta.R^{-1} & 0 \\ 0 & 4R.\Delta.R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3\Delta & 0 \\ 0 & 4\Delta \end{pmatrix}}_{matrice\ diagonale} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ est inversible et a pour inverse $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & 4A \end{pmatrix}$ est diagonalisable et B l'est aussi.

3- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A = 0$ alors B est nulle donc diagonalisable.

• Réciproquement, si la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors elle admet un polynôme annulateur $P(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$ scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples.

Or $B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

(récurrence sans difficulté)

$$P(B) = 0 = \sum_{k=0}^{q} a_k B^k = a_0 I_{2n} + \sum_{k=1}^{q} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{q} a_k A^k & \sum_{k=0}^{q} a_k k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{q} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

$P(X)$ est donc un polynôme annulateur de A scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples. Donc A est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de A. C'est donc une racine de $P(X)$ mais aussi de $X.P'(X)$ qui est aussi un polynôme annulateur de A.

$P(X)$ étant à racine simple, λ n'est pas racine de $P'(X)$. Mais $\lambda P'(\lambda) = 0$ donc $\lambda = 0$.

Ainsi A est une matrice diagonalisable dont la seule valeur propre est 0. Donc $A = 0$.

1.14 *Valeur propre commune :

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ A.X - X.B = 0 \implies X = 0$

b) $\forall C \in M_n(\mathbb{C})$, l'équation $A.X - X.B = C$ admet au moins une solution X dans $M_n(\mathbb{C})$

c) A et B n'ont pas de valeur propre commune.

d) $\chi_A(B)$ est une matrice inversible.

SOLUTION :

• Introduisons l'application $\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & A.X - B.X \end{cases}$

Φ est clairement linéaire, c'est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

Or a) équivaut à dire que $\ker \Phi = \{0\}$, c'est à dire que ϕ est injective.

b) équivaut à dire que Φ est surjective.

Or $M_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, l'endomorphisme Φ est injectif si et seulement si il est surjectif.

On a ainsi établi que a) $\iff$ b)

• Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et $m_1, m_2, ..., m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

$\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{p} (B - \lambda_k I_n)^{m_k}$ et $\det(\chi_A(B)) = \prod_{k=1}^{p} (\det(B - \lambda_k I_n))^{m_k}$

alors $\chi_A(B)$ est une matrice inversible $\iff \det(\chi_A(B)) \neq 0$

$$\iff \prod_{k=1}^{p} (\det(B - \lambda_k I_n))^{m_k} \neq 0$$

$\iff \forall k \in \{1, 2, ..., p\},\ \det(B - \lambda_k I_n) \neq 0$

$\iff$ aucune des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de A n'est valeur propre de B

$\iff$ A et B n'ont pas de valeur propre commune.

On a ainsi établi que c) $\iff$ d)

• Supposons d) : $\chi_A(B)$ est une matrice inversible, et montrons a)

Soit X un matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A.X - X.B = 0$

$A.X - X.B = 0 \implies A.X = X.B$

$\implies A^2.X = A.(AX) = A.(XB) = (AX).B = (XB).B = X.B^2$

par une récurrence sans difficulté, on obtient : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k.X = X.B^k$

puis, par combinaison linéaire de ces égalités, pour tout entier m, pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k A^k\right).X = X.\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k A^k\right)$$

c'est à dire : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A).X = X.P(B)$

et en particulier, $\chi_A(A).X = X.\chi_A(B)$

donc $0 = X.\chi_A(B)$ et comme la matrice $\chi_A(B)$ est supposée inversible, en multipliant à droite par son inverse, on obtient $X = 0$.

On a ainsi montré que d) $\implies$ a)

• Montrons enfin que a) $\implies$ c) par contraposée.

Supposons que A et B aient une valeur propre commune λ :

il existe $V \in \mathbb{C}^n$, non nul, tel que $A.V = \lambda.V$

La matrice B et sa transposée ayant même polynôme caractéristique, ces deux matrices ont aussi les mêmes valeurs propres. Donc il existe $W \in \mathbb{C}^n$, non nul, tel que ${}^tB.W = \lambda.W$, soit en transposant, ${}^tW.B = \lambda.{}^tW$

V est une matrice colonne non nulle, ${}^tW$ est une matrice ligne non nulle. Leur produit $V.{}^tW$ est donc une matrice carrée non nulle.

et $A.(V.{}^tW) = (A.V).{}^tW = \lambda.V{}^tW = V.(\lambda{}^tW) = V.{}^tW.B = (V.{}^tW).B$

On a donc trouvé une matrice $X = V.{}^tW$ non nulle telle que $A.X - X.B \neq 0$. La propriété a) est donc fausse.

On a ainsi montré par contraposée que a) $\implies$ c)

1.15 Théorème de Cayley-Hamilton :

Lorsque $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_A(x) = \det(x.I_n - A)$ son polynôme caractéristique.

Pour $x \in \mathbf{K}$, on considère la matrice $C(x) = {}^tCom(x.In - A)$ où $Com(B)$ désigne la comatrice de la matrice B, et ${}^tCom(B)$ sa transposée. (on rappelle que $B.{}^tCom(B) = \det(B).I_n$)

a) Montrer que l'on peut écrire $C(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k$ où les B_k sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ indépendantes de x.

b) Déterminer chaque $B_k,\ k = 1....n-1$, en fonction de A et des coefficients de $\chi_A(X)$.

Redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

SOLUTION :

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

alors $xI_n - A = \begin{pmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & x - a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

Le cofacteur d'indice (i,j) de cette matrice est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant la i^e ligne et la j^e colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$. C'est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n-1$ dont tous les coefficients sont des constantes, ou sont de la forme $x - a_{i,i}$. Dans les deux cas, ce sont des polynômes de degré 0 ou 1 en x.

La formule de développement d'un déterminant ($\det(B) = \displaystyle\sum_{s\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(s) b_{s(1),1} \ldots b_{s(i),i} \ldots b_{s(n),n}$) montre que $\det(xI_n - A)$ sera un polynôme en x, de degré $\leqslant n-1$.

Ainsi, si $B(x) = {}^tCom(x.In - A)$,

$$\forall (i,j), B(x)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{i,j,k}\, x^k \quad \text{où} \quad b_{i,j,k} \quad \text{sont des scalaires de } \mathbf{K}.$$

En notant alors $B_k = (b_{i,j,\,k})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}} = \begin{pmatrix} b_{1,1,k} & b_{1,2,k} & \cdots & b_{1,n,k} \\ b_{2,1,k} & b_{2,2,k} & \cdots & b_{2,n,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1,k} & b_{n,2,k} & \cdots & b_{n,n,k} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

on obtient : $B(x) = {}^tCom(x.In - A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k\, B_k$

b) On sait que ${}^tCom(x.In - A).(x.In - A) = \det(x.In - A).I_n$

$$\text{donc } \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\, B_k\right).(x.In - A) = \chi_A(x).I_n$$

$$\text{Développons : } \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}\, B_k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k\, B_k A = \chi_A(x).I_n = \left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right).I_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k\, B_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k\, B_k A = \left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right).I_n$$

$$x^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (B_{k-1} + B_k.A) - B_0.A = \left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right).I_n$$

En identifiant les coefficients matriciels de cette égalité polynomiale (identification légitime qui correspond à une identification coefficient par coefficient de chaque matrice), on obtient :

$$\begin{cases} B_{n-1} = I_n \\ \forall k \in \{1, 2, ..., n-1\},\ B_{k-1} + B_k.A = a_k I_n \\ -B_0.A = a_0.I_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{n-1} = I_n \\ B_{n-2} - B_{n-1}.A = a_{n-1} I_n \\ B_{n-3} - B_{n-2}.A = a_{n-2} I_n \\ \cdots \quad \cdots \\ B_2 + B_3.A = a_3 I_n \\ B_1 + B_2.A = a_2 I_n \\ B_0 + B_1.A = a_1 I_n \\ -B_0.A = a_0.I_n \end{cases}$$

On résoud en descendant ligne par ligne :
$$\begin{cases} B_{n-1} = I_n \\ B_{n-2} = A + a_{n-1} I_n \\ B_{n-3} = A^2 + a_{n-1}.A + a_{n-2} I_n \\ B_{n-4} = A^3 + a_{n-1}.A^2 + a_{n-2}.A + a_{n-3} I_n \\ \cdots \quad \cdots \\ B_1 = A^{n-2} + a_{n-1}.A^{n-3} + a_{n-2}.A^{n-4} + ... + a_3.A + a_2 I_n \\ B_0 = A^{n-1} + a_{n-1}.A^{n-2} + a_{n-2}.A^{n-3} + ... + a_3.A^2 + a_2.A + a_1 I_n \\ -(A^{n-1} + a_{n-1}.A^{n-2} + a_{n-2}.A^{n-3} + ... + a_3.A^2 + a_2.A + a_1 I_n).A = a_0.I_n \end{cases}$$

La dernière égalité de cette liste s'écrit aussi :
$$A^n + a_{n-1}.A^{n-1} + a_{n-2}.A^{n-2} + ... + a_3.A^3 + a_2.A^2 + a_1.A + a_0\ I_n = 0,$$
c'est à dire $\boxed{\chi_A(A) = 0}$

2 Polynôme annulateur

2.1 Trace et déterminant :

On considère un espace vectoriel E de dimension n **sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels**, et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $\quad f^3 = f^2 - 4f + 4Id_E$

(ii) $\quad f$ n'a pas de point fixe autre que le vecteur nul 0_E.

1- a) Montrer que f est inversible et donner une expression de son inverse.
Montrer que n est pair. (on pourra s'intéresser à $\det(f)$)

b) L'endomorphisme f est il diagonalisable ?

2 - a) Soit $x \in E - \{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est un système libre de E.
Montrer que le plan $\mathscr{P} = \text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f. Quelle est la matrice de $\widetilde{f}$, endomorphisme induit par f sur $\mathscr{P}$, dans la base $(x, f(x))$?

b) Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs (de dimensions 2)
Calculer $\text{tr}(f)$ et $\det f$.

SOLUTION **:** 1 - a) $f^3 = f^2 - 4f + 4Id_E \implies f^3 - f^2 + 4f = 4Id_E$
$\implies f_o(\frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{4}f + Id_E) = Id_E$

ce qui montre que f est inversible et que $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{4}f + Id_E}$

• Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + 4X - 4$ est un polynôme annulateur de f.
Or 1 est racine de ce polynôme, qui est donc divisible par $X - 1$:
$$P(X) = X^3 - X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X^2+4)$$
Donc $(f - Id_E)_o(f^2 + 4Id_E) = 0$
Or $\ker(f - Id_E) = \{x \in E,\ f(x) = x\} = \{0_E\}$ d'après (ii) . Donc $f - Id_E$ est un endomorphisme injectif, et donc bijectif puisque E est de dimension finie.
En composant l'égalité précédente par $(f - Id_E)^{-1}$, on obtient $f^2 + 4Id_E = 0$, soit encore $f^2 = -4Id_E$.
D'où : $\det(f^2) = (\det f^2) = \det(-4Id_E) = (-4)^n$
Donc $(-4)^n > 0$, ce qui entraîne que $\boxed{n \text{ est un entier pair}}$.

1 - b) L'endomorphisme f admet le polynôme $X^2 + 4$ comme polynôme annulateur.
Ses valeurs propres sont nécessaiement racines de ce polynôme. Or $P(X)$ n'a pas de racine rélle. donc f n'admet pas de valeur propre (on rappelle que le corps de référence est $\mathbb{R}$ dans cette exercice), et $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

2 - a) Soit $x \in E - \{0\}$. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda.x + \mu.f(x) = 0$.
En composant par f, on obtient : $\lambda.f(x) + \mu.f^2(x) = 0$, soit encore : $\lambda.f(x) - 4\mu x = 0$, puisque $f^2 = -4Id_E$
$$\implies \begin{cases} \lambda.x + \mu.f(x) = 0 \\ \lambda.f(x) - 4\mu x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda^2.x + \lambda.\mu.f(x) = 0 \\ \lambda.\mu.f(x) - 4\mu^2 x = 0 \end{cases} \implies (\lambda^2 + 4\mu^2).x = 0 \quad \text{(par différence)}$$

$\Longrightarrow \lambda^2+4\mu^2=0 \quad$ (car $x \neq 0$)
$\Longrightarrow \lambda^2=\mu^2=0 \quad$ (car ce sont deux réels $\geqslant 0$, de somme nulle)
$\Longrightarrow \lambda=\mu=0 \quad$ $\boxed{\text{Le système } (x, f(x)) \text{ est donc libre.}}$

• x a pour image par f, $f(x)$, qui appartient à $\mathscr{P}$.
$f(x)$ a pour image par f, $f[f(x)]=-4x$, qui appartient aussi à $\mathscr{P}$.
Par linéarité, tout vecteur de $\mathscr{P}$, combinaison linéaire de x et $f(x)$, est encore dans $\mathscr{P}$.
Donc $\boxed{\mathscr{P}=\operatorname{Vect}(x, f(x)) \text{ est stable par } f}$.

• les relations $\begin{cases} \widetilde{f}(x)=f(x) \\ \widetilde{f}(f(x))=f^2(x)=-4x \end{cases}$ montrent que :

$$\boxed{\text{la matrice de } \widetilde{f} \text{ dans la base } (x, f(x)) \text{ est :} M=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Soit $x_1 \in E-\{0\}$. D'après la question précédente, le système $(x_1, f(x_1))$ est libre. Soit $W_1=$Vect$(x_1, f(x_1))$. Si $W_1=E$, c'est à dire si E est de dimension 2, $(x_1, f(x_1))$ est alors une base de E, et la matrice de f dans cette base est $M=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\dim(E)>2$, alors $W_1 \subsetneqq E$, et il existe un vecteur x_2 appartenant à $E-W_1$. Le système $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ est alors libre, comme on va le montrer ci-dessous, et on posera $W_2=\operatorname{Vect}(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$.

Si E est de dimension 4, alors $E=W_2$ aura pour base $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$, et la matrice de f dans cette base sera la matrice diagonale par blocs 2-2, $\quad M=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Par récurrence, supposons que $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}))$ soit un système libre de E.

Si $W_{p-1}=$Vect$(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}))$ est égal à E, alors ce système constitue une base de E, et la matrice de f dans cette base est une matrice diagonale par blocs, ayant sur la diagonale $p-1$ fois la matrice $\Delta=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Sinon, il existe un vecteur x_p de E qui n'appartient pas à W_{p-1}. Comme annoncé, vérifions que le système $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}), x_p, f(x_p))$ est bien un système libre.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots., \beta_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que :

$$\alpha_1.x_1+\beta_1.f(x_1)+\alpha_2.x_2+\beta_2.f(x_2)+\ldots+\alpha_{p-1}.x_{p-1}+\beta_{p-1}.f(x_{p-1})+\alpha_p.x_p+\beta_p.f(x_p)=0 \qquad (1)$$

alors, en composant par f, et en tenant compte de la relation $f^2=-4Id_E$, on obtient :

$$\alpha_1.f(x_1)-4\beta_1.x_1+\alpha_2.f(x_2)-4\beta_2.x_2+\ldots+\alpha_{p-1}.f(x_{p-1})-4\beta_{p-1}.x_{p-1}+\alpha_p.f(x_p)-4\beta_p.x_p=0 \qquad (2)$$

En multipliant la première relation par α_p, la deuxième par $-\beta_p$, et en ajoutant, les termes en $f(x_p)$ s'éliminent, et on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i\alpha_p+4\beta_i\beta_p)x_i+\sum_{i=1}^{p-1}(\beta_i\alpha_p-\alpha_i\beta_p)f(x_i)}_{\in W_{p-1}}=-(\alpha_p^2+4\beta_p^2)\underbrace{x_p}_{\notin W_{p-1}}$$

Puisque la combinaison linéaire linéaire gauche appartient à W_{p-1} et que x n'y appartient pas par définition, nécessairement $\alpha_p^2+4\beta_p^2=0$, ce qui entraîne que $\alpha_p=\beta_p=0$

L'égalité (1) se réduit alors à :

$$\alpha_1.x_1+\beta_1.f(x_1)+\alpha_2.x_2+\beta_2.f(x_2)+\ldots+\alpha_{p-1}.x_{p-1}+\beta_{p-1}.f(x_{p-1})=0$$

qui entraîne que tous les α_i et les β_i sont nuls puisque le système $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}))$ est supposé libre par construction.

On a ainsi montré que $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}), x_p, f(x_p))$ est bien un système libre.

• Le procédé de construction des espaces W_p se poursuit tant que W_p est strictement inclus dans E. Or $\dim(W_p)=2p$, ce qui montre que le processus doit nécessairement s'arrêter, sinon la dimension de W_p viendrait à dépasser celle de E, ce qui est absurde puisque $W_p \subset E$.

Il existe donc un entier p tel que $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_{p-1}, f(x_{p-1}), x_p, f(x_p))$ soit une base de $E=W_p$.

Dans une telle base, la matrice de f est de ma forme :

$$M=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \Delta=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Sur la forme de la matrice M, $\boxed{\operatorname{tr}(f)=\operatorname{tr}(M)=0}$ puisque tous les éléments diagonaux de M sont nuls,

et $\boxed{\det(f)=\det(M)=(\det(\Delta))^p=4^p=4^{n/2}=2^n}$ puisque $\det(\Delta)=4$.

2.2 Trace et déterminant :

On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 = -4A + 5I_n$

et A n'a pas de point fixe autre que le vecteur colonne nul $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ A.Y = Y \implies Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$$

a) A est elle inversible ?

b) A est elle diagonalisable ?

c) Montrer que n est pair. Calculer la trace et le déterminant de la matrice A

SOLUTION **:** Le polynôme $P(X) = X^3 + 4X - 5$ est un polynôme annulateur de A

1 est racine de ce polynôme, et $P(X) = (X-1)(X^2 + X + 5)$

Par ailleurs, puisque $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (A - I_n).Y = 0 \implies Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice $A - I_n$ est inversible.

$P(A) = A^3 + 4A - 5I_n = (A - I_n)(A^2 + A - 5I_n) = 0$

En multipliant à gauche par $(A - I_n)^{-1}$, on obtient : $A^2 + A - 5I_n = 0$

Donc $A(A + I_n) = -5I_n$ et $A \times -\frac{1}{5}(A + I_n) = I_n$, ce qui montre que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible}}$ et que :

$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{5}(A + I_n)}$

b) Soit λ une valeur propre de A (réelle ou complexe) .

Puisque $A^2 + A - 5I_n = 0$, la polynôme $X^2 + X - 5$ est un polynôme annulateur de A. Donc λ est racine de ce polynôme.

Donc $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{19}}{2}$ ou $\lambda = \lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{19}}{2}$

Puisque A n'a pas de valeur propre réelle, $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Puisque le polynome annulateur $X^2 + X - 5 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples, $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

c) Puisque A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elle est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale

$\Delta = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{p\ fois}, \underbrace{\lambda_2, ..., \lambda_2}_{q\ fois})$ (p et q sont des entiers naturels, éventuellement nuls)

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\Delta) = p\lambda_1 + q\lambda_2 = -\dfrac{p+q}{2} + i\dfrac{p\sqrt{19} - q\sqrt{19}}{2} = -\dfrac{p+q}{2} + i\dfrac{(p-q)}{2}\sqrt{19}$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{tr}(A)$ est un réel, donc $p = q$.

Il s'ensuit que $\boxed{n = p + q = 2p \text{ est un entier pair}}$.

$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\Delta) = p(\lambda_1 + \lambda_2) = -\dfrac{n}{2}}$

$\boxed{\det(A) = \det(\Delta) = \lambda_1^p \lambda_2^p = (\lambda_1 \overline{\lambda_1})^p = |\lambda_1|^{2p} = \sqrt{5}^n = 5^p = 5^{n/2}}$

2.3 Polynôme annulateur :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1- On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$

Montrer que n est pair.

2- On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$

Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair, et que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

3- On suppose que $A^3 = 2A + 3I_n$. Montrer que $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant \det(A) \leqslant 2^n$

2.4 Polynôme annulateur

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, (qui n'est pas supposé de dimension finie).

a) On suppose qu'il existe un polynôme $P(X)$ annulateur de f et tel que $P'(0) \neq 0$.

Montrer que la somme $\mathrm{Im} f + \ker f$ est directe.

b) On suppose qu'il existe un polynôme $P(X)$ annulateur de f et tel que :

$P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$

Montrer que $\mathrm{Im}(f)+\ker f=E$

SOLUTION : a) Soit $y\in \mathrm{Im}f\cap\ker f$. $\exists x\in E, y=f(x)$ et $f(y)=0$.

$P(X)$ est de la forme $a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+...+a_1X+a_0$

donc $P(f)=a_mf^m+a_{m-1}f^{m-1}+...+a_1f+a_0Id_E=\omega$ (endomorphisme nul)

$\left\{\begin{array}{l} y=f(x)\\ f(y)=0\end{array}\right\} \implies f^2(x)=0 \implies \forall k\geqslant 2,\ f^k(x)=0$

et de même, $f(y)=0 \implies \forall k\geqslant 1,\ f^k(y)=0$

• Si $a_0\neq 0$, alors $P(f)(y)=a_m\underbrace{f^m(y)}_{=0}+a_{m-1}\underbrace{f^{m-1}(y)}_{=0}+...+a_1\underbrace{f(y)}_{=0}+\underbrace{a_0}_{\neq 0}y=0_E$

donc $y=0$

• Si $a_0=0$, alors $P(f)(x)=a_m\underbrace{f^m(x)}_{=0}+a_{m-1}\underbrace{f^{m-1}(x)}_{=0}+...+\underbrace{a_1}_{\neq 0}\underbrace{f(x)}_{=y}+\underbrace{a_0}_{=0}x=0_E$

$\implies a_1\,y=0.$ Or $a_1=P'(0)\neq 0$, donc $y=0$

On a ainsi montré que $\mathrm{Im}f\cap\ker f=\{0_E\}$ et $\boxed{\text{la somme } \mathrm{Im}f+\ker f \text{ est directe}}$.

b) Puisque $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$, 0 est racine simple du polynôme $P(X)$.

Il existe $Q(X)\in\mathbf{K}[X]$ tel que $P(X)=X.Q(X)$ et $Q(0)\neq 0$ (0 est racine simple de P puisque $P'(0)\neq 0$)

Le polynôme irréductible X ne divise pas $Q(X)$, il est donc premier avec lui.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ tels que

$X.U(X)+Q(X).V(X)=1$

en appliquant cette égalité à l'endomorphisme f, on obtient :

$f_\circ U(f)+Q(f)_\circ V(f)=Id_E$

Soit $x\in E$, quelconque.

$[f_\circ U(f)](x)+[Q(f)_\circ V(f)](x)=x$

$[f_\circ U(f)](x)=f[U(f)(x)]\in \mathrm{Im}(f)$

$f(\ [Q(f)_\circ V(f)](x)\ )=\underbrace{P(f)}_{=0}[V(f)(x)]$ ($f_\circ Q(f)=P(f)$ puisque $X.Q(X)=P(X)$)

donc $[Q(f)_\circ V(f)](x)\in\ker(f)$

On vient de décomposer tout élément de E en somme d'un élément de $\mathrm{Im}(f)$ et d'un élément de $\ker f$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f)+\ker f=E}$

2.5 Diagonalisabilité de $M\ \mapsto A.M$:

On considère une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et l'application ϕ_A définie par :

$$\phi_A:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ M & \mapsto & AM\end{array}\right.$$

1- Montrer que ϕ_A est linéaire.

2- Le but de l'exercice est de montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Calculer $\phi_A^2(M)$, puis $\phi_A^k(M)$ pour $k\in\mathbb{N}$. En déduire que si P est un polynôme, alors $P(\phi_A)=\phi_{P(A)}$.

3 - En déduire que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de ϕ_A.

4 - Montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

SOLUTION : 1 - Sans difficulté.

2 - • $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi_A^2(M)=\phi_A(\phi_A(M))=A.(A.M)=A^2.M$

Supposons que $\phi_A^k(M)=A^k.M$. Alors $\phi_A^{k+1}(M)=\phi_A(\phi_A^k(M))=A.(A^k.M)=A^{k+1}.M$

ce qui montre par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\phi_A^k(M)=A^k.M$

• Soit $P(X)=\sum_{k=0}^m a_kX^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$.

Alors $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_A)(M)=\sum_{k=0}^m a_k\phi_A^k(M)=\sum_{k=0}^m a_kA^k.M=P(A).M=\phi_{P(A)}(M)$

Donc $P(\phi_A)=\phi_{P(A)}$.

3 - • Si P est un polynôme annulateur de A, alors $P(A)=0$ et donc $P(\phi_A)=\phi_{P(A)}=\phi_0=\omega$ (endomorphisme nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

Donc P est un polynôme annulateur de ϕ_A.

• Si P est un polynôme annulateur de ϕ_A, alors $P(\phi_A)=\omega=\phi_{P(A)}$

Donc $\phi_{P(A)}:\ M\ \mapsto\ P(A).M$ est l'application nulle. Donc $P(A)=0$ et P est un polynôme annulateur de A . (Si $B\neq 0$, l'application $M\ \mapsto\ B.M$ n'est pas l'application nulle)

4 - A est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racine simple.

Or un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A si et seulement si c'est est un polynôme annulateur de ϕ_A.

Donc ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

2.6 Matrices nilpotentes :

On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) A est nilpotente.

b) $\mathrm{Sp}(A) = \{O\}$.

c) $\chi_A(X) = X^n$ (au signe près)

2- Montrer que les propositions qui précèdent sont aussi équivalentes à la proposition d) suivante:

d) $\forall p \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathrm{tr}(A^p) = 0$

SOLUTION :

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

• Supposons que A est nilpotente. $\exists p \geq 1,\ A^p = 0$. Alors X^p est un polynôme annulateur de A.
Soit λ une valeur propre de f. λ est racine de ce polynôme annulateur : $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.
Ce qui montre que $\mathrm{Sp}(A) = \{O\}$.

• Supposons que $\mathrm{Sp}(A) = \{O\}$.
Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Puisque sa seule racine est 0, c'est donc X^n (au signe près)
Donc $\chi_A(X) = X^n$ (au signe près)

• Supposons que $\chi_A(X) = X^n$.
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de A (théorème de Cayley Hamilton)
Donc $A^n = 0$ et A est nilpotente.

2- • Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ qui vérifie les propriétés a), b) et c).
Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = P.T.P^{-1}$ où T est une matrice triangulaire de la forme $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \times & 0 & \dots & 0 \\ \times & \vdots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & 0 \end{pmatrix}$

(les valeurs propres, sur la diagonale de T, sont toutes nulles)

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T^k est elle aussi triangulaire inférieure stricte. Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(T^k) = 0$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = P.T^k.P^{-1}$ et $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(T^k) = 0$

• Suppposons que A vérifie la propriété d) : $\forall p \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathrm{tr}(A^p) = 0$
A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = P.T.P^{-1}$ où T est une matrice triangulaire de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \times & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \times & \vdots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & \lambda_n \end{pmatrix}$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q,\ q \leq n$ les valeurs propres non nulles de A, et $m_1, m_2, ..., m_q$ leurs ordres de multiplicités respectifs.

Pour tout $p \in \{1, 2, ..., n\},\ \mathrm{tr}(A^p) = 0 = m_1\lambda_1^p + m_2\lambda_2^p + ... + m_q\lambda_q^p$

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + ... + \lambda_q m_q = 0 \\ \lambda_1^2 m_1 + \lambda_2^2 m_2 + ... + \lambda_q^2 m_q = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \lambda_1^n m_1 + \lambda_2^n m_2 + ... + \lambda_q^n m_q = 0 \end{cases}$$

On peut voir le $q-$uplet $(m_1, m_2, ..., m_q)$ comme solution d'un système de n équations à q inconnues.

Les q premières équations ont pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_q \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_q^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^q & \lambda_2^q & ... & \lambda_q^q \end{pmatrix}$

Dans son déterminant on peut mettre en facteur λ_j dans la j^e colonne.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_q \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_q^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^q & \lambda_2^q & ... & \lambda_q^q \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2...\lambda_q \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_q \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_q^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{q-1} & \lambda_2^{q-1} & ... & \lambda_q^{q-1} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2...\lambda_q \prod_{1 \leq i < j \leq q} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Ce déterminant n'est pas nul car les λ_i sont non nuls et deux à deux disjoints.

Le système $\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + ... + \lambda_q m_q = 0 \\ \lambda_1^2 m_1 + \lambda_2^2 m_2 + ... + \lambda_q^2 m_q = 0 \\ \quad\quad ...... \\ \lambda_1^q m_1 + \lambda_2^q m_2 + ... + \lambda_q^q m_q = 0\end{array}\right.$ est un système de Cramer, homogène, qui a donc pour unique solution le $q-$uplet nul, ce qui est absurde.

Donc A ne possède pas de valeur propre non nulle et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

2.7 Matrice de rang 1 (Centrale 06)

Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(H) = 1$

a) Montrer que H s'écrit comme produit d'une matrice colonne X par une matrice ligne Y.
En déduire que $H^2 = \mathrm{tr}(H).H$

b) Déterminer le polynôme caratéristique de H.
H est elle diagonalisable ?

c) Soit $M = I_n + H$ $\quad$ (I_n matrice unité d'ordre n)
M est elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}

SOLUTION : a)• Si H est de rang 1, toutes ses colonnes $C_{j,\ j=1...n}$ sont proportionnelles à l'une d'entre elles $C_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$:

$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \exists y_j \in \mathbb{C},\ C_j = y_j C_{i_0}$

$$H = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & ... & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & ... & y_nx_2 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ y_1x_n & y_2x_n & ... & y_nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} = X \times Y$$

avec $X = C_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix}$

• $H^2 = X.Y.X.Y$

or $Y.X = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k x_k\right)$ (matrice 1-1)

donc $H^2 = X.(\mathrm{tr}H).Y = \mathrm{tr}(H).X.Y = \mathrm{tr}(H).H$

b) • Le polynôme $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(H).X = X(X - \mathrm{tr}(H))$ est un polynôme annulateur de la matrice H.
Donc $\mathrm{Spec}(H) \subset \{0, \mathrm{tr}(H)\}$

Puisque $\mathrm{rg}(H) = 1$, dans tous les cas, $\dim(E_H^0) = n - 1$, le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

- si $\mathrm{tr}(H) \neq 0$, il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racines simples (0 et $\mathrm{tr}(H)$). Alors H est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

- si $\mathrm{tr}(H) = 0$, H possède une unique valeur propre 0, d'ordre n puisque $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension $n - 1$. H n'est donc pas diagonalisable.

Finalement, $\boxed{H \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{tr}(H) \neq 0}$

• Dans tous les cas, 0 est valeur propre de H d'ordre au moins $n - 1$ $\quad$ (puisque $\dim(E_H^0) = n - 1$)
Donc X^{n-1} divise le polynôme caractéristique $\chi_H(X)$

- si $\mathrm{tr}(H) \neq 0$, H est diagonalisable, donc admet une autre valeur propre, qui ne peut être que $\mathrm{tr}(H)$.
Donc $X - \mathrm{tr}(H)$ divise aussi $\chi_H(X)$ et alors $\chi_H(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(H))$

- si $\mathrm{tr}(H) = 0$, H n'est pas diagonalisable, donc ne peut pas avoitr d'autre valeur propre que 0. Or $\chi_H(X)$ est de la forme $X^{n-1}(X - \alpha)$ et nécessairement $\alpha = 0$, de sorte que $\chi_H(X) = X^n$.

Notons que dans les deux cas, $\boxed{\chi_H(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(H))}$ $\quad$ (au signe près)

c) $\det(M) = \det(H + I_n) = \chi_H(-1) = (-1)^{n-1}(-1 - \mathrm{tr}(H))$

• M est inversible $\iff \det(M) \neq 0 \iff \mathrm{tr}(H) \neq -1$

• Notons $t = \mathrm{tr}(H)$

D'après a) $H(H - tI_n) = 0$

or $H = M - I_n$ donc $(M - I_n)(M - (t + 1)I_n) = 0$

$\implies M^2 - (2 + t)M = -(t + 1)I_n$

$\implies M\left(\frac{-1}{t+1}(M - (2 + t)I_n)\right) = I_n$

donc $\boxed{M^{-1} = \frac{t+2}{t+1} I_n - \frac{1}{t+1} M}$

III - Applications de la réduction d'endomorphismes ou de matrices:

3 Puissances d'une matrice :

3.1 Calcul de A^n :

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

SOLUTION :

• **Première méthode : Par diagonalisation :**

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -1 \\ 2 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 0 & 5-x & -2 \\ 3-x & 1 & 2-x \end{vmatrix} \text{(en ajoutant } C_3 \text{ à } C_1)$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \text{(en retranchant } L_3 \text{ à } L_1)$$

$\chi_A(x) = -(x-5)(x-3)^2$ (en développant suivant la première colonne)

$\mathrm{Sp}(A) = \{3, 5\}$ 3 est valeur propre double.

On ne sait pas à ce stade si A est diagonalisable.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$A.X = 3X \iff (A - 3I_3)X = 0$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff x+y-z=0$$

Donc $E_A(3)$ est le plan d'équation $x+y-z=0$. La somme des dimensions des sous espaces propres est 2+1=3.

A est donc diagonalisable.

Une base du plan $E_A(3)$ est constituée des vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le calcul montre que $E_A(3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $A = P.\Delta.P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P.\Delta^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.P^{-1}$

avec MAPLE :

>P:=matrix(3,3,[1,1,1,0,-1,2,1,0,1]);

delta:=diag(3^n,3^n,5^n);

multiply(P,delta,inverse(P));

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 5^n - 3^n & 3^n - 5^n \\ 2(5^n - 3^n) & 2.5^n & 2(3^n - 5^n) \\ 5^n - 3^n & 5^n - 3^n & 3^n - 5^n \end{pmatrix}$$

• **Deuxième méthode : Par utilisation d'un polynôme annulateur :**

Puisque $A = P.\Delta.P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

le polynôme $Q(X) = (X-3)(X-5) = X^2 - 8X + 15$ est un polynôme annulateur de A.

Ecrivons la division euclidienne de X^n pat $Q(X)$:

$$X^n = (X-3)(X-5)T(X) + \underbrace{a_n X + b_n}_{R(X)}$$

en remplaçant X par 3, on obtient : $3^n = 3a_n + b_n$

en remplaçant X par 5, on obtient : $5^n = 5a_n + b_n$

d'où $a_n = \dfrac{5^n - 3^n}{2}$ et $b_n = \dfrac{5.3^n - 3.5^n}{2}$

enfin, $A^n = \underbrace{Q(A)}_{=0} T(A) + a_n A + b_n I_3 = \dfrac{5^n - 3^n}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \dfrac{5.3^n - 3.5^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 5^n - 3^n & 3^n - 5^n \\ 2(5^n - 3^n) & 2.5^n & 2(3^n - 5^n) \\ 5^n - 3^n & 5^n - 3^n & 3^n - 5^n \end{pmatrix}$$

3.2 Convergence d'une suite matricielle :

1- Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$

2- Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la matrice $A_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$

SOLUTION : 1- Soit $z \in \mathbb{C},\ z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Soit n_0 un entier $\geq 2|z|$

Pour tout $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{z}{n}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ donc $1 + \frac{z}{n}$ est dans la boule ouverte de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$, qui est incluse dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$

alors $\left|1 + \dfrac{z}{n}\right| = \rho_n = \sqrt{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^2 + \dfrac{y^2}{n^2}}$ et $\mathrm{Arg}\big(1 + \frac{z}{n}\big) = \theta_n = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{y}{n\rho_n}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

donc $1 + \dfrac{z}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$ et $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{in\theta_n}$

• $\rho_n^n = e^{n \ln \rho_n} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}$

$\dfrac{n}{2}\ln\left(1 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2+y^2}{n^2}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}.\dfrac{2x}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} x$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2}\ln\left(1 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2+y^2}{n^2}\right) = x$ et, par continuité de la fonction exponentielle,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n^n = e^x$

• $n\theta_n = n\ \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{y}{n\rho_n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} n\dfrac{y}{n\rho_n} = \dfrac{y}{\rho_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ (car $\lim \rho_n = 1$)

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{in\theta_n} = e^{iy}$

• Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n =} \lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n^n e^{in\theta_n} = e^x e^{iy} \boxed{= e^z}$

2- • Si $a = 0$, alors $A_n = I_n$ et la suite (A_n^n) est constante égale à I_n.

• Supposons désormais $a \neq 0$

$\chi_{A_n}(X) = (X - 1)^2 + \frac{a^2}{n^2} = (X - 1 - i\frac{a}{n})(X - 1 + i\frac{a}{n})$

Puisque $a \neq 0$, A admet deux valeurs propres complexes distinctes $\lambda = 1 + i\frac{a}{n}$ et $\overline{\lambda} = 1 - i\frac{a}{n}$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

Les vecteurs propres associés sont respectivement $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

donc $A_n = P\Delta_n.P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 + i\frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1 - i\frac{a}{n} \end{pmatrix}$

dès lors, $A_n^n = P(\Delta_n)^n.P^{-1}$ où et $(\Delta_n)^n = \begin{pmatrix} (1 + i\frac{a}{n})^n & 0 \\ 0 & (1 - i\frac{a}{n})^n \end{pmatrix}$

d'après la première question, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{ia}{n}\right)^n = e^{ia}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{ia}{n}\right)^n = e^{-ia}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n^n = \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n = P.\begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} & -\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2} \\ \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2} & \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}}$$

3.3 Limite d'une suite de matrices :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $5A^3 = A^2 + 3A + I_n$

1- Montrer que la suite $(A^k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que sa limite est une matrice de projection B qui commute avec A.

2- Montrer que tout sous espace F d'une espace vectoriel de dimension finie E est fermé.
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$
En déduire que $B \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$ et exprimer B explicitement en fonction de I_n, A et A^2.

SOLUTION :

Le polynôme $Q(X) = 5X^3 - X^2 - 3X - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
1 est une racine de ce polynôme. Il est donc divisible par $X - 1$
$Q(X) = 5X^3 - X^2 - 3X - 1 = (X-1)(5X^2 + 4X + 1)$
$5X^2 + 4X + 1$ a pour discriminant $\delta = 16 - 20 = -4 < 0$
Il admet deux racines complexes conjuguées, $\alpha = \dfrac{-4+2i}{10} = \dfrac{-2+i}{5}$ et $\beta = \overline{\alpha} = \dfrac{-2-i}{5}$
$Q(X) = 5X^3 - X^2 - 3X - 1 = 5(X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$
A possède un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = P.\Delta.P^{-1} \quad \text{où } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \overline{\alpha} & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

dans la matrice Δ, 1 figure p fois, α et $\overline{\alpha}$ figurent chacun q fois $(p + 2q = n)$

alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A = P.\Delta^k.P^{-1}$

$$\text{or } \Delta^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha^k & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \alpha^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \overline{\alpha}^k & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \overline{\alpha}^k \end{pmatrix}$$

$$|\alpha| = |\overline{\alpha}| = \left|\frac{-2+i}{5}\right| = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1 \text{ donc } \lim_{k\to+\infty} \alpha^k = \lim_{k\to+\infty} \overline{\alpha}^k = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{k\to+\infty} \Delta^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\ fois},\underbrace{0,\dots,0}_{2q\ fois}) = \Delta_0$$

Par continuité de la multiplication des matrices,
$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty}(P.\Delta^k.P^{-1}) = P.(\lim_{k\to+\infty}\Delta^k).P^{-1} = P.\Delta_0.P^{-1} = B$$

La suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge donc dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vers la matrice $B = P.\Delta_0.P^{-1}$
A étant réelle, chaque matrice A^k est réelle et la limite B aussi : $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- $B^2 = (P.\Delta_0.P^{-1})(P.\Delta_0.P^{-1}) = P.\Delta_0^2.P^{-1} = P.\Delta_0.P^{-1} = B$
  donc B est une matrice de projection.

$A.B = (P.\Delta.P^{-1})(P.\Delta_0.P^{-1}) = P.\Delta.\Delta_0.P^{-1} = P.\Delta_0.P^{-1} = B$
Calcul analogue pour $B.A$. Donc $A.B = B = B.A$

- Autre raisonnement :
  $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^{2k} = A^k.A^k$

en passant à la limite quand $k \to +\infty$, par continuité de la multiplication des matrices, on obtient : $B = B.B$
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^{k+1} = A.A^k = A^k.A$
en passant à la limite quand $k \to +\infty$, on obtient : $B = A.B = B.A$

2- • Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base du sous espace F, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E.
Soit $v \in E - F$. v se décompose sur la base $(e_1, ..., e_n)$:
$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_pe_p + v_{p+1}e_{p+1} + ... + v_ne_n$$
Puisque $v \notin F$, $\exists j_0 > p,\ v_{j_0} \neq 0$
Puisque toutes les normes dans l'espace E sont équivalentes, considérons la norme qui au vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ fait correspondre $N(x) = \max_{i=1...n} |x_i|$
Soit $r = \frac{1}{2}|v_{j_0}|$ et montrons que la boule ouverte $\overset{o}{B}(v,r)$ est incluse dans F :
Soit $y \in \overset{o}{B}(v,r)$, quelconque, $\exists (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$
$$N(v-y) = \max_{i=1...n} |v_i - y_i| < r = \tfrac{1}{2}|v_{j_0}|$$
en particulier $|v_{j_0} - y_{j_0}| < r = \frac{1}{2}|v_{j_0}|$
On sait que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |a+b| \geq ||a| - |b||$
donc $|y_{j_0}| = |(y_{j_0} - v_{j_0}) + v_{j_0}| \geq \underbrace{|v_{j_0}|}_{=2r} - \underbrace{|y_{j_0} - v_{j_0}|}_{<r} > r$
donc $y_{j_0} \neq 0$ et $y \notin F$

On a ainsi montré que tout $v \in E - F$ est centre d'une boule ouverte $\overset{o}{B}(v,r)$ incluse dans F. $E - F$ est donc un ouvert de E et F est un fermé de E.

- $5A^3 = A^2 + 3A + I_n$ donc $A^3 = \frac{1}{5}(A^2 + 3A + I_n) \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$
  En multipliant par A, $A^4 = \frac{1}{5}(A^3 + 3A^2 + A) = \frac{1}{5}((\frac{1}{5}(A^2 + 3A + I_n)) + 3A^2 + A) \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$
  et par une récurrence sans difficulté, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, A^k \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$.

- La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite du sous espace $\text{Vect}(I_n, A, A^2)$, convergente dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  Puisque $\text{Vect}(I_n, A, A^2)$ est fermé, la limite appartient à ce sous espace.
  Donc $B \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$.

- Donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ B = aI_n + bA + cA^2$
  En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, cette égalité équivaut à
  $$\Delta_0 = aI_n + b\Delta + c\Delta^2$$
  $$\iff \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a + b\alpha + c\alpha^2 \\ 0 = a + b\overline{\alpha} + c\overline{\alpha}^2 \end{cases}$$
  On peut remarquer que ce système est bien in système de Cramer car la matrice associée est la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{pmatrix}$
  $$\text{alors } a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha\overline{\alpha}(\overline{\alpha} - \alpha)}{(\overline{\alpha} - \alpha)(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{\alpha\overline{\alpha}}{(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha} - \alpha - \overline{\alpha} + 1}$$
  or α et $\overline{\alpha}$ sont les racines du polynôme $5X^2 + 4X + 1$ donc $\alpha\overline{\alpha} = \frac{1}{5}$ et $\alpha + \overline{\alpha} = -\frac{4}{5}$
  $$\text{d'où } a = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + 1} = \frac{1}{10}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & \overline{\alpha}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{vmatrix}} = \frac{-(\overline{\alpha}^2 - \alpha^2)}{(\overline{\alpha} - \alpha)(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{-(\alpha + \overline{\alpha})}{(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{2}{5}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \overline{\alpha} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \end{vmatrix}} = \frac{\overline{\alpha} - \alpha}{(\overline{\alpha} - \alpha)(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{(\overline{\alpha} - 1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{2}$$

Finalement, $\boxed{B = \frac{1}{10} I_n + \frac{2}{5} A + \frac{1}{2} A^2}$

3.4 Convergence d'une suite géométrique matricielle :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

a) Montrer que la limite est une matrice de projection B, qui commute avec A.
Montrer que B est la projection sur $\text{Im}(A - I_n)$, parallèlement à $\ker(A - I_n)$

b) On note $\overset{o}{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1\}$
Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \overset{o}{B}(0,1) \cup \{1\}$, et que $B = 0 \iff 1 \notin \text{Sp}(A)$

c) Montrer que ordre$(1) = \dim(E_1(A))$.

SOLUTION **:** a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^{2k} = A^k.A^k \implies B = B.B$
(en passant à la limite quand $k \to +\infty$, par continuité du produit matriciel)

$B^2 = B$, donc $\boxed{B \text{ est une matrice de projection}}$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^{k+1} = A.A^k = A^k.A \implies \boxed{B = A.B = B.A}$

• $\forall V \in \ker(A - I_n), \ A.V = 1.V \implies \forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^k.V = 1^k V = V$
$\implies B.V = V$ (en passant à la limite quand $k \to +\infty$)
$\implies V \in \ker(B - I_n)$

Donc $\boxed{\ker(A - I_n) \subset \ker(B - I_n)}$

• $\forall V \in \text{Im}(A - I_n), \exists Y \in \mathbb{C}^n, \ V = A.X - X$
$\implies A.V = A^2.X - A.X$
$\implies A^2.V = A^3.X - A^2.X$
..... $\implies \forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^k.V = A^{k+1}.X - A^k.X$ (récurrence immédiate)
$\implies B.V = B.X - B.X = 0$ (en passant à la limite quand $k \to +\infty$)
$\implies V \in \ker(B)$

Donc $\boxed{\text{Im}(A - I_n) \subset \ker(B)}$

• Puisque B est une matrice de projection, $\ker(B - I_n)$ et $\ker(B)$ sont suplémentaires, et
$\ker(B - I_n) \cap \ker(B) = \{0\}$
Les inclusions $\ker(A - I_n) \subset \ker(B - I_n)$ et $\text{Im}(A - I_n) \subset \ker(B)$ montrent alors que la somme $\ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n)$ est directe. La formule de Grassmann et la formule du rang entraînent alors que:

$$\dim(\ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n)) = \dim(\ker(A - I_n)) + \dim(\text{Im}(A - I_n)) = n$$

Si l'une des inclusions $\ker(A - I_n) \subset \ker(B - I_n)$ ou $\text{Im}(A - I_n) \subset \ker(B)$ était stricte, on aurait l'inégalité stricte $\dim(\ker(A - I_n)) + \dim(\text{Im}(A - I_n)) < \dim(\ker(B - I_n)) + \dim(\ker(B))$, ce qui est absurde car l'une et l'autre de ces deux sommes est égale à n.

Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc : $\boxed{\ker(A - I_n) = \ker(B - I_n) \text{ et } \text{Im}(A - I_n) = \ker(B)}$

et $\boxed{B \text{ est la projection sur } \text{Im}(A - I_n), \text{ parallèlement à } \ker(A - I_n)}$.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $\exists V \in \mathbb{C}^n - \{0\}, \ A.V = \lambda.V$
donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^k.V = \lambda^k.V$. Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = B$, par continuité du produit matriciel, $A^k.V = \lambda^k.V$ a pour limite $B.V$, donc la suite géométrique complexe $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge, ce qui n'est possible que si $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$. Donc $\boxed{\text{Sp}(A) \subset \overset{o}{B}(0,1) \cup \{1\}}$.

• Si $1 \in \text{Sp}(A)$, alors $\exists V \in \mathbb{C}^n - \{0\}, \ A.V = V$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}, \ A^k.V = V$, et en passant à la limite quand $k \to +\infty$, $B.V = V$, ce qui montre que la matrice B n'est pas nulle.

A l'inverse, si $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors $\ker(A-I_n)=\{0\}$, et l'égalité $\ker(A-I_n)\oplus \mathrm{Im}(A-I_n)=\mathbb{C}^n$ se traduit par $\mathrm{Im}(A-I_n)=\ker B=\mathbb{C}^n$.

Donc $B=0$.

On a ainsi montré que $\boxed{B=0 \iff 1\notin \mathrm{Sp}(A)}$

c) On sait que $\ker(A-I_n)\oplus \mathrm{Im}(A-I_n)=\mathbb{K}^n$ (question a))

Notons $f\in\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A

Soit $\mathscr{B}_1=(e_1,e_2,...,e_m)$ une base de $\ker(f-Id)$ et $\mathscr{B}_2=(e_{m+1},...,e_n)$ une base de $\mathrm{Im}(f-Id)$

Alors $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{K}^n$, dans laquelle la matrice A' de f est de la forme :

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times\\ \vdots & & \vdots & \vdots & M & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times \end{array}\right)$$

$\chi_A(x)=\chi_f(x)=(1-x)^m\det(M-xI_{n-m})$

La matrice M est la matrice dans la base $\mathscr{B}_2$ de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f-Id)$. Si elle admettait 1 pour valeur propre, il existerait un vecteur $y\in\mathrm{Im}(f-Id)$ non nul tel que $f(y)=y$, cet y appartiendrait à $\ker(f-Id)$, ce qui est contraire à la somme directe $\ker(f-Id)\oplus\mathrm{Im}(f-Id)$.

Donc 1 n'est pas valeur propre de M et l'égalité $\chi_A(x)=(1-x)^m\det(M-xI_{n-m})$ montre que :

$\boxed{\mathrm{ordre}(1)=m=\dim(\ker(f-Id))=\dim(E_A(1))}$

4 Suites vérifiant une récurrence linéaire :

4.1 Suite récurrente linéaire scalaire (1) :

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de ses trois premiers termes u_0,u_1,u_2, et par la relation de récurrence $\mathscr{R}$: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=\frac{1}{2}(u_{n+2}+u_n)$

1- Tester avec MAPLE le comportement des suites (u_n) de ce type.

Quelle conjecture peut on émettre ?

2- Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite en fonction de (u_0,u_1,u_2)

SOLUTION : 1- **u[0]:=u0;u[1]:=u1;u[2]:=u2;**

n:=20;

for k from 0 to n-3 do u[k+3]:=(u[k]+u[k+2])/2; od;

pour plus de lisibilité, on peut remplacer la dernière ligne par :

for k from 0 to n-3 do u[k+3]:=evalf((u[k]+u[k+2])/2); od;

2- Introduisons la suite vectorielle définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+1}\end{pmatrix}$

alors $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}}_{A}.\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=A.X_n$

et par récurrence immédiate, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},X_n=A^n.X_0}$

- Etudions la diagonalisibilté de la matrice A :

>with(linalg);

A:=matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,1/2,0,1/2]);

eigenvects(A);

$$\mathrm{Sp}(A)=\left\{1,\frac{-1+i\sqrt{7}}{4},\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right\}=\{1,\lambda,\overline{\lambda}\}$$

A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, mais elle l'est dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Notons V_1,V_2,V_3 les vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres.

(V_1,V_2,V_3) constitue une base de $\mathbb{C}^3$ et le vecteur X_0 peut être décomposé dans cette base :

$\exists(a,b,c)\in\mathbb{C}^3,\ X_0=aV_1+bV_2+cV_3$

alors $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=A^n.X_0=A^n(aV_1+bV_2+cV_3)=aA^nV_1+bA^nV_2+cA^nV_3$

$\boxed{X_n=a1^nV_1+b\lambda^nV_2+c\overline{\lambda}^nV_3}$

Puisque $|\lambda|=\frac{1}{4}\sqrt{1+7}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\lambda}^n=0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = aV_1 = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, et en prenant la première composante (dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$) de $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+1}\end{pmatrix}$, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

• Reste encore à exprimer le complexe a en fonction des valeurs initiales u_0, u_1, u_2 :

$$X_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3 \implies \begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} V_1 & V_2 & V_3\end{array}\right).\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A calculés.
On peut récupérer cette matrice P par les instructions suivantes :
EP:=eigenvects(A);
VectProp:=seq(op(EP[i][3]),i=1..3);
P:=transpose(matrix([VectProp]));

On obtient bien : $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{7}}{4} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\\ 1 & \frac{-3-i\sqrt{7}}{8} & \frac{-3+i\sqrt{7}}{8}\end{pmatrix}$

On résoud alors le système $\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:

linsolve(P,vector([u0,u1,u2])); $\left[\frac{1}{4}u0 + \frac{1}{4}u1 + \frac{1}{2}u2,\ \times\times\times\times\ ,\ \times\times\times\times\right]$

donc $a = \frac{1}{4}u0 + \frac{1}{4}u1 + \frac{1}{2}u2$, et en conclusion :

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge dans tous les cas et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{4}u0 + \frac{1}{4}u1 + \frac{1}{2}u2}$

ce qui correspond bien à l'étude préalable avec MAPLE.

4.2 Suite récurrente linéaire (2) :

La suite $(u_n)_{\geq 0}$ est définie par la donnée de u_0, u_1, u_2 , réels ou complexes, et par la relation de récurrence linéaire suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -2u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n$

Montrer que la suite (u_n) est périodique et indiquer ce que vaut sa plus petite période suivant la valeur de (u_0, u_1, u_2).

SOLUTION :

• Définisons $U_n = \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & -2\end{pmatrix}}_{A}.\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix} = A.U_n$$

et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n.U_0$

Calculons les valeurs propres et vecteurs propres de A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix}-x & 1 & 0\\0 & -x & 1\\-1 & -2 & -2-x\end{vmatrix} = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2+x+1)$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, j, j^2\}$

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Les sous espaces propres $E_A(-1), E_A(j)$ et $E_A(j^2)$ sont des droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$. (après calculs)

Le vecteur $U_0 = \begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix}$ se décompose dans la base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{C}^3$: $U_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3$

alors $U_n = A^nU_0 = A^n(aV_1 + bV_2 + cV_3) = aA^nV_1 + bA^nV_2 + cA^nV_3 = a(-1)^nV_1 + bj^nV_2 + cj^{2n}V_3$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = a(-1)^nV_1 + bj^nV_2 + cj^{2n}V_3}$

Les suites numériques composantes de la suite vectorielle $(U_n)_{n\geq 0}$ dans la base (V_1, V_2, V_3) sont $((-1)^n)_{n\geq 0}$, $(j^n)_{n\geq 0}$, et $(j^{2n})_{n\geq 0}$

• Ces trois suites admettent 6 pour période, donc dans tous les cas la suite (u_n) admet 6 pour période.

• Les deux suites $(j^n)_{n\geq 0}$, et $(j^{2n})_{n\geq 0}$ admettent 3 pour période, donc (u_n) admet 3 pour période si et seulement si $a = 0$. si et seulement si $U_0 = bV_2 + cV_3$

$\iff$ U_0 est combinaison linéaire de V_2 et V_3
$\iff$ le système (U_0, V_2, V_3) est lié,
$\iff$ $\det(U_0, V_2, V_3) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} u_0 & 1 & 1 \\ u_1 & j & j^2 \\ u_2 & j^2 & j \end{vmatrix} = 0$$

$\iff$ $u_0(j^2 - j) - u_1(j - j^2) + u_2(j^2 - j) = 0$
$\iff$ $u_0 + u_1 + u_2 = 0$

• La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ admet 2 pour période, donc (u_n) aura pour période 2 si et seulement si $b = c = 0$
$\iff$ $U_0 = aV_1$

$$\iff U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire au vecteur } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{u_0}{1} = \frac{u_1}{-1} = \frac{u_2}{1}$$

$\iff$ $u_0 = -u_1 = u_2$

4.3 Suite récurrente linéaire (3) :

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+4} = -u_{n+3} + 2u_{n+1} + u_n$

1- Calculer u_{20} et u_{100} avec MAPLE en fonction de u_0, u_1, u_2 et u_3.

2- En notant : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe une matrice A telle que $U_n = A^n.U_0$

3- Déterminer à quelle condition sur u_0, u_1, u_2, u_3 , la suite (u_n)
a) est bornée
b) est constante
c) est de limite nulle.
d) est périodique.

SOLUTION :

• En utilisant toutes les possibilités d'indexation de MAPLE, on obtient :

```
> n:=20; u[0]:=u0; u[1]:=u1; u[2]:=u2; u[3]:=u3;
for i from 4 to n do u[i]:=-u[i-1]/2+u[i-3]+u[i-4]/2; od;
```

• Si on ne possède pas ces fonctions d'indexation, on peut écrire un algoritme utilisant moins de mémoire, mais ne gardant pas les valeurs des termes intermédiaires.

Noter le glissement des termes de la suite dans les mémoires et le besoin d'une mémoire auxiliaire pour cela.

```
>CalculDeU:=proc(n)
    local i,aux,u0,u1,u2,u3;
        for i from 4 to n do aux:=-u3/2+u1+u0/2;
          u0:=u1; u1:=u2; u2:=u3; u3:=aux;   od;
        aux;
    end;
```

On trouve $u_{20} = \dfrac{29127}{131072}u_3 - \dfrac{29127}{131072}u_0 + u_2$

et $u_{100} = -\dfrac{704250333460127445275946225 21}{1584563250285286751870879006 72}u_3 + \dfrac{70425033346012744527594622521}{158456325028528675187087900672}u_0 + u_1$

2- La relation $2u_{n+4} = -u_{n+3} + 2u_{n+1} + u_n$ s'écrit matriciellement :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} . \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = A.U_n$$

Cette méthode permet aussi le calcul de u_{20} et u_{100} par MAPLE :

```
> n:=20; W:=multiply(A^n,vector(4,[u0,u1,u2,u3])); u(n)=W[1];
```

Recherchons les éléments propres de A pour voir si A est diagonalisable :

```
>A:=matrix(4,4,[0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1/2,1,0,-1/2]);
vp:=eigenvects(A);
```

$$vp := [1, 1, \{[1, 1, 1, 1]\}], \left[\frac{-1}{2}, 1, \{[-8, 4, -2, 1]\}\right], \left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, \left\{\left[1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1\right]\right\}\right],$$

$$\left[-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, \{\left[1, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, 1\right]\}\right]$$

Décomposons U_0 dans une base (V_1, V_2, V_3, V_4) de vecteurs propres respectivement associés à $1, -1/2, j$ et j^2 :

$U_0 = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4$

alors $U_n = A^nU_0 = A^n(x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4)$

$U_n = (x_1A^nV_1 + x_2A^nV_2 + x_3A^nV_3 + x_4A^nV_4)$

$= x_1V_1 + x_2(\frac{1}{2})^nV_2 + x_3j^nV_3 + x_4j^{2n}V_4$

a) (u_n) est bornée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si (U_n) est bornée dans $\mathbb{R}^4$ ce qui est toujours vrai quels que soient x_1, x_2, x_3 et x_4 et donc quels que soient u_0, u_1, u_2 et u_3 .

b) (u_n) est constante si et seulement si (U_n) l'est, ssi $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

ssi $U_0 = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est colinéaire à $V_1 = (1, 1, 1, 1)$

ssi $u_0 = u_1 = u_2 = u_3$

$\boxed{(u_n) \text{ est constante } \iff u_0 = u_1 = u_2 = u_3}$

c) (u_n) est de limite nulle dans $\mathbb{R}$ si et seulement si (U_n) est de limite nulle dans $\mathbb{R}^4$,

ssi $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ ssi U_0 est colinéaire à $V_2 = (-8, 4, -2, 1)$

ssi $\dfrac{u_0}{-8} = \dfrac{u_1}{4} = \dfrac{u_2}{-2} = u_3$

$\boxed{\lim(u_n) = 0 \iff \dfrac{u_0}{-8} = \dfrac{u_1}{4} = \dfrac{u_2}{-2} = u_3}$

d) (u_n) est périodique ssi $x_2 = 0$

ssi U_0 appartient à l'espace engendré par (V_1, V_3, V_4)

ssi $\det(U_0, V_1, V_3, V_4) = 0$

La récupération des vecteurs propres de A se fait comme suit :

>for i from 1 to 4 do v[i]:=op(vp[i][3]) od;

On compose ensuite la matrice formée des vecteurs U_0, V_1, V_3 et V_4, puis on calcule son déterminant :

> U0:=vector([u0,u1,u2,u3]);
matrix([v[1],v[3],v[4],U]); det(");

Finalement, $\boxed{(u_n) \text{ est périodique ssi } u_3 = u_0}$

4.4 Suites récurrentes linéaires ; endomorphisme de décalage :

$\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des suites à valeurs complexes.

$\mathcal{T}$ est l'endomorphisme de décalage d'indice, c'est à dire l'application de $\mathcal{S}$ dans lui-même, qui à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = a_{n+1}$

1- Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, déterminer $\ker(\mathcal{T} - \alpha Id)$ et $\ker(\mathcal{T} - \alpha Id)^2$

2- Soit $\mathcal{F}$ le sous espace des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+4} = \frac{1}{2}a_{n+3} + 3a_{n+2} - \frac{7}{2}a_{n+1} + a_n \qquad (*)$

Montrer que $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{T} - \frac{1}{2}Id) \oplus \ker(\mathcal{T} + 2Id) \oplus \ker[(\mathcal{T} - Id)^2]$

En déduire la dimension de $\mathcal{F}$ et en donner une base.

3- a) On note $\mathcal{S}_B$ l'ensemble des suites bornées qui vérifient la condition (*).

Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{S}_B$

Avec MAPLE : Donner une condition sur (a_0, a_1, a_2, a_3) pour qu'une suite de $\mathcal{F}$ appartienne à $\mathcal{S}_B$

b) On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites qui vérifient la condition (*) et qui ont une limite nulle.

Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{S}_0$

Avec MAPLE : Donner une condition sur (a_0, a_1, a_2, a_3) pour qu'une suite de $\mathcal{F}$ appartienne à $\mathcal{S}_B$

SOLUTION :

1- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

- $(a_n) \in \ker(\mathcal{T} - \alpha Id) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - \alpha a_n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \alpha\, a_n$

$\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison α.

$\boxed{\ker(\mathcal{T} - \alpha Id) \text{ est donc la droite vectorielle engendrée par la suite } (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

- $(a_n) \in \ker[(\mathcal{T} - \alpha Id)^2] \iff (\mathcal{T} - \alpha Id)((a_n)) = (a_{n+1} - \alpha\, a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathcal{T} - \alpha Id)$

$\iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - \alpha\, a_n = \lambda\alpha^n$

si $(a_n) \in \ker[(\mathcal{T} - \alpha Id)^2]$, alors

$$\begin{array}{ll} a_1 - \alpha\, a_0 = \lambda & \times\, \alpha^{n-1} \\ a_2 - \alpha\, a_1 = \lambda\, \alpha & \times\, \alpha^{n-2} \\ a_3 - \alpha\, a_2 = \lambda\, \alpha^2 & \times\, \alpha^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1} - \alpha\, a_{n-2} = \lambda\, \alpha^{n-1} & \times\, \alpha \\ a_n - \alpha\, a_{n-1} = \lambda\, \alpha^{n-1} & \end{array}$$

En multipliant la k^e ligne par α^{n-k} et en ajoutant, on obtient :

$a_n - \alpha^n\, a_0 = n\,\lambda\,\alpha^{n-1}$ soit $a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n$

Réciproque immédiate.

$\boxed{\ker[(\mathcal{T}-\alpha Id)^2] \text{ est un espace de dimesion 2 dont une base est formée des suites } (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (n\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

2- Soit $a = (a_n) \in \mathcal{S}$

$\mathcal{T}(a) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \mathcal{T}^2(a) = (a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \mathcal{T}^3(a) = (a_{n+3})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \mathcal{T}^4(a) = (a_{n+4})_{n\in\mathbb{N}}$

$a \in \mathcal{F} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+4} = \frac{1}{2}a_{n+3} + 3a_{n+2} - \frac{7}{2}a_{n+1} + a_n$ (*)

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{T}^4(a))_n = \frac{1}{2}(\mathcal{T}^3(a))_n + 3(\mathcal{T}^2(a))_n - \frac{7}{2}(\mathcal{T}(a))_n + a_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \left[(\mathcal{T}^4 - \frac{1}{2}\mathcal{T}^3 - 3\mathcal{T}^2 + \frac{7}{2}\mathcal{T} - Id)(a)\right]_n = 0$

$\iff (\mathcal{T}^4 - \frac{1}{2}\mathcal{T}^3 - 3\mathcal{T}^2 + \frac{7}{2}\mathcal{T} - Id)(a) = 0_{\mathcal{S}}$

$\iff a \in \ker(\mathcal{T}^4 - \frac{1}{2}\mathcal{T}^3 - 3\mathcal{T}^2 + \frac{7}{2}\mathcal{T} - Id)$

donc $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{T}^4 - \frac{1}{2}\mathcal{T}^3 - 3\mathcal{T}^2 + \frac{7}{2}\mathcal{T} - Id)$

• Soit $P(X) = X^4 - \frac{1}{2}X^3 - 3X^2 + \frac{7}{2}X - 1$

1 est racine de ce polynôme, on peut le factoriser par $X-1$:

$P(X) = (X-1)(X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{2}X + 1$

1 est racine de $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{2}X + 1$, on peut factoriser ce dernier par $X-1$:

$P(X) = (X-1)^2(X^2 + \frac{3}{2}X - 1) = (X-1)^2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X+2)$

Les polynômes $(X-1)^2$, $X - \frac{1}{2}$ et $X+2$ sont deux à deux premiers entre eux, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$\ker(\mathcal{T}^4 - \frac{1}{2}\mathcal{T}^3 - 3\mathcal{T}^2 + \frac{7}{2}\mathcal{T} - Id) = \ker(\mathcal{T} - \frac{1}{2}Id) \oplus \ker(\mathcal{T} + 2Id) \oplus \ker[(\mathcal{T} - Id)^2]$

$\boxed{\mathcal{F} = \ker(\mathcal{T} - \frac{1}{2}Id) \oplus \ker(\mathcal{T} + 2Id) \oplus \ker[(\mathcal{T} - Id)^2]}$

• d'après la question 1,

$\ker(\mathcal{T} - \frac{1}{2}Id)$ est une droite vectorielle, dont une base est la suite géométrique $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\ker(\mathcal{T} + 2Id)$ est une droite vectorielle de base $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\ker[(\mathcal{T} - Id)^2]$ est un plan vectoriel de base $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}})$

Donc $\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{T} \text{ est un espace vectoriel de dimension 4,}\\ \text{dont une base est } \left(\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{T} \text{ est l'ensemble des suites de la forme :}\\ u_n = \frac{a}{2^n} + b(-2)^n + c + dn\end{array}}$ où a, b, c et d sont des constantes complexes.

3- a) • Soit $u = (u_n) \in \mathcal{S}$

$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n} + b(-2)^n + c + dn$

$(u_n) \in \mathcal{S}_B \iff b = 0$ et $d = 0$

$\boxed{\mathcal{S}_B \text{ est l'ensemble des suites de la forme : } u_n = \frac{a}{2^n} + c}$ où a et c sont des constantes complexes.

$\boxed{\text{C'est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est } \left(\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$

• Condition sur (a_0, a_1, a_2, a_3) :

$u \in \mathcal{S} \iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n} + b(-2)^n + c + dn$

$$\implies \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \begin{cases} u_0 = a + b + c \\ u_1 = \frac{a}{2} - 2b + c + d \\ u_2 = \frac{a}{4} + 4b + c + 2d \\ u_3 = \frac{a}{8} - 8b + c + 3d \end{cases}$$

On obtient un système de 4 équations aux 4 inconnues (a,b,c,d).

La matrice de ce système est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 4 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & -8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

>with(linalg); M:=matrix(4,4,[1,1,1,0,1/2,-2,1,1,1/4,4,1,2,1/8,-8,1,3]); det(M);

$\det(M) = -\frac{45}{8}$

La matrice M est inversible, le système admet une et une seule solution :

>solve({a+b+c=u0,a/2-2*b+c+d=u1,a/4+4*b+c+2*d=u2,a/8-8*b+c+3*d=u3},{ a,b,c,d});

$$\begin{cases} a = \frac{16}{5}u_0 - \frac{24}{5}u_1 + \frac{8}{5}u_3 \\ b = \frac{1}{45}u_0 - \frac{4}{45}u_1 + \frac{1}{9}u_2 - \frac{2}{45}u_3 \\ c = -\frac{20}{9}u_0 + \frac{44}{9}u_1 - \frac{1}{9}u_2 - \frac{14}{9}u_3 \\ d = \frac{2}{3}u_0 - \frac{5}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 \end{cases}$$

On vient de voir que $(u_n) \in \mathcal{S}_B \iff b = 0$ et $d = 0$

donc $(u_n) \in \mathcal{S}_B \iff \frac{1}{45}u_0 - \frac{4}{45}u_1 + \frac{1}{9}u_2 - \frac{2}{45}u_3 = 0$ et $\frac{2}{3}u_0 - \frac{5}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 = 0$

$(u_n) \in \mathcal{S}_B \iff u_0 - 4u_1 + 5u_2 - 2u_3 = 0$ et $2u_0 - 5u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$

>solve({u0-4*u1+5*u2-2*u3 = 0, 2*u0-5*u1+u2+2*u3 = 0},{u2,u3});

$\boxed{(u_n) \in \mathcal{S}_B \iff u_2 = -\frac{1}{2}u_0 + \frac{3}{2}u_1 \text{ et } u_3 = -\frac{3}{4}u_0 + \frac{7}{4}u_1}$

b) • Soit $u = (u_n) \in \mathcal{S}$. $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n} + b(-2)^n + c + dn$

$(u_n) \in \mathcal{S}_0 \iff b = c = d = 0$

$\boxed{\mathcal{S}_0 \text{ est l'ensemble des suites de la forme : } u_n = \frac{a}{2^n}}$ où a est une constante complexe.

$\boxed{\text{C'est une droite vectorielle dont une base est } \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}}$

• On vient de voir que $(u_n) \in \mathcal{S}_0 \iff b = c = d = 0$

donc $(u_n) \in \mathcal{S}_0 \iff \begin{cases} \frac{1}{45}u_0 - \frac{4}{45}u_1 + \frac{1}{9}u_2 - \frac{2}{45}u_3 = 0 \\ \frac{20}{9}u_0 - \frac{44}{9}u_1 + \frac{1}{9}u_2 + \frac{14}{9}u_3 = 0 \\ \frac{2}{3}u_0 - \frac{5}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} u_0 - 4u_1 + 5u_2 - 2u_3 = 0 \\ 20u_0 - 44u_1 + u_2 + 14u_3 = 0 \\ 2u_0 - 5u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$

>**solve({u0-4*u1+5*u2-2*u3 = 0, 20*u0-44*u1+u2+14*u3 = 0, 2*u0-5*u1+u2+2*u3 = 0}, {u0,u1,u2,u3});**

$\boxed{(u_n) \in \mathcal{S}_0 \iff \frac{u_0}{8} = \frac{u_1}{4} = \frac{u_2}{2} = u_3}$

4.5 Suite vectorielle récurrente (1) :

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ définie par la donnée de

$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et par les relations de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + y_n - 2z_n) \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n - 4z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(5x_n + 3y_n - 4z_n) \end{cases}$

A quelle(s) condition(s) sur X_0 la suite $(X_n)_n$ est elle

a) bornée ?

b) convergente ?

c) de limite nulle ?

SOLUTION :

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 6 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A.X_n$

et par récurrence immédiate $X_n = A^n X_0$

Etudions les éléments propres de A :

>**with(linalg);**

A:=matrix(4,4,[3/2,.......,-2]);

eigenvects(A);

$[1, 2, \{[0, 2, 1]\}], [1/2, 1, \{[1, 0, 1]\}]$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et $\frac{1}{2}$, la valeur propre 1 étant valeur propre double.

Les sous espaces propres associés sont des droites vectorielles dirigées respectivement par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La somme des dimensions des sous espaces propres ne vaut que 2, la matrice A n'est donc pas diagonalisable, ni dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, ni dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.

Montrons que A admet une réduite de Jordan de la forme $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Appelons f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, c'est à dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A.

On a déja $f(V_1) = V_1$ et $f(V_3) = \frac{1}{2}V_3$

Recherchons un vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $f(V_2) = V_1 + V_2$

$f(V_2) = V_1 + V_2 \iff (A - I_3)V_2 = V_1$

$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}(a + b - 2c) = 0 \\ 4a + 2b - 4c = 2 \\ \frac{1}{2}(5a + b - 2c) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 2a + b - 2c = 1 \\ 5a + b - 2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2c - 1 \end{cases}$

En prenant $c = 0$, on obtient $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les égalités $f(V_1) = V_1$,
$f(V_2) = V_1 + V_2$
et $f(V_3) = \frac{1}{2}V_3$

montrent que la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) est $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d'après la formule de changement de base pour une application linéaire, $A = PRP^{-1}$ où P est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (V_1, V_2, V_3).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PR^nP^{-1}$

• Décomposons X_0 dans la base (V_1, V_2, V_3) : $\boxed{X_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3}$ (**)

$X_n = A^n.X_0 = A^n(aV_1 + bV_2 + cV_3) = aA^nV_1 + bA^nV_2 + cA^nV_3$

Or $A.V_1 = V_1$ et $A^n.V_1 = V_1$

$A.V_2 = V_1 + V_2$, $A^2.V_2 = A.V_1 + A.V_2 = 2V_1 + V_2$

et par récurrence immédiate, $A^n.V_2 = nV_1 + V_2$

$A^nV_3 = (\frac{1}{2})^nV_3$

d'où $X_n = aA^nV_1 + bA^nV_2 + cA^nV_3 = aV_1 + b(nV_1 + V_2) + c(\frac{1}{2})^nV_3$

$\boxed{X_n = (a + nb)V_1 + bV_2 + c(\frac{1}{2})^nV_3}$ (*)

a) La suite $(X_n)_n$ est bornée si et seulement si $b = 0$ (d'après (*))

$\iff$ X_0 est combinaison linéaire de V_1 et V_3

$\iff \det(V_1, V_3, X_0) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 \\ 2 & 0 & y_0 \\ 1 & 1 & z_0 \end{vmatrix} = 2x_0 + y_0 - 2z_0 = 0$$

Finalement, $\boxed{\text{La suite } (X_n)_n \text{ est bornée } \iff 2x_0 + y_0 - 2z_0 = 0}$

b) La relation (*) montre que la suite (X_n) est convergente à la même condition.

La limite de (X_n) est alors $W = aV_1$

Calculons a en fonction de X_0 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = aV_1 + bV_2 + cV_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

d'où $a = -x_0 - y_0 + 2z_0$ et $b = x_0 + y_0 - z_0$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} X_n = W = aV_1 = (-x_0 - y_0 + 2z_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) La suite (X_n) est de limite nulle si et seulement si $a = b = 0$ (d'après (*))

$$\iff X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\iff x_0 = z_0$ et $y_0 = 0$

En conclusion, $\boxed{\text{La suite } (X_n)_n \text{ est de limite nulle } \iff x_0 = z_0 \text{ et } y_0 = 0}$

4.6 Suite vectorielle récurrente (2) (avec MAPLE):

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$ définie par la donnée de $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ et par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 8x_n - 5y_n + 5z_n + 6t_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + z_n + 2t_n \\ z_{n+1} = -5x_n + 5y_n - 2z_n - 4t_n \\ t_{n+1} = -4x_n + y_n - 3z_n - 3t_n \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) sur X_0 le suite $(X_n)_n$ est elle

a) bornée ?

b) constante ?

c) périodique ?

SOLUTION :

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A.X_n$

et par récurrence immédiate $X_n = A^n X_0$

Etudions les éléments propres de A :

>with(linalg);

A:=matrix(4,4,[8,-5,5,6,3,-4,1,2,-5,5,-2,-4,-4,1,-3,-3]);

eigenvects(A);

$[1, 1, \{([4, 1, -1, -3])\}], [-2, 1, \{([1, 1, -1, 0])\}],$

$[I, 1, \{(\left[-3, -1, 2, , \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I\right])\}], [-I, 1, \{(\left[-3, -1, 2, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}I\right])\}]$

Les valeurs propres de A sont donc $1,\ -2,\ i$ et $-i$

Les sous espaces propres associés sont des droites vectorielles dirigées respectivement par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$, $V_4 = \overline{V_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique

$\chi_A(X) = (X-1)(X+2)(X^2+1)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Mais elle l'est dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ car elle possède 4 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Les vecteurs propres (V_1, V_2, V_3, V_4) forment une base de $\mathbb{C}^4$. On peut décomposer X_0 dans cette base :

$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4,\ X_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4$

alors $X_n = A^n X_0 = A^n(aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4) = aA^nV_1 + bA^nV_2 + cA^nV_3 + dA^nV_4$

$\boxed{X_n = a1^nV_1 + b(-2)^nV_2 + ci^nV_3 + d(-i)^nV_4}$

a) La suite $(X_n)_n$ est bornée $\iff b = 0$

$\iff X_0$ est combinaison linéaire de V_1, V_3 et V_4

$\iff (X_0, V_1, V_3, V_4)$ est un système lié

$\iff \det(X_0, V_1, V_3, V_4) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} x_0 & 4 & -3 & -3 \\ y_0 & 1 & -1 & -1 \\ z_0 & -1 & 2 & 2 \\ t_0 & -3 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{vmatrix} = 0$$

$\iff x_0 - 5y_0 - z_0 = 0$ (déterminant calculé avec MAPLE)

$\boxed{(X_n) \text{ est bornée } \iff x_0 - 5y_0 - z_0 = 0}$

b) La suite $(X_n)_n$ est constante $\iff b = c = d = 0$

$\iff X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\iff \frac{x_0}{4} = \frac{y_0}{1} = \frac{z_0}{-1} = \frac{t_0}{-3}$

$\boxed{(X_n) \text{ est constante } \iff \frac{x_0}{4} = y_0 = -z_0 = -\frac{t_0}{3}}$

c) La suite $(X_n)_n$ est périodique $\iff b = 0$

$\iff (X_n)$ est bornée.

5 Commutant :

5.1 Commutant d'un endomorphisme ayant n valeurs propres simples:

Soient f et g deux endomorphismes de E , espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n.

1 - On suppose que $f_o g = g_o f$;
Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g .

2 - On suppose que f est diagonalisable ;
Montrer que $f_o g = g_o f$ si et seulement si tout sous espace propre de f est stable par g .

3 - On suppose que f admet n valeurs propres simples
a) montrer que $f_o g = g_o f$ si et seulement si tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
b) montrer que $f_o g = g_o f$ si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $g = Q(f)$.
c) En déduire la dimension et une base du commutant de f.

SOLUTION :

1- Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f_o g = g_o f$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E)$

$\forall x \in E_\lambda(f),\ f(g(x)) = (f_0 g)(x) = (g_0 f)(x) = g[f(x)] = g(\lambda x) = \lambda g(x)$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ ce qui montre que $E_\lambda(f)$ est stable par g.

2 - • La question précédente a montré que si $f_o g = g_o f$, alors tout sous espace propre de f est stable par g .

• On suppose de plus que f est diagonalisable et il s'agit de montrer la peoposition réciproque :

f étant diagonalisable, E est somme des sous espaces propres de f : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$

Notons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$

Pour tout $x \in E,\ \exists (x_1, x_2, ..., x_p) \in E_{\lambda_1}(f) \times E_{\lambda_2}(f) \times ... \times E_{\lambda_p}(f)$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k$

alors $g_o f(x) = g[f(x)] = g(f(x_1) + .. + f(x_p)) = g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p)$

$g_o f(x) = \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + ... + \lambda_p g(x_p)$

par ailleurs , $f_o g(x) = f[g(x_1 + x_2 + ... + x_p)] = f[g(x_1)] + f[g(x_2)] + ... + f[g(x_p)]$

mais $f[g(x_i)] = \lambda_i g(x_i)$ puisque $g(x_i) \in E_{\lambda_i}(f)$ par stabilité,

donc $f_o g(x) = \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + ... + \lambda_p g(x_p) = g_o f(x)$

On a aisni montré que $\forall x \in E,\ g_o f(x) = f_o g(x)$ et donc $g_o f = f_o g$

3 - On suppose que f admet n valeurs propres simples

Alors f est diagonalisable et chaque sous espace propre, $E_{\lambda_i}(f)_{,i=1..n}$ est une droite vectorielle.

a) • Supposons que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .

Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, pour tout $x \in E_\lambda(f)$, x est vecteur propre de g donc $\exists \mu \in \mathbb{C},\ g(x) = \mu x$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(f)$ est stable par g.

(raisonnement valable si $x \neq 0$, conclusion encore vraie si $x = 0$)

d'après 2-) on en conclut alors que $g_o f = f_o g$

• Réciproquement, d'après 2-) si $f_o g = g_o f$ alors tout sous espace propre de f est stable par g .

Soit x un vecteur propre de f, associé à une valeur propre λ. $E_\lambda(f)$ est une droite, engendrée par x, et stable par g.

Donc $g(x)$ appartient encore à cette droite et $g(x)$ se décompose sur le vecteur x qui est une base de cette droite : $\exists \mu \in \mathbb{C},\ g(x) = \mu x$

Donc x est vecteur propre de g.

b) • S'il existe $Q = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $g = Q(f)$, alors

$$f_o g = f_o(Q(f)) = f_o\left(\sum_{k=0}^{m} a_k f^k\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k f^k\right)_o f = Q(f)_o f = g_o f$$

• réciproquement, supposons que $f_o g = g_o f$.

Alors tout vecteur propre de f est vecteur propre de g d'après a)

Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de vecteurs propres de f

(respectivement associés aux valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

$(v_1, v_2, ..., v_n)$ sont des vecteurs propres de g associés à des valeurs propres $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ de g

(pas forcément deux à deux distinctes)

Soit $Q = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $h = Q(f)$;

Les deux endomorphismes g et h sont égaux si et seulement si ils coïncident sur la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de E :

$$g = Q(f) \iff \left\{\begin{array}{l} g(v_1) = [Q(f)](v_1) \\ g(v_2) = [Q(f)](v_2) \\ \quad .... \\ g(v_n) = [Q(f)](v_n) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mu_1\, v_1 = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k f^k(v_1) \\ \mu_2\, v_2 = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k f^k(v_2) \\ \quad .... \\ \mu_n\, v_n = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k f^k(v_n) \end{array}\right.$$

$$g = Q(f) \iff \begin{cases} \mu_1\, v_1 = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_1^k\, v_1 = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_1^k\right) v_1 \\ \mu_2\, v_2 = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_2^k\, v_2 \\ \dots\dots\dots \\ \mu_n\, v_n = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_n^k\, v_n \end{cases}$$

$$g = Q(f) \iff \begin{cases} \mu_1 = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_1^k = a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_1^2 a_2 + \dots + \lambda_1^m a_m \\ \mu_2 = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_2^k = a_0 + \lambda_2 a_1 + \lambda_2^2 a_2 + \dots + \lambda_2^m a_m \\ \dots\dots\dots \\ \mu_n = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_n^k = a_0 + \lambda_n a_1 + \lambda_n^2 a_2 + \dots + \lambda_n^m a_m \end{cases}$$

En prenant le degré m de $Q(X)$ égal à $n-1$, on obtient un système de n équations aux n inconues $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$. Le déterminant de ce système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots\dots\dots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde : $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Il est non nul car les λ_i sont deux à deux distincts.

Le système est de Cramer et admet une solution $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ unique.

Il existe donc un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = Q(f)$.

Remarquons que si $P \in \mathbb{C}[X]$, $g = P(f) \iff Q(f) = P(f) \iff (P-Q)(f) = 0$

$\iff P(X) - Q(X)$ est un polynôme annulateur de f.

On obtient donc un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $g = P(f)$ en ajoutant à Q un polynôme annulateur quelconque de f.

c) Le commutant de f est un sous espace de $\mathscr{L}(E)$ de dimesion n dont une base est $(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$.

5.2 Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'ordre n (ENSEA)

a) On considère un espace vectoriel réel E de dimension n et un endomrphisme $f \in L(E)$, nilpotent d'ordre n : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

Montrer qu'il existe un vecteur v de E tel que $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ soit une base de E.

Ecrire la matrice de f dans cette base.

b) Montrer que pour tout p compris entre 1 et $n-1$, $\dim(\ker(f^p)) = p$

c) Rechercher le commutant de f, c'est à dire $C(f) = \{g \in L(E), f_o g = g_o f\}$

SOLUTION :

a) Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$

Montrons que la famille $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$

En composant par f^{n-1} et tenant compte de ce que $f^n = 0$, on obtient

$$\lambda_0 \underbrace{f^{n-1}(v)}_{\neq 0} + \lambda_1 \underbrace{f^n(v)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{f^{n+1}(v)}_{=0} + \dots + \lambda_{n-1} \underbrace{f^{2n-2}(v)}_{=0} = 0$$

donc $\lambda_0 = 0$ puisque $f^{n-1}(v) \neq 0$

En repartant de l'égalité $\lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$ et en composant cette fois par f^{n-2}, on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(v) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$

En réïtérant le procédé, on obtient successivement $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$,... $\lambda_n = 0$, ce qui montre bien que le système $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre.

Puisque c'est un système libre de n vecteurs dans un espace de dimension n, c'est une base de E.

La matrice de f dans la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est :

$$A = \begin{array}{ccccc} f(v) & f^2(v) & \dots & f^{n-1}(v) & f^n(v) \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v \\ f(v) \\ f^2(v) \\ \vdots \\ f^{n-1}(v) \end{array}$$

b) Puisque $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est une base de E, un système générateur de $\text{Im}(f)$ est l'image de cette base, c'est à dire $(f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ (puisque $f^n(v) = 0$)

or $(f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre comme système extrait d'un système libre. C'est donc une base de $\text{Im}(f)$.

Il s'ensuit que $\text{rg}(f) = n - 1$ et par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 1$

Par une récurrence sans difficulté, on montre de même que pour tout p compris entre 1 et $n-1$, $(f^p(v), f^{p+2}(v), ..., f^{n-1}(v))$ est donc une base de $\text{Im}(f^p)$.

Il s'ensuit que $\text{rg}(f^p) = n - p$ et par le théorème du rang, $\dim(\ker(f^p)) = p$

Remarque : On peut montrer aussi que $(f^{n-p}(v), f^{n-p+1}(v), ..., f^{n-1}(v))$ est une base de $\ker(f^p)$.

c) Soit $g \in L(E)$ tel que $g_o f = f_o g$

alors $g_o f^2 = (g_o f)_o f = (f_o g)_o f = f_o(g_o f) = f_o(f_o g) = f_o^2 g$

et par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_o f^k = f^k{}_o g$

• $g(v) \in E$ donc se décompose sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ de E :

$\exists(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v)$

Montrons alors que $g = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + ... + a_{n-1} f^{n-1}$

Il suffit pour cela de vérifier que les endomorphismes g et $a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}$ coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$.

On a déja $g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v)$

alors $g(f(v)) = f(g(v)) = f(a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v))$

$= a_0 f(v) + a_1 f^2(v) + a_2 f^3(v) + ... + a_{n-1} f^n(v) = (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f(v))$

puis $g(f^2(v)) = f^2(g(v)) = f^2(a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v))$

$= a_0 f^2(v) + a_1 f^3(v) + a_2 f^4(v) + ... + a_{n-1} f^{n+1}(v)$

$= (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f^2(v))$

en réïtérant le calcul, on montre par une récurrence sans difficulté que

$\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(v)) = (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f^k(v))$

Les endomorphismes g et $a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}$ sont donc égaux puisqu'ils coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ de E.

Donc $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ g = P(f)$

Par ailleurs il est clair que tout polynôme en f commute avec f.

Donc $\boxed{\text{le commutant de } f \text{ est } C(f) = \mathbb{R}_{n-1}[f] = \text{Vect}(Id_E, f, f^2, f^3, ..., f^{n-1})}$

C'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension n.

5.3 Commutant **Mines 06 - 370**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(\mathbb{R}^{2n+1})$ tel que :

$u^3 = u, \qquad \text{tr } u = 0, \qquad \text{tr}(u^2) = 2n$

On note $C(u)$ le commutant de u : $C(u) = \{v \in L(E)\ /\ u_o v = v_o u\}$

a) Déterminer la dimension de $C(u)$

b) Quels sont les entiers n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

SOLUTION :

a)• Le polynôme $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynome annulateur de u, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. u est donc diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 0, 1\}$.

Dans une base bien choisie B_0, u admet une matrice de la forme $\text{diag}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{p\ fois}, \underbrace{-1, -1, ..., -1}_{q\ fois}, \underbrace{0, 0..., 0}_{r\ fois})$

où $p = \dim(\ker(u - Id_E))$, $q = \dim(\ker(u + Id_E))$, $r = \dim(\ker(u))$ (éventuellement nuls)

$\text{tr}(u) = p - q = 0$ donc $p = q$

$\text{tr}(u^2) = p + q = 2n$ donc $p = q = n$ (puisque la matrice de u^2 dans la même base est $\text{diag}(\underbrace{1, ..., 1}_{p+q\ fois}, \underbrace{0, ..., 0}_{r\ fois})$)

Par différence, puisque $p + q + r = 2n + 1$, $r = 1$

• Soit $v \in C(u)$. Alots $\forall x \in E_\lambda^u = \dim(\ker(u - \lambda Id_E))$, $u[v(x)] = v[u(x)] = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda^u$. Chaque sous espace propre de u est stable par tout $v \in C(u)$.

Donc E_1^u, E_{-1}^u et E_0^u sont stables par v.

Dans la base B_0 union d'une base de E_1^u, d'une base de E_{-1}^u et d'une base de E_0^u, la matrice de u est constituée de blocs de la forme : $\left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right)$ où $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$.

Elle a donc $2n^2 + 1$ coefficients arbitraires.

Réciproquement, tout endomorphisme =v= dont la matrice dans la base B_0 est de ce type commute avec u.

Donc $\boxed{\dim(C(u)) = 2n^2 + 1}$

b)• $u^3 = u$, $u^4 = u^2$, $u^5 = u^3 = u$ etc... Donc $\mathbb{R}[u]$ =Vect$(Id_E, u, u^2, u^3, ..., u^k, ...) = \text{Vect}(Id_E, u, u^2)$ est de dimension 3.

Par ailleurs, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.
Donc $\boxed{C(u) = R[u]} \iff \dim(C(u)) = \dim(R[u]) \iff 2n^2+1=3 \boxed{\iff n=1}$

5.4 ** Dimension du commutant d'une matrice :

On se propose de démontrer que la dimension du commutant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est toujours supérieur ou égal à n.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle commutant de A l'ensemble des matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A :
$C(A) = \{M \in M_n(K),\ A.M = M.A\}$

Il est clair que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$, non réduit à $\{0\}$.

a) Soit Δ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et ayant tous ses éléments diagonaux deux à deux distincts.
$(\ \forall (i,j),\ i \neq j \implies \Delta_{i,i} \neq \Delta_{j,j}\ )$
Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec Δ alors M est une matrice diagonale.
En déduire la dimension de $C(A)$ si A admet n valeurs propres distinctes.

b) Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui ont n valeurs propres distinctes.

c) Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.
On suppose que $\forall p,\ \mathrm{rg}(B_p) \leq r$ $\quad$ (r entier fixe de $\mathbb{N}$)
Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq r$

d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et (B_p) une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$, ayant chacune n valeurs propres distinctes, qui converge vers A.
On considère l'équation $A.M = M.A$ comme un système d'équations aux inconnues $m_{i,j},\ i = 1...n, j = 1...n$,
Déterminer le rang du système $B_p.M = M.B_p$
Que peut on en déduire sur le rang du système $A.M = M.A$?
Conclure

SOLUTION :

a) Soit $\Delta = (\Delta_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et ayant tous ses éléments diagonaux deux à deux distincts.
Soit $M = (m_{i,j}) \in C(\Delta)$

$$\Delta.M = M.\Delta \implies \forall (i,j), (\Delta.M)_{i,j} = (M.\Delta)_{i,j}$$
$$\implies \forall (i,j),\ \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Delta_{i,k}}_{0\ si\ k\neq i}\ m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\ \underbrace{\Delta_{k,j}}_{0\ si\ k\neq j}$$
$$\implies \forall (i,j),\ \Delta_{i,i}\, m_{i,j} = m_{i,j}\ \Delta_{j,j}$$
$$\implies \forall (i,j),\ \ m_{i,j}(\Delta_{i,i} - \Delta_{j,j}) = 0$$
$$\implies \forall (i,j),\ \ m_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (\text{puisqu'alors } \Delta_{i,i} - \Delta_{j,j} \neq 0)$$
$$\implies M \text{ est une matrice diagonale.}$$

• Soit A admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable :
$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),\ A = P.\Delta.P^{-1}$$
$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ M \in C(A) \iff A.M = M.A$$
$$\iff (P.\Delta.P^{-1}).M = M.(P.\Delta.P^{-1})$$
$$\iff \Delta.P^{-1}.M.P = P^{-1}.M.P.\Delta$$
$$\iff P^{-1}.M.P \in C(\Delta.)$$
$$\iff P^{-1}.M.P \text{ est un matrice diagonale} \quad (\text{d'après l'étude qui précède})$$
$$\iff \exists (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n,\ P^{-1}.M.P = \mu_1 E_{1,1} + \mu_2 E_{2,2} + ... + \mu_n E_{n,n}$$
$$\iff \exists (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n,\ M = P.(\mu_1 E_{1,1} + \mu_2 E_{2,2} + ... + \mu_n E_{n,n}).P^{-1}$$
$$\iff \exists (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n,\ M = \mu_1 P.E_{1,1}.P^{-1} + \mu_2 P.E_{2,2}.P^{-1} + ... + \mu_n.P.E_{n,n}.P^{-1}$$
$$\iff M \in \mathrm{Vect}(P.E_{1,1}.P^{-1}, P.E_{2,2}.P^{-1}, ..., P.E_{n,n}.P^{-1})$$

On vérifie facilement que le système $(P.E_{1,1}.P^{-1}, P.E_{2,2}.P^{-1}, ..., P.E_{n,n}.P^{-1})$ est libre, puisque le système $(E_{1,1}.E_{2,2}, ..., E_{n,n})$ l'est.

En conclusion, $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(P.E_{1,1}.P^{-1}, P.E_{2,2}.P^{-1}, ..., P.E_{n,n}.P^{-1}) \text{ est un sous espace de dimension } n.}$

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable :

$$\exists T = \begin{pmatrix} t_1 & \times & ... & \times & \times \\ 0 & t_2 & \times & ... & \times \\ \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & t_{n-1} & \times \\ 0 & ... & ... & 0 & t_n \end{pmatrix}, \text{ triangulaire supérieure}, \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \text{ telles que}$$
$$A = P.T.P^{-1}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, quelconque. Les termes diagonaux $(t_1, t_2, ..., t_n)$ ne sont peut être pas deux à deux distincts. Mais on peut alors trouver des réels $\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$, tous plus petits que $\dfrac{1}{p}$ en module, tels que

$(t_1, t_2 + \varepsilon_2, t_3 + \varepsilon_3, , ..., t_n + \varepsilon_n)$ soient deux à deux distincts.

Soit $T_p = \begin{pmatrix} t_1 & \times & ... & \times & \times \\ 0 & t_2+\varepsilon_2 & \times & ... & \times \\ \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & t_{n-1}+\varepsilon_{n-1} & \times \\ 0 & ... & ... & 0 & t_n+\varepsilon_n \end{pmatrix}$

$\|T - T_p\|_\infty \leq \max(\varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n) \leq \dfrac{1}{p}$

En considérant une norme multiplicative sur $M_n(\mathbb{C})$ (il en existe bien), une telle norme $\| \, . \, \|$ est équivalente à la norme uniforme $\| \, . \, \|_\infty$: $\exists k > 0, \forall M, \|M\| \leq k.\|M\|_\infty$

$\|A - P.T_p.P^{-1}\| = \|P.T.P^{-1} - P.T_p.P^{-1}\| = \|P.(T - T_p).P^{-1}\| \leq \|P\|.\|T - T_p\|.\|P^{-1}\|$

$\Longrightarrow \|A - P.T_p.P^{-1}\| \leq k.\|P\|.\|T - T_p\|_\infty.\|P^{-1}\| \leq \dfrac{k.\|P\|.\|P^{-1}\|}{p}$

Cette majoration montre que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|A - P.T_p.P^{-1}\| = 0$ et que la suite de matrices

$(B_p) = (A - P.T_p.P^{-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice A dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{C})$

Enfin, chaque matrice B_p possède bien n valeurs propres distinctes, puisqu'est semblable à la matrice T_p qui a été construite de façon a avoir n valeurs propres distinctes.

c) Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.

On suppose que $\forall p$, $\mathrm{rg}(B_p) \leq r$ (r entier fixe de $\mathbb{N}$)

Alors, chaque matrice extraite de B_p d'ordre $\geq r+1$ est singulière et son déterminant est nul. Quand $p \to +\infty$, ce déterminant a pour limite le déterminant extrait de la matrice limite A composé par les mêmes indices de lignes et de colonnes, puisque le déterminant est une application continue de $M_k(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

On en déduit que tous les déterminants extraits de la matrice A d'ordre supérieur ou égal à r sont nuls et que toutes les matrices extraites de A d'ordre supérieur ou égal à r sont singulières.

Autrement dit, il n'existe aucune matrice extraite de A d'ordre supérieur ou égal à r qui soit inversible.

On en conclut que $\mathrm{rg}(A) \leq r$

(si A est de rang s, il existe au moins une matrice inversible extraite de A d'ordre s)

d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et considérons une suite (B_p) de matrices de $M_n(\mathbb{C})$, ayant chacune n valeurs propres distinctes, qui converge vers A (il en existe d'après la question b).

L'équation matricielle $A.M = M.A$ peut être considérée comme un système d'équations dont les inconnues sont les cefficients $m_{i,j}$, $i = 1...n, j = 1...n$ de la matrice M.

C'est donc un système linéaire de n^2 équations (car il y a n^2 coefficients dans $A.M$ et dans $M.A$ qui doivent être identifiés), aux n^2 inconnues $m_{i,j}$, $i = 1...n, j = 1...n$.

Pour une matrice qui possède n valeurs propres deux à deux distintes, ce système a été étudié dans la question a), et l'ensemble des solutions forme un espace de dimension n.

Il en est ainsi du système $B_p.M = M.B_p$. Or la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire est égale au nombre d'équations (n^2), moins le rang du système.

On en conclut que le rang de chaque système $B_p.M = M.B_p$ est égal à $n^2 - n$.

On en déduit que le rang du système $A.M = M.A$ est inférieur ou égal à $n^2 - n$ (d'après la question c))

Et donc la dimension de $C(A)$, qui est égale à n^2 moins le rang de ce système, sera supérieure ou égale à $n^2 - (n^2 - n) = n$

Ainsi, $\boxed{\dim(C(A)) \geq n}$

6 Sous espaces stables :

6.1 Recherche de sous espaces stables :

a) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps K. Soit F un sous espace de E stable par u.

Montrer que si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme $\widetilde{u}$ induit par u sur F l'est aussi.

b) f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Rechercher les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f

Note : (A l'instruction **eigenvects(A)**, MAPLE retourne $[5, 1, \{[1, 0, 2]\}], [3, 2, \{[0, 1, -1], [1, 0, 1]\}]$)

SOLUTION :

a) Soit F un sous espace de E stable par u, et $\widetilde{u}$ l'endomrphisme induit par u sur F.

Puisque u est diagonalisable, u admet un polynôme annulateur $P(X)$ scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples:

$P(u) = \omega$ (endomorphisme nul de E)

$\forall x \in E,\ [P(u)](x) = O_E \Longrightarrow \forall x \in F,\ [P(u)](x) = O_E$

$\Longrightarrow \forall x \in F,\ [P(\widetilde{u})](x) = O_E = 0_F$

$\Longrightarrow P(\widetilde{u}) = \omega'$ (endomorphisme nul de F)

Puisque $\widetilde{u}$ admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples, il est diagonalisable.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

>with(linalg);
A:=matrix(3,3,[1,2,2,0,3,0,-4,4,7]);
eigenvects(A);

$[5, 1, [1, 0, 2]], [3, 2, [0, 1, -1], [1, 0, 1]]$

5 est valeur propre simple de A. Le sous espace propre associé est la droite vectorielle $E_A(5)$ engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 est valeur propre double de A. Le sous espace propre associé est le plan vectoriel $E_A(3)$ engendré par les vecteurs $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (plan d'équation $x - y - z = 0$)

Puisque la somme des dimensions des sous espaces propres de A est égale à 3, la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et l'endomrphisme u l'est aussi.

• Soit (D) une droite vectorielle, engendrée par un vecteur w non nul. (D) est stable par u si et seulement si $u(W) \in (D)$, ssi w est un vecteur propre de A.

Les droites stables par A sont celles qui sont dirigées par un vecteur non nul de $E_A(5)$ ou de $E_A(3)$.

Ce sont donc :

- la droite $E_A(5)$ elle même
- toute droite incluse dans le plan $E_A(3)$.

• Soit (P) un plan vectoriel stable par u, et soit $\widetilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur (P)

Puisque u est diagonaklisable, $\widetilde{u}$ l'est aussi. De plus, tout vecteur propre de $\widetilde{u}$ est un vecteur propre de u. Soit (w_1, w_2) une base de (P) formée de vecteurs propres de $\widetilde{u}$.

Chaque w_i appartient à $E_A(5)$ ou à $E_A(3)$.

- si les deux appartiennent au plan $E_A(3)$, alors (P) =Vect$(w_1, w_2) = E_A(3)$
- il se peut aussi que l'un d'entre eux soit dans $E_A(5)$ et l'autre dans $E_A(3)$. Alors (P) est un plan quelconque contenant la droite (D).

Réciproquement, les plans trouvés dans les deux cas sont bien stables par u.

Finalement, les plans stables par u sont :

- le plan $E_A(3)$
- tout plan contenant la droite $E_A(5)$

6.2 Hyperplans stables par un endomorphisme :

E est un espace vectoriel de dimension finie n, de base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

f est un endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

H est un hyperplan de E d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$.

Montrer que H est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$.

Appliquer ce résultat à l'exercice précédent.

SOLUTION : • Supposons que le vecteur colonne $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de ${}^tA$:

$\exists\lambda \in \mathbb{K},\ {}^tA.C = \lambda C$

Soit x un vecteur de H, de vecteur colonne $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

alors $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = {}^tX.C = 0$

Son image $f(x)$ a pour vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A.X$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n = (y_1, y_2, ..., y_n).\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^tY.C = {}^t(A.X).C = {}^tX.{}^tA.C = {}^tX.\lambda C$$

$$= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = 0$$

donc $f(x) \in H$, ce qui montre que H est stable par f.

• Réciproquement, supposons que H est stable par f.
H est le noyau de la forme linéaire φ qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre $\varphi(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$
φ a pour matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ${}^tC = (a_1, a_2, ..., a_n)$
Par hypothèse, $\forall x \in H,\ f(x) \in H$, c'est à dire,

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$$

Soit ψ la forme linéaire qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre ${}^tC.(AX)$
La stabilité de H par f se traduit par :
$\forall X \in \mathbb{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$
soit aussi : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = 0 \implies \psi(x) = 0$
ou encore $\ker\varphi \subset \ker\psi$
donc $\exists\lambda \in \mathbb{K},\ \psi = \lambda\varphi$, ce qui se traduit matriciellement par : ${}^tC.A = \lambda\,{}^tC$
et en passant à la transposée, $\exists\lambda \in \mathbb{K},\ {}^tA.C = \lambda C$
donc C est vecteur propre de ${}^tA$.

APPLICATION :

$>$**eigenvects(transpose(A));**

$[3, 2, [-2, 0, 1], [0, 1, 0]], [5, 1, [-1, 1, 1]]$

${}^tA$ possède bien sur les mêmes valeurs propres que A, avec les mêmes ordres de multiplicité:

5 est valeur propre simple et $E_{{}^tA}(5)$ est la droite vectorielle de base $W_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 est valeur propre double et $E_{{}^tA}(3)$ est le plan engendré par les vecteurs $W_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il a pour équation $x + 2z = 0$.

Les plans stables par u sont les plans d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur propre de ${}^tA$

Ce sont donc :
- le plan d'equation $-x + y + z = 0$ c'est à dire $E_A(3)$
- les plans d'equations de la forme $-2ax + by + az = 0$. (qui contiennent bien la droite $E_A(5)$ dirigée par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

7 Equations matricielles :

7.1 Racine carrée de matrice nilpotente : **Oral ENSI**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'ordre p $\quad (A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0)$

a) Montrer que $p \leq n$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in M_n(\mathbf{K})$ telle que $B^2 = A$

SOLUTION :

a) A étant nilpotente d'ordre p $(A^p = 0)$, le polynôme X^p est un polynôme annulateur de la matrice A.
Les valeurs propres de A sont donc parmi les racines de ce polynôme.
Donc seule 0 est valeur propre de la matrice A.
Donc le polynôme caractéristique de A n'a que 0 pour racines. Or il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et de degré n, c'est donc X^n (au signe près)
Ce polynôme caractéristique est lui aussi un polynôme annulateur de A. Donc $A^n = 0$ et $p \leq n$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$

A est donc nilpotente d'ordre 3.

Supposons qu'il existe $B \in M_n(\mathbf{K})$ telle que $B^2 = A$, alors $B^4 = A^2 \neq 0$ et $B^6 = A^3 = 0$ donc B serait nilpotente, d'ordre 5 ou 6, ce qui est impossible d'après la question a) puisqu'ici $n = 3$.

7.2 Matrice racine d'une équation du second degré :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 72 & 848 & -400 \\ -54 & -576 & 270 \\ -99 & -1040 & 487 \end{pmatrix}$

Rechercher les matrices M telles que $M^2 - 6M = A$

Calculer explicitement toutes les matrices M solutions avec MAPLE.

Vérifier avec MAPLE que les matrices trouvées sont bien solutions de l'équation.

SOLUTION • Etudions les éléments propres de A :

>with(linalg);

A:=matrix(3,3,[.............]); vp:=eigenvects(A);

$[0, 1, \{[-2/3, 1, 2]\}], [-9, 1, \{[-16, 2, 1]\}], [-8, 1, \{[5, 0, 1]\}]$

La matrice A possède 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R}),\ A = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

• Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 - 6M = A$

alors $M^2 - 6M = P\Delta P^{-1}$ donc $P^{-1}.(M^2 - 6M).P = \Delta$

$\Longrightarrow (P^{-1}.M.P)^2 - 6P^{-1}.M.P = \Delta$

En posant $N = P^{-1}.M.P$, N vérifie la relation $N^2 - 6N = \Delta$

qui entraîne que $N.\Delta = N.(N^2 - 6N) = N^3 - 6N^2 = (N^2 - 6N).N = \Delta.N$

Donc N commute avec la matrice diagonale Δ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Donc N est une matrice diagonale : $\exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3,\ N = \mathrm{diag}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$N^2 - 6N = \Delta \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 6a & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 6b & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a = 0 \\ b^2 - 6b = -8 \\ c^2 - 6c = -9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a = 0 \\ b^2 - 6b + 8 = 0 \\ c^2 - 6c + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 6 \\ b = 2 \text{ ou } b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En appelant N_1, N_2, N_3 et N_4 respectivement ces quatre matrices, on obtient pour solution de l'équation de départ les quatre matrices $M = P.N_i.P^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

• **Calcul pratique avec MAPLE :**

On diagonalise la matrice A :

Suivre l'action de chacune des lignes d'intructions suivantes pour obtenir une matrice de passage P dont les colonnes sont formées de vecteurs propres de P.

ep[1];

ep[1][3];

ep[1][3];

op(ep[1][3]);

matrix([seq(op(ep[i][3]),i=1..3)]);

on obtient finalement la matrice P :

P:=transpose(matrix([seq(op(ep[i][3]),i=1..3)]));

On vérifie le calcul en calculant $P^{-1}.A.P$ qui doit être diagonale :

multiply(inverse(P),A,P);

On définit ensuite les matrices N diagonales.

Faire attention à ce que l'ordre des termes diagonaux corresponde à celui des valeurs propres dans la diagonalisation de A :

N[1]:=diag(0,2,3); N[2]:=diag(0,4,3); N[3]:=diag(6,2,3); N[4]:=diag(6,4,3);
On calcule les matrices $M_i = P.N_i.P^{-1}$ correspondantes :
for i from 1 to 4 do M[i]:=multiply(P,N[i],inverse(P)) od;
On vérifie enfin que les matrices M_i trouvées sont bien solutions de l'équation :
for i from 1 to 4 do evalm(multiply(M[i],M[i])-6*M[i]) od;

8 Systèmes différentiels linéaires :

8.1 Système différentiel (1) :

On considère le sysstème différentiel (S) :

$$\begin{cases} x' = 8x + y + 5z \\ y' = -6x - 3z \\ z' = -16x + y - 10z \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) sur la position de $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ à l'instant 0 a-t-on

a) $M(t)$ admet une limite fiinie quand $t \to +\infty$?

b) La trajectoire de $M(t)$ est périodique ?

Montrer que dans ce cas la trajectoire est contenue dans un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION :

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 0 & -3 \\ -16 & 1 & -10 \end{pmatrix}$,

le système (S) s'écrit : $X'(t) = A.X(t)$

Réduisons la matrice A.

Par exemple, avec MAPLE :

>with(linalg); A:=matrix(3,3,[8,1,5,-6,0,-3,-16,1,-10]);
eigenvects(A);

Les valeurs propres de A sont $-2, 3i$ et $-3i$ et les vecteurs propres associés sont respectivement

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $V_3 = \overline{V_2} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$

Donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ (mais pas dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$) et : $A = P.\Delta.P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2+i & 2-i \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff X'(t) = P.\Delta.P^{-1}.X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = \Delta.P^{-1}.X(t) \\ &\iff (P^{-1}.X)'(t) = \Delta.P^{-1}.X(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t) \text{ où } Y(t) = P^{-1}.X(t) \end{aligned}$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ le nouveau système s'écrit : $\begin{cases} \alpha'(t) = -2\alpha(t) \\ \beta'(t) = 3i\beta(t) \\ \gamma'(t) = -3i\gamma(t) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \alpha(t) = \lambda_1 e^{-2t} \\ \beta(t) = \lambda_2 e^{3it} \\ \gamma(t) = \lambda_3 e^{-3it} \end{cases}$

L'égalité $X(t) = P.Y(t)$ permet de revenir aux fonctions de départ :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2+i & 2-i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{-2t} \\ \lambda_2 e^{3it} \\ \lambda_3 e^{-3it} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2+i & 2-i \end{array}\right) . \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{-2t} \\ \lambda_2 e^{3it} \\ \lambda_3 e^{-3it} \end{pmatrix}$$

et finalement : $\boxed{X(t) = \lambda_1 e^{-2t}V_1 + \lambda_2 e^{3it}V_2 + \lambda_3 e^{-3it}V_3}$ (calcul par blocs)

• a) Les fonctions $t \mapsto e^{3it}$ et $t \mapsto e^{-3it}$ n'ont pas de limite finie quand $t \to +\infty$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0$

donc le point $M(t)$ admet une limite fiinie quand $t \to +\infty$ si et seulement si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ssi $X(0) = \lambda_1 V_1 \iff X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\iff \frac{x(0)}{1} = \frac{z(0)}{-2} \text{ et } y(0) = 0$$

$$\boxed{\text{le point } M(t) \text{ admet une limite fiinie quand } t \to +\infty \iff \{2x(0) = -z(0) \text{ et } y(0) = 0\}}$$

• b) Les fonctions $(t \mapsto e^{3it})$ et $(t \mapsto e^{-3it})$ sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{3}$, mais la fonction $t \mapsto e^{-2t}$ ne l'est pas.

Donc la trajectoire de $M(t)$ est périodique si et seulement si $\lambda_1 = 0$

Or $X(0) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$

alors la trajectoire de $M(t)$ est périodique si et seulement si $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $V_2 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ et $V_3 = \overline{V_2} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$

$\iff$ le système $(X(0), V_1, V_2)$ est un système lié,

$\iff \det(X(0), V_1, V_2) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} x(0) & -1-i & -1+i \\ y(0) & 1 & 1 \\ z(0) & 2+i & 2-i \end{vmatrix} = 0 \iff x(0) - y(0) + z(0) = 0$$

$$\boxed{\text{La trajectoire de } M(t) \text{ est périodique } \iff x(0) - y(0) + z(0) = 0}.$$

• Dans ce cas, on a pour tout t, $X(t) = \lambda_2 e^{3it} V_2 + \lambda_3 e^{-3it} V_3$

Donc à tout instant $\begin{vmatrix} x(t) & -1-i & -1+i \\ y(t) & 1 & 1 \\ z(t) & 2+i & 2-i \end{vmatrix} = 0$ et le point t est toujours dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z = 0$

8.2 Système différentiel (2) :

On considère le sysstème différentiel (S) :

$$\begin{cases} x' = -x + 4y + z \\ y' = -x - 2y - z \\ z' = 3x + z \end{cases}$$

a) Résoudre le système lorsque $x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0$

b) A quelle condition sur $X(0)$ la trajectoire a-t-elle une limite finie quand $t \to +\infty$?

c) A quelle condition sur $X(0)$ la trajectoire a-t-elle pour limite 0 quand $t \to +\infty$?

SOLUTION :

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

le système (S) s'écrit : $X'(t) = A.X(t)$

Réduisons la matrice A.

Par exemple, avec MAPLE :

>with(linalg); A:=matrix(3,3,[[-1, 4, 1], [-1, -2, -1], [3, 0, 1]]);
eigenvects(A);

$[-2, 1, \{([1, 0, -1])\}], [0, 2, \{([1, 1, -3])\}]$

Les valeurs propres de A sont -2 et 0 et les vecteurs propres associés sont respectivement

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La valeur propre 0 est double, le sous espace propre asssocié n'est que de dimension 1. La matrice A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, ni dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrons que A admet une réduite de Jordan de la forme $R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

Pour cela recherchons un vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $A.V_3 = V_2$

$$A.V_3 = V_2 \iff \begin{cases} -a + 4b + c = 1 \\ -a - 2b - c = 1 \\ 3a + c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 + b \\ b = b \\ c = -3b \end{cases}$$

En prenant $b=0$, on obtient $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A vérifie : $\begin{cases} f(V_1) = -2V_1 \\ f(V_2) = 0 \\ f(V_3) = V_2 \end{cases}$

La matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) est donc : $R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

La formule de changement de base pour un endomorphisme donne : $R = P^{-1}.A; P$
ou encore : $A = P.R.P^{-1}$

• Résolution du système différentiel :

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff X'(t) = P.R.P^{-1}.X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = R.P^{-1}.X(t) \\ &\iff (P^{-1}.X)'(t) = R.P^{-1}.X(t) \\ &\iff Y'(t) = R.Y(t) \text{ où } Y(t) = P^{-1}.X(t) \end{aligned}$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ le nouveau système s'écrit : $\begin{cases} \alpha'(t) = -2\alpha(t) \\ \beta'(t) = \gamma(t) \\ \gamma'(t) = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \alpha(t) = \lambda_1\, e^{-2t} \\ \beta(t) = \lambda_2 + \lambda_3\, t \\ \gamma(t) = \lambda_3 \end{cases}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des constantes réelles.

L'égalité $X(t) = P.Y(t)$ permet de revenir aux fonctions de départ :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1\, e^{-2t} \\ \lambda_2 + \lambda_3\, t \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$X(t) = \lambda_1\, e^{-2t} V_1 + (\lambda_2 + \lambda_3\, t) V_2 + \lambda_3 V_3$ (calcul par blocs)

ou, en développant : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, e^{-2t} + \lambda_2 + \lambda_3\, t - \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3\, t \\ -\lambda_1\, e^{-2t} - 3(\lambda_2 + \lambda_3\, t) \end{pmatrix}$

$\boxed{X(t) = \lambda_1\, e^{-2t} V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 (tV_2 + V_3)}$ (*)

et en particulier : $X(0) = \lambda_1\, V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$

a) • $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $e_1 = -V_3$ (ce qu'on aurait pu remarquer sans ce calcul)

$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

En reportant dans la relation (*), on obtient :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \lambda_3 (tV_2 + V_3) = -\begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ -3t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x(t) = -t+1 \\ y(t) = -t \\ z(t) = 3t \end{cases}}$$

b) • D'après la relation (*), $X(t)$ a une limite finie quand $t \to +\infty$ si et seulement si $\lambda_3 = 0$

$\iff X(0) = \lambda_1\, V_1 + \lambda_2 V_2$

$\iff X(0)$ est combinaison linéaire de V_1 et V_2 ,

$\iff \det(X(0), V_1, V_2) = 0$,

$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & x(0) \\ 0 & 1 & y(0) \\ -1 & -3 & z(0) \end{vmatrix} = 0 \iff x(0) + 2y(0) + z(0) = 0$

$\boxed{X(t) \text{ a une limite finie quand } t \to +\infty \iff x(0) + 2y(0) + z(0) = 0}$

c) • D'après la relation (*), $X(t)$ pour limite 0 quand $t \to +\infty$ si et seulement si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\iff X(0) = \lambda_1\, V_1$

$\iff X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$ est colinéaire à $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\iff x(0) = -z(0) \;\text{ et }\; y(0) = 0$

$\boxed{X(t) \text{ a pour limite 0 quand } t \to +\infty \iff x(0) = -z(0) \;\text{ et }\; y(0) = 0}$

8.3 Système différentiel (3) :

Intégrer le sysstème différentiel (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{array} \right.$$

SOLUTION :

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, le système s'écrit :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

c'est à dire $X'(t) = A.X(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'étude des éléments propres de A montre que 1 est valeur propre d'ordre 3 et -1 valeur propre simple.

Le sous espace $E_A(1)$ est le plan engendré par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sa dimension est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur prpre 1, la matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$

Le sous espace $E_A(-1)$ est la droite engendrée par le vecteur $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrons que la matrice A est semblable à la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $V_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour cela recherchons un vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ tel que $AV_3 = V_2' + V_3$:

$$AV_3 = V_2' + V_3 \iff (A - I_4)V_3 = V_2'$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} -a + b = 1 \\ -c + d = 1 \\ -c + d = 1 \\ -a + b = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} b = a + 1 \\ d = c + 1 \end{array} \right.$$

On peut prendre $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $A = P.R.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $X'(t) = A.X(t) \iff X'(t) = P.R.P^{-1}.X(t)$

$$\iff P^{-1}X'(t) = R.P^{-1}.X(t)$$

$$\iff (P^{-1}.X)'(t) = R.P^{-1}.X(t)$$

$\iff Y'(t) = R.Y(t)$ où $Y(t) = P^{-1}.X(t)$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix}$ le nouveau système s'écrit : $\begin{cases} \alpha'(t) = \alpha(t) \\ \beta'(t) = \beta(t) + \gamma(t) \\ \gamma'(t) = \gamma(t) \\ \delta'(t) = -\delta(t) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \alpha(t) = \lambda_1\, e^t \\ \beta(t) = \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t \\ \gamma(t) = \lambda_3\, e^t \\ \delta'(t) = \lambda_4\, e^{-t} \end{cases}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{K}^4$

L'égalité $X(t) = P.Y(t)$ permet de revenir aux fonctions de départ :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1\, e^t \\ \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t \\ \lambda_3\, e^t \\ \lambda_4\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1\, e^t + \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t + \lambda_4\, e^t \\ x'(t) = \lambda_1\, e^t + \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t + \lambda_3\, e^t - \lambda_4\, e^t \\ y(t) = \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t - \lambda_4\, e^t \\ y'(t) = \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t + \lambda_3\, e^t + \lambda_4\, e^t \end{cases}$$

Avec ces expressions, pour que $x'(t)$ soit bien la dérivée de $x(t)$, et $y'(t)$ celle de $y(t)$, il faut encore (et il suffit) que $\lambda_4 = 0$

d'où finalement : $\begin{cases} x(t) = \lambda_1\, e^t + \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t \\ y(t) = \lambda_2\, e^t + \lambda_3\, te^t \end{cases}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$