Espaces vectoriel normés - Fonctions vectorielles

* *

1 Espaces vectoriels normés

Note :

Les exercices 1 - 2 - 3 - 4 peuvent être abordés en apprenant le cours.
Les exercices 6 - 8 sont un peu plus difficiles.
Les exercices 5 - 7 utilisent les résultats du chapitre sur les suites et séries de fonctions.

1.1 Continuité d'applications linéaires

Soit E un espace vectoriel normé . Soit f une application linéaire de E dans E . Montrer l'équivalence des 5 propositions suivantes :

a) f est continue en 0 .
b) f est continue en tout point de E
c) L'image de $\overline{B}(0,1)$, boule unité fermée, par f , est bornée .
d) f est lipchitzienne sur E .
e) f est uniformément continue sur E .
f) Pour toute suite (x_n) de vecteurs de E qui converge vers 0, la suite $(f(x_n))$ converge aussi vers 0.

Solution :

• Une fonction lipschitzienne est uniformément continue donc $d) \Rightarrow e)$

• Une fonction uniformément continue est continue donc $e) \Rightarrow b)$

• Une fonction continue en tout point de E est en particulier continue en 0 donc $b) \Rightarrow a)$

• Si f est une fonction continue en 0, pour toute suite (x_n) de E qui converge vers 0, la suite $(f(x_n))$ converge aussi vers 0 donc $a) \Rightarrow f)$
• Supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments de E, $\lim x_n = 0 \Rightarrow \lim(f(x_n)) = 0$ et montrons que $f(\overline{B}(0,1))$ est bornée .

Si $f(\overline{B}(0,1))$ n'est pas bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément $y \in f(\overline{B}(0,1))$ tel que $\|y\| \geq n$, donc il existe un vecteur de $\overline{B}(0,1)$, qu'on notera t_n, tel que $\| f(t_n) \| \geq n$

Soit alors $(x_n) = (\frac{t_n}{n})$. On a $\lim x_n = 0$ car $\|t_n\| \leq 1$ mais $\| f(x_n) \| \geq 1$ puisque $\| f(t_n) \| \geq n$, et la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers 0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a ainsi montré que $f) \Rightarrow c)$

• Supposons que $f(\overline{B}(0,1))$ est bornée.

alors $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B}(0,1)$, $\| f(x) \| \leq M$

Pour tout $x \in E$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,1)$ donc $\left\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M$ et par linéarité de f, $\|f(x)\| \leq M \| x \|$

donc f est lipschitzienne de rapport M.

On a ainsi montré que $c) \Rightarrow d)$

* *

1.2 Fonction continue mais pas uniformément continue : Uniforme continuité et dérivée bornée :

1- Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que la fonction $g : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

3- Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f une fonction vectorielle de classe C^1 définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Montrer que si la fonction dérivée f' est bornée sur I, alors f est uniformément continue sur I. La réciproque est elle vraie ?

Solution :

1 - Il s'agit de montrer la négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

c'est à dire :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \eta \ \text{ et } \ |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Prenons $\varepsilon_0 = 1$. Soit $\eta > 0$ quelconque et $x = \dfrac{1}{\eta}$, $y = \dfrac{1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2}$

alors $|x - y| = \frac{\eta}{2} < \eta$ et $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \left| \dfrac{1}{\eta^2} - \dfrac{1}{\eta^2} - 1 - \dfrac{\eta^2}{4} \right| = 1 + \dfrac{\eta^2}{4} > 1 = \varepsilon_0$

2- Prenons à nouveau $\varepsilon_0 = 1$. Soit $\eta > 0$ quelconque et $\eta' = \min(\eta, 1/2)$ de sorte que $\eta' < 1$.

Soient $x = \eta'$ et $y = \eta' - \eta'^2$

alors $|x - y| = |\eta'^2| \leq \eta' \leq \eta$ car $\eta' < 1$

et $|g(x) - g(y)| = \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right| = \left| \dfrac{y - x}{xy} \right| = \left| \dfrac{\eta'^2}{\eta'(\eta' - \eta'^2)} \right| = \dfrac{1}{1 - \eta'^2} \geq 1$

On a ainsi montré que $\exists \varepsilon_0 = 1 > 0, \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in]0, +\infty[,\ |x - y| \leq \eta$ et $|g(x) - g(y)| > \varepsilon_0$

et g n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

3- • Soient $x, y \in E$.

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_x^y f'(t)dt \right\| \leq \int_x^y \|f'(t)\|dt \leq \int_x^y M dt = M.|x - y|$$

f est M-lipschitzienne donc uniformément continue sur I.

• La réciproque est fausse :

La fonction $h : x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc y est uniformément continue (théorème de Heine). Elle est donc uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$.

Elle est de classe C^1 sur $]0, 1]$, mais sa dérivée $h' : x \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas bornée.

* *

1.3 Limite simple d'une suite de formes linéaires

Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, muni de la norme uniforme $\| \ \|^\infty$

1- On définit la forme linéaire Φ sur E par :

$$\forall f \in E,\ \Phi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Montrer que Φ est continue et calculer sa norme subordonnéé $|||\Phi|||$

2- Pour tout $c \in [a, b]$, on définit la forme linéaire φ_c sur E par :

$$\forall f \in E,\ \varphi_c(f) = f(c)$$

Montrer que φ_c est continue et calculer sa norme subordonnéé $|||\varphi_c|||$

3- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la forme linéaire ψ_n sur E par : $\psi_n = \dfrac{b - a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{a + k\frac{b-a}{n}}$,

autrement dit, $\forall f \in E,\ \psi_n(f) = \dfrac{b - a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b - a}{n}\right)$

Pour tout $f \in E$, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \psi_n(f)$

4- E^{**}, espace des formes linéaires continues sur E est l'espace dual topologique de E.

L'application $\varphi \xrightarrow{N} \sup\limits_{f\in E,\ \|f\|^\infty\leq 1} |\varphi(f)|$ est une norme sur E^{**} (sans difficulté)

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} N(\psi_n - \Phi) = 0$?

autrement dit, Φ est elle limite de la suite (ψ_n) dans l'EVN (E^{**}, N) ?

(on pourra utiliser une suite de fonctions (g_n) telle que $g_n(x) = \cos\lambda(x-a)$ avec λ choisi de telle manière que pour tout k, $g_n(a + k\frac{b-a}{n}) = 1$)

Solution :

1- $\forall f \in E,\ |\Phi(f)| = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b \|f\|^\infty dt = (b-a)\|f\|^\infty$

Donc la forme linéaire Φ est lipschitzienne de rapport $b-a$. Elle est donc continue et $|||\Phi||| \leq b-a$.

En prenant pour f la fonction constante 1, on obtient $|||\Phi||| \geq b-a$ donc $\boxed{|||\Phi||| = b-a}$

2- $\forall f \in E,\ |\varphi_c(f)| = |f(c)| \leq \|f\|^\infty$ donc φ_c est lipschitzienne de rapport 1.

Elle est donc continue et $|||\varphi_c||| \leq 1$.

En prenant pour f la fonction constante 1, on obtient $\boxed{|||\varphi_c||| = 1}$

3- ψ_n, combinaison linéaire de formes linéaires continues du type φ_c est elle même continue.

Soit $f \in E$. $\psi_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction f sur le segment $[a,b]$ partagé en n intervalles égaux.

f étant continue sur $[a,b]$, on sait qu'alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(f) = \int_a^b f(t)dt = \Phi(f)$

4- Soit g_n la fonction définie par : $g_n(x) = \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right)$. On a bien $\|g_n\|^\infty = 1$

Pour tout $k \in \{0, 1, ...n-1\}$, $g_n(a + k\frac{b-a}{n}) = \cos\frac{2\pi n}{b-a}(k\frac{b-a}{n}) = \cos(2k\pi) = 1$

donc $\psi_n(g_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g_n\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = b-a$

Par ailleurs, $\Phi(g_n) = \int_a^b g_n(t)dt = \int_a^b \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right)dt = \left[\frac{b-a}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right)\right]_a^b = 0$

donc $N(\Phi - \psi_n) \geq |\Phi(g_n) - \psi_n(g_n)| = b-a$ de sorte que $N(\Phi - \psi_n)$ ne tend pas vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$ et la suite (ψ_n) **ne converge pas vers Φ dans l'espace vectoriel normé** (E^{**}, N).

Puisque pour tout $f \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(f) = \Phi(f)$ on dit que la suite (ψ_n) **converge simplement** vers Φ.

* *

1.4 Ouverts et compacts dans $M_n(\mathbb{R})$

Les ensembles $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont ils des parties ouvertes, fermées, compactes de $M_n(\mathbb{R})$?

Solution :

a) L'application déterminant est une application continue, car polynomiale en les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice.

$\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\boxed{GL_n(\mathbb{R})}$ $= \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, $\boxed{\text{est un ouvert de } M_n(\mathbb{R}).}$

Chaque matrice $\lambda.I_n$, avec λ aussi grand qu'on veut, est élément de $GL_n(\mathbb{R})$ qui n'est donc pas une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$, ni compacte.

b) $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et toutes les normes définies sur $M_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Prenons la norme uniforme : $\|A\|^\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$

• Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Ses colonnes forment un système orthonormal de $\mathbb{R}^n$. En particulier, la $j^{\text{ème}}$ colonne a pour norme au carré $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ et donc pour tout couple (i,j), $a_{i,j}^2 \leq 1$ et $|a_{i,j}| \leq 1$

donc $\|A\|^\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}| \leq 1$ et $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit (A_k) une suite de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$ vers une matrice limte B.

Chaque A_k étant orthogonale, ${}^tA_k.A_k = I_n$

Le produit de matrices : $(M,N) \longrightarrow M.N$ est continue car bilinéaire.

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : ${}^tB.B = I_n$ donc B est une matrice orthogonale.

Ainsi toute suite convergente d'éléments de $O_n(\mathbb{R})$ a sa limite dans $O_n(\mathbb{R})$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

Finalement, $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ , partie fermée et bornée de } M_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact.}}$

****

1.5 Espace complet ou non suivant la norme

Soit $E = C([a,b],\mathbb{C})$, l'espace des fonctions complexes continues sur $[a,b]$.

1- Montrer que $C([a,b],\mathbb{C})$ est complet pour la norme de la convergence uniforme $\| \ \ \|^\infty$

2- Montrer que $C([a,b],\mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme convergence en moyenne $\| \ \ \|^1$

Solution :

1- Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $C([a,b],\mathbb{C})$ de Cauchy pour la norme$\| \ \ \|^\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$$

puisque $\forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty$, on en déduit que pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge. Soit $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

• Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

alors pour tout $x \in I, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

pour $x \in I$ fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$$\forall x \in I, \forall n \geq n_0, \ |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

pour chaque $n \geq n_0$, cette inégalité étant vraie pour tout $x \in I$, $\sup_{x\in I} |f_n(x) - g(x)| = \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$, c-a-d que $\lim_{n\to\infty} \| f_n - g \|^\infty = 0$

• Puisque chaque fonction f_n est continue et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers g, la limite g est continue ; $g \in C([a,b],\mathbb{C})$. Donc g est limite de (f_n) dans l'espace vectoriel $\Big(C([a,b],\mathbb{C}), \| \ \ \|^\infty\Big)$ et celui-ci est complet.

2- Pour simplifier, traitons le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

• Pour tout $n \geq 4$, soit f_n la fonction définie par : $\begin{cases} \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \quad f_n(x) = 0 \\ \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \ f_n(x) = \frac{n(2x-1)}{2} \\ \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \ \ f_n(x) = 1 \end{cases}$

chaque f_n est continue (et affine par morceaux) donc appartient à E.

Pour tous entiers n, p tels que $4 \leq n \leq p$,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)| dt = \int_0^{1/2} \underbrace{|f_n - f_p|}_{=0} + \int_{1/2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \underbrace{|f_n - f_p|}_{\leq 1} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n - f_p|}_{\leq 1} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f_n - f_p|}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)| dt \leq \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}$$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, il existe n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$

alors $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \ \| f_n - f_p \|^1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)| dt \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

ce qui montre que la suite (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\| \ \ \|^1$.

• Cette suite converge-t-elle dans E ?

Si oui, notons g sa limite : $g \in E$ et $\lim_{n\to\infty} \| f_n - g \|_1 = 0$

Or $\int_0^{1/2}|f_n(t)-g(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t)-g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{1/2} | \underbrace{f_n(t)}_{0\ sur\ [0,\frac{1}{2}]} -g(t)|dt = 0$

d'où $\displaystyle\int_0^{1/2} |g(t)|dt = 0$ et g étant continue sur $[0,1/2]$, $\forall t \in [0,1/2],\ g(t)=0$

De manière analogue, pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |f_n(t)-g(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t)-g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1$

donc en prenant n assez grand pour que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2}+\alpha$ et que $f_n(t)$ vaille 1 sur le segment $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$, on a

$$\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |1-g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |1-g(t)|dt = 0$ et la fonction $1-g$ étant continue, elle est identiquement nulle sur $[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha>0$, on en conclut que : $\begin{cases} \forall t \in [0,\frac{1}{2}], & g(t)=0 \\ \text{et } \forall t \in]\frac{1}{2},1], & g(t)=1 \end{cases}$, ce qui est incompatible avec la continuité de g au point $1/2$.

Donc la suite de Cauchy (f_n) n'a pas de limite dans E, et E n'est pas complet pour la norme $\| \ \|_1$

****

1.6 Résolution approchée d'une équation par le théorème du point fixe :

a) Montrer que le système $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique (x_1,x_2) dans $\mathbb{R}^2$.

b) Expliquer comment on peut obtenir une valeur approchée (a,b) de cette solution à 10^{-10} près et calculer une telle valeur approchée avec MAPLE.

Solution :

a) Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la norme uniforme : $\| (a,b) \|^\infty = \max(|a|,|b|)$

Soit f l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \longrightarrow & (x_1',x_2') \end{array}$

tel que $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2' = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$

• Montrons que f est lipschitzienne pour la norme $\| \ \|^\infty$

Soient $X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ et $Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$f(X)-f(Y) = \frac{1}{5}\Big(2\sin(x_1)-2\sin(y_1)+\cos(x_2)-\cos(y_2)\ ,\ \cos(x_1)-\cos(y_1)+3\sin(x_2)-3\sin(y_2)\Big) = (z_1,z_2)$$

$$z_1 = \frac{1}{5}\left(4\sin\frac{x_1-y_1}{2}\cos\frac{x_1+y_1}{2} - 2\sin\frac{x_2-y_2}{2}\sin\frac{x_2+y_2}{2}\right)$$

$|z_1| = \frac{1}{5}\left|4\sin\frac{x_1-y_1}{2}\cos\frac{x_1+y_1}{2} - 2\sin\frac{x_2-y_2}{2}\sin\frac{x_2+y_2}{2}\right| \leq \frac{1}{5}\left(4|\sin\frac{x_1-y_1}{2}|.|\cos\frac{x_1+y_1}{2}| - 2|\sin\frac{x_2-y_2}{2}|.|\sin\frac{x_2+y_2}{2}|\right)$

en utilisant la majoration $\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$, on obtient :

$|z_1| \leq \frac{1}{5}\left(2|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\right) \leq \frac{3}{5}\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|) = \frac{3}{5}\|X-Y\|^\infty$

Un calcul analogue montre que $|z_2| \leq \frac{4}{5}\|X-Y\|^\infty$

Donc $\|f(X)-f(Y)\|^\infty = \max(|z_1|,|z_2|) \leq \frac{4}{5}\|X-Y\|^\infty$

La fonction f est lipschitzienne de rapport $\frac{4}{5}<1$, elle est donc contractante.

• $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ étant complet, d'après le théorème du point fixe, on sait que f admet un unique point fixe W et que toute suite (X_n) définie par la donnée de son premier terme $X_0\in\mathbb{R}^2$ et par la récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=f(X_n)$ converge vers cet unique point fixe W.

Etudions la vitesse de convergence de la suite X_n définie comme ci-dessus :

$\forall n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$,

$X_{n+p} - X_n = X_{n+p} - X_{n+p-1} + X_{n+p-1} - X_{n+p-2} + ... + X_{n+2} - X_{n+1} + X_{n+1} - X_n$

par l'inégalité triangulaire,

$\|X_{n+p} - X_n\| \leq \|X_{n+p} - X_{n+p-1}\| + \|X_{n+p-1} - X_{n+p-2}\| + ... + \|X_{n+2} - X_{n+1}\| + \|X_{n+1} - X_n\|$

or pour tout k, $\|X_{k+1} - X_k\| = \|f(X_k) - f(X_{k-1})\| \leq \mu.\|X_k - X_{k-1}\|$

et par recurrence immédiate, $\|X_{k+1} - X_k\| \leq \mu^k \|X_1 - X_0\|$

d'où $\|X_{n+p} - X_n\| \leq (\mu^{n+p-1} + \mu^{n+p-2} + ... + \mu^n)\|X_1 - X_0\| = \mu^n \dfrac{1-\mu^p}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$

$$\Longrightarrow \quad \|X_{n+p} - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$$

A n fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|W - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$$

Le passage de X_n à X_{n+1} multiplie l'erreur $\|W - X_n\|$ du facteur $\mu = \frac{4}{5} = 0,8$, ce qui est peu rapide.

En supposant que $\|X_1 - X_0\| = 1$ et puisque $\mu = \frac{4}{5}$, $\|W - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\| = 5\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$$5\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10^{-10} \iff \ln(5) + n(\ln 4 - \ln 5) \leq -10\ln 10$$
$$\iff \ln(5) + 10\ln 10 \leq n(\ln 5 - \ln 4)$$
$$\iff \frac{\ln(5) + 10\ln 10}{\ln 5 - \ln 4} \leq n$$

Il suffit que $n \geq 111$ pour que cette condition soit vérifiée.

Programme MAPLE :

```
Digits:=50; x[0]:=1.0; y[0]:=1.0; n:=120;
for k from 0 to n do x[k+1]:=(2*sin(x[k])+cos(y[k]))/5;
                     y[k+1]:=(cos(x[k])+3*sin(y[k]))/5;   od;
```

Contrôle de la précision :

```
for j from n-10 to n do ecart[j]:=x[j]-x[j+1] od;
```

****

1.7 Espaces des fonctions bornées, continues, polynomiales

On note $B(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes bornées sur l'intervalle I.

L'applicaton $f \longrightarrow \| f \|^\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est une norme sur cet espace.

On note $C(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I et $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^k sur l'intervalle I

1- Montrer que $\left(B(I, \mathbb{C}), \| \ \|^\infty\right)$ est un espace complet.

2- a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$, espace des fonctions continues sur $[a,b]$ est complet.

Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$ est un sous espace fermé de $B(I, \mathbb{C})$

3- Déterminer l'adhérence dans $\left(C([a,b], \mathbb{C}), \| \ \|^\infty\right)$ de $\mathbb{R}[X]$, espace des fonctions polynomiales sur le segment $[a,b]$.

Solution :

1- Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\left(B(I, \mathbb{C}), \| \ \|^\infty\right)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$$

puisque $\forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty$, on en déduit que pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge. Soit $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

• Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

alors pour tout $x \in I, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

pour $x \in I$ fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$$\forall x \in I, \forall n \geq n_0, \ |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

pour chaque $n \geq n_0$, cette inégalité étant vraie pour tout $x \in I$, $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)-g(x)| = \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$, c-a-d que $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|^\infty = 0$

• Il s'ensuit que g est bornée : Prenons $\varepsilon = 1$ et n_0 tel que $\| f_{n_0} - g \|^\infty < \varepsilon = 1$

alors $\forall x \in I, |g(x)| = |g(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq \underbrace{|g(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leq \|f_{n_0}-g\|^\infty < 1} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq \|f_{n_0}\|^\infty} \leq \| f_{n_0} \|^\infty +1$

donc $g \in B(I,\mathbb{C})$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|^\infty = 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge dans l'espace vectoriel normé $\Big(B(I,\mathbb{C}), \| \quad \|^\infty\Big)$ vers la fonction g.

Toute suite de Cauchy étant convergente, l'e.v.n. $\Big(B(I,\mathbb{C}), \| \quad \|^\infty\Big)$ est complet.

2 - $C([a,b],\mathbb{C})$ est un sous espace de $B(I,\mathbb{C})$ car toute fonction continue sur un compact (le segment $[a,b]$) est bornée.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\Big(C([a,b],\mathbb{C}), \| \quad \|^\infty\Big)$. On a vu qu'elle convergeait vers une fonction g bornée sur $[a,b]$.

Puisque chaque fonction f_n est continue et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers g, la limite g est continue ; $g \in C([a,b]$. Donc g est limite de (f_n) dans l'espace vectoriel $\Big(C([a,b],\mathbb{C}), \| \quad \|^\infty\Big)$ et celui-ci est complet.

$C([a,b],\mathbb{C})$ étant complet, c'est un sous espace fermé de $\Big(B(I,\mathbb{C}), \| \quad \|^\infty\Big)$.

3- Soit $f \in C([a,b],\mathbb{C})$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f : $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|^\infty = 0$

Donc $f \in \overline{\mathbb{R}[X]}$ et $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$

* *

1.8 * Espaces de suites ; Cesaro par densité

L'espace vectoriel SB, formé des suites complexes $a = (a_n)_{n\geq 1}$ bornées, est muni de la norme uniforme $N^\infty((an)) = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n|$

On note : • SF le sous-espace des suites à support fini, c'est à dire pour lesquelles seuls un nombre fini de termes sont non nuls. Pour une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de SF, $\exists n_0 \in N^*$, $\forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

- SCV le sous-espace des suites convegentes,
- S_0 le sous-espace des suites de limite nulle.

1- Montrer que l'adhérence de SF dans SB est S_0.

Montrer que S_0 est un fermé de SB

2- On appelle μ l'application qui à toute suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ fait correspondre la suite $\mu(a) = b = (b_n)_{n\geq 1}$ des moyennes arithmétiques des n premiers termes :

$$\forall n \in N^*,\ b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Il est clair que $\mu \in L(SB)$.

a) Montrer que μ est une application lipschitzienne de SB dans SB. Déterminer $|||\mu|||$.

Rechercher les suites a de SB invariantes par μ, c'est à dire telles que $\mu(a) = a$.

c) Montrer que $\forall a \in SF, \mu(a) \in S_0$

d) Montrer que l'application Λ, de SCV dans $\mathbb{C}$, qui à une suite associe sa limite, est continue.

3- a) Soit $a \in S_0$.

Justifier l'existence d'une suite $(u^{(k)})_{k\in N^*}$ d'éléments de SF, de limite a.

Etudier la suite $(\mu(u^{(k)}))_{k\in N^*}$ et montrer que $\mu(a) \in S_0$

b) Déduire de la question précédente une démonstration du théorème de Cesaro, à savoir :

"Si u est une suite convergente de limite $L \in \mathbb{C}$, la suite $\mu(u)$ converge aussi vers L."

Solution :

1 - • Soit $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \overline{SF}$, adhérence de SF dans SB.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b \in SF$ telle que $N^\infty(a-b) < \varepsilon$

a étant à support fini, $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

donc $\forall n \geq n_0,\ \ |b_n| = |\underbrace{a_n}_{0} - b_n| \leq \sup\limits_{m\geq 1} |a_m - b_m| = N^\infty(a-b) < \varepsilon$

On a ainsi montré que : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ |b_n| < \varepsilon$

c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ ou encore que $b \in S_0$

Donc $\boxed{\overline{SF} \subset S_0}$

• Réciproquement, si $b \in S_0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ |b_n| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, soit b' la suite à support fini obtenue en troncant (b_n) à partir du rang n_0 :

$\forall n < n_0,\ b'_n = b_n$

et $\ \forall n \geq n_0,\ b'_n = 0$

alors $\ |b_n - b'_n| = 0$ si $n < n_0$ et $|b_n - b'_n| = |b_n| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ et donc $\ N^\infty(b-b') < \varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall \varepsilon > 0$ il existe une suite b' à support fini telle que $\ N^\infty(b-b') < \varepsilon$, c'est à dire que $b \in \overline{SF}$.

Donc $S_0 \subset \overline{SF}$ et finalement, $\boxed{S_0 = \overline{SF}}$

• L'adhérence d'une partie d'un espace vectoriel normé étant toujours un fermé de cet espace, on en déduit que $S_0 = \overline{SF}$ est un fermé de SB.

2 - a) Soit $a = (a_n)_{n\geq 1} \in SB$ et $b = (b_n)_{n\geq 1} = \mu(a)$.

$$\forall n \in N^*,\ |b_n| = \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| = \frac{|a_1 + a_2 + ... + a_n|}{n} \leq \frac{nN^\infty(a)}{n} = N^\infty(a)$$

donc $\ N^\infty(b) = \sup\limits_{n\geq 1} |b_n| \leq N^\infty(a)$

On a ainsi montré que $\ \forall a \in SB,\ N^\infty(\mu(a)) \leq N^\infty(a)$ c'est à dire que μ est liptschitzienne de rapport 1. Elle est donc continue et $|||\mu||| \leq 1$.

- Si on considère la suite constante $\ u = (1)_{n\geq 1}$, on voit immédiatement que $\ \mu(u) = u\ $ et donc que $\ N^\infty(\mu(u)) = N^\infty(u)\ $ ce qui montre que $\ |||\mu||| \geq 1$.

Finalement, $\boxed{|||\mu||| = 1}$

b) Soit $a \in SB$, invariante par μ : $(b_n) = \mu((a_n)) = (a_n)$

Montrons par récurrence sur n que a_n est constant :

pour $n = 1,\ b_1 = \dfrac{a_1}{1} = a_1$

pour $n = 2,\ b_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = a_2\ $ donc $\ a_1 + a_2 = 2a_2\ $ et $\ a_2 = a_1$

Supposons que jusqu'à l'ordre $n,\ a_k = a_1$

alors $\ b_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{na_1 + a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1}$

donc $\ na_1 + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1}\ $ et $\ a_{n+1} = a_1$

On a ainsi montré par récurrence que $\ \forall n,\ a_n = a_1\ $ c'est à dire que (a_n) est une suite constante.

La réciproque est immédiate, si (a_n) est une suite constante, alors $\ \forall n,\ b_n = a_n\ $ et donc $\ \mu(a) = a$

En conclusion, $\boxed{a \in SB \text{ est invariante par } \mu \text{ si et seulement si } a \text{ est une suite constante.}}$

c) Soit $a \in SF$; $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

Soit $b = (b_n) = \mu(a)$

$$\text{alors, } \forall n \geq n_0,\ b_n = \frac{\overbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0}}^{constant} + 0 + ... + 0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $b = \mu(a) \in S_0$

d) Soit $a \in SCV$

$\forall n \in N^*,\ |a_n| \leq \underbrace{N^\infty(a)}_{independant\ de\ n}$

En passant à la limite dans cette inégalitè, $\ |\lim a_n| \leq N^\infty(a)\ $ soit aussi $\ |\Lambda(a)| \leq N^\infty(a)$, ce qui montre que $\boxed{\Lambda \text{ est lipschitzienne de rapport 1 et donc continue.}}$

Ceci montre aussi que $|||\Lambda||| \leq 1$ et en considérant l'égalité obtenue pour une suite constante, que $\boxed{|||\Lambda||| = 1.}$

3 - a) Soit $a \in S_0$. D'après la question 1, a est adhérente à SF donc est limite d'une suite $(u^{(k)})_{k\in N^*}$ d'éléments de SF.

D'après la question 2 - c), pour tout k, $\mu(u^{(k)}) \in S_0$ et par continuité de μ, $\lim(\mu(u^{(k)})) = \mu(\lim\ u^{(k)}) = \mu(a)$

Mais puisque S_0 est fermé et que $\forall k,\ \mu(u^{(k)}) \in S_0$, on a $\lim(\mu(u^{(k)})) = \mu(a) \in S_0$

Donc $\boxed{\mu(a) \in S_0}$, ce qui signifie que $\mu(a)$ est une suite de limite nulle.

3 - b) Soit $u = (u_n)$ une suite convergente de limite $L \in \mathbb{C}$.

Soit $l = (l_n) = (L)_{n\geq 1}$ la suite constante de valeur L.

Alors $\lim l_n = L = \lim u_n$ et donc $l - u \in S_0$

D'après la question précédente, $\mu(l-u) \in S_0$, par linéarité, $\mu(l) - \mu(u) \in S_0$, d'après 2-a), $\mu(l) = l$

donc $\Lambda(\mu(u)) = \underbrace{\Lambda(l)}_{L} + \underbrace{\Lambda(\mu(u) - l)}_{0} = L$ ce qui signifie que $\boxed{\lim \mu(u) = L = \lim\ u}$

* *

1.9 * Formes linéaires continues sur l^2 (dual topologique de l^2)

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge : $l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \text{ converge }\}$

1-a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

Montrer que l^2 est un espace vectoriel sur réel et que l'application $(u_n) \longrightarrow \|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ est une norme sur l^2.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n de troncature au rang n, qui à la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ fait correspondre la suite tronquée (v_k) telle que : $v_k = u_k$ si $k \leq n$ et $v_k = 0$ si $k > n$.

Montrer que T_n est une application linéaire de l^2 dans lui même, continue, et calculer sa norme subordonnée.

Montrer que pour toute suite $u \in l^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(u) = u$

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$. D'après 1-a) on sait que pour toute suite $u = (u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Montrer que l'application Φ_a qui à la suite u fait correspondre $\Phi_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est une forme linéaire sur l^2, continue, et calculer sa norme $|||\Phi_a|||$.

b) Réciproquement, soit Ψ une forme linéaire continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 0} \in l^2$ telle que $\Psi = \Phi_b$

(on pourra déterminer b_n en fonction de Ψ et des suites $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$ et justifier l'existence de

$M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n,\ \sum_{k=0}^{n} b_n^2 \leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_n^2}$ pour montrer la convergence de $\sum b_n^2$)

Solution :

1-a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

• Soient (u_n) et (v_n) $\in l^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

alors $(u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$

$\{u_n^2\}$ et $\{v_n^2\}$ sont des séries convergentes par hypothèse et $\{u_n.v_n\}$ l'est aussi par ce qui précède, donc $\sum(u_n + \lambda v_n)^2$ converge et $(u_n) + \lambda(v_n) \in l^2$.

l^2, stable par addition et par multiplication par un scalaire, est un sous espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

• On montre sans difficulté que $\| \|_2$ est une norme sur l^2 (euclidienne).

b) $T_n:\ (u_k)_{k\geq 0}=(u_0,u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1},...,u_{n+p},...)\ \longrightarrow\ (v_k)_{k\geq 0}=(u_0,u_1,u_2,...,u_n,0,0,...,0,...)$

La suite $(v_k)_{k\geq 0}$ étant à support fini, la série $\sum v_k^2$ converge (somme finie) et $(v_k)\in l^2$.

• T_n est linéaire (immédiat) , donc $T_n\in L(l^2)$.

$$\forall (u_k)\in l^2,\quad \|T_n(u)\|^2=\sum_{k=0}^{n}u_k^2\leq\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2=\|u\|^2$$

T_n est lipschitzienne de rapport 1, elle est donc continue et $|||T_n|||\leq 1$

En considérant la suite $\Delta_0=(1,0,0,0,...,0,...)$, on obtient $||T_n(\Delta_0)||=||\Delta_0||$. Donc $\boxed{|||T_n|||=1}$

• Soit $u\in l^2$. Pour tout entier n, $u-T_n(u)=(0,0,0,...,0,u_{n+1},...,u_{n+p},...)$

donc $\|u-T_n(u)\|^2=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k^2=r_n$, reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n^2$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|u-T_n(u)\|^2=\lim_{n\to+\infty}r_n=0$, ce qui montre que la suite $(T_n(u))_{n\geq 0}$ converge vers u dans l'espace vectoriel normé $(l^2,\| \|_2)$.

2-a) Soit $a=(a_n)\in l^2$.

Pour toute suite $u=(u_n)$ de l^2, la série $\sum a_nu_n$ converge (question 1-a)),

et $|\Phi_a(u)|=|<a,u>|\leq\| a\|\,.\,\| u\|$, ce qui montre que Φ_a est lipschitziznnz de rapport $\| a\|$ donc est continue et $|||\Phi_a|||\leq\| a\|$

Par ailleurs, $|\Phi_a(a)|=|<a,a>|=\| a\|^2$, ce qui montre que $\boxed{|||\Phi_a|||=\| a\|}$

b) Soit Ψ une forme linéaire continue sur l^2.

• Analyse : Supposons qu'il existe une suite $(b_n)\in l^2$ telle que $\forall u\in l^2,\ \Psi(u)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_nu_n$.

Pour tout entier i notons $\Delta_i=(\delta_{i,n})_{n\geq 0}$

Ainsi, $\Delta_0=(1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_1=(0,1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_2=(0,0,1,0,...,0,...)$ etc...

Pour tout $i\in\mathbb{N},\Psi(\Delta_i)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\delta_{i,n}=b_i$. Donc la suite (b_n) est unique et vérifie : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\Psi(\Delta_n)$

• Synthèse : Soit donc la suite $b=(b_n)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\Psi(\Delta_n)$

Pour tout n, $\Psi(T_n(b))=\Psi(b_0,b_1,...,b_n,0,0...,0...)=\Psi(b_0\Delta_0+b_1\Delta_1+...+b_n\Delta_n$

$=b_0\Psi(\Delta_0)+b_1\Psi(\Delta_1)+...+b_n\Psi(\Delta_n)=b_0^2+b_1^2+...+b_n^2$

Or Ψ est continue, linéaire, donc lipschitzienne :

$\exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall u\in l^2,\ |\Psi(u)|\leq\mu.\|u\|$

en particulier, pour tout n, $|\Psi(T_n(b))|\leq\mu.\|T_n(b)\|$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_k^2\leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}$

donc $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}\leq M$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_k^2\leq M^2$ et la série $\sum b_n^2$ dont les sommes partielles sont majorées, converge.

Donc $(b_n)\in l^2$.

• Enfin, $\forall u=(u_n)\in l^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Psi(T_n(u))=\Psi\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k\Delta_k\right)=\sum_{k=0}^{n}u_k\Psi(\Delta_k)=\sum_{k=0}^{n}u_kb_k$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, $T_n(u) \longrightarrow u$ (question 1-b) et par contnuité de la forme linéaire Ψ, $\Psi(T_n(u)) \longrightarrow \Psi(u)$

Dans le second membre, puisque u et b appartiennent à l^2, d'après 1-a), la série $\sum b_n u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{n} u_k b_k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k b_k$

Donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, dans la dernière égalité, on obtient $\Psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k b_k$

Ce qui montre que $\Psi = \Phi_b$.

Finalement, $\boxed{\text{les formes linéaires continues sur } l^2 \text{ sont les applications de la forme } \Phi_a \text{ où } a \in l^2.}$

* *

1.10 * Forme linéaire continue

1-Soit (E, N) un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E, non nulle.

1- Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\ker\varphi$ et la droite $\mathrm{Vect}(a)$ soient deux sous espaces supplémentaires de E.

2- Le vecteur a étant défini tel que $E = \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$, on note p_1 la projection sur $\ker\varphi$ parallèlement à $\mathbf{K}.a$ et p_2 la projection sur $\mathbf{K}.a$ parallèlement à $\ker\varphi$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) φ est continue.

b) $\ker\varphi$ est un fermé de E.

c) p_1 et p_2 sont continues.

Solution :

1- Puisque $\varphi \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ et quitte à remplacer a par $\dfrac{a}{\varphi(a)}$, on peut supposer que $\varphi(a) = 1$.

• Soit $x \in \ker\varphi \cap \mathbf{K}.a$. $\quad \exists\lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda.a$ et $x \in \ker\varphi$.

Donc $\varphi(x) = 0 = \varphi(\lambda.a) = \lambda\varphi(a) = \lambda$. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0$

Ainsi $\ker\varphi \cap \mathbf{K}.a = \{0\}$. La somme $\ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$ est directe.

• Soit $x \in E$. Ecrivons $x = (x - \varphi(x).a) + \varphi(x).a$

$\varphi(x).a \in \mathbf{K}.a$ et $x - \varphi(x).a \in \ker\varphi$ puisque $\varphi(x - \varphi(x).a) = \varphi(x) - \varphi(x).\underbrace{\varphi(a)}_{=1} = 0$

Donc $E \subset \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$ et l'inclusion réciproque allant de soi, $\boxed{E = \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a}$.

2- Remarquons d'abord que puisque $p_2 = Id_E - p_1$, l'un des projecteurs est continu si et seulement si le second l'est.

• L'image réciproque d'un fermé par une application continue étant un fermé, si φ est continue, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E.

Ce qui montre que *a)* $\Longrightarrow$ *b)*

• Supposons que $\ker\varphi$ soit fermé.

Si la projection p_2 n'est pas continue, alors elle n'est pas continue en 0 (car la continuité en 0 entraîne la continuité en tout point).

$\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in E,\ \ N(x) < \alpha$ et $|\varphi(x)| > \varepsilon$

en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in E,\ \ N(x_n) < \frac{1}{n}$ et $|\varphi(x_n)| > \varepsilon$

puis en définissant $y_n = \dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}$, $\ N(y_n) = N\left(\dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}\right) = \dfrac{N(x_n)}{|\varphi(x_n)|} \leq \dfrac{N(x_n)}{\varepsilon} < \dfrac{1}{n\varepsilon} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\varphi(y_n) = \varphi\left(\dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}\right) = \dfrac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} = 1$

On a montré l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de E telle que $N(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n,\ \varphi(y_n) = 1$

Alors $\forall n,\ y_n - a \in \ker\varphi$ (puisque $\varphi(y_n - a) = \varphi(y_n) - \varphi(a) = 1 - 1 = 0$)

La suite $(y_n - a)$ d'éléments de $\ker \varphi$ converge vers $0 - a$ (puisque $\lim y_n = 0$). Donc $-a \in \ker \varphi$ puisque $\ker \varphi$ est fermé, ce qui est absurde.

Donc p_2 est continue, ce qui montre que $b) \Longrightarrow c)$

• Supposons que p_2 soit continu.

$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \varphi(\underbrace{p_1(x)}_{\in \ker \varphi}) + \varphi(p_2(x)) = 0 + \varphi(\underbrace{p_2(x)}_{\in \mathbf{K}.a}) = \widetilde{\varphi}(p_2(x))$

où $\widetilde{\varphi}$ est la restriction de φ à la droite $\mathbf{K}.a$

$\widetilde{\varphi}$, application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie (droite), est continue. Par composition, $\varphi = \widetilde{\varphi}_o p_2$ est continue.

****

1.11 * Enveloppe convexe et théorème de Gauss-Lucas

Une partie X d'un espace vectoriel normé E est dite convexe si $\forall (M,N) \in X^2,\ [M,N] \subset X$, c'est à dire si

$$\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0, \text{ tel que } \alpha + \beta \neq 0,\ \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha + \beta} \in X$$

1- a) A étant une partie quelconque de E montrer qu'il existe un plus petit sous ensemble convexe de E contenant A. Celui-ci est appelé **enveloppe convexe de** A. On le notera $\mathrm{Conv}(A)$.

b) Si A est l'ensemble fini $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$, montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

2- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe de racines $x_1, x_2, ..., x_n$ distinctes ou non dans $\mathbb{C}$.

Montrer que les racines du polynôme dérivé $P'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Solution :

1-a) Notons Z_A l'ensemble des parties convexes de E contenant A. Z_A n'est pas vide car $E \in Z_A$.

Soit $B = \bigcap_{X \in Z_A} X$ l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A

B est convexe car l'intersection de parties convexes est convexe (justifier...)

B contient A car chacun des $X \in Z_A$ dont on prend l'intersection contient A.

enfin, si C est une partie convexe de E contenant A, C fait partie de ces ensembles $X \in Z_A$ dont on prend l'intersection pour former B, donc $B \subset C$.

Donc B est une partie convexe de E, qui contient A, et c'est la plus petite. $\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{X \in Z_A} X$

b) Soit B l'ensemble des barycentres des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

• Soient P et $Q \in B$. Montrons que $[P,Q] \subset B$.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $P = \dfrac{\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p}$ et

$\exists (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $Q = \dfrac{\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p}{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p}$

quitte à diviser chaque α_i par $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p$, on peut supposer que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = 1$, même chose pour les β_i

alors $P = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p$ et $Q = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p$

Tout point $N \in [P,Q]$ est barycentre de P et Q affectés de coefficients positifs a et b : $N = aP + bQ,\ a + b = 1$

alors $N = a(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p) + b(\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p)$

$= (a\alpha_1 + b\beta_1)M_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)M_2 + (a\alpha_p + b\beta_p)M_p$

$(a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) + ... + (a\alpha_p + b\beta_p) = a\alpha_1 + a\alpha_2 + ... + a\alpha_p + b\beta_1 + b\beta_2 + ... + b\beta_p$

$= a(\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p}_{=1}) + b(\underbrace{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p}_{=1}) = a + b = 1$

donc $N = (a\alpha_1 + b\beta_1)M_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)M_2 + (a\alpha_p + b\beta_p)M_p$ est barycentre des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

B est donc une partie convexe de E.

• B contient $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$, car M_1 est barycentre de $(M_1, M_2, ..., M_p)$ affectès des coefficients respectifs $(1, 0, ..., 0)$

• Enfin toute partie convexe de E contenant $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$ contient les barycentres de $M_1, M_2, ..., M_p$ à coefficients ≥ 0 donc contient B.

Donc B est bien la plus petite partie convexe de E contenant $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$: $B = \text{Conv}(A)$

2- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1, x_2, ..., x_n$ et notons $x_1, x_2, ..., x_n$ les affixes respectives de ces racines.

• Si x_i est racine multiple de P, c'est aussi une racine de P' qui appartient donc à l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$. Par dérivation d'un produit de n termes, $P'(X) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1...n}^{j \neq i} (X - x_j) \right)$.

Donc $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X - x_i}$

• Soit y une racine simple quelconque de P', d'affixe N. Alors $P(y) \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{y - x_i} = \dfrac{P'(y)}{P(y)} = 0$

donc $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\overline{y} - \overline{x_i}} = 0$ (en prenant le conjugué)

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{y - x_i}{(\overline{y} - \overline{x_i})(y - x_i)} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\overline{y} - \overline{x_i})(y - x_i)} \overrightarrow{M_i N} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{|y - x_i|^2}}_{>0} \overrightarrow{M_i N} = \overrightarrow{0}$$

Donc N est barycentre des points $M_1, M_2, ..., M_n$ affectés de coefficients positifs et appartient donc à l'enveloppe convexe de ces points.

****

1.12 * Intérieur et adhérence d'un sous espace

1-Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.

a) Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F dans E est un sous espace de E.

b) Soit φ une forme linéaire sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si $\ker \varphi$ est un fermé de E.

2- On suppose que E est de dimension finie.

Soit F un sous-espace de E.

a) Montrer l'équivalence des propositions suivantes ;

(i) F est d'intérieur non vide.

(ii) $0 \in \overset{o}{F}$

(iii) $F = E$

b) Montrer que F est fermé dans E, directement, ou en utilisant 1-b)

Solution :

a) • $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}$ n'est pas vide.

• Soient x et y deux vecteurs de $\overline{F}$.

Soit $r > 0$. Puisque x et $y \in \overline{F}$, la boule $\overset{o}{B}(x, \frac{r}{2})$ contient un élément $a \in F$ et la boule $\overset{o}{B}(y, \frac{r}{2})$ contient un élément $b \in F$

alors $N((x + y) - (a + b)) \leq N(x - a) + N(y - b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ et donc la boule $\overset{o}{B}(x + y, r)$ contient $a + b \in F$. Donc $x + +y \in \overline{F}$ et $\overline{F}$ est stable pour l'addition.

On montre de manière analogue qu'il est stable pour la multiplication par un scalaire.

$\overline{F}$ est donc un sous espace vectoriel de E.

b) • Si φ est continue, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$, image réciproque d'un fermé par une application continue, est un fermé.

•

* *

1.13 ** Sous espace de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

a) Montrer qu'il existe une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ de F et une suite finie $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{array}{l} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{array}$$

En déduire que si une suite (h_n) d'éléments de F converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, alors $H \in F$ et (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé F.

b) On suppose de plus que le sous espace F est stable par translation, c'est à dire que pour toute fonction f de F, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x+a)$ appartient encore à F.

b1) Montrer que $\forall f \in F, f' \in F$.

En déduire que $F \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

b2) Montrer que toute fonction $f \in F$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E_f) linéaire, d'ordre $\leq m$, à coefficients constants.

b3)) Montrer qu'il existe une équation différentielle (EE) linéaire, d'ordre m , à coefficients constants, dont toute fonction de F est solution.

c) Donner un exemple d'un tel espace F pour $m = 1$ et $m = 2$, avec D inversible.

Solution :

a) Soit P_m la propriété : " Tout sous espace vectoriel F_m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie m admet une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ pour laquelle il existe des réels $(a_1, a_2, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases} \quad "$$

• Pour $m = 1$, soit F_1 un sous espace vectoriel de dimension 1 de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit g une fonction non nulle de F_1 (il en existe car $F_1 \neq \{0\}$). g étant non nulle, il existe un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

La proposition P_1 est donc vérifiée.

• Supposons que la propriété P_{m-1} est vérifiée.

Soit F_m un sous espace vectoriel de dimension m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit g_1 une fonction non nulle de F_m et un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

L'application $\varphi \,:\, h \to h(a_1)$ est une forme linéaire sur F_m, non nulle car $\varphi(g_1) = g_1(a_1) \neq 0$.

Son noyau H est un hyperplan de F_m, c'est à dire un sous espace de F_m de dimension $m-1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à H, il existe une base $(g_2, g_3, ..., g_m)$ de H et des réels $(a_2, a_3, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ g_m(a_2) = g_m(a_3) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Aucun des $a_i, i \geq 2$, n'est égal à a_1 car $(g_2, g_3, ..., g_m)$, éléments de $H = \ker\varphi$, sont tous nuls en a_1, alors que $g_2(a_2) \neq 0, g_3(a_3) \neq 0, ..., g_m(a_m) \neq 0$

Finalement, les fonctions $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ de F_m vérifient : $\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq \end{cases}$

$(g_2, g_3, ..., g_m)$ est un système libre car c'est une base de H.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ est libre aussi, sinon g_1 serait combainaison linéaire de $(g_2, g_3, ..., g_m)$, ce qui n'est pas possible car $(g_2, g_3, ..., g_m)$ s'annulent en a_1 et g_1 ne s'y annule pas.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, système libre de m élémenst de l'espace F_m de dimension m, est une base de F_m.

• Soit $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(g_1, g_2, ..., g_m)$ une base de F et $(a_1, a_2, ..., a_m)$ des réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Chaque h_n, élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{m,n}) \in \mathbb{R}^m$ tels que $h_n = \lambda_{1,n} g_1 + \lambda_{2,n} g_2 + ... + \lambda_{m,n} g_m$

donc $\quad h_n(a_1) = \lambda_{1,n} \underbrace{g_1(a_1)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n} \underbrace{g_2(a_1)}_{=0} + ... + \lambda_{m,n} \underbrace{g_m(a_1)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,n} = -\dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)} = \underbrace{\dfrac{-1}{g_1(a_1)}}_{\mu_{1,1}} h_n(a_1)$

de même, $\quad h_n(a_2) = \lambda_{1,n} \underbrace{g_1(a_2)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n} \underbrace{g_2(a_2)}_{\neq 0} + ... + \lambda_{m,n} \underbrace{g_m(a_2)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \lambda_{1,n} g_1(a_2)}{g_2(a_2)}$

$\Rightarrow \ \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)} g_1(a_2)}{g_2(a_2)} = \mu_{2,1} h_n(a_1) + \mu_{2,2} h_n(a_2)$ $\quad$ ($\mu_{2,1}$ et $\mu_{2,2}$ ctes réelles indépendantes de n)

... et plus généralement, $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{k,n}$ ayant été déterminés, $\lambda_{k,n} = \dfrac{h_n(a_k) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n} g_i(a_k)}{g_k(a_k)}$

et en remplaçant les $\lambda_{i,n}$ déja calculés comme combinaisons linéaires de $h_n(a_1), h_n(a_2), ..., h_n(a_{k-1})$,

$\lambda_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i} h_n(a_i)$, les $\mu_{k,i}, i = 1...k$ étant des constantes réelles indépendantes de n.

Par hypothèse de convergence simple de la suite de fonctions (h_n), pour tout $i = 1...m$, $\lim_{n\to\infty} h_n(a_i) = H(a_i)$,

donc pour tout k, $\lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i} h_n(a_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\lim_{n\to\infty} \mu_{k,i} h_n(a_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i} H(a_i)$

Notons $\Lambda_k = \lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n}$

L'égalité $h_n = \lambda_{1,n} g_1 + \lambda_{2,n} g_2 + ... + \lambda_{m,n} g_m$ entraîne que pour tout x réel,

$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{1,n} g_1(x) + \lim_{n\to\infty} \lambda_{2,n} g_2(x) + ... + \lim_{n\to\infty} \lambda_{m,n} g_m(x) = \Lambda_1 g_1(x) + \Lambda_2 g_2(x) + ... + \Lambda_m g_m(x)$

Donc $H = \Lambda_1 g_1 + \Lambda_2 g_2 + ... + \Lambda_m g_m$, ce qui montre que H, s'écrivant comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de F, appartient à F.

Enfin, le calcul de la limite de la limite de $h_n = \lambda_{1,n} g_1 + \lambda_{2,n} g_2 + ... + \lambda_{m,n} g_m$ s'effectuant composante par composante dans la base $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, la suite (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé de dimension fnie F. (peu importe le choix de la norme sur F puisq'il est de dimension finie)

b1) Soit $f \in F$.

• F étant stable par translation, pour tout entier n, la fonction $f_n \ : \ x \longrightarrow \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ appartient encore à F.

Or pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f'(x)$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f'.

On en déduit d'après la question précédente que $f' \in F$.

• Soit $f \in F$. Alors $f' \in F$. Donc f' est C^1 et f est C^2. Par récurrence immédiate, f est dérivable à tout ordre, donc est C^∞.

b2) Soit $f \in F$. On vient de montrer que F est stable par dérivation. Donc les fonctions $f, f', f", f^{(3)}, ..., f^{(m)}$ sont dans F. Elles forment un système de $m+1$ vecteurs dans un espace de dimension m. Ce système est donc lié.

Donc il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ (dépendants à priori de f) tels que $\alpha_0 f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f" + ... + \alpha_m f^{(m)} = 0$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_f) : $\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y" + ... + \alpha_m y^{(m)} = 0$.

C'est bien une équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre $\leq m$ (α_m ou d'autres coefficients peuvent être nuls)

b3) Notons D l'endomorphisme de dérivation de F.

Soit χ_D son polynôme caractéristique : $\chi_D(X) = \beta_m X^m + ... + \beta_1 X + \beta_0$

C'est un polynôme annulateur de D. Donc $\beta_m D^m + ... + \beta_1 D + \beta_0 Id_F = 0$

Donc $\forall f \in F, \quad \beta_m D^m(f) + ... + \beta_1 D(f) + \beta_0 f = 0_F$

Toute fonction$f$ de F est donc solution de l'équation différentielle (EE) : $\beta_m y^m + ... + \beta_2 y" + \beta_1 y' + \beta_0 y = 0$

* *

1.14 Formes linéaires sur L^2*

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ et régulières, c'est à dire telles qu'en qu'en tout point de discontinuité $x_i \in [a, b]$, $f(x_i) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to x_i^-} f(x) + \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)\right)$

Préliminaires : fonction Cpmx régulière ou régularisée :

Si une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ a pour points de discontinuité $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < x_m \leq b$, on appelle régularisée de f la fonction $\widetilde{f}$ telle que :

$$\forall i \in \{0, 1, ..., m-1\},\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, \widetilde{f}(t) = f(t) \text{ et } \forall i \in \{1, ..., m-1\},\ \widetilde{f}(x_i) = \frac{1}{2}(\lim_{x_i^-} f + \lim_{x_i^+} f)$$

et,

- si $x_0 = a$ alors $\widetilde{f}(a)$ a même valeur qu'en tout point de $]a, x_1[$
- si $x_m = b$, alors $\widetilde{f}(b)$ a même valeur qu'en tout point de $]x_{m-1}, b[$

($\widetilde{f}$ est donc continue à droite en a et à gauche en b).

Préciser, lorsque $a < x < b$, ce qu'est la régularisée de $\chi_{[a,x]}$, fonction caractéristique du segment $[a, x]$.

Montrer que toute fonction en escalier régulière peut s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $\widetilde{\chi}_{[a,y_j]}$, $y_j \in]a, b[$ pour j appartenant un ensemble fini.

1- Montrer que l'application Q :
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$
est un produit scalaire sur E.

2-a) Soit $h \in E$. Montrer que l'application $\Psi_h : f \longrightarrow Q(h, f) = \int_a^b h(t)f(t)dt$ est une forme linaire continue sur E. Calculer sa norme subordonnée.

b) Montrer que $\forall (g, h) \in E^2,\ \Psi_h = \Psi_g \implies h = g$

c) Montrer que l'application $x \longrightarrow \Psi_h(\widetilde{\chi}_{[a,x]})$ est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée aux points ou elle est définie.

3- Réciproquement, soit Φ une forme linéaire continue sur E telle que l'application $x \longrightarrow \Phi(\widetilde{\chi}_{[a,x]})$ est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$

Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in E$ telle que $\Phi = \Psi_g$.

* *

2 Fonctions vectorielles

2.1 Cinématique

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 (espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire)

Soit $F : t \longrightarrow \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ une fonction vectorielle de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 - a) Montrer que si l'application vitesse : $t \longrightarrow \overrightarrow{F'}(t)$ est de norme constante ($\|F'(t)\| = \text{cte}$) alors, à tout instant le vecteur accélération est normal au vecteur vitesse.

b) Montrer que si en tout point le vecteur vitesse $\overrightarrow{F'}(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{F}(t)$, alors la trajectoire de $M(t)$ est sur une droite passant pas O.

c) Montrer que si en tout point le vecteur accélération $\overrightarrow{F''}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{F}'(t)$, alors la trajectoire est rectiligne.

2 - On suppose que le mouvement du point $M(t)$ est à accélération centrale, c'est à dire que :

$$\forall t \in I,\ \ \overrightarrow{F''}(t) = \varphi(t).\overrightarrow{F}(t) \quad \text{où } \varphi \text{ est une fonction continue de } I \text{ dans } \mathbb{R}$$

Montrer que la trajectoire du point $M(t)$ est plane. On montrera d'abord que $\overrightarrow{\Omega} = F(t)_\wedge F'(t)$ est un vecteur constant, puis que la trajectoire est dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{\Omega}$ passant par O.

Solution :

1 - a) En dérivant la relation $\|\overrightarrow{F'}(t)\|^2 =< \overrightarrow{F'}(t), \overrightarrow{F'}(t) >= cte$, on obtient :

$$2 < \overrightarrow{F''}(t), \overrightarrow{F'}(t) >= 0$$

ce qui montre qu'à tout instant le vecteur accélération $\overrightarrow{F''}(t)$ est normal au vecteur vitesse $\overrightarrow{F'}(t)$.

b) Supposons qu'à tout instant le vecteur vitesse $\overrightarrow{F'}(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{F}(t)$: il existe une fonction réelle φ telle que $\forall t,\ \overrightarrow{F'}(t) = \varphi(t)\overrightarrow{F}(t)$

Pour montrer que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$ garde une direction fixe, montrons que le vecteur $\overrightarrow{u}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}$ qui dirige la droite $(OM(t))$ est constant.

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\right)\overrightarrow{F}(t) + \frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\overrightarrow{F'}(t) = \frac{d}{dt}\left((< \overrightarrow{F}(t), \overrightarrow{F}(t) >)^{-\frac{1}{2}}\right)\overrightarrow{F}(t) + \frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\overrightarrow{F'}(t)\\
&= -\frac{1}{2}.2 < \overrightarrow{F}(t), \overrightarrow{F'}(t) >< F(t), F(t) >)^{-\frac{3}{2}}\overrightarrow{F}(t) + \frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\overrightarrow{F'}(t)\\
&= -\frac{< \overrightarrow{F}(t), \overrightarrow{F'}(t) > .\overrightarrow{F}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|^3} + \frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\overrightarrow{F'}(t)\\
&= -\frac{< \overrightarrow{F}(t), \varphi(t)\overrightarrow{F}(t) > .\overrightarrow{F}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|^3} + \frac{1}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}\varphi(t)\overrightarrow{F}(t) = \frac{-\varphi(t)\|\overrightarrow{F}(t)\|^2 + \varphi(t)\|\overrightarrow{F}(t)\|^2}{\|\overrightarrow{F}(t)\|^3}\overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{O}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}$ est donc constant. Notons le $\overrightarrow{u_0}$

Alors $\forall t,\ \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t) = \|\overrightarrow{F}(t)\|\overrightarrow{u_0}$, ce qui montre que

$$\boxed{\text{la trajectoire du point } M(t) \text{ est incluse dans la droite dirigée par le vecteur } \overrightarrow{u_0}.}$$

c) Par hypothèse, à tout instant, le vecteur accélération $F''(t) = \dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial t}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{F}'(t)$.

La fonction dérivée $\overrightarrow{F'}(t)$ vérifie les hypothèses de la question b), donc il existe un vecteur constant $\overrightarrow{u_0}$ et une fonction réelle φ tels que $\forall t,\ \overrightarrow{F'}(t) = \phi(t)\overrightarrow{u_0}$

alors $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \phi(t)\overrightarrow{u_0}dt + \overrightarrow{cte} = \Phi(t)\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u_1}$ où Φ est une primitive de φ

donc $\forall t,\ \overrightarrow{OM}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u_1}$ ce qui montre que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la trajectoire du point } M(t) \text{ est sur la droite}\\ \text{passant par le point } M_0 \text{ tel que } \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{u_1} \text{ et dirigée par le vecteur } \overrightarrow{u_0}\end{array}}$$

2 - On suppose qu'il existe une fonction réelle φ continue sur l'intervalle I telle que $\forall t \in I,\ \overrightarrow{F''}(t) = \varphi(t).\overrightarrow{F}(t)$

Soit $\overrightarrow{\Omega}(t) = F(t)_\wedge F'(t)$

$$\forall x \in I,\ \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} = \underbrace{F'(t)\wedge F'(t)}_{\overrightarrow{O}} + F(t)\wedge F''(t) = F(t)\wedge(\varphi(t).\overrightarrow{F}(t)) = \overrightarrow{0}$$

Donc $\overrightarrow{\Omega}(t)$ est un vecteur constant $\overrightarrow{\Omega_0}$.

- Si $\overrightarrow{\Omega_0} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{F'}(t)$ et $\overrightarrow{F}(t)$ sont colinéaires et d'après $1-b$), la trajectoire de $M(t)$ est portée par une droite passant pas O.

- Si $\overrightarrow{\Omega_0} \neq \overrightarrow{0}$, alors la relation $\overrightarrow{F}(t)\wedge\overrightarrow{F'}(t) = \overrightarrow{\Omega_0}$ montrer que $\overrightarrow{F}(t)$ reste orthogonal à un vecteur fixe $\overrightarrow{\Omega_0}$ et donc que $\overrightarrow{F}(t)$ reste dans le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{\Omega_0}$.

$\boxed{\text{La trajectoire est incluse dans le plan } \overrightarrow{\Omega_0}^{\perp}}$

****

2.2 Dimension des solutions d'une équation différentielle

Soit φ une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle :

$$y" + \varphi(x)y = 0$$

Soient y_1, y_2 et y_3 trois solutions de (E).

Montrer que la trajectoire de : $x \longrightarrow M(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$ est plane et en déduire que y_1, y_2, y_3 est un système lié.

Solution :

$$\forall x \in I,\ \frac{d^2M}{dx^2}(x) = \begin{pmatrix} y_1''(x) \\ y_2''(x) \\ y_3''(x) \end{pmatrix} = -\varphi(x)\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = -\varphi(x).M(x)$$

Le mouvement $x \longrightarrow M(x)$ est à accélération centrale dans $\mathbb{R}^3$, sa trajectoire est donc plane (voir ?? pour la démonstration)

Soit $ax + by + cz = 0$ une équation du plan contenant cette trajectoire.

Alors $\forall x \in I,\ a.y_1(x) + b.y_2(x) + c.y_3(x) = 0$.

Les fonctions y_1, y_2 et y_3 sont liées par la relation de dépendance linéaire : $a.y_1 + b.y_2 + c.y_3 = 0$

****

2.3 Exponentielle de matrices

$M_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme d'algèbre, c'est à dire d'une norme qui vérifie de plus la relation :

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

1- a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\exp(A)$ sa somme.

(en convenant que dans tous les cas $A^0 = I_n$)

b) Montrer que si les matrices A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$

c) Le résultat est il encore vrai si A et B ne commutent pas ?

On pourra étudier le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

3- Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que la fonction $F\ :\ t \longrightarrow \exp(tA)$ est dérivable et calculet $F'(t)$

Solution :

1-a) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente car $M_n(\mathbb{C})$, espace de dimension finie sur $\mathbb{C}$ est complet.

b) Notons, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et pour tout entier $p \geq 0$, $S_p(M) = \sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}$

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$S_p(A).S_p(B) = \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{A^i}{i!}\right).\left(\sum_{j=0}^{p} \frac{B^j}{j!}\right) = \sum_{(i,j)\in\{0,1,2,\dots,p\}^2} \frac{A^i.B^j}{i!j!}$$

Regroupons les termes de cette somme en les rangeant suivant les valeurs croissantes de $i+j=h$:

$$S_p(A).S_p(B) = I_n + \left(\frac{A}{1!}+\frac{B}{1!}\right) + \left(\underbrace{\frac{A^2}{2!}}_{(i,j)=(2,0)} + \underbrace{\frac{A.B}{1!1!}}_{(i,j)=(1,1)} + \underbrace{\frac{B^2}{2!}}_{(i,j)=(0,2)}\right) + \left(\underbrace{\frac{A^3}{3!}}_{(3,0)} + \underbrace{\frac{A^2.B}{2!}}_{(2,1)} + \underbrace{\frac{A.B^2}{2!}}_{(1,2)} + \underbrace{\frac{A^3}{3!}}_{(0,3)}\right) +$$

...

$$\dots + \left(\frac{A^p}{p!} + \frac{A^{p-1}.B}{(p-1)!.1!} + \frac{A^{p-2}.B^2}{(p-2)!.2!} + \dots + \frac{A.B^{p-1}}{1!.(p-1)!} + \frac{B^p}{p!}\right) + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$$

$$S_p(A).S_p(B) = \sum_{h=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{h} \frac{A^i.B^{h-i}}{i!(h-i)!}\right) + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$$

$$= \sum_{h=0}^{p} \frac{1}{h!}\left(\sum_{i=0}^{h} \frac{h!.A^i.B^{h-i}}{i!(h-i)!}\right) + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$$

$$= \sum_{h=0}^{p} \frac{1}{h!}\left(\sum_{i=0}^{h} \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} A^i.B^{h-i}\right) + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$$

$$= \sum_{h=0}^{p} \frac{1}{h!}(A+B)^h + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!} \quad \text{(si } A \text{ et } B \text{ commutent, } (A+B)^h = \sum_{i=0}^{h} \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} A^i.B^{h-i}\text{)}$$

donc $S_p(A).S_p(B) - S_p(A+B) = \displaystyle\sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$

par l'inégalité triangulaire, $\Big\| S_p(A).S_p(B) - S_p(A+B)\Big\| \le \displaystyle\sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{\|A^i.B^j\|}{i!.j!} = \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{\|A^i\|.\|B^j\|}{i!.j!}$

Un calcul analogue, mené sur les séries numériques à termes positifs $\sum \frac{\|A\|^k}{k!}$, $\sum \frac{\|B\|^k}{k!}$, $\sum \frac{(\|A\|+\|B\|)^k}{k!}$, donne l'égalité :

$$S_p(\|A\|).S_p(\|B\|) = S_p(\|A\|+\|B\|) + \sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{\|A\|^i.\|B\|^j}{i!.j!}$$

donc $\Big\| S_p(A).S_p(B) - S_p(A+B)\Big\| \le \displaystyle\sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{\|A^i\|.\|B^j\|}{i!.j!} = S_p(\|A\|).S_p(\|B\|) - S_p(\|A\|+\|B\|)$

Quand $p \longrightarrow +\infty$, $S_p(\|A\| \longrightarrow \exp(\|A\|)$, $S_p(\|B\| \longrightarrow \exp(\|B\|)$, $S_p(\|A\|+\|B\|) \longrightarrow \exp(\|A\|+\|B\|)$

donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\Big(S_p(\|A\|).S_p(\|B\|) - S_p(\|A\|+\|B\|)\Big) = e^{\|A\|}.e^{\|B\|} - .e^{\|A\|+\|B\|} = 0$

donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\Big\| S_p(A).S_p(B) - S_p(A+B)\Big\| = 0$

et, puisque $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(A) = \exp(A)$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(B) = \exp(B)$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(A+B) = \exp(A+B)$ et par continuité du produit de deux matrices, $\exp(A).\exp(B) - \exp(A+B) = 0$

donc $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$

2 - $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = 0$ et $\exp(A) = I_n + A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = 0$ et $\exp(B) = I_n + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$\exp(A).\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a.J$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I \quad \text{donc} \quad J^{2k}=I \quad \text{et} \quad J^{2k+1}=J$$

d'où $\exp(A+B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aJ)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} J = \text{ch}a\ I + \text{sh}a\ J = \begin{pmatrix} \text{ch}a & \text{sh}a \\ \text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix}$

Finalement, $\boxed{\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \text{ch}a & \text{sh}a \\ \text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exp(A).\exp(B) = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}}$

Dans cer exemple, $\exp(A+B) \neq \exp(A).\exp(B)$

3- a) Dérivabilité au point 0 :

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t}(\exp(t.A) - \exp(0)) = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} - I_n\right) = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{k!} = A.\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!}\right)$$

$$\frac{1}{t}(\exp(t.A) - \exp(0)) = A.\left(I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!}\right)$$

or , $\displaystyle\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{t^k A^k}{(k+1)!}\right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \parallel A \parallel^k}{(k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \parallel A \parallel^k}{k!} = e^{t.\|A\|} - 1 \quad \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 0$

d'où $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{(k+1)!}\right) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(\exp(t.A) - \exp(0))\right) = 0$

La fonction $F \,:\, t \longrightarrow \exp(tA)$ est donc dérivable en 0 et $F'(0) = A$

b) Dérivabilité en un point t_0 quelconque :

$\forall t \neq 0,\ \dfrac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \dfrac{1}{h}\Big(\exp((t_0+h)A) - \exp(t_0.A)\Big) = \dfrac{1}{h}\exp(t_0.A)\Big(\exp(h.A) - I_n\Big)$

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \exp(t_0.A)\frac{F(h)-F(0)}{h} \quad \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \quad \exp(t_0.A).F'(0) = \exp(t_0.A).A$$

Donc $\boxed{\forall t_0 \in \mathbb{R},\ F'(t_0) = \exp(t_0.A).A = A.\exp(t_0.A) = A.F(t_0)}$