Espaces vectoriel normés - Fonctions vectorielles

5 Espaces vectoriels normés PSI*-2010-2011

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Note : *Les exercices 1 - 2 - 4 - 5 - 8 - 9 - 15 - 17 peuvent être abordés en apprenant le cours.*
Les exercices 3 - 7 - 10 sont un peu plus difficiles.
Les exercices 16 - 17 utilisent les résultats du chapitre sur les suites et séries de fonctions.

I - Topologie des espaces vectoriels normés :

1- Intérieur et adhérence d'un sous ensemble :

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1 - a) Montrer qu'une boule ouverte $\overset{o}{B}(x, r)$ est un ouvert de E.
b) Montrer qu'une boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est un fermé de E.

2 - Soit A un sous ensemble de E.
a) Montrer que $\overset{o}{A}$ est un ouvert de A, que c'est le plus grand ouvert de E inclus dans A.
Montrer que A est ouvert si et seulement si $\overset{o}{A}= A$
b) Montrer que $\overline{A}$ est un fermé de A, que c'est le plus petit fermé de E contenant A.
Montrer que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$

3 - a) Montrer que $\overline{\overset{o}{B}(x, r)} = \overline{B}(x, r)$.
b) Montrer que $\overset{o}{\widehat{\overline{B}(x, r)}} = \overset{o}{B}(x, r)$.

2- Frontière d'une partie :

(E, N) est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\overline{A}$ désigne l'adhérence d'une partie A de E, $\overset{o}{A}$ désigne son intérieur.

Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est un point frontière de A s'il est adhérent à la fois à A et à son complémentaire dans E qu'on notera C_A.

La frontière de A est l'ensemble de ses points frontières. Elle est notée $\text{Fr}(A)$.

$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A}$

1. Déterminer la frontière de A dans les exemples suivants :
   (a) $E = \mathbb{R}$, $A_1 = [a, b]$, $A_2 =]a, b[$, $A_3 = \mathbb{Z}$, $A_4 = \mathbb{Q}$,
   (b) $E = \mathbb{R}^2$, $A_1 = \overset{o}{B}(x, r)$, $A_2 = \overline{B}(x, r)$
2. Soit A une partie de E. Montrer que :
   (a) A est un fermé si et seulement si $\text{Fr}(A) \subset A$
   (b) A est un ouvert si et seulement si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$
3. On suppose que A n'est ni vide, ni égale à tout l'espace E. On se propose de montrer que sa frontière n'est pas vide.
   (a) Soit $a \in A$ et $b \in C_A$.
   En procédant par dichotomie, montrer que le segment $[a, b] \subset E$ contient un point frontière de A.
   (b) Conclure

3- * Intérieur et adhérence d'un sous espace :

1- Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.
a) Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F dans E est un sous espace de E.
b) Montrer que, s'il n'est pas vide, l'intérieur $\overset{o}{F}$ de F dans E est un sous espace de E

2- Soit F un sous-espace de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes ;
(i) F est d'intérieur non vide.
(ii) $0 \in \overset{o}{F}$
(iii) $F = E$

3- On suppose que F est un sous espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé E.
Montrer que F est fermé dans E.

4- Normes sur un espace de suites

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes pour les quelles la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Montrer que les applications $N_1 \,:\, (u_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$,

$$N_2 \,:\, (u_n) \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

et $$N_3 \,:\, (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$$

sont définies sur E et sont des normes sur E.

b) Comparer deux à deux ces normes.

Certaines sont elles équivalentes entre elles ?

c) Soit S l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui à (u_n) fait correspondre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer que S est continue si on prend sur E la norme N_1, et ne l'est pas si on prend sur E la norme N_2 . Que dire de la dimension de E ?

II - Continuité d'applications linéaires

5- Continuité d'applications linéaires : propriétés équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé . Soit f une application linéaire de E dans E . Montrer l'équivalence des 5 propositions suivantes :

a) f est continue en 0 .
b) f est continue en tout point de E
c) L'image de $\overline{B}(0,1)$, boule unité fermée, par f , est bornée .
d) f est lipchitzienne sur E .
e) f est uniformément continue sur E .
f) Pour toute suite (x_n) de vecteurs de E qui converge vers 0, la suite $(f(x_n))$ converge aussi vers 0.

6- * Forme linéaire continue

1-Soit (E, N) un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E, non nulle.

1- Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\ker\varphi$ et la droite $\mathrm{Vect}(a)$ soient deux sous espaces supplémentaires de E.

2- Le vecteur a étant défini tel que $E = \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$, on note p_1 la projection sur $\ker\varphi$ parallèlement à $\mathbf{K}.a$ et p_2 la projection sur $\mathbf{K}.a$ parallèlement à $\ker\varphi$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) φ est continue. b) $\ker\varphi$ est un fermé de E. c) p_1 et p_2 sont continues.

7- * Forme linéaire positive :

$[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles, est muni de la norme uniforme : $\forall f \in E,\ \|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

On dit qu'une forme linéaire φ sur E est positive si :

$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0 \implies \varphi(f) \geqslant 0$

autrement dit, si l'image par φ de toute fonction à valeurs positives ou nulles, est positive ou nulle.

1. Soit φ une forme linéaire sur E positive. Montrer que $\forall f \in E,\ |\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|)$
2. On note e la fonction constante 1 : $\forall x \in [a, b], e(x) = 1$

   Montrer que toute forme linéaire positive φ sur E est continue. Calculer sa norme subordonnée en à l'aide de la fonction e.

8- Application réciproque non continue :

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\geq 1}$ à valeurs complexes, $\mathcal{SB}$ le sous espace des suites bornées, $\mathcal{SCV}$ le sous espace des suites complexes convergentes, $\sum\mathcal{CV}$ celui des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles la série $\sum a_n$ converge, $\mathcal{S}_0$ celui des suites de limite nulle.

1- Donner les relations d'inclusion existant entre ces divers sous espaces.

2- On définit sur $\mathcal{SB}$ la norme uniforme $N((an)) = \sup_{n\geq 1} |a_n|$

Pour toute suite $(a_n) \in \mathcal{S}_0$, on définit $D((a_n)) = (a'_n)_{n\geq 1}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a'_n = a_{n+1} - a_n$

a) Montrer que D est une bijection de $\mathcal{S}_0$ sur $\sum \mathcal{CV}$.

b) Soit $(b_n) \in \sum \mathcal{CV}$. On note rb_n le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$: $rb_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$

Exprimer le terme général a_n de la suite $(a_n) = D^{-1}((b_n))$ en fonction d'un des restes de la série $\sum b_n$.

c) Montrer que D est continue et calculer $|||D|||$.

d) Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $t^{(p)} = (t_n^{(p)})$ la suite telle que : $t_n^{(p)} = 1$ si $1 \leq n \leq p$
$t_n^{(p)} = 0$ si $p < n$

Calculer $N_\infty(t^{(p)})$ et $N_\infty(D^{-1}(t^{(p)}))$. L'application D^{-1} est elle continue ?
Quelle conséquence en résulte-t-il pour les espaces de suites étudiés ?

9- Fonction continue mais pas uniformément continue : Uniforme continuité et dérivée bornée :

1- Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que la fonction $g : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

3- Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f une fonction vectorielle de classe C^1 définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Montrer que si la fonction dérivée f' est bornée sur I, alors f est uniformément continue sur I. La réciproque est elle vraie ?

10 - Limite simple d'une suite de formes linéaires

Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, muni de la norme uniforme $\| \|^\infty$

1- On définit la forme linéaire Φ sur E par : $\forall f \in E,\ \Phi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

Montrer que Φ est continue et calculer sa norme subordonnée $|||\Phi|||$

2- Pour tout $c \in [a, b]$, on définit la forme linéaire φ_c sur E par :
$\forall f \in E,\ \varphi_c(f) = f(c)$

Montrer que φ_c est continue et calculer sa norme subordonnée $|||\varphi_c|||$

3- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la forme linéaire ψ_n sur E par : $\psi_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{a+k\frac{b-a}{n}}$,

autrement dit, $\forall f \in E,\ \psi_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$

Pour tout $f \in E$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi_n(f)$

4- E^{**}, espace des formes linéaires continues sur E est l'espace dual topologique de E.

L'application $\varphi \xrightarrow{N} \displaystyle\sup_{f\in E,\ \|f\|^\infty \leq 1} |\varphi(f)|$ est une norme sur E^{**} (sans difficulté)

A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N(\psi_n - \Phi) = 0$?

autrement dit, Φ est elle limite de la suite (ψ_n) dans l'EVN (E^{**}, N) ?

(on pourra utiliser une suite de fonctions (g_n) telle que $g_n(x) = \cos \lambda(x - a)$ avec λ choisi de telle manière que pour tout k, $g_n(a + k\frac{b-a}{n}) = 1$)

III - Suites convergentes :

11 - Limite de matrices :

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice B.

a) Montrer que B est une matrice de projection, d'image $\ker(A - I_n)$ et de noyau $\mathrm{Im}(A - I_n)$

b) Prouver l'existence d'un polynôme P tel que $B = P(A)$ et $P(1) \neq 0$

12 - * Espaces de suites ; Cesaro par densité :

L'espace vectoriel SB, formé des suites complexes $a = (a_n)_{n\geq 1}$ bornées, est muni de la norme uniforme $N^\infty((an)) = \sup_{n\geq 1} |a_n|$

On note : • SF le sous-espace des suites à support fini, c'est à dire pour lesquelles seuls un nombre fini de termes sont non nuls. Pour une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de SF, $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

- SCV le sous-espace des suites convergentes,
- S_0 le sous-espace des suites de limite nulle.

1- Montrer que l'adhérence de SF dans SB est S_0. Montrer que S_0 est un fermé de SB

2- On appelle μ l'application qui à toute suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ fait correspondre la suite $\mu(a) = b = (b_n)_{n\geq 1}$ des moyennes arithmétiques des n premiers termes :

$$\forall n \in N^*,\ b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Il est clair que $\mu \in L(SB)$.

a) Montrer que μ est une application lipschitzienne de SB dans SB. Déterminer $|||\mu|||$.

Rechercher les suites a de SB invariantes par μ, c'est à dire telles que $\mu(a) = a$.

c) Montrer que $\forall a \in SF, \mu(a) \in S_0$

d) Montrer que l'application Λ, de SCV dans $\mathbb{C}$, qui à une suite associe sa limite, est continue.

3- a) Soit $a \in S_0$.

Justifier l'existence d'une suite $(u^{(k)})_{k\in N^*}$ d'éléments de SF, de limite a.

Etudier la suite $(\mu(u^{(k)}))_{k\in N^*}$ et montrer que $\mu(a) \in S_0$

b) Déduire de la question précédente une démonstration du théorème de Cesaro, à savoir :
"Si u est une suite convergente de limite $L \in \mathbb{C}$, la suite $\mu(u)$ converge aussi vers L."

13 - * * Formes linéaires continues sur l^2 (dual topologique de l^2)

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge :
$l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \text{ converge }\}$

1-a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

Montrer que l^2 est un espace vectoriel sur réel et que l'application

$$(u_n) \longrightarrow \|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} \text{ est une norme sur } l^2.$$

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n de troncature au rang n, qui à la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ fait correspondre la suite tronquée (v_k) telle que : $v_k = u_k$ si $k \leq n$ et $v_k = 0$ si $k > n$.

Montrer que T_n est une application linéaire de l^2 dans lui même, continue, et calculer sa norme subordonnée.

Montrer que pour toute suite $u \in l^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(u) = u$

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$. D'après 1-a) on sait que pour toute suite $u = (u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Montrer que l'application Φ_a qui à la suite u fait correspondre $\Phi_a(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est une forme linéaire sur l^2, continue, et calculer sa norme $|||\Phi_a|||$.

b) Réciproquement, soit Ψ une forme linéaire continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 0} \in l^2$ telle que $\Psi = \Phi_b$

(on pourra déterminer b_n en fonction de Ψ et des suites $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$ et justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n,\ \sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M.\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2}$ pour montrer la cvgence de $\sum b_n^2$)

14 - * Résolution approchée d'une équation par le th. du point fixe :
. **(Hors programme depuis 2006)**

a) Montrer que le système $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$.

b) Expliquer comment on peut obtenir une valeur approchée (a, b) de cette solution à 10^{-10} près et calculer une telle valeur approchée avec MAPLE.

IV - Complétude - Compacité - Convexité

15 - Ouverts et compacts dans $M_n(\mathbb{R})$

Les ensembles $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont ils des parties ouvertes, fermées, compactes de $M_n(\mathbb{R})$?

16 - * Espace complet ou non suivant la norme

Soit $E = C([a, b], \mathbb{C})$, l'espace des fonctions complexes continues sur $[a, b]$.

1- Montrer que $C([a, b], \mathbb{C})$ est complet pour la norme de la convergence uniforme $\| \ \|^{\infty}$

2- Montrer que $C([a, b], \mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme convergence en moyenne $\| \ \|^1$

17 - Espaces des fonctions bornées, continues, polynomiales

On note $B(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes bornées sur l'intervalle I.

L'applicaton $f \longrightarrow \| f \|^{\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est une norme sur cet espace.

On note $C(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I et $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^k sur l'intervalle I

1- Montrer que $\Big(B(I, \mathbb{C}), \| \quad \|^{\infty}\Big)$ est un espace complet.

2- a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$, espace des fonctions continues sur $[a,b]$ est complet.

Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$ est un sous espace fermé de $B(I, \mathbb{C})$

3- Déterminer l'adhérence dans $\Big(C([a,b], \mathbb{C}), \| \quad \|^{\infty}\Big)$ de $\mathbb{R}[X]$, espace des fonctions polynomiales sur le segment $[a,b]$.

18 - * Enveloppe convexe et théorème de Gauss-Lucas

Une partie X d'un espace vectoriel normé E est dite convexe si $\forall (M,N) \in X^2$, $[M,N] \subset X$, c'est à dire si : $\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0$, tel que $\alpha + \beta \neq 0$, $\dfrac{\alpha M + \beta N}{\alpha + \beta} \in X$

1- a) A étant une partie quelconque de E montrer qu'il existe un plus petit sous ensemble convexe de E contenant A. Celui-ci est appelé **enveloppe convexe de** A. On le notera $\mathrm{Conv}(A)$.

b) Si A est l'ensemble fini $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$, montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

2- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe de racines $x_1, x_2, ..., x_n$ distinctes ou non dans $\mathbb{C}$.

Montrer que les racines du polynôme dérivé $P'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

19 - ** Sous espace de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie m de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) Montrer qu'il existe une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ de F et une suite finie $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de réels deux à deux distincts tels que

$$
\begin{array}{l}
g_1(a_1) \neq 0 \\
g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\
g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0
\end{array}
$$

En déduire que si une suite (h_n) d'éléments de F converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, alors $H \in F$ et (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé F.

b) On suppose de plus que le sous espace F est stable par translation, c'est à dire que pour toute fonction f de F, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow f(x+a)$ appartient encore à F.

b1) Montrer que $\forall f \in F, f' \in F$. En déduire que $F \subset C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b2) Montrer que toute fonction $f \in F$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E_f) linéaire, d'ordre $\leq m$, à coefficients constants.

b3)) Montrer qu'il existe une équation différentielle (EE) linéaire, d'ordre m , à coefficients constants, dont toute fonction de F est solution.

c) Donner un exemple d'un tel espace F pour $m = 1$ et $m = 2$, avec D inversible.

I - Topologie des espaces vectoriels normés :

1- Intérieur et adhérence d'un sous ensemble :

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1 - a) Montrer qu'une boule ouverte $\overset{o}{B}(x,r)$ est un ouvert de E.
b) Montrer qu'une boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de E.

2 - Soit A un sous ensemble de E.
a) Montrer que $\overset{o}{A}$ est un ouvert de A, que c'est le plus grand ouvert de E inclus dans A.
Montrer que A est ouvert si et seulement si $\overset{o}{A}= A$
b) Montrer que $\overline{A}$ est un fermé de A, que c'est le plus petit fermé de E contenant A.
Montrer que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$

3 - a) Montrer que $\overline{\overset{o}{B}(x,r)} = \overline{B}(x,r)$.
b) Montrer que $\overset{o}{\widehat{\overline{B}(x,r)}}=\overset{o}{B}(x,r)$.

SOLUTION :

1 - a) Soit $\overset{o}{B}(x,r)$ une boule ouverte.
Montrons que tout point y de $\overset{o}{B}(x,r)$ est centre d'un boule ouverte incluse dans $\overset{o}{B}(x,r)$:
Soit $y \in \overset{o}{B}(x,r)$. Prenons $r' = r - \|x-y\| > 0$ et vérifions que $\overset{o}{B}(y,r') \subset \overset{o}{B}(x,r)$
$\forall z \in \overset{o}{B}(y,r'),\ \|z-y\| < r'$
$\Longrightarrow \|z-x\| = \|(z-y)+(y-x)\| \leqslant \|z-y\| + \|y-x\| < r' + \|y-x\| = (r - \|x-y\|) + \|y-x\| = r$
$\Longrightarrow z \in \overset{o}{B}(x,r)$ donc $\overset{o}{B}(y,r') \subset \overset{o}{B}(x,r)$
y est centre d'une boule ouverte incluse dans $\overset{o}{B}(x,r)$ et $\overset{o}{B}(x,r)$ est un ouvert de E.

b) Considérons une boule fermée $\overline{B}(x,r)$ et montrons que c'est un fermé de E. Pour cela, montrons que son complémentaire $C_{\overline{B}}$ est un ouvet de E.
Soit $y \in C_{\overline{B}}$. $\|x-y\| > r$ puisque $y \notin \overline{B}(x,r)$. Prenons alors $r' = \|x-y\| - r > 0$ et vérifions que $\overset{o}{B}(y,r') \subset C_{\overline{B}}$
$\forall z \in \overset{o}{B}(y,r'),\ \|z-y\| < r'$
$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \Longrightarrow \|x-z\| \geqslant \|x-y\| - \underbrace{\|z-y\|}_{<r'} > \|x-y\| - r'$

$\Longrightarrow \|x-z\| > \|x-y\| - (\underbrace{\|x-y\| - r}_{=r'}) = r$

$\Longrightarrow z \notin \overline{B}(x,r) \Longrightarrow z \in C_{\overline{B}}$ donc $\overset{o}{B}(y,r') \subset C_{\overline{B}}$, donc $C_{\overline{B}}$ est un ouvert, donc $\overline{B}(x,r)$ est un fermé.

2- a) Soit $x \in \overset{o}{A}$. $\exists r > 0, \overset{o}{B}(x,r) \subset A$, par définition de $\overset{o}{A}$. Mais on a vu à la question 1 que $\overset{o}{B}(x,r)$ est un ouvert. Donc tout point $y \in \overset{o}{B}(x,r)$ est centre d'une boule ouverte incluse dans $\overset{o}{B}(x,r) \subset A$, donc est un point intérieur de A.
Ainsi, $\overset{o}{B}(x,r) \subset \overset{o}{A}$ et $\overset{o}{A}$ est un ouvert de E.

• $\overset{o}{A}$ est un ouvert de E, inclus dans A. Soit V un ouvert quelconque de E inclus dans A. Puisque V est ouvert, tout point z de V est centre d'une boule ouverte incluse dans $V \subset A$. Donc z est un point intérieur de A. On a ainsi montré que $V \subset \overset{o}{A}$, donc $\overset{o}{A}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) des ouverts de E inclus dans A.

• Supposons que A soit ouvert. Alors A est un ouvert inclus dans A, et c'est le plus grand possible. D'après ce qui précède, $A = \overset{o}{A}$.
Réciproquement, si $\overset{o}{A}= A$, alors A est ouvert puisque $\overset{o}{A}$ l'est.

b) Montrons que $\overline{A}$ est un fermé de A. Soit x un point quelconque de son complémentaire : $x \notin \overline{A} \Longrightarrow x$ n'est pas adhérent à $A \Longrightarrow \exists r > 0, \overset{o}{B}(x,r)$ ne coupe pas A, donc est incluse dans $C_{\overline{A}}$
Ainsi, tout point x de $C_{\overline{A}}$ est centre d'une boule ouverte incluse dans $C_{\overline{A}}$, donc $C_{\overline{A}}$ est ouvert, et $\overline{A}$ est fermé.

• Ainsi $\overline{A}$ est un fermé de E, qui contient A. (tout point x de A est adhérent à A puisque toute boule $\overset{o}{B}(x,r)$ coupe A au point x)
Soit W un fermé quelconque de E contenant A. Montrons que $\overline{A} \subset W$

Soit $x \in \overline{A}$. Si $x \notin W, x \in C_W$, qui est un ouvert de E puisque W est fermé. Alors $\exists r > 0, \overset{o}{B}(x,r) \subset C_W$. La boule $\overset{o}{B}(x,r)$ ne coupe pas W, puisqu'elle est incluse dans son complémentaire, donc ne coupe pas A, puisque $A \subset W$. Ceci est contraire à l'hypothèse que $x \in \overline{A}$. On a prouvé par l'absurde que $x \in W$, et donc que $A \subset W$.

Ainsi, $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A.

• Si $\overline{A} = A$, alors A est fermé puisque $\overline{A}$ l'est. Si A est fermé, c'est le plus petit fermé de E qui contient A, donc $\overline{A} = A$.

3- Il est clair que ($A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$) et que ($A \subset B \implies \overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$)

a) $\overset{o}{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$ donc $\overline{\overset{o}{B}(x,r)} \subset \overline{\overline{B}(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (la dernière égalité puisque $\overline{B}(x,r)$ est fermé en utilisant 2-b)

• Réciproquement, soit $y \in \overline{B}(x,r)$. Si $|y| < r$, alors $y \in \overset{o}{B}(x,r)$, donc $y \in \overline{\overset{o}{B}(x,r)}$

Si $|y| = r$, alors pour tout $r' > 0$, on peut trouver $\lambda \in]0,1[$ tel que $\|y - \lambda y\| = |1-\lambda|.\|y\| < r'$

(il suffit de prendre λ tel que $|1-\lambda| < \frac{r'}{r}$)

et alors $\lambda y \in \overline{B}(y,r') \cap \overset{o}{B}(x,r)$, ce qui montre que $y \in \overline{\overset{o}{B}(x,r)}$

donc $\overline{B}(x,r) \subset \overline{\overset{o}{B}(x,r)}$

b) $\overset{o}{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$ donc $\overset{o}{\widehat{\overset{o}{B}(x,r)}} = \overset{o}{B}(x,r) \subset \overset{o}{\widehat{\overline{B}(x,r)}}$ (la première égalité puisque $\overset{o}{B}(x,r)$ est un ouvert)

• Réciproquement, soit $y \in \overset{o}{\widehat{\overline{B}(x,r)}}$ . . . .

****

2- Frontière d'une partie :

(E,N) est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\overline{A}$ désigne l'adhérence d'une partie A de E, $\overset{o}{A}$ désigne son intérieur.

Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est un point frontière de A s'il est adhérent à la fois à A et à son complémentaire dans E qu'on notera C_A.

La frontière de A est l'ensemble de ses points frontières. Elle est notée $\mathrm{Fr}(A)$.

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A}$

1. Déterminer la frontière de A dans les exemples suivants :
   (a) $E = \mathbb{R}$, $A_1 = [a,b]$, $A_2 =]a,b[$, $A_3 = \mathbb{Z}$, $A_4 = \mathbb{Q}$,
   (b) $E = \mathbb{R}^2$, $A_1 = \overset{o}{B}(x,r)$, $A_2 = \overline{B}(x,r)$
2. Soit A une partie de E. Montrer que :
   (a) A est un fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$
   (b) A est un ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$
3. On suppose que A n'est ni vide, ni égale à tout l'espace E. On se propose de montrer que sa frontière n'est pas vide.
   (a) Soit $a \in A$ et $b \in C_A$.
   En procédant par dichotomie, montrer que le segment $[a,b] \subset E$ contient un point frontière de A.
   (b) Conclure

***SOLUTION* :**

1. (a) $E = \mathbb{R}$, $\overline{A_1} = \overline{A_2} = \{a,b\}$, $\overline{A_3} = \mathbb{Z}$, $\overline{A_4} = \mathbb{R}$,
   (b) $E = \mathbb{R}^2$, $\overline{A_1} = \overline{A_2} = \{y \in E, \ \|x-y\| = r\}$
2. (a) • Supposons que A est fermé. Alors $\overline{A} = A$ et $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A} \subset \overline{A} = A$.
   • Réciproquement, supposons que $\mathrm{Fr}(A) \subset A$
   Soit $x \in \overline{A}$. Il se peut que $x \in A$.
   Sinon, $x \in C_A \subset \overline{C_A}$, donc $x \in \overline{A} \cap \overline{C_A} = \mathrm{Fr}(A) \subset A$, donc $x \in A$.
   On a ainsi montré que $\overline{A} \subset A$ donc que A est fermé.

(b) • Supposons que $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
Soit $x \in A$. Alors $x \notin \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A}$. Mais, puisque $x \in A \subset \overline{A}$, $x \notin \overline{C_A}$.
Donc $\exists r > 0$, $\overset{o}{B}(x,r) \cap C_A = \phi$, ne coupant pas C_A, cette boule est incluse dans A : $\overset{o}{B}(x,r) \subset A$, ce qui montre que x est un point intérieur à A.
Donc tout point de A est centre d'une boule ouverte incluse dans A. A est un ouvert.

• Supposons que A est un ouvert. Si $\mathrm{Fr}(A) \cap A$ n'est pas vide, elle contient un élément x, qui appartient à A et à $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A}$. Ce point est donc adhérent à C_A, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que, A étant ouvert, il existe une boule ouverte $\overset{o}{B}(x,r)$ incluse dans A, donc qui ne coupe pas C_A.
On a ainsi prouvé par l'absurde que $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$

3. On suppose que A n'est ni vide, ni égale à tout l'espace E.

(a) Soit $a \in A$ et $b \in C_A$.
Considérons le milieu de (a,b), c'est à dire le point $\frac{a+b}{2}$
- si $\frac{a+b}{2} \in A$, posons $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$
- si $\frac{a+b}{2} \notin A$, posons $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$
dans les deux cas , $a_1 \in A$, $b_1 \in C_A$ et $\|a_1 - b_1\| = \frac{1}{2}\|a-b\|$
réïtérons le procédé : à l'étape n :
- si $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \in A$, posons $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$
- si $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \notin A$, posons $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$
dans les deux cas , $a_n \in A$, $b_n \in C_A$ et $\|a_n - b_n\| = \frac{1}{2}\|a_{n-1} - b_{n-1}\|$
Pour tout n, $\|a_n - a_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2^n}\|a-b\|$
Il s'ensuit que la suite (a_n) est de Cauchy, et qu'elle est dans le plan F engendré par a et b. Ce plan est complet comme espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La suite (a_n) converge donc vers une limite $c \in \mathrm{Vect}(a,b)$. On montrerait le même résultat pour la suite (b_n), qui converge vers un vecteur $d \in \mathrm{Vect}(a,b)$
En passant à la limite dans l'inégalité $\|a_n - b_n\| = \frac{1}{2^n}\|a-b\|$, on obtient $\|c-d\| = 0$, donc $c = d$.
Enfin, $c \in \overline{A}$ puisque c est limite d'une suite (a_n) d'éléments de A, $d \in \overline{C_A}$ puisque d est limite d'une suite (b_n) d'éléments de C_A, donc $c = d \in \overline{A} \cap \overline{C_A} = \mathrm{Fr}(A)$
On a ainsi montré que le segment $[a,b]$ contient un élément c appartenant à la frontière de A.

(b) ce qui montre que cette frontière n'est pas vide.

****

3- * Intérieur et adhérence d'un sous espace :

1- Soit (E,N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.
a) Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F dans E est un sous espace de E.
b) Montrer que, s'il n'est pas vide, l'intérieur $\overset{o}{F}$ de F dans E est un sous espace de E

2- Soit F un sous-espace de E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes ;
(i) F est d'intérieur non vide.
(ii) $0 \in \overset{o}{F}$
(iii) $F = E$

3- On suppose que F est un sous espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé E.
Montrer que F est fermé dans E.

SOLUTION :
1- a) • $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}$ n'est pas vide.
• Soient x et y deux vecteurs de $\overline{F}$.
Soit $r > 0$. Puisque x et $y \in \overline{F}$, la boule $\overset{o}{B}(x, \frac{r}{2})$ contient un élément $a \in F$ et la boule $\overset{o}{B}(y, \frac{r}{2})$ contient un élément $b \in F$
alors $N((x+y)-(a+b)) \leq N(x-a) + N(y-b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ et donc la boule $\overset{o}{B}(x+y, r)$ contient $a + b \in F$. Donc $x + y \in \overline{F}$ et $\overline{F}$ est stable pour l'addition.
On montre de manière analogue qu'il est stable pour la multiplication par un scalaire.
$\overline{F}$ est donc un sous espace vectoriel de E.

b) Il est supposé que $\overset{o}{F}$ n'est pas vide.

Soient x et y deux vecteurs de $\overset{o}{F}$. Il existe deux réels strictement positifs r_1 et r_2 tels que $\overset{o}{B}(x, r_1) \subset F$ et $\overset{o}{B}(y, r_2) \subset F$. Soit $r = \min(r_1, r_2)$. Montrons que $\overset{o}{B}(x+y, r) \subset F$

Soit $z \in \overset{o}{B}(x+y, r)$. Alors $N(z - (x+y)) < r$

Or $z = \underbrace{x + \frac{1}{2}(z-x-y)}_{a} + \underbrace{y + \frac{1}{2}(z-x-y)}_{b}$

$N(a-x) = N(\frac{1}{2}(z-x-y)) = \frac{1}{2}N(z-x-y) < \frac{1}{2}r < r_1$ donc $a \in \overset{o}{B}(x, r_1) \subset F$ donc $a \in F$

de même, $N(b-y) = N(\frac{1}{2}(z-x-y)) = \frac{1}{2}N(z-x-y) < \frac{1}{2}r < r_2$ donc $b \in \overset{o}{B}(y, r_2) \subset F$ donc $b \in F$

Ainsi, $z = a + b$ où a et b appartiennent à F. Donc $z \in F$, ce qui montre que $\overset{o}{B}(x+y, r) \subset F$, et que $x+y$ est un point intérieur de F.

$\overset{o}{F}$ est donc stable par addition.

- On montre de manière analogue que $\overset{o}{F}$ est stable par multiplication par un scalaire.

$\overset{o}{F}$ est donc un sous espace vectoriel de E.

2- (i) F est d'intérieur non vide.
(ii) $0 \in \overset{o}{F}$
(iii) $F = E$

- Si $F = E$, alors $\overset{o}{F} = E$ et donc $0 \in \overset{o}{F}$, ce qui montre que $(iii) \Longrightarrow (ii)$
- Si $0 \in \overset{o}{F}$ alors F est d'intérieur non vide, ce qui montre que que $(ii) \Longrightarrow (i)$
- Supposons que F est d'intérieur non vide. Alors F admet un point intérieur x_0, qui est centre d'une boule ouverte $\overset{o}{B}(x_0, r)$ incluse dans F. Montrons que $\overset{o}{B}(0, r) \subset F$.

Pour tout $y \in \overset{o}{B}(0, r)$, $N(y) = N(x_0 - (x_0 + y)) < r$ donc $x_0 + y \in \overset{o}{B}(x_0, r) \subset F$

Ainsi $y = \underbrace{(x_0 + y)}_{\in F} - \underbrace{x_0}_{\in F} \in F$

donc $\overset{o}{B}(0, r) \subset F$.

- Soit x un vecteur quelconque de E. Alors $x = \underbrace{\frac{2N(x)}{r}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{r}{2N(x)} x}_{\in \overset{o}{B}(0,r) \subset F}$ (puisque $N(\frac{r}{2N(x)} x) = \frac{r}{2} < r$)

donc $x \in F$.

ce qui montre que $E \subset F$, et l'égalité par inclusion réciproque évidente.

3 - On considère une suite (v_n) de vecteurs de F, qui converge vers un vecteur $w \in E$. La suite (v_n) est une suite de Cauchy de vecteurs de F, car est convergente. F étant de dimension fini est un espace complet. Donc la suite de Cauchy (v_n) converge dans F, ce qui montre que F est fermé.

* *

4- Normes sur un espace de suites

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes pour les quelles la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Montrer que les applications $N_1 \ : \ (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$,

$N_2 \ : \ (u_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$

et $N_3 \ : \ (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$

sont définies sur E et sont des normes sur E.

b) Comparer deux à deux ces normes.

Certaines sont elles équivalentes entre elles ?

c) Soit S l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui à (u_n) fait correspondre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer que S est continue si on prend sur E la norme N_1, et ne l'est pas si on prend sur E la norme N_2 .

Que dire de la dimension de E ?

II - Continuité d'applications linéaires

5- Continuité d'applications linéaires : propriétés équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé . Soit f une application linéaire de E dans E . Montrer l'équivalence des 5 propositions suivantes :

a) f est continue en 0 .
b) f est continue en tout point de E
c) L'image de $\overline{B}(0,1)$, boule unité fermée, par f , est bornée .
d) f est lipchitzienne sur E .
e) f est uniformément continue sur E .
f) Pour toute suite (x_n) de vecteurs de E qui converge vers 0, la suite $(f(x_n))$ converge aussi vers 0.

SOLUTION **:**

• Une fonction lipschitzienne est uniformément continue donc $d) \Rightarrow e)$

• Une fonction uniformément continue est continue donc $e) \Rightarrow b)$

• Une fonction continue en tout point de E est en particulier continue en 0 donc $b) \Rightarrow a)$

• Si f est une fonction continue en 0, pour toute suite (x_n) de E qui converge vers 0, la suite $(f(x_n))$ converge aussi vers 0 donc $a) \Rightarrow f)$

• Supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments de E, $\lim x_n = 0 \Rightarrow \lim(f(x_n)) = 0$ et montrons que $f(\overline{B}(0,1))$ est bornée .

Si $f(\overline{B}(0,1))$ n'est pas bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément $y \in f(\overline{B}(0,1))$ tel que $\|y\| \geq n$, donc il existe un vecteur de $\overline{B}(0,1)$, qu'on notera t_n, tel que $\| f(t_n) \| \geq n$

Soit alors $(x_n) = (\frac{t_n}{n})$. On a $\lim x_n = 0$ car $\|t_n\| \leq 1$ mais $\| f(x_n) \| \geq 1$ puisque $\| f(t_n) \| \geq n$, et la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers 0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a ainsi montré que $f) \Rightarrow c)$

• Supposons que $f(\overline{B}(0,1))$ est bornée.

alors $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B}(0,1)$, $\| f(x) \| \leq M$

Pour tout $x \in E$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,1)$ donc $\left\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M$ et par linéarité de f, $\|f(x)\| \leq M \| x \|$

donc f est lipschitzienne de rapport M.

On a ainsi montré que $c) \Rightarrow d)$

****

6- * Forme linéaire continue

1-Soit (E,N) un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E, non nulle.

1- Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\ker\varphi$ et la droite $\mathrm{Vect}(a)$ soient deux sous espaces supplémentaires de E.

2- Le vecteur a étant défini tel que $E = \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$, on note p_1 la projection sur $\ker\varphi$ parallèlement à $\mathbf{K}.a$ et p_2 la projection sur $\mathbf{K}.a$ parallèlement à $\ker\varphi$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) φ est continue.
b) $\ker\varphi$ est un fermé de E.
c) p_1 et p_2 sont continues.

SOLUTION **:**

1- Puisque $\varphi \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ et quitte à remplacer a par $\dfrac{a}{\varphi(a)}$, on peut supposer que $\varphi(a) = 1$.

• Soit $x \in \ker\varphi \cap \mathbf{K}.a$. $\exists\lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda.a$ et $x \in \ker\varphi$.

Donc $\varphi(x) = 0 = \varphi(\lambda.a) = \lambda\varphi(a) = \lambda$. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0$

Ainsi $\ker\varphi \cap \mathbf{K}.a = \{0\}$. La somme $\ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$ est directe.

• Soit $x \in E$. Ecrivons $x = (x - \varphi(x).a) + \varphi(x).a$

$\varphi(x).a \in \mathbf{K}.a$ et $x - \varphi(x).a \in \ker\varphi$ puisque $\varphi(x - \varphi(x).a) = \varphi(x) - \varphi(x).\underbrace{\varphi(a)}_{=1} = 0$

Donc $E \subset \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a$ et l'inclusion réciproque allant de soi, $\boxed{E = \ker\varphi \oplus \mathbf{K}.a}$.

2- Remarquons d'abord que puisque $p_2 = Id_E - p_1$, l'un des projecteurs est continu si et seulement si le second l'est.

• L'image réciproque d'un fermé par une application continue étant un fermé, si φ est continue, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E.

Ce qui montre que $a) \Longrightarrow b)$

• Supposons que $\ker\varphi$ soit fermé.

Si la projection p_2 n'est pas continue, alors elle n'est pas continue en 0 (car la continuité en 0 entraîne la continuité en tout point).

$\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in E,\ \ N(x) < \alpha$ et $|\varphi(x)| > \varepsilon$

en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in E,\ \ N(x_n) < \frac{1}{n}$ et $|\varphi(x_n)| > \varepsilon$

puis en définissant $y_n = \dfrac{x_n}{\varphi(x_n)},\ \ N(y_n) = N\left(\dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}\right) = \dfrac{N(x_n)}{|\varphi(x_n)|} \leq \dfrac{N(x_n)}{\varepsilon} < \dfrac{1}{n\varepsilon} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$

et $\varphi(y_n) = \varphi\left(\dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}\right) = \dfrac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} = 1$

On a montré l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de E telle que $N(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n,\ \varphi(y_n) = 1$

Alors $\forall n,\ y_n - a \in \ker\varphi$ (puisque $\varphi(y_n - a) = \varphi(y_n) - \varphi(a) = 1 - 1 = 0$)

La suite $(y_n - a)$ d'éléments de $\ker\varphi$ converge vers $0 - a$ (puisque $\lim y_n = 0$). Donc $-a \in \ker\varphi$ puisque $\ker\varphi$ est fermé, ce qui est absurde.

Donc p_2 est continue, ce qui montre que $b) \Longrightarrow c)$

• Supposons que p_2 soit continu.

$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \varphi(\underbrace{p_1(x)}_{\in\ker\varphi}) + \varphi(p_2(x)) = 0 + \varphi(\underbrace{p_2(x)}_{\in\mathbf{K}.a}) = \widetilde{\varphi}(p_2(x))$

où $\widetilde{\varphi}$ est la restriction de φ à la droite $\mathbf{K}.a$

$\widetilde{\varphi}$, application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie (droite), est continue. Par composition, $\varphi = \widetilde{\varphi}_o p_2$ est continue.

****

7- * Forme linéaire positive :

$[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles, est muni de la norme uniforme : $\forall f \in E,\ \|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$

On dit qu'une forme linéaire φ sur E est positive si :

$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0 \implies \varphi(f) \geqslant 0$

autrement dit, si l'image par φ de toute fonction à valeurs positives ou nulles, est positive ou nulle.

1. Soit φ une forme linéaire sur E positive. Montrer que $\forall f \in E,\ |\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|)$
2. On note e la fonction constante 1 : $\forall x \in [a, b], e(x) = 1$

   Montrer que toute forme linéaire positive φ sur E est continue. Calculer sa norme subordonnée en à l'aide de la fonction e.

SOLUTION **:**

1. Soit φ une forme linéaire positive sur E

   Soit $f \in E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

   Utilisons les fonctions f^+ et f^- définies par :

   $$\forall x \in [a, b], \begin{cases} \text{si } f(x) \geqslant 0 \text{ alors } f^+(x) = f(x) \\ \text{si } f(x) < 0 \text{ alors } f^+(x) = 0 \end{cases}$$

   $$\forall x \in [a, b], \begin{cases} \text{si } f(x) > 0 \text{ alors } f^-(x) = 0 \\ \text{si } f(x) \leqslant 0 \text{ alors } f^-(x) = -f(x) \end{cases}$$

   On sait qu'alors $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

   f^+ et f^- sont des fonctions à valeurs $\geqslant 0$

   alors, $|\varphi(f)| = |\varphi(f^+ - f^-)| = |\varphi(f^+) - \varphi(f^-)|$ puisque φ est linéaire

   $\Longrightarrow |\varphi(f)| \leqslant |\varphi(f^+)| + |\varphi(f^-)| = \varphi(f^+) + \varphi(f^-) = \varphi(f^+ + f^-) = \phi(|f|)$

   (car f^+ et f^- sont à valeurs $\geqslant 0$ et φ est positive)

2. Remarquons que si φ est une forme linéaire positive sur E, alors $\forall f, g \in E,\ f \leqslant g \Longrightarrow \varphi(f) \leqslant \varphi(g)$

$$(\text{ car } (g-f) \geqslant 0 \implies \varphi(g-f) \geqslant 0 \implies \varphi(g) - \varphi(f) \geqslant 0 \implies \varphi(g) \geqslant \varphi(f)\ )$$

Soit $f \in E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Une fonction continue sur un segment est bornée et la norme uniforme de f est bien définie.

De plus, $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \|f\| = \|f\|\ .\ e(x)$

d'où : $|\varphi(f)| \leqslant \phi(|f|) \leqslant \phi(\|f\|\ .\ e) = \|f\|\ .\ \varphi(e)$

φ est lipschitzienne de rapport $\varphi(e)$. Elle est donc continue et $|||\varphi||| \leqslant \varphi(e)$

Lorque $f = e$, il y a égalité : $|\varphi(e)| = \underbrace{\|e\|}_{=1}\ .\ \varphi(e)$. Donc $|||\varphi||| = \varphi(e)$

* *

8- Application réciproque non continue :

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\geq 1}$ à valeurs complexes, $\mathcal{SB}$ le sous espace des suites bornées, $\mathcal{SCV}$ le sous espace des suites complexes convergentes, $\sum\mathcal{CV}$ celui des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles la série $\sum a_n$ converge, $\mathcal{S}_0$ celui des suites de limite nulle.

1- Donner les relations d'inclusion existant entre ces divers sous espaces.

2- On définit sur $\mathcal{SB}$ la norme uniforme $N((an)) = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n|$

Pour toute suite $(a_n) \in \mathcal{S}_0$, on définit $D((a_n)) = (a'_n)_{n\geq 1}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a'_n = a_{n+1} - a_n$

a) Montrer que D est une bijection de $\mathcal{S}_0$ sur $\sum\mathcal{CV}$.

b) Soit $(b_n) \in \sum\mathcal{CV}$. On note rb_n le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$: $rb_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$

Exprimer le terme général a_n de la suite $(a_n) = D^{-1}((b_n))$ en fonction d'un des restes de la série $\sum b_n$.

c) Montrer que D est continue et calculer $|||D|||$.

d) Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $t^{(p)} = (t_n^{(p)})$ la suite telle que : $t_n^{(p)} = 1$ si $1 \leq n \leq p$
$t_n^{(p)} = 0$ si $p < n$

Calculer $N_\infty(t^{(p)})$ et $N_\infty(D^{-1}(t^{(p)}))$. L'application D^{-1} est elle continue ?
Quelle conséquence en résulte-t-il pour les espaces de suites étudiés ?

SOLUTION :

1- $\sum\mathcal{CV} \subset \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{SCV} \subset \mathcal{SB} \subset \mathcal{S}$

2- a) et b) • Vérifions que D est une application de $\mathcal{S}_0$ dans $\sum\mathcal{CV}$:

Soit $(a_n) \in \mathcal{S}_0$ et $(a'_n) = D((a_n))$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a'_n = a_{n+1} - a_n$

On sait que la suite (a_n) converge si et seulement si la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge. Puisque la suite (a_n) converge (elle est supposée de limite nulle), la série $\sum(a_{n+1} - a_n) = \sum a'_n$ converge. Donc $D((a_n)) = (a'n) \in \sum\mathcal{CV}$

• L'application D est linéaire (vérification sans difficulté)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ker D$. Alors $D((a_n)) = (a'_n) = (0)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a'_n = a_{n+1} - a_n = 0$, donc la suite (a_n) et constante. Etant de plus de limite nulle, c'est la suite nulle.

Donc $\ker D = \{0\}$ et l'application D est injective.

• Montrons que D est surjective.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 1} \in \sum\mathcal{CV}$. Il s'agit de rechercher un antécédent de (b_n) par D. Procédons par **analyse** et supposons qu'une suite $(c_n) \in \mathcal{S}_0$ soit un antécédent de (b_n) par D :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = c_{n+1} - c_n$

En sommant les égalités $\begin{cases} b_n = c_{n+1} - c_n \\ b_{n+1} = c_{n+2} - c_{n+1} \\ b_{n+2} = c_{n+3} - c_{n+2} \\ \quad \dots \\ b_{n+p} = c_{n+p+1} - c_{n+p} \end{cases}$ on obtient : $b_n + b_{n+1} + ... + b_{n+p} = c_{n+p+1} - c_n$

Puisque $(b_n)_{n\geqslant 1} \in \sum\mathcal{CV}$, la série $\sum b_n$ converge. Par ailleurs, la suite $(c_n) \in \mathcal{S}_0$ est de limite nulle. En passant à la limite pour n fixé et p tendant vers $+\infty$ dans l'égalité précedente, on obtient :

$$c_n = -\sum_{k=n}^{+\infty} b_k = -rb_{n-1}$$

Synthèse : Soit $(b_n)_{n\geqslant 1} \in \sum\mathcal{CV}$. Considérons alors la suite (c_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = -\sum_{k=n}^{+\infty} b_k = -rb_{n-1}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ (reste d'une série convergente) , donc $(c_n) \in \mathcal{S}_0$

et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} - c_n = -\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k = b_n$, ce qui montre que $D((c_n)) = (b_n)$

En résumé, toute suite $(b_n)_{n\geqslant 1} \in \sum\mathcal{CV}$ admet un antécédent par D dans $\mathcal{S}_0$, qui est la suite (c_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = -\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k = -rb_{n-1}$

• D est donc une bijection de $\mathcal{S}_0$ sur $\sum\mathcal{CV}$.

c) Soit $(a_n) \in \mathcal{S}_0$ et $(a'_n) = D((a_n))$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a'_n| = |a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_{n+1}| + |a_n| \leqslant N((a_n)) + N((a_n)) = 2N((a_n))$.

Donc $N((a_n)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a'_n| \leqslant 2N((a_n))$ et donc $|||D||| \leqslant 2$.

Par ailleurs, si on considère la suite $(c_n) = (1, -1, 0, 0, ..., 0, ...)$, alors $N((c_n)) = 1$ et :

$$\begin{cases} c'_1 = c_2 - c_1 = -1 - (1) = -2 \\ c'_2 = c_3 - c_2 = 0 - (-1) = 1 \\ \forall n \geqslant 3,\ c'_n = c_{n+1} - c_n = 0 - 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc } N((c'_n)) = 2$$

donc $\dfrac{N(D((c_n)))}{N((c_n))} = 2$ et $|||D||| \geqslant 2$

Des deux inégalités on déduit que $\boxed{|||D||| = 2}$

d) Pour $p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} t_n^{(p)} = 1 & \text{si} \quad 1 \leq n \leq p \\ t_n^{(p)} = 0 & \text{si} \quad p < n \end{cases}$ donc $\boxed{N_\infty(t^{(p)}) = 1}$

Soit $u^{(p)} = (u_n^{(p)}) = D^{-1}(t^{(p)})$

D'après la question 2-a-b),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^{(p)} = -\sum_{k=n}^{+\infty} t_k^{(p)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n > p \\ = -\sum\limits_{k=n}^{+\infty} t_k^{(p)} = -\sum\limits_{k=n}^{p} t_k^{(p)} = -\sum\limits_{k=n}^{p} 1 = -(p - n + 1) \quad \text{si} \quad n \leqslant p \end{cases}$$

$t_1^{(p)} = -p, \quad t_2^{(p)} = -p + 1, \quad ... \quad t_{p-1}^{(p)} = -2, \quad t_p^{(p)} = -1, \quad t_n^{(p)} = 0 \quad \forall n > p$

d'où $N_\infty(D^{-1}(t^{(p)})) = N_\infty(u^{(p)}) = p$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{N_\infty(D^{-1}(t^{(p)}))}{N_\infty(t^{(p)})} = \dfrac{p}{1} = p$. Lorsque b décrit $\sum\mathcal{CV}$, le rapport $\dfrac{N_\infty(D^{-1}(b))}{N_\infty(b)}$ n'est donc pas borné. $\boxed{\text{L'application linéaire } D \text{ n'est pas continue.}}$

L'espace de départ de D^{-1}, à savoir $\sum\mathcal{CV}$ n'est donc pas de dimension finie. (car une application linéaire définie sur un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est nécessairement continue).

****

9- Fonction continue mais pas uniformément continue : Uniforme continuité et dérivée bornée :

1- Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que la fonction $g : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

3- Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f une fonction vectorielle de classe C^1 définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Montrer que si la fonction dérivée f' est bornée sur I, alors f est uniformément continue sur I. La réciproque est elle vraie ?

SOLUTION **:**

1 - Il s'agit de montrer la négation de la proposition :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

c'est à dire :

$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\eta > 0, \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$

Prenons $\varepsilon_0 = 1$. Soit $\eta > 0$ quelconque et $x = \dfrac{1}{\eta},\ y = \dfrac{1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2}$

alors $|x - y| = \frac{\eta}{2} < \eta$ et $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \left|\dfrac{1}{\eta^2} - \dfrac{1}{\eta^2} - 1 - \dfrac{\eta^2}{4}\right| = 1 + \dfrac{\eta^2}{4} > 1 = \varepsilon_0$

2- Prenons à nouveau $\varepsilon_0 = 1$. Soit $\eta > 0$ quelconque et $\eta' = \min(\eta, 1/2)$ de sorte que $\eta' < 1$.

Soient $x = \eta'$ et $y = \eta' - \eta'^2$

alors $|x - y| = |\eta'^2| \leq \eta' \leq \eta$ car $\eta' < 1$

et $|g(x)-g(y)| = \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right| = \left|\dfrac{y-x}{xy}\right| = \left|\dfrac{\eta'^2}{\eta'(\eta'-\eta'^2)}\right| = \dfrac{1}{1-\eta'^2} \geq 1$

On a ainsi montré que $\exists \varepsilon_0 = 1 > 0, \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in]0,+\infty[,\ |x-y| \leq \eta$ et $|g(x)-g(y)| > \varepsilon_0$ et g n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$.

3- • Soient $x, y \in E$.

$$\|f(x)-f(y)\| = \left\|\int_x^y f'(t)dt\right\| \leq \int_x^y \|f'(t)\|dt \leq \int_x^y M dt = M.|x-y|$$

f est M-lipschitzienne donc uniformément continue sur I.

• La réciproque est fausse :

La fonction $h\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc y est uniformément continue (théorème de Heine). Elle est donc uniformément continue sur l'intervalle $]0,1]$.

Elle est de classe C^1 sur $]0,1]$, mais sa dérivée $h'\ :\ x \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas bornée.

****

10 - Limite simple d'une suite de formes linéaires

Soit $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, muni de la norme uniforme $\|\ \|^\infty$

1- On définit la forme linéaire Φ sur E par :

$$\forall f \in E,\ \Phi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Montrer que Φ est continue et calculer sa norme subordonnée $|||\Phi|||$

2- Pour tout $c \in [a,b]$, on définit la forme linéaire φ_c sur E par :

$\forall f \in E,\ \varphi_c(f) = f(c)$

Montrer que φ_c est continue et calculer sa norme subordonnée $|||\varphi_c|||$

3- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la forme linéaire ψ_n sur E par : $\psi_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{a+k\frac{b-a}{n}}$,

autrement dit, $\forall f \in E,\ \psi_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$

Pour tout $f \in E$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(f)$

4- E^{**}, espace des formes linéaires continues sur E est l'espace dual topologique de E.

L'application $\varphi \xrightarrow{N} \sup\limits_{f\in E,\ \|f\|^\infty \leq 1} |\varphi(f)|$ est une norme sur E^{**} (sans difficulté)

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} N(\psi_n - \Phi) = 0$?

autrement dit, Φ est elle limite de la suite (ψ_n) dans l'EVN (E^{**}, N) ?

(on pourra utiliser une suite de fonctions (g_n) telle que $g_n(x) = \cos\lambda(x-a)$ avec λ choisi de telle manière que pour tout k, $g_n(a+k\frac{b-a}{n}) = 1$)

SOLUTION **:**

1- $\forall f \in E,\ \ |\Phi(f)| = \left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt \leq \displaystyle\int_a^b \|f\|^\infty dt = (b-a)\|f\|^\infty$

Donc la forme linéaire Φ est lipschitzienne de rapport $b-a$. Elle est donc continue et $|||\Phi||| \leq b-a$.

En prenant pour f la fonction constante 1, on obtient $|||\Phi||| \geq b-a$ donc $\boxed{|||\Phi||| = b-a}$

2- $\forall f \in E,\ \ |\varphi_c(f)| = |f(c)| \leq \|f\|^\infty$ donc φ_c est lipschitzienne de rapport 1.

Elle est donc continue et $|||\varphi_c||| \leq 1$.

En prenant pour f la fonction constante 1, on obtient $\boxed{|||\varphi_c||| = 1}$

3- ψ_n, combinaison linéaire de formes linéaires continues du type φ_c est elle même continue.

Soit $f \in E$. $\psi_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction f sur le segment $[a,b]$ partagé en n intervalles égaux.

f étant continue sur $[a,b]$, on sait qu'alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = \Phi(f)$

4- Soit g_n la fonction définie par : $g_n(x) = \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right)$. On a bien $\|g_n\|^\infty = 1$

Pour tout $k \in \{0,1,...n-1\}$, $g_n(a+k\frac{b-a}{n}) = \cos\frac{2\pi n}{b-a}(k\frac{b-a}{n}) = \cos(2k\pi) = 1$

donc $\psi_n(g_n) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) = b-a$

Par ailleurs, $\Phi(g_n) = \int_a^b g_n(t)dt = \int_a^b \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right) dt = \left[\frac{b-a}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\right)\right]_a^b = 0$

donc $N(\Phi - \psi_n) \geq |\Phi(g_n) - \psi_n(g_n)| = b - a$ de sorte que $N(\Phi - \psi_n)$ ne tend pas vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$ et la suite (ψ_n) **ne converge pas vers Φ dans l'espace vectoriel normé** (E^{**}, N).

Puisque pour tout $f \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(f) = \Phi(f)$ on dit que la suite (ψ_n) **converge simplement** vers Φ.

III - Suites convergentes :

11 - Limite de matrices :

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice B.

a) Montrer que B est une matrice de projection, d'image $\ker(A - I_n)$ et de noyau $\mathrm{Im}(A - I_n)$

b) Prouver l'existence d'un polynôme P tel que $B = P(A)$ et $P(1) \neq 0$

SOLUTION :

a) L'application : $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ (M, N) & \mapsto & M.N \end{array}$

est bilinéaire donc continue car $M_n(\mathbf{C})$ est de dimension finie.

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} A^{2k} = B = \lim\limits_{k\to\infty} A^k.A^k = (\lim\limits_{k\to\infty} A^k).(\lim\limits_{k\to\infty} A^k) = B.B$

Donc $B^2 = B$ et B est une matrice de projection.

- Soit $X \in \ker(A - I_n)$: $A.X = X$, donc $A^2.X = A.X = X$

par récurrence immédiate, $\forall k, A^k.X = X$ et, par continuité du produit matriciel et passage à la limite, $B.X = X$

Donc $\ker(A - I_n) \subset \ker(B - I_n) = \mathrm{Im}(B)$

- Soit $X \in \mathrm{Im}(A - I_n)$: $\exists Y \in \mathbf{C}^n, X = A.Y - Y$, donc $A.X = A^2.Y - A.Y$

par récurrence immédiate, $\forall k, A^k.X = A^{k+1}.X - A^k.X$ et, par continuité du produit matriciel et pasasge à la limite, $B.X = B.X - B.X = 0$

Donc $\mathrm{Im}(A - I_n) \subset \ker(B)$

- B étant un projecteur, $\ker(B) \oplus \mathrm{Im}(B) = \mathbf{C}^n$, en particulier, la somme est directe.

Puisque $\mathrm{Im}(A - I_n) \subset \ker(B)$ et $\ker(A - I_n) \subset \mathrm{Im}(B)$, $\mathrm{Im}(A - I_n)$ et $\ker(A - I_n)$ sont en somme directe. Par le théorème du rang, la somme de leur dimension valant n, ils sont supplémentaires .

Finalement, $\mathrm{Im}(A - I_n) = \ker(B)$
$\ker(A - I_n) = \mathrm{Im}(B)$
$\mathrm{Im}(A - I_n) \oplus \ker(A - I_n) = \mathbf{C}^n$

B est la matrice de la projection sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$

* *

12 - * Espaces de suites ; Cesaro par densité :

L'espace vectoriel SB, formé des suites complexes $a = (a_n)_{n\geq1}$ bornées, est muni de la norme uniforme $N^\infty((an)) = \sup\limits_{n\geq1} |a_n|$

On note : • SF le sous-espace des suites à support fini, c'est à dire pour lesquelles seuls un nombre fini de termes sont non nuls. Pour une suite $(a_n)_{n\geq1}$ de SF, $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

• SCV le sous-espace des suites convergentes,

• S_0 le sous-espace des suites de limite nulle.

1- Montrer que l'adhérence de SF dans SB est S_0.

Montrer que S_0 est un fermé de SB

2- On appelle μ l'application qui à toute suite $a = (a_n)_{n\geq1}$ fait correspondre la suite $\mu(a) = b = (b_n)_{n\geq1}$ des moyennes arithmétiques des n premiers termes :

$$\forall n \in N^*,\ b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Il est clair que $\mu \in L(SB)$.

a) Montrer que μ est une application lipschitzienne de SB dans SB. Déterminer $|||\mu|||$.

Rechercher les suites a de SB invariantes par μ, c'est à dire telles que $\mu(a) = a$.

c) Montrer que $\forall a \in SF, \mu(a) \in S_0$

d) Montrer que l'application Λ, de SCV dans $\mathbb{C}$, qui à une suite associe sa limite, est continue.

3- a) Soit $a \in S_0$.

Justifier l'existence d'une suite $(u^{(k)})_{k\in N^*}$ d'éléments de SF, de limite a.

Etudier la suite $(\mu(u^{(k)}))_{k\in N^*}$ et montrer que $\mu(a) \in S_0$

b) Déduire de la question précédente une démonstration du théorème de Cesaro, à savoir :
"Si u est une suite convergente de limite $L \in \mathbb{C}$, la suite $\mu(u)$ converge aussi vers L."

SOLUTION :

1 - • Soit $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \overline{SF}$, adhérence de SF dans SB.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b \in SF$ telle que $N^\infty(a-b) < \varepsilon$

a étant à support fini, $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

donc $\forall n \geq n_0,\ \ |b_n| = |\underbrace{a_n}_{0} - b_n| \leq \sup\limits_{m\geq 1} |a_m - b_m| = N^\infty(a-b) < \varepsilon$

On a ainsi montré que : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ |b_n| < \varepsilon$

c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ ou encore que $b \in S_0$

Donc $\boxed{\overline{SF} \subset S_0}$

• Réciproquement, si $b \in S_0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ |b_n| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, soit b' la suite à support fini obtenue en troncant (b_n) à partir du rang n_0 :

$\forall n < n_0,\ b'_n = b_n$

et $\ \forall n \geq n_0,\ b'_n = 0$

alors $\ |b_n - b'_n| = 0$ si $n < n_0$ et $|b_n - b'_n| = |b_n| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ $\quad$ et donc $\quad N^\infty(b - b') < \varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall \varepsilon > 0$ il existe une suite b' à support fini telle que $\ N^\infty(b-b') < \varepsilon$, c'est à dire que $b \in \overline{SF}$.

Donc $S_0 \subset \overline{SF}$ et finalement, $\boxed{S_0 = \overline{SF}}$

• L'adhérence d'une partie d'un espace vectoriel normé étant toujours un fermé de cet espace, on en déduit que $S_0 = \overline{SF}$ est un fermé de SB.

2 - a) Soit $a = (a_n)_{n\geq 1} \in SB$ et $b = (b_n)_{n\geq 1} = \mu(a)$.

$$\forall n \in N^*,\ |b_n| = \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| = \frac{|a_1 + a_2 + ... + a_n|}{n} \leq \frac{nN^\infty(a)}{n} = N^\infty(a)$$

donc $\quad N^\infty(b) = \sup\limits_{n\geq 1} |b_n| \leq N^\infty(a)$

On a ainsi montré que $\ \forall a \in SB,\ N^\infty(\mu(a)) \leq N^\infty(a)$ c'est à dire que μ est liptschitzienne de rapport 1. Elle est donc continue et $|||\mu||| \leq 1$.

- Si on considère la suite constante $\ u = (1)_{n\geq 1}$, on voit immédiatement que $\ \mu(u) = u\ $ et donc que $N^\infty(\mu(u)) = N^\infty(u)$ ce qui montre que $\ |||\mu||| \geq 1$.

Finalement, $\boxed{|||\mu||| = 1}$

b) Soit $a \in SB$, invariante par μ : $(b_n) = \mu((a_n)) = (a_n)$

Montrons par récurrence sur n que a_n est constant :

pour $n = 1,\ b_1 = \dfrac{a_1}{1} = a_1$

pour $n = 2,\ b_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = a_2$ $\quad$ donc $\quad a_1 + a_2 = 2a_2$ $\quad$ et $\quad a_2 = a_1$

Supposons que jusqu'à l'ordre n, $a_k = a_1$

alors $\quad b_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{na_1 + a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1}$

donc $\quad na_1 + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$ $\quad$ et $\quad a_{n+1} = a_1$

On a ainsi montré par récurrence que $\ \forall n,\ a_n = a_1\ $ c'est à dire que (a_n) est une suite constante.

La réciproque est immédiate, si (a_n) est une suite constante, alors $\ \forall n,\ b_n = a_n\ $ et donc $\ \mu(a) = a$

En conclusion, $\boxed{a \in SB \text{ est invariante par } \mu \text{ si et seulement si } a \text{ est une suite constante.}}$

c) Soit $a \in SF$; $\exists n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n = 0$

Soit $b = (b_n) = \mu(a)$

alors, $\ \forall n \geq n_0,\ b_n = \dfrac{\overbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0}}^{constant} + 0 + ... + 0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $b = \mu(a) \in S_0$

d) Soit $a \in SCV$

$\forall n \in N^*,\ |a_n| \leq \underbrace{N^\infty(a)}_{independant\ de\ n}$

En passant à la limite dans cette inégalitè, $\ |\lim a_n| \leq N^\infty(a)$ $\quad$ soit aussi $\quad |\Lambda(a)| \leq N^\infty(a)$, ce qui montre que $\boxed{\Lambda \text{ est lipschitzienne de rapport 1 et donc continue.}}$

Ceci montre aussi que $|||\Lambda||| \leq 1$ et en considérant l'égalité obtenue pour une suite constante, que $\boxed{|||\Lambda||| = 1.}$

3 - a) Soit $a \in S_0$. D'après la question 1, a est adhérente à SF donc est limite d'une suite $(u^{(k)})_{k\in N^*}$ d'éléments de SF.

D'après la question 2 - c), pour tout k, $\mu(u^{(k)}) \in S_0$ et par continuité de μ, $\lim(\mu(u^{(k)})) = \mu(\lim u^{(k)}) = \mu(a)$

Mais puisque S_0 est fermé et que $\forall k,\ \mu(u^{(k)}) \in S_0$, on a $\lim(\mu(u^{(k)})) = \mu(a) \in S_0$

Donc $\boxed{\mu(a) \in S_0}$, ce qui signifie que $\mu(a)$ est une suite de limite nulle.

3 - b) Soit $u = (u_n)$ une suite convergente de limite $L \in \mathbb{C}$.

Soit $l = (l_n) = (L)_{n\geq 1}$ la suite constante de valeur L.

Alors $\lim l_n = L = \lim u_n$ et donc $l - u \in S_0$

D'après la question précédente, $\mu(l-u) \in S_0$, par linéarité, $\mu(l) - \mu(u) \in S_0$, d'après 2-a), $\mu(l) = l$

donc $\Lambda(\mu(u)) = \underbrace{\Lambda(l)}_{L} + \underbrace{\Lambda(\mu(u) - l)}_{0} = L$ ce qui signifie que $\boxed{\lim \mu(u) = L = \lim\ u}$

****

13 - * * Formes linéaires continues sur l^2 (dual topologique de l^2)

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge : $l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \text{ converge }\}$

1-a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

Montrer que l^2 est un espace vectoriel sur réel et que l'application $(u_n) \longrightarrow \|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ est une norme sur l^2.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n de troncature au rang n, qui à la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ fait correspondre la suite tronquée (v_k) telle que : $v_k = u_k$ si $k \leq n$ et $v_k = 0$ si $k > n$.

Montrer que T_n est une application linéaire de l^2 dans lui même, continue, et calculer sa norme subordonnée.

Montrer que pour toute suite $u \in l^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(u) = u$

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$. D'après 1-a) on sait que pour toute suite $u = (u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Montrer que l'application Φ_a qui à la suite u fait correspondre $\Phi_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est une forme linéaire sur l^2, continue, et calculer sa norme $|||\Phi_a|||$.

b) Réciproquement, soit Ψ une forme linéaire continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 0} \in l^2$ telle que $\Psi = \Phi_b$

(on pourra déterminer b_n en fonction de Ψ et des suites $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$ et justifier l'existence de

$M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n,\ \sum_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$ pour montrer la convergence de $\sum b_n^2$)

SOLUTION :

1-a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

• Soient (u_n) et (v_n) $\in l^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

alors $(u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$

$\{u_n^2\}$ et $\{v_n^2\}$ sont des séries convergentes par hypothèse et $\{u_n.v_n\}$ l'est aussi par ce qui précède, donc $\sum(u_n + \lambda v_n)^2$ converge et $(u_n) + \lambda(v_n) \in l^2$.

l^2, stable par addition et par multiplication par un scalaire, est un sous espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

• On montre sans difficulté que $\|\ \|_2$ est une norme sur l^2 (euclidienne).

b) T_n : $(u_k)_{k\geq 0} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p}, ...) \longrightarrow (v_k)_{k\geq 0} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_n, 0, 0, ..., 0, ...)$

La suite $(v_k)_{k\geq 0}$ étant à support fini, la série $\sum v_k^2$ converge (somme finie) et $(v_k) \in l^2$.

• T_n est linéaire (immédiat) , donc $T_n \in L(l^2)$.

$\forall (u_k) \in l^2$, $\|T_n(u)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 = \|u\|^2$

T_n est lipschitzienne de rapport 1, elle est donc continue et $|||T_n||| \leq 1$

En considérant la suite $\Delta_0 = (1, 0, 0, 0, ..., 0, ...)$, on obtient $||T_n(\Delta_0)|| = ||\Delta_0||$. Donc $\boxed{|||T_n||| = 1}$

• Soit $u \in l^2$. Pour tout entier n, $u - T_n(u) = (0,0,0,...,0,u_{n+1},...,u_{n+p},...)$

donc $\|u - T_n(u)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^2 = r_n$, reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n^2$

donc $\lim_{n\to+\infty} \|u - T_n(u)\|^2 = \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, ce qui montre que la suite $(T_n(u))_{n\geq 0}$ converge vers u dans l'espace vectoriel normé $(l^2, \| \|_2)$.

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$.

Pour toute suite $u = (u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge (question 1-a)),

et $|\Phi_a(u)| = | < a, u > | \leq \| a \| . \| u \|$, ce qui montre que Φ_a est lipschitziznnz de rapport $\| a \|$ donc est continue et $|||\Phi_a||| \leq \| a \|$

Par ailleurs, $|\Phi_a(a)| = | < a, a > | = \| a \|^2$, ce qui montre que $\boxed{|||\Phi_a||| = \| a \|}$

b) Soit Ψ une forme linéaire continue sur l^2.

• Analyse : Supposons qu'il existe une suite $(b_n) \in l^2$ telle que $\forall u \in l^2,\ \Psi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$.

Pour tout entier i notons $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$

Ainsi, $\Delta_0 = (1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_1 = (0,1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_2 = (0,0,1,0,...,0,...)$ etc...

Pour tout $i \in \mathbb{N}, \Psi(\Delta_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \delta_{i,n} = b_i$. Donc la suite (b_n) est unique et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \Psi(\Delta_n)$

• Synthèse : Soit donc la suite $b = (b_n)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \Psi(\Delta_n)$

Pour tout n, $\Psi(T_n(b)) = \Psi(b_0, b_1, ..., b_n, 0, 0..., 0...) = \Psi(b_0\Delta_0 + b_1\Delta_1 + ... + b_n\Delta_n$

$= b_0\Psi(\Delta_0) + b_1\Psi(\Delta_1) + ... + b_n\Psi(\Delta_n) = b_0^2 + b_1^2 + ... + b_n^2$

Or Ψ est continue, linéaire, donc lipschitzienne :

$\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \in l^2,\ |\Psi(u)| \leq \mu.\|u\|$

en particulier, pour tout n, $|\Psi(T_n(b))| \leq \mu.\|T_n(b)\|$ donc $\sum_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$

donc $\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2} \leq M$ d'où $\sum_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M^2$ et la série $\sum b_n^2$ dont les sommes partielles sont majorées, converge.

Donc $(b_n) \in l^2$.

• Enfin, $\forall u = (u_n) \in l^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Psi(T_n(u)) = \Psi\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \Delta_k\right) = \sum_{k=0}^{n} u_k \Psi(\Delta_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k b_k$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, $T_n(u) \longrightarrow u$ (question 1-b) et par contnuité de la forme linéaire Ψ, $\Psi(T_n(u)) \longrightarrow \Psi(u)$

Dans le second membre, puisque u et b appartiennent à l^2, d'après 1-a), la série $\sum b_n u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{n} u_k b_k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k b_k$

Donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, dans la dernière égalité, on obtient $\Psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k b_k$

Ce qui montre que $\Psi = \Phi_b$.

Finalement, $\boxed{\text{les formes linéaires continues sur } l^2 \text{ sont les applications de la forme } \Phi_a \text{ où } a \in l^2.}$

* *

14 - * Résolution approchée d'une équation par le théorème du point fixe :
. **(Hors programme depuis 2006)**

a) Montrer que le système $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{array}\right.$ admet une solution unique (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$.

b) Expliquer comment on peut obtenir une valeur approchée (a, b) de cette solution à 10^{-10} près et calculer une telle valeur approchée avec MAPLE.

SOLUTION **:**

a) Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la norme uniforme : $\| (a, b) \|^{\infty} = \max(|a|, |b|)$

Soit f l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \longrightarrow & (x'_1,x'_2) \end{array}$

tel que $\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x'_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{array} \right.$

• Montrons que f est lipschitzienne pour la norme $\| \ \|^\infty$

Soient $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(X) - f(Y) = \frac{1}{5}\Big(2\sin(x_1) - 2\sin(y_1) + \cos(x_2) - \cos(y_2)\ ,\ \cos(x_1) - \cos(y_1) + 3\sin(x_2) - 3\sin(y_2)\Big)$$
$$= (z_1, z_2)$$

$$z_1 = \frac{1}{5}\left(4\sin\frac{x_1-y_1}{2}\cos\frac{x_1+y_1}{2} - 2\sin\frac{x_2-y_2}{2}\sin\frac{x_2+y_2}{2}\right)$$

$|z_1| = \frac{1}{5}\left|4\sin\frac{x_1-y_1}{2}\cos\frac{x_1+y_1}{2} - 2\sin\frac{x_2-y_2}{2}\sin\frac{x_2+y_2}{2}\right| \leq \frac{1}{5}\left(4|\sin\frac{x_1-y_1}{2}|.|\cos\frac{x_1+y_1}{2}| - 2|\sin\frac{x_2-y_2}{2}|.|\sin\frac{x_2+y_2}{2}|\right)$

en utilisant la majoration $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$, on obtient :

$|z_1| \leq \frac{1}{5}\left(2|x_1-y_1| + |x_2-y_2|\right) \leq \frac{3}{5}\max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|) = \frac{3}{5}\|X-Y\|^\infty$

Un calcul analogue montre que $|z_2| \leq \frac{4}{5}\|X-Y\|^\infty$

Donc $\|f(X)-f(Y)\|^\infty = \max(|z_1|,|z_2|) \leq \frac{4}{5}\|X-Y\|^\infty$

La fonction f est lipschitzienne de rapport $\frac{4}{5} < 1$, elle est donc contractante.

• $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ étant complet, d'après le théorème du point fixe, on sait que f admet un unique point fixe W et que toute suite (X_n) définie par la donnée de son premier terme $X_0 \in \mathbb{R}^2$ et par la récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = f(X_n)$ converge vers cet unique point fixe W.

Etudions la vitesse de convergence de la suite X_n définie comme ci-dessus :

$\forall n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$,

$X_{n+p} - X_n = X_{n+p} - X_{n+p-1} + X_{n+p-1} - X_{n+p-2} + ... + X_{n+2} - X_{n+1} + X_{n+1} - X_n$

par l'inégalité triangulaire,

$\|X_{n+p} - X_n\| \leq \|X_{n+p} - X_{n+p-1}\| + \|X_{n+p-1} - X_{n+p-2}\| + ... + \|X_{n+2} - X_{n+1}\| + \|X_{n+1} - X_n\|$

or pour tout k, $\quad \|X_{k+1} - X_k\| = \|f(X_k) - f(X_{k-1})\| \leq \mu.\|X_k - X_{k-1}\|$

et par recurrence immédiate, $\quad \|X_{k+1} - X_k\| \leq \mu^k\|X_1 - X_0\|$

d'où $\quad \|X_{n+p} - X_n\| \leq (\mu^{n+p-1} + \mu^{n+p-2} + ... + \mu^n)\|X_1 - X_0\| = \mu^n\dfrac{1-\mu^p}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$

$$\Longrightarrow \quad \|X_{n+p} - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$$

A n fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|W - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\|$$

Le passage de X_n à X_{n+1} multiplie l'erreur $\|W - X_n\|$ du facteur $\mu = \frac{4}{5} = 0,8$, ce qui est peu rapide.

En supposant que $\|X_1 - X_0\| = 1$ et puisque $\mu = \frac{4}{5}$, $\|W - X_n\| \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}.\|X_1 - X_0\| = 5\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$$5\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10^{-10} \iff \ln(5) + n(\ln 4 - \ln 5) \leq -10\ln 10$$
$$\iff \ln(5) + 10\ln 10 \leq n(\ln 5 - \ln 4)$$
$$\iff \frac{\ln(5) + 10\ln 10}{\ln 5 - \ln 4} \leq n$$

Il suffit que $n \geq 111$ pour que cette condition soit vérifiée.

Programme MAPLE :

```
Digits:=50; x[0]:=1.0; y[0]:=1.0; n:=120;
for k from 0 to n do x[k+1]:=(2*sin(x[k])+cos(y[k]))/5;
                     y[k+1]:=(cos(x[k])+3*sin(y[k]))/5;   od;
```

Contrôle de la précision :

```
for j from n-10 to n do ecart[j]:=x[j]-x[j+1] od;
```

IV - Complétude - Compacité - Convexité

15 - Ouverts et compacts dans $M_n(\mathbb{R})$

Les ensembles $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont ils des parties ouvertes, fermées, compactes de $M_n(\mathbb{R})$?

***SOLUTION* :**

a) L'application déterminant est une application continue, car polynomiale en les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice.

$\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\boxed{GL_n(\mathbb{R})}$ $= \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, $\boxed{\text{est un ouvert de } M_n(\mathbb{R}).}$

Chaque matrice $\lambda.I_n$, avec λ aussi grand qu'on veut, est élément de $GL_n(\mathbb{R})$ qui n'est donc pas une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$, ni compacte.

b) $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et toutes les normes définies sur $M_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Prenons la norme uniforme : $\|A\|^\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$

• Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Ses colonnes forment un système orthonormal de $\mathbb{R}^n$. En particulier, la $j^{\text{ème}}$ colonne a pour norme au carré $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ et donc pour tout couple (i,j), $\quad a_{i,j}^2 \leq 1 \quad$ et $\quad |a_{i,j}| \leq 1$

donc $\|A\|^\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}| \leq 1$ et $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit (A_k) une suite de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$ vers une matrice limte B.

Chaque A_k étant orthogonale, ${}^tA_k.A_k = I_n$

Le produit de matrices : $(M, N) \longrightarrow M.N$ est continue car bilinéaire.

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : ${}^tB.B = I_n$ donc B est une matrice orthogonale.

Ainsi toute suite convergente d'éléments de $O_n(\mathbb{R})$ a sa limite dans $O_n(\mathbb{R})$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

Finalement, $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ , partie fermée et bornée de } M_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact.}}$

* *

16 - * Espace complet ou non suivant la norme

Soit $E = C([a,b], \mathbb{C})$, l'espace des fonctions complexes continues sur $[a,b]$.

1- Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$ est complet pour la norme de la convergence uniforme $\| \;\; \|^\infty$

2- Montrer que $C([a,b], \mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme convergence en moyenne $\| \;\; \|^1$

SOLUTION :

1- Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $C([a,b], \mathbb{C})$ de Cauchy pour la norme$\| \;\; \|^\infty$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

puisque $\forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty$, on en déduit que pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge. Soit $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

• Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

alors pour tout $x \in I, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^\infty < \varepsilon$

pour $x \in I$ fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$\forall x \in I, \forall n \geq n_0, \; |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

pour chaque $n \geq n_0$, cette inégalité étant vraie pour tout $x \in I$, $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - g(x)| = \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \| f_n - g \|^\infty < \varepsilon$, c-a-d que $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|^\infty = 0$

• Puisque chaque fonction f_n est continue et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers g, la limite g est continue ; $g \in C([a,b], \mathbb{C})$. Donc g est limite de (f_n) dans l'espace vectoriel $\Big(C([a,b], \mathbb{C}), \| \;\; \|^\infty\Big)$ et celui-ci est complet.

2- Pour simplifier, traitons le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

• Pour tout $n \geq 4$, soit f_n la fonction définie par : $\begin{cases} \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], & f_n(x) = 0 \\ \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, & f_n(x) = \frac{n(2x-1)}{2} \\ \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, & f_n(x) = 1 \end{cases}$

chaque f_n est continue (et affine par morceaux) donc appartient à E.

Pour tous entiers n, p tels que $4 \leq n \leq p$,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)|dt = \int_0^{1/2} \underbrace{|f_n - f_p|}_{=0} + \int_{1/2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \underbrace{|f_n - f_p|}_{\leq 1} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n - f_p|}_{\leq 1} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f_n - f_p|}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)|dt \leq \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}$$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, il existe n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$

alors $\quad \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \; \| f_n - f_p \|^1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)|dt \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

ce qui montre que la suite (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\| \;\; \|^1$.

• Cette suite converge-t-elle dans E ?

Si oui, notons g sa limite : $g \in E$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|_1 = 0$

Or $\int_0^{1/2} |f_n(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} | \underbrace{f_n(t)}_{0\ sur\ [0,\frac{1}{2}]} - g(t)|dt = 0$

d'où $\displaystyle\int_0^{1/2} |g(t)|dt = 0$ et g étant continue sur $[0, 1/2]$, $\forall t \in [0, 1/2]$, $g(t) = 0$

De manière analogue, pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |f_n(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1$ donc en prenant n assez grand pour que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2} + \alpha$ et que $f_n(t)$ vaille 1 sur le segment $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$, on a

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |1 - g(t)|dt \leq \| f_n - g \|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 |1 - g(t)|dt = 0$ et la fonction $1 - g$ étant continue, elle est identiquement nulle sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en conclut que : $\begin{cases} \forall t \in [0, \frac{1}{2}], & g(t) = 0 \\ \text{et } \forall t \in]\frac{1}{2}, 1], & g(t) = 1 \end{cases}$, ce qui est incompatible avec la continuité de g au point $1/2$.

Donc la suite de Cauchy (f_n) n'a pas de limite dans E, et E n'est pas complet pour la norme $\| \ \ \|_1$

****

17 - Espaces des fonctions bornées, continues, polynomiales

On note $B(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes bornées sur l'intervalle I.

L'applicaton $f \longrightarrow \| f \|^{\infty} = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$ est une norme sur cet espace.

On note $C(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I et $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^k sur l'intervalle I

1- Montrer que $\Big(B(I, \mathbb{C}), \| \ \ \|^{\infty}\Big)$ est un espace complet.

2- a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Montrer que $C([a, b], \mathbb{C})$, espace des fonctions continues sur $[a, b]$ est complet.

Montrer que $C([a, b], \mathbb{C})$ est un sous espace fermé de $B(I, \mathbb{C})$

3- Déterminer l'adhérence dans $\Big(C([a, b], \mathbb{C}), \| \ \ \|^{\infty}\Big)$ de $\mathbb{R}[X]$, espace des fonctions polynomiales sur le segment $[a, b]$.

SOLUTION **:**

1- Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\Big(B(I, \mathbb{C}), \| \ \ \|^{\infty}\Big)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^{\infty} < \varepsilon$

puisque $\forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^{\infty}$, on en déduit que pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge. Soit $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

• Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \| f_n - f_p \|^{\infty} < \varepsilon$

alors pour tout $x \in I, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \| f_n - f_p \|^{\infty} < \varepsilon$

pour $x \in I$ fixé, passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$\forall x \in I, \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

pour chaque $n \geq n_0$, cette inégalité étant vraie pour tout $x \in I$, $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - g(x)| = \| f_n - g \|^{\infty} < \varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \| f_n - g \|^{\infty} < \varepsilon$, c-a-d que $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|^{\infty} = 0$

• Il s'ensuit que g est bornée : Prenons $\varepsilon = 1$ et n_0 tel que $\| f_{n_0} - g \|^{\infty} < \varepsilon = 1$

alors $\forall x \in I, |g(x)| = |g(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq \underbrace{|g(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leq \| f_{n_0} - g \|^{\infty} < 1} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq \| f_{n_0} \|^{\infty}} \leq \| f_{n_0} \|^{\infty} + 1$

donc $g \in B(I, \mathbb{C})$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - g \|^{\infty} = 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge dans l'espace vectoriel normé $\Big(B(I, \mathbb{C}), \| \ \ \|^{\infty}\Big)$ vers la fonction g.

Toute suite de Cauchy étant convergente, l'e.v.n. $\Big(B(I, \mathbb{C}), \| \ \ \|^{\infty}\Big)$ est complet.

2 - $C([a, b], \mathbb{C})$ est un sous espace de $B(I, \mathbb{C})$ car toute fonction continue sur un compact (le segment $[a, b]$) est bornée.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\Big(C([a,b],\mathbb{C}), \|\ \ \|^\infty\Big)$. On a vu qu'elle convergeait vers une fonction g bornée sur $[a,b]$.

Puisque chaque fonction f_n est continue et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers g, la limite g est continue ; $g \in C([a,b]$. Donc g est limite de (f_n) dans l'espace vectoriel $\Big(C([a,b],\mathbb{C}), \|\ \ \|^\infty\Big)$ et celui-ci est complet.

$C([a,b],\mathbb{C})$ étant complet, c'est un sous espace fermé de $\Big(B(I,\mathbb{C}), \|\ \ \|^\infty\Big)$.

3- Soit $f \in C([a,b],\mathbb{C})$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f : $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|^\infty = 0$

Donc $f \in \overline{\mathbb{R}[X]}$ et $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$

* *

18 - * Enveloppe convexe et théorème de Gauss-Lucas

Une partie X d'un espace vectoriel normé E est dite convexe si $\forall (M,N) \in X^2,\ [M,N] \subset X$, c'est à dire si

$$\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0, \text{ tel que } \alpha+\beta \neq 0,\ \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha+\beta} \in X$$

1- a) A étant une partie quelconque de E montrer qu'il existe un plus petit sous ensemble convexe de E contenant A. Celui-ci est appelé **enveloppe convexe de** A. On le notera $\text{Conv}(A)$.

b) Si A est l'ensemble fini $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$, montrer que $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

2- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe de racines $x_1, x_2, ..., x_n$ distinctes ou non dans $\mathbb{C}$.

Montrer que les racines du polynôme dérivé $P'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Solution :

1-a) Notons Z_A l'ensemble des parties convexes de E contenant A. Z_A n'est pas vide car $E \in Z_A$.

Soit $B = \bigcap\limits_{X\in Z_A} X$ l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A

B est convexe car l'intersection de parties convexes est convexe (justifier...)

B contient A car chacun des $X \in Z_A$ dont on prend l'intersection contient A.

enfin, si C est une partie convexe de E contenant A, C fait partie de ces ensembles $X \in Z_A$ dont on prend l'intersection pour former B, donc $B \subset C$.

Donc B est une partie convexe de E, qui contient A, et c'est la plus petite. $\text{Conv}(A) = \bigcap\limits_{X\in Z_A} X$

b) Soit B l'ensemble des barycentres des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

• Soient P et $Q \in B$. Montrons que $[P,Q] \subset B$.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $P = \dfrac{\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p}$ et

$\exists (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $Q = \dfrac{\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_p}$

quitte à diviser chaque α_i par $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p$, on peut supposer que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p = 1$, même chose pour les β_i

alors $P = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p$ et $Q = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p$

Tout point $N \in [P,Q]$ est barycentre de P et Q affectés de coefficients positifs a et b : $N = aP+bQ,\ a+b=1$

alors $N = a(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + ... + \alpha_p M_p) + b(\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + ... + \beta_p M_p)$

$= (a\alpha_1 + b\beta_1)M_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)M_2 + (a\alpha_p + b\beta_p)M_p$

$(a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) + ... + (a\alpha_p + b\beta_p) = a\alpha_1 + a\alpha_2 + ... + a\alpha_p + b\beta_1 + b\beta_2 + ... + b\beta_p$

$= a\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p)}_{=1} + b\underbrace{(\beta_1+\beta_2+...+\beta_p)}_{=1} = a+b = 1$

donc $N = (a\alpha_1 + b\beta_1)M_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)M_2 + (a\alpha_p + b\beta_p)M_p$ est barycentre des points $M_1, M_2, ..., M_p$ affectés de coefficients ≥ 0.

B est donc une partie convexe de E.

• B contient $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$, car M_1 est barycentre de $(M_1, M_2, ..., M_p)$ affectès des coefficients respectifs $(1, 0, ..., 0)$

• Enfin toute partie convexe de E contenant $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$ contient les barycentres de $M_1, M_2, ..., M_p$ à coefficients ≥ 0 donc contient B.

Donc B est bien la plus petite partie convexe de E contenant $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$: $B = \text{Conv}(A)$

2- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1, x_2, ..., x_n$ et notons $x_1, x_2, ..., x_n$ les affixes respectives de ces racines.

• Si x_i est racine multiple de P, c'est aussi une racine de P' qui appartient donc à l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$. Par dérivation d'un produit de n termes, $P'(X) = \lambda \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1...n}^{j\neq i}(X - x_j)\right)$.

Donc $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X - x_i}$

• Soit y une racine simple quelconque de P', d'affixe N. Alors $P(y) \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y - x_i} = \dfrac{P'(y)}{P(y)} = 0$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{y} - \overline{x_i}} = 0$ (en prenant le conjugué)

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{y - x_i}{(\overline{y} - \overline{x_i})(y - x_i)} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\overline{y} - \overline{x_i})(y - x_i)}\overrightarrow{M_iN} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{|y - x_i|^2}}_{>0}\overrightarrow{M_iN} = \overrightarrow{0}$$

Donc N est barycentre des points $M_1, M_2, ..., M_n$ affectés de coefficients positifs et appartient donc à l'enveloppe convexe de ces points.

****

19 - ** Sous espace de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie m de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) Montrer qu'il existe une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ de F et une suite finie $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de réels deux à deux distincts tels que

$g_1(a_1) \neq 0$
$g_2(a_1) = 0$ et $g_2(a_2) \neq 0$
$g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0$ et $g_3(a_3) \neq 0$
. . . .
$g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0$ et $g_m(a_m) \neq 0$

En déduire que si une suite (h_n) d'éléments de F converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, alors $H \in F$ et (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé F.

b) On suppose de plus que le sous espace F est stable par translation, c'est à dire que pour toute fonction f de F, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x + a)$ appartient encore à F.

b1) Montrer que $\forall f \in F, f' \in F$.

En déduire que $F \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b2) Montrer que toute fonction $f \in F$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E_f) linéaire, d'ordre $\leq m$, à coefficients constants.

b3)) Montrer qu'il existe une équation différentielle (EE) linéaire, d'ordre m , à coefficients constants, dont toute fonction de F est solution.

c) Donner un exemple d'un tel espace F pour $m = 1$ et $m = 2$, avec D inversible.

Solution :

a) Soit P_m la propriété : " Tout sous espace vectoriel F_m de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie m admet une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ pour laquelle il existe des réels $(a_1, a_2, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ .... \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases} \quad "$$

• Pour $m = 1$, soit F_1 un sous espace vectoriel de dimension 1 de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g une fonction non nulle de F_1 (il en existe car $F_1 \neq \{0\}$). g étant non nulle, il existe un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

La proposition P_1 est donc vérifiée.

• Supposons que la propriété P_{m-1} est vérifiée.

Soit F_m un sous espace vectoriel de dimension m de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g_1 une fonction non nulle de F_m et un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

L'application $\varphi : h \to h(a_1)$ est une forme linéaire sur F_m, non nulle car $\varphi(g_1) = g_1(a_1) \neq 0$.

Son noyau H est un hyperplan de F_m, c'est à dire un sous espace de F_m de dimension $m - 1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à H, il existe une base $(g_2, g_3, ..., g_m)$ de H et des réels $(a_2, a_3, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdot \\ g_m(a_2) = g_m(a_3) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Aucun des $a_i, i \geq 2$, n'est égal à a_1 car $(g_2, g_3, ..., g_m)$, éléments de $H = \ker \varphi$, sont tous nuls en a_1, alors que $g_2(a_2) \neq 0, g_3(a_3) \neq 0, ..., g_m(a_m) \neq 0$

Finalement, les fonctions $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ de F_m vérifient : $\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdot \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$

$(g_2, g_3, ..., g_m)$ est un système libre car c'est une base de H.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ est libre aussi, sinon g_1 serait combainaison linéaire de $(g_2, g_3, ..., g_m)$, ce qui n'est pas possible car $(g_2, g_3, ..., g_m)$ s'annulent en a_1 et g_1 ne s'y annule pas.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, système libre de m élémenst de l'espace F_m de dimension m, est une base de F_m.

• Soit $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(g_1, g_2, ..., g_m)$ une base de F et $(a_1, a_2, ..., a_m)$ des réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdot \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Chaque h_n, élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{m,n}) \in \mathbb{R}^m$ tels que $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$

donc $\quad h_n(a_1) = \lambda_{1,n}\underbrace{g_1(a_1)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n}\underbrace{g_2(a_1)}_{=0} + ... + \lambda_{m,n}\underbrace{g_m(a_1)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,n} = -\dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)} = \underbrace{\dfrac{-1}{g_1(a_1)}}_{\mu_{1,1}} h_n(a_1)$

de même, $\quad h_n(a_2) = \lambda_{1,n}\underbrace{g_1(a_2)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n}\underbrace{g_2(a_2)}_{\neq 0} + ... + \lambda_{m,n}\underbrace{g_m(a_2)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \lambda_{1,n}g_1(a_2)}{g_2(a_2)}$

$\Rightarrow \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)}g_1(a_2)}{g_2(a_2)} = \mu_{2,1}h_n(a_1) + \mu_{2,2}h_n(a_2) \quad$ ($\mu_{2,1}$ et $\mu_{2,2}$ ctes réelles indépendantes de n)

... et plus généralement, $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{k,n}$ ayant été déterminés, $\lambda_{k,n} = \dfrac{h_n(a_k) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n}g_i(a_k)}{g_k(a_k)}$

et en remplaçant les $\lambda_{i,n}$ déja calculés comme combinaisons linéaires de $h_n(a_1), h_n(a_2), ..., h_n(a_{k-1})$,

$\lambda_{k,n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}h_n(a_i)$, les $\mu_{k,i}, i = 1...k$ étant des constantes réelles indépendantes de n.

Par hypothèse de convergence simple de la suite de fonctions (h_n), pour tout $i = 1...m$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(a_i) = H(a_i)$,

donc pour tout k, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}h_n(a_i)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{k,i}h_n(a_i)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}H(a_i)$

Notons $\Lambda_k = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k,n}$

L'égalité $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$ entraîne que pour tout x réel,

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{1,n}g_1(x) + \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{2,n}g_2(x) + ... + \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{m,n}g_m(x) = \Lambda_1 g_1(x) + \Lambda_2 g_2(x) + ... + \Lambda_m g_m(x)$

Donc $H = \Lambda_1 g_1 + \Lambda_2 g_2 + ... + \Lambda_m g_m$, ce qui montre que H, s'écrivant comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de F, appartient à F.

Enfin, le calcul de la limite de la limite de $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$ s'effectuant composante par composante dans la base $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, la suite (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé de dimension fnie F. (peu importe le choix de la norme sur F puisq'il est de dimension finie)

b1) Soit $f \in F$.

• F étant stable par translation, pour tout entier n, la fonction $f_n \ : \ x \longrightarrow \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ appartient encore à F.

Or pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f'(x)$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f'.

On en déduit d'après la question précédente que $f' \in F$.

• Soit $f \in F$. Alors $f' \in F$. Donc f' est C^1 et f est C^2. Par récurrence immédiate, f est dérivable à tout ordre, donc est C^∞.

b2) Soit $f \in F$. On vient de montrer que F est stable par dérivation. Donc les fonctions $f, f', f", f^{(3)}, ..., f^{(m)}$ sont dans F. Elles forment un système de $m+1$ vecteurs dans un espace de dimension m. Ce système est donc lié.

Donc il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ (dépendants à priori de f) tels que $\alpha_0 f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f" + ... + \alpha_m f^{(m)} = 0$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_f) : $\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y" + ... + \alpha_m y^{(m)} = 0$.

C'est bien une équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre $\leq m$ (α_m ou d'autres coefficients peuvent être nuls)

b3) Notons D l'endomorphisme de dérivation de F.

Soit χ_D son polynôme caractéristique : $\chi_D(X) = \beta_m X^m + ... + \beta_1 X + \beta_0$

C'est un polynôme annulateur de D. Donc $\beta_m D^m + ... + \beta_1 D + \beta_0 Id_F = 0$

Donc $\forall f \in F, \quad \beta_m D^m(f) + ... + \beta_1 D(f) + \beta_0 f = 0_F$

Toute fonction$f$ de F est donc solution de l'équation différentielle (EE) : $\beta_m y^m + ... + \beta_2 y" + \beta_1 y' + \beta_0 y = 0$