Equations différentielles

---

1 Equations du premier ordre :

1.1 Equation 1 :

Résoudre l'équation différentielle $(E)\,:\ x^2y' + (x-1)y = 0$

Quel est la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

SOLUTION :

• Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, la solution générale de (E) a pour forme :

$$y(x) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}dt\right) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1-t}{t^2}dt\right) = \lambda' e^{-\frac{1}{x}-\ln x} = \lambda' \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

• Soit f une solution de (E) définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

alors, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_1,\ f(x) = \lambda_1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_2,\ f(x) = \lambda_2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc est continue en 0.

$\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^-} \lambda_1 \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \infty$ si $\lambda_1 \neq 0$, donc il faut que $\lambda_1 = 0$ pour que f ait une limite fine à gauche en 0.

Par contre quelque soit $\lambda_2 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} \lambda_2 \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$

• Réciproquement on vérifie que quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f définie par :

$\begin{cases} \forall x \leq 0,\ f(x) = 0 \\ \forall x >,\ f(x) = \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \end{cases}$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de (E).

La fonction g définie par :

$\begin{cases} \forall x \leq 0,\ f(x) = 0 \\ \forall x >,\ f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \end{cases}$ est une base de l'espace vectoriel est solutions de (E) sur $\mathbb{R}$

et $\boxed{\text{cet espace est de dimension 1.}}$

1.2 Equation 2 :

Résoudre l'équation différentielle $(E)\,:\ x^3y' - 2y = 0$

Quel est la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

SOLUTION :

• Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, la solution générale de (E) a pour forme :

$$y(x) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}dt\right) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2}{t^3}dt\right) = \lambda' e^{-\frac{1}{x^2}}$$

• Soit f une solution de (E) définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

alors, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_1,\ f(x) = \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_2,\ f(x) = \lambda_2 e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

f étant continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier au point 0, nécessairement, $f(0) = 0$

Réciproquement, on vérifie que la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in I_1,\ f(x) = \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f(0) = 0 \\ \forall x \in I_2,\ f(x) = \lambda_2 e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$$ est continue et dérivable en 0, et est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

En définissant les fonctions f_1 et f_2 par :
$$\begin{cases} \forall x < 0,\ f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \\ \forall x \geq 0,\ f_1(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \leq 0,\ f_2(x) = 0 \\ \forall x > 0,\ f_2(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases},$$
ces fonctions sont C_1 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞)

Toute fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$

(f_1, f_2) est un système libre (vérification sans difficulté), c'est donc une base de l'espace des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{L'espace vectoriel des solution de } (E) \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ est de dimension } 2\ .}$

1.3 Equation 3 : variation de la constante :

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 2xy' + y = \dfrac{1}{1+x}$

SOLUTION :

Soit (E_0) l'équation différentielle homogène asssociée : $2xy' + y = 0$

• Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, la solution générale de (E_0) a pour forme :
$$y(x) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt\right) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2t} dt\right) = \lambda' e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} = \frac{\lambda'}{\sqrt{|x|}}$$

• La fonction $y_0\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_0) sur $I_k, k = 1, 2$

Recherchons une solution de l'équation complète (E) sur I_k de la forme $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ où $\lambda(x)$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_k

$\forall x \in I_k, y'(x) = \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x)$

y est solution de (E) sur I_k si et seulement si,
$$\forall x \in I_k,\ 2xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ 2x(\lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x)) + \lambda(x) y_0(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ 2x\lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x)(\underbrace{2xy_0'(x) + y_0(x)}_{=0}) = \frac{1}{1+x}$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ 2x\lambda'(x) y_0(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2x(1+x) y_0(x)}$$

• Sur $I_2 =]0, +\infty[$, $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2x(1+x) y_0(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
$$\lambda(x) = \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)} dt + cte = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{2u(1+u^2)} 2udu + cte$$
$$\lambda(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x}) + cte \qquad \text{(par le changement de variable } t = u^2)$$

Donc une solution particulière de (E) sur $I_2 =]0, +\infty[$ est : $y_2(x) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

et $\boxed{\begin{array}{l} \text{la solution générale de } (E) \text{ sur } I_2 =]0, +\infty[\text{ est :} \\ \quad y(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel quelconque} \end{array}}$

• Sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2x(1+x) y_0(x)} = \dfrac{\sqrt{-x}}{2x(1+x)} = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}(1+x)}$
$$\lambda(x) = \int_{-1}^{x} \frac{-1}{2(1+t)\sqrt{-t}} dt + cte = \int_{-1}^{\sqrt{-x}} \frac{1}{2u(1-u^2)} 2udu + cte$$
(par le changement de variable $t = -u^2$)
$$\lambda(x) = \int_{-1}^{\sqrt{-x}} \frac{1}{(1-u^2)} du + cte = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\sqrt{-x}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du + cte$$

$$\lambda(x)=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_{-1}^{\sqrt{-x}}+cte=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|$$

Donc une solution particulière de (E) sur $I_1=]-\infty,0[$ est : $y_1(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|$

et

la solution générale de (E) sur $I_1=]-\infty,0[$ est : $y(x)=\dfrac{\lambda}{\sqrt{-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|$ où λ est un réel quelconque

1.4 Equation 4 : variation de la constante

Résoudre l'équation différentielle (E) : $\qquad x^2\,y'-(x+1)y=\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{1}{x}}$

SOLUTION :

1- L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre .

La fonction $a : x\mapsto x^2$ est continue et ne s'annule pas sur $I_1=]-\infty,0[$ et sur $I_2=]0,+\infty[$

Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E) : $x^2\,y'-(x+1)y==0$

La solution générale de (E_0) est de la forme $y_0(x)=\lambda e^{\int_a^x\frac{t+1}{t^2}dt}=\lambda e^{\ln(|x|)-\frac{1}{x}}=\lambda|x|\,e^{-\frac{1}{x}}$

Sur I_1 comme sur I_2, la fonctions $x\mapsto|x|$ ayant un signe constant, quitte à changer la constante λ en $-\lambda$ sur I_1, on peut affirmer que :

La solution générale de (E_0) sur I_1 et sur I_2 est de la forme $y_0(x)=\lambda x\,e^{-\frac{1}{x}}$ où λ est une constante réelle quelconque.

2 - Notons désormais $y_0(x)=x\,e^{-\frac{1}{x}}$

On applique la méthode de variation de la constante : on recherche une solution de la forme $y(x)=\lambda(x)y_0(x)$ où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_k

$\forall x\in I_k,\ y'(x)=\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)y_0'(x)$

y est solution de (E) sur I_k si et seulement si $\quad\forall x\in I_k,\ x^2\,y'-(x+1)y=\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{1}{x}}$

$$\iff\forall x\in I_k,\ x^2\lambda'(x)y_0(x)+\underbrace{x^2\lambda(x)y_0'(x)+(x+1)\lambda(x)y_0(x)}_{\lambda(x)(x^2\,y_0'(x)+(x+1)y_0(x))=0}=\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\iff\forall x\in I_k,\ x^2\lambda'(x)y_0(x)=\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\iff\forall x\in I_k,\ \lambda'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$$

ainsi, $\lambda(x)=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx$

Faisons le changement de variable $x=\tan(u)$ avec $u\in]-\frac{\pi}{2},0[$ si x décrit $I_1=]-\infty,0[$ et $u\in]0,\frac{\pi}{2}[$ si x décrit $I_2=]0,+\infty[$

$$dx=(1+\tan^2(u))du=\frac{du}{\cos^2 u}$$

$$\lambda(x)=\int\frac{\sqrt{\tan^2+1}}{\tan^3(u)}(1+\tan^2(u))du=\int\frac{du}{|\cos(u)|\cos^2(u)\tan^3(u)}=\int\frac{du}{\sin^3(u)}$$

(car dans les deux cas, $\cos(u)$ est positif, puisque $u\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$)

Le changement de u en $-u$ laisse l'élément différentiel $\dfrac{du}{\sin^3(u)}$ inchangé, on effectuera le changement de variable $t=\cos(u)$ conformément aux règles de Bioche.

Dans les deux cas, t décrit $]0,1[$

$$\lambda(x)=\int\frac{du}{\sin^3(u)}=\int\frac{\sin(u)du}{\sin^4(u)}=\int\frac{\sin(u)du}{(1-\cos^2(u))^2}=-\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\frac{1}{(X^2-1)^2}=\frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}$$

en multipliant par $(X-1)^2$ et en remplaçant X par 1, on obtient $b=\frac{1}{4}$

en multipliant par $(X+1)^2$ et en remplaçant X par -1, on obtient $d=\frac{1}{4}$

en remplaçant X par 0, on obtient $1=-a+b+c+d$

en multipliant par X et en passant à la limite en $+\infty$, on obtient $0=a+c$

donc $a=-c$ et $1=2c+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Finalement, $-a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}\right)$$

$$\lambda(x) = -\int \frac{dt}{(t^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1| + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-t}{1+t} + \frac{2t}{t^2-1}\right)$$

Revenons à la variable x : $t = \cos(u)$ et $x = \tan(u)$

donc $\dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{\cos^2(u)} = \tan^2(u) + 1 = x^2 + 1$

Puisque $t = \cos(u)$ est positif, $t = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lambda(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-t}{1+t} + \frac{2t}{t^2-1}\right) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} + \frac{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x^2+1}-1}\right)$$

$$\boxed{\lambda(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2}\right)}$$

Une solution particulière de (E) est :

$$y_1(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2}\right)x\, e^{-\frac{1}{x}}$$

La solution générale de (E) sur l'intervalle I_1 ou I_2 est :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = y_1(x) + \mu y_0(x) = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2}\right)x\, e^{-\frac{1}{x}} + \mu x\, e^{-\frac{1}{x}} \\ \text{où } \mu \text{ est une constante réelle quelconque.}\end{array}}$$

1.5 Equation 5 : Recollement :

Résoudre l'équation différentielle (E) : $\quad |x|y' + y = x\sin(x)$

Rechercher les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION :

1- L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre .

La fonction $a : x \mapsto |x|$ est continue et ne s'annule pas sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$

Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E) : $|x|y' + y = 0$

La solution générale de (E_0) sur I_1 ou sur I_2 est de la forme $y_0(x) = \lambda e^{-\int_a^x \frac{1}{|t|}dt}$

Sur l'intervalle I_1, $y_0(x) = \lambda e^{\int_a^x \frac{1}{t}dt} = \lambda e^{\ln(x)-\ln(a)} = \lambda\,\dfrac{x}{a} = \mu\, x \quad \mu \in \mathbb{R}$

Sur l'intervalle I_2, $y_0(x) = \lambda e^{-\int_a^x \frac{1}{t}dt} = \lambda e^{-\ln(x)+\ln(a)} = \lambda\,\dfrac{a}{x} = \dfrac{\mu}{x} \quad \mu \in \mathbb{R}$

A part la fonction nulle, l'équation E_0 n'a pas de solution définie sur $\mathbb{R}$.

2 - Résolution de l'équation complète sur I_1

On applique la méthode de variation de la constante : on recherche une solution de la forme $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$

$y'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$

$|x|y' + y = x\sin(x)$

$\iff |x|(\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)) + \lambda(x)y_0(x) = x\sin(x)$

$\iff |x|\lambda'(x)y_0(x) = x\sin(x)$

$\iff \lambda'(x) = \dfrac{x\sin(x)}{|x|y_0(x)}$

• Sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$,

$\iff \lambda'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x}$

$\iff \lambda(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt + \text{ cte} = -\text{ Si}(x) + \text{ cte.}$

$\iff y(x) = -x\,\text{Si}(x) + c_1 x$

La solution générale de (E) sur l'intervalle I_1 :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = -x\,\text{Si}(x) + c_1 x \\ \text{où } c_1 \text{ est une constante réelle quelconque.}\end{array}}$$

• Sur l'intervalle $I_2 =]0,+\infty[$, $\lambda'(x) = \dfrac{x\sin(x)}{|x|y_0(x)} = x\sin(x)$

$$\lambda(x) = \int_0^x t\ \sin(t)dt + \text{ cte} = -x\cos(x) + \int_0^x \cos(t)dt + \text{ cte} = -x\cos(x) + \sin(x) + \text{ cte}$$

$$y(x) = \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{-x\cos(x)+\sin(x)+c_2}{x} = -\cos(x) + \frac{\sin(x)+c_2}{x}$$

La solution générale de (E) sur l'intervalle I_2 :

$$\boxed{y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x)+c_2}{x} \quad \text{où } c_2 \text{ est une constante réelle quelconque.}}$$

3- Soit f une fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

f est solution de (E) sur $I_1 =]-\infty,0[$, donc il existe $c_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I_1,\ f(x) = -x\ \mathrm{Si}(x) + c_1 x$

f est solution de (E) sur $I_2 =]0,+\infty[$, donc il existe $c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I_2,\ f(x) = -\cos(x) + \dfrac{\sin(x)+c_2}{x}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc est continue en 0. $f(x) = -x\ \mathrm{Si}(x) + c_1 x$ doit avoir une limite finie quand $x \overset{<}{\to} 0$. Cela n'impose aucune condition sur c_1, et dans tous les cas, cette limite est 0.

$f(x) = -\cos(x) + \dfrac{\sin(x)+c_2}{x}$ doit avoir une limite finie quand $x \overset{>}{\to} 0$. Donc $c_2 = 0$.

Et alors, cette limite vaut $-1+1=0$.

La fonction f est donc continue en 0 si et seulement si $c_2 = 0$.

$f'(x) = -\mathrm{Si}(x) - \sin(x) + c_1$ doit avoir une limite finie quand $x \overset{<}{\to} 0$. Cela n'impose aucune condition sur c_1, et dans tous les cas, cette limite vaut c_1. Donc $f'_g(0) = c_1$

$f'(x) = \sin(x) + \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ doit avoir une limite finie quand $x \overset{>}{\to} 0$.

or $$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2}$$
$$= \frac{(-\frac{x^3}{2}+o(x^3)) - (-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2} = \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^2} = -\frac{x}{3}+o(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

donc $f'_d(0) = 0$

f est dérivable en 0 si et seulement si $c_1 = 0$

En conclusion , seule la fonction définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = -x\ \mathrm{Si}(x) \\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = -\cos(x) + \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$
est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.6 Equation à coefficients périodiques :

Soit f une fonction de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, périodique de période $T>0$ et (E) l'équation différentielle : $y'-y=f$

1- Montrer que (E) admet une unique solution qui soit bornée sur $\mathbb{R}$

2- On note g cette solution . Montrer que g est périodique .

SOLUTION :

1- La solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est : $y(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Recherchons les solutions de (E) par la méthode de variationde la constante, c'est à dire sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ est une fonction de x de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors $y'(x) = \lambda(x)e^x + \lambda'(x)e^x$

y est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda(x)e^x + \lambda'(x)e^x) - \lambda(x)e^x = f(x)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = f(x)e^{-x}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t} + \mu$ avec μ constante réelle.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions y telles que :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\int_0^x f(t)e^{-t}dt + \mu\right)e^x$$

En observant que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, pour que cette fonction y soit bornée, il **faut** que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-t}dt+\mu\right)=0$$

f étant continue, elle est bornée sur le segment $[0,T]$, et aussi sur $\mathbb{R}$ par périodicité :

$\exists M\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},\ |f(t)|\leq M$

alors $\forall t\in\mathbb{R},\ |f(t)e^{-t}|\leq M.e^{-t}$ et cette majoration par une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ montrer que l'inégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ est absolument convergente.

Pour que la solution y soit bornée, il faut donc que $\mu=-\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$

• Réciproquement, en prenant cette valeur de μ, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\left(\int_0^x f(t)e^{-t}dt-\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right)e^x=-e^x\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$$

Notons g cette fonction et montrons qu'elle est bornée :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |g(x)|=\left|-e^x\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right|\leq e^x\int_x^{+\infty}|f(t)e^{-t}|dt$$

$$\leq e^x\int_x^{+\infty} Me^{-t}dt=M.e^x[-e^{-t}]_x^{+\infty}=M.e^x.e^{-x}=M$$

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$, et qui est donnée par la formule :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-e^x\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt}$$

2- $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x+T)=-e^{x+T}\displaystyle\int_{x+T}^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ Effectuons le changement de variable $u=t-T$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x+T)=-e^{x+T}\int_x^{+\infty} f(u+T)e^{-u-T}du$$

$$g(x+T)=-e^xe^T\int_x^{+\infty} f(u)e^{-u}e^{-T}du \quad \text{(car } f \text{ est } T-\text{ périodique)}$$

$$g(x+T)=-e^x\int_x^{+\infty} f(u)e^{-u}du=g(x)$$, ce qui montre que g est $T-$ périodique.

1.7 * Comportement des solutions en $+\infty$:

Soit g une fonction de $C([a,+\infty[,\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle : $y'+3y=g$

1- On suppose que $\lim\limits_{+\infty} g=0$

Montrer que pour toute solution f de (E), $\lim\limits_{+\infty} f=0$

2- Que se passe-t-il si on suppose que $\lim\limits_{+\infty} g=L\in\mathbb{R}$?

3- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(f'+3f)=0$?

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f=0$?

SOLUTION : 1- La solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est :

$$y(x)=\lambda e^{-3x}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Recherchons les solutions de (E) par la méthode de variationde la constante, c'est à dire sous la forme $y(x)=\lambda(x)e^{-3x}$ où λ est une fonction de x de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors $y'(x)=-3\lambda(x)e^{-3x}+\lambda'(x)e^{-3x}$

y est solution de (E) si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R},(-3\lambda(x)e^{-3x}+\lambda'(x)e^{-3x})+3\lambda(x)e^{-3x}=g(x)$

$\iff \quad \forall x\in\mathbb{R},\lambda'(x)=g(x)e^{3x}$

$\iff \quad \forall x\in\mathbb{R},\lambda(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)e^{3t}+\mu$ avec μ constante réelle.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions y telles que :

$$\exists\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\left(\int_0^x g(t)e^{3t}dt+\mu\right)e^{-3x}=e^{-3x}\int_0^x g(t)e^{3t}dt+\mu e^{-3x}$$

Pour tout μ, on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty}\mu e^{-3x}=0$

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-3x}\displaystyle\int_0^x g(t)e^{3t}dt\right)=0$:

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\lim\limits_{+\infty} g=0,\ \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall t\geq x_0,\ |f(t)|\leq\varepsilon$

pour tout $x\geq x_0,\ e^{-3x}\displaystyle\int_0^x g(t)e^{3t}dt=e^{-3x}\int_0^{x_0} g(t)e^{3t}dt+e^{-3x}\int_{x_0}^x g(t)e^{3t}dt$

et $\left|e^{-3x}\displaystyle\int_{x_0}^x g(t)e^{3t}dt\right|\leq e^{-3x}\int_{x_0}^x |g(t)|e^{3t}dt\leq e^{-3x}\int_{x_0}^x \varepsilon e^{3t}dt=\varepsilon e^{-3x}\left[\frac{e^{3t}}{3}\right]_{x_0}^x=\varepsilon e^{-3x}\frac{e^{3x}-e^{3x_0}}{3}$

donc pour tout $x\geq x_0,\ \left|e^{-3x}\displaystyle\int_{x_0}^x g(t)e^{3t}dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

par ailleurs, $\displaystyle\int_0^{x_0} g(t)e^{3t}dt$ est une constante, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}\displaystyle\int_0^{x_0} g(t)e^{3t}dt=0$

donc il existe $x_1\in\mathbb{R},\forall x\geq x_1,\ \left|e^{-3x}\displaystyle\int_0^{x_0} g(t)e^{3t}dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

dès lors, pour tout $x\geq x_2=\max(x_0,x_1)$, $\left|e^{-3x}\displaystyle\int_0^x g(t)e^{3t}dt\right|\leq\left|e^{-3x}\int_0^{x_0} g(t)e^{3t}dt\right|+\left|e^{-3x}\int_{x_0}^x g(t)e^{3t}dt\right|$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

On a ainsi montré que :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_2\in\mathbb{R},\ \forall x\geq x_2, |y(x)|=\left|e^{-3x}\displaystyle\int_0^x g(t)e^{3t}dt\right|<\varepsilon$ c'est à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ pour toute fonction y solution de (E).

2- On suppose maintenant que $\lim\limits_{+\infty} g=L\in\mathbb{R}$.

Soit y une solution de (E) : $\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)+3y(x)=g(x)$

Soit y_0 la fonction constante de valeur $\dfrac{L}{3}$. Elle vérifie : $\forall x\in\mathbb{R},\ y_0'(x)+3y_0(x)=L$

Par différence, $\forall x\in\mathbb{R},\ (y-y_0)'(x)+3(y-y_0)(x)=g(x)-L$

On est ramené à la situation de la question précédente puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-L)=0$.

on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-y_0(x)=0$ et donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\dfrac{L}{3}}$

3- Posons : $\forall x\in[a,+\infty[,\ g(x)=f'(x)+3f(x)$

g est alors une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g=0$ et f est solution sur $[a,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'+3y=g(x)$

Comme dans la question 1, on montre que $\lim\limits_{+\infty} f=0$

1.8 * Suite récurrente, série entière et équation différentielle :

Soit (a_n) la suite définie par $a_0=a_1=1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n+2}$$

a) Etudier la limite de la suite (a_n).

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ n'est pas nul et calculer la somme $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. (on pourra utiliser une équation différentielle)

En déduire que $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$ et un équivalent de a_n quand $n\to+\infty$

SOLUTION : a) Par les conditions initiales $a_0=a_1=1>0$ et la relation de récurrence, il est immédiat que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0$.

de plus $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+2}>0$, la suite (a_n) est strictement croissante à partir du rang 2. Dès lors $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+2}\geq\dfrac{a_1}{n+2}=\dfrac{1}{n+2}$

La série $\sum\frac{1}{n+2}$ étant une série divergente, par minoration, la série $\sum(a_{n+2}-a_{n+1})$ l'est aussi.

La suite (a_n) est donc divergente et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty}$

b) Les termes de la suite étant tous >0, la relation $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{n+2}$ entraîne que

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}$$

or $0<\dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}\leq\dfrac{1}{n+2}$ (puisque $a_n<a_{n+1}$)

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1$

On en conclut par le critère de d'Alembert adapté aux séries entières que le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ est $R=\frac{1}{1}=1$.

• $\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$

$$S(x)=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}\,x^{n+2}=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+1}+\frac{a_n}{n+2}\right)x^{n+2}$$

$$S(x)=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\,x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}x^{n+2}$$

$$S(x)=a_0+a_1x+x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\,x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}x^{n+2}=a_0+a_1x+x(S(x)-a_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}x^{n+2}$$

Par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=a_1+S(x)-a_0+xS'(x)+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

$$S'(x)=S(x)+xS'(x)+xS(x)\qquad(\text{puisque } a_0=a_1=1\ )$$

La fonction S est donc solution sur l'intervalle $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(E):\ (x-1)y'+(x+1)y=0$

La solution générale de l'équation linéaire (E) est $y(x)=\lambda\exp(\int^x\frac{1+t}{1-t}dt)$

$$\int^x\frac{1+t}{1-t}dt=\int^x\frac{t-1+2}{1-t}dt=\int^x\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)dt=-x-2\ln(1-x)$$

La solution générale de (E) est donc $y(x)=\lambda\exp(-x-2\ln(1-x))=\lambda\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

donc $\exists\lambda\in\mathbb{R},S(x)=\lambda\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

or $S(0)=a_0=1=\lambda$ donc $\boxed{S(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}}$

• $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{a_n}x^n$ et $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(n+1)}_{b_n}x^n$

La série produit de celles ci-dessus est $\sum c_nx^n$ avec pour tout n, $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$

Donc $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad\text{avec}\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)}$

• $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)=n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

donc $\boxed{c_n\overset{+\infty}{\sim}n\,e^{-1}=\dfrac{n}{e}}$

1.9 Suite récurrente et équation différentielle :
. (avec MAPLE pour les calculs de primitives)

On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0=1,\qquad a_1=5,\qquad\forall n\geqslant 2,\ a_n=(n+1)a_{n-1}-(n+2)a_{n-2}$$

a) Avec MAPLE, calculer les 10 premiers termes de la suite (a_n). (réponse $a_{10}=131$)

b) Déterminer une équation différentielle (E) dont la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ soit solution.

En déduire $S(x)$ et calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (réponse $S(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^3}$ et $a_n = n^2+3n+1$)

SOLUTION : a) **>a[0]:=1; a[1]:=5;**
for n from 2 to 10 do a[n]:=(n+1)*a[n-1]-(n+2)*a[n-2] od;

b) $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$S'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1,2}^{\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n-2} = \sum_{n=2,3}^{\infty} (n-2)a_{n-2}x^{n-3}$$

$\forall n \geqslant 2,\ a_n = (n+1)a_{n-1} - (n+2)a_{n-2}$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)a_{n-2}x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^n - 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$= x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2}}_{S'(x)} + 2x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}}_{S(x)-a_0} - x^3 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-3}}_{S'(x)} - 4x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}}_{S(x)}$$

$S(x) - a_0 - a_1 x = x^2 S'(x) + 2x(S(x) - a_0) - x^3 S'(x) - 4x^2 S(x)$

et puisque $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$:

$\forall x \in]-R,R[,\ (1-2x+4x^2)S(x) + (x^3-x^2)S'x) = 1+3x$

donc $\boxed{S \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) : (x^3-x^2)y' + (1-2x+4x^2)y = 1+3x}$

- **Résolution de l'équation homogène** $(E_0) : (x^3-x^2)y' + (1-2x+4x^2)y = 0$ **:**

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1-2x+4x^2}{x^3-x^2} = \frac{1-2x+4x^2}{x^2(1-x)} = \frac{(1-x)-x(1-x)+3x^2}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1}$$

$$\Longrightarrow \ln|y(x)| = \frac{-1}{x} - \ln|x| - 3\ln|x-1| + cste$$

$$\Longrightarrow y(x) = \lambda \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Avec MAPLE :</u>

>Equa1:=(x*x*x-x*x)*diff(f(x),x)+(1-2*x+4*x*x)*f(x) = 0;
dsolve(Equa1,f(x));

$$f(x) = \_C1\, e^{\left[\frac{-1 - x\ln(x) - 3\,x\ln(x-1)}{x}\right]}$$

On retrouve le résultat calculé précédemment.

- **Résolution de l'équation complète** $(E) : (x^3-x^2)y' + (1-2x+4x^2)y = 1+3x$ **:**

Avec MAPLE la résolution de l'équation complète donne un résultat peu lisible :
>Equa1:=(x*x*x-x*x)*diff(f(x),x)+(1-2*x+4*x*x)*f(x) = 1+3*x;
dsolve(Equa1,f(x));

- **méthode de variation de la constante :**

Toute solution de (E_0) est de la forme : $y(x) = \lambda \underbrace{\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3}}_{y_0(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

On recherche une solution particulière de (E) de la forme :
$y(x) = \lambda(x).y_0(x)$ où λ est une fonction inconnue :
en reportant dans (E) on obtient :

$$\lambda'(x) = \frac{1+3x}{(x^3-x^2)y_0(x)} \qquad \text{(calcul classique sans difficulté)}$$

$$\lambda'(x) = -\frac{(1+3x)(1-x)^2}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

int(-(1+3*x)*(1-x)^2/x*exp(1/x),x);

$$xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} + 2x^2e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x^3e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

une primitive de λ est : $x \mapsto (-x^3 + 2x^2 + x)e^{\frac{1}{x}}$

une solution particulière de l'équation complète (E) est :

$$x \mapsto f(x) = \lambda(x).y_0(x) = (-x^3 + 2x^2 + x)e^{\frac{1}{x}} \times \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1-x)^3}$$

La solution générale de l'équation complète (E) est :

$$x \mapsto y(x) = \lambda.y_0(x) + f(x) = \lambda\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3} + \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1-x)^3}$$

Puisque S est solution sur l'intervalle $]-1, 0[$,

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}; \forall x \in]-1, 0[,\ S(x) = \lambda\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3} + \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1-x)^3}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x(1-x)^3} = \infty$ et S, série entière, est continue en 0. Donc $\lambda = 0$.

Ainsi, $\forall x \in]-1, 0[,\ S(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(1-x)^3}$

• Rappelons que :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ et, par dérivations}$$

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

donc $\forall x \in]-1, 0[,\ S(x) = (-x^2 + 2x + 1)\dfrac{1}{(1-x)^3} = \dfrac{1}{2}(-x^2 + 2x + 1)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$$2S(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0,1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$2S(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n$$

$$2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-n^2 + n + 2n^2 + 2n + n^2 + 3n + 2)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2 + 6n + 2)x^n$$

$$\forall x \in]-1, 0[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2 + 3n + 1)x^n\ ,$$

et par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n^2 + 3n + 1}$

1.10 * Calcul d'une somme à l'aide d'une équation différentielle :

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, de somme $S(x)$.

1- Déterminer le rayon de convergence de cette série, et montrer que la fonction somme, S, est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$

2- Calculer $S(x)$ lorsque $x > 0$.

En déduire la valeur de la somme $\sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

SOLUTION : 1 -• Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1!)^2}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{4}$$

La série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 4$.

• $\forall x \in]-4,4[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$x(x-4)S'(x) + (x+2)S(x) = (x-4)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + (x+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-4n+2)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-4n+2)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n$$
$$= 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((-4n+2)a_n + n a_{n-1})x^n$$

Or $\quad a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(n.(n-1)!)^2}{2n(2n-1)[(2n-2)!]} = \dfrac{n}{4n-2}\dfrac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!} = \dfrac{n}{4n-2}a_{n-1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-4n+2)a_n + n a_{n-1} = 0$

On a ainsi montré que :

$$\forall x \in]-4,4[,\ x(x-4)S'(x) + (x+2)S(x) = 2a_0 = 2 \quad (\text{puisque } \binom{0}{0} = 1)$$

La fonction S est donc solution sur l'ouvert $]-4,4[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) :\ x(x-4)y' + (x+2)y = 2$

2 -• $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle du premier ordre, linéaire. Son équation homogène associée est :

$$(\mathcal{E}_\prime) :\ x(x-4)y' + (x+2)y = 0$$

$\dfrac{x+2}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4}$ en multipliant par $(x-4)$ puis en remplaçant x par 4, on obtient $b = \frac{3}{2}$

et par un procédé analogue, $a = -\frac{1}{2}$

$\dfrac{x+2}{x(4-x)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x-4}\right)$ Cette fonction de x a pour primitive $\dfrac{1}{2}(\ln|x| - 3\ln|x-4|)$

La solution générale de $(\mathcal{E}_\prime)$ est donnée par :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-4|} = \lambda\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x-4|^3}}$$

Sur l'intervalle $]0,4[$, la solution générale de $(\mathcal{E}_\prime)$ a pour forme :

$$y(x) = \lambda\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

Recherchons une solution particulière de l'équation complète $(\mathcal{E})$ par la méthode de variation de la constante:

Notons $\ y_0(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\ $ et recherchons une solution particulière de $(\mathcal{E})$ de la forme $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$ où $\lambda(x)$ est une fonction inconnue :

$\forall x \in]0,4[,\ y'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$

La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]0,4[\iff \forall x \in]0,4[,\ x(4-x)y'(x) - (x+2)y(x) = -2$

$$\iff \forall x \in]0,4[,\ x(4-x)(\lambda'(x)y_0(x) + \underline{\lambda(x)y_0'(x)}) - \underline{(x+2)\lambda(x)y_0(x)} = -2$$
$$\iff \forall x \in]0,4[,\ x(4-x)(\lambda'(x)y_0(x) = -2 \quad (\text{car } y_0 \text{ est solution de } (\mathcal{E}_\prime)\ )$$
$$\iff \forall x \in]0,4[,\ \lambda'(x) = \frac{-2}{x(4-x)y_0(x)} = -2\frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$$

Sur l'intervalle $]0,4[$, calculons une primitive $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx$ par le changement de variable $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$

alors $\ u^2 x = 4 - x, \quad x = \dfrac{4}{u^2+1}, \quad dx = \dfrac{-8u\,du}{(u^2+1)^2}$

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx = \int u\frac{u^2+1}{4}\frac{-8u\,du}{(u^2+1)^2} = \int \frac{-2u^2}{u^2+1}du = -2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = -2\int 1 - \frac{1}{u^2+1}du$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx = -2u + 2\text{Arctan}\, u = -2\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$$

donc $\ \lambda(x) = 4\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} - 4\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$

Une solution particulière de l'équation complète $(\mathcal{E})$ est :

$$y_1(x)=\lambda(x)y_0(x)=4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}-\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}=\frac{4}{4-x}-4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$$

et la solution générale de l'équation complète est :

$$y(x)=y_1(x)+\mu y_0(x)=\frac{4}{4-x}-4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}+\mu\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\qquad \mu\in\mathbb{R}$$

• S est une solution de $(\mathcal{E})$, donc

$$\exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-4,4[,\ S(x)=\frac{4}{4-x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(\mu-4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Quand x tend vers 0, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4}{4-x}=1,\quad \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\overset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{\sqrt{x}}{8}\overset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$

$$\mu-4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\overset{x\to0^+}{\longrightarrow}\mu-2\pi$$

L'examen de la limite en 0 n'impose aucune contrainte sur la valeur de μ.

Regardons la dérivabilité en 0 :

$$\forall x\in]0,4[,\ \frac{S(x)-S(0)}{x}=\frac{S(x)-1}{x}=\frac{1}{4-x}+\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(4-x)^3}}\left(\mu-4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Quand x tend vers 0, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(4-x)^3}}\overset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{8\sqrt{x}}\overset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$

Pour que $\dfrac{S(x)-S(0)}{x}$ ait une limite finie quand $x\to0$ il faut donc que la limite de $\left(\mu-4\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}\right)$ soit nulle, c'est à dire que $\mu=2\pi$.

Finalement, $\boxed{\forall x\in]-4,4[,\ S(x)=\dfrac{4}{4-x}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(\pi-2\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}\right)}$

• $\sigma=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}=S(1)=\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3^3}}\left(\pi-2\text{Arctan}\sqrt{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\pi-2\frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}=\frac{4}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}}$$

1.11 ** Etude qualitative d'une équation :

Soit q une fonction réelle définie, continue, et strictement négative en tout point de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle :

$$y''+q(x)y=0$$

a) Montrer que toute solution de (E) possède au plus un zéro.

b) Montrer que (E) n'a pas de solution périodique.

SOLUTION :

a) Soit y une solution de (E) qui possède au moins deux zéros, et soient a et b deux zéros consécutifs de y. Sur $]a,b[$, y garde un signe constant (sinon elle s'annulerait par le théorème des valeurs intermédiaires), que l'on peut supposer positif quitte à changer y en $-y$ qui est elle aussi solution de l'équation linéaire (E) et possède les mêmes zéros que y.

La relation $y''(x)=\underbrace{-q(x)}_{>0}y(x)$ montre que y'' est strictement positive sur $]a,b[$, et donc y' est strictement croissante sur $]a,b[$ et aussi sur $[a,b]$ par continuité.

Par le théorème de Rolle, l'égalité $y(a)=y(b)=0$ entraîne l'existence de $c\in]a,b[$ tel que $y'(c)=0$

Par croissance, y' est négative sur $]a,c[$, positive sur $]c,b[$. y est donc décroissante sur $]a,c[$, et donc négative sur $]a,c[$ puisque $y(a)=0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ supposant que y est positive sur $]a,b[$.

x	a		c		b
$y''(x)$			$+$		
$y'(x)$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$
$y(x)$	0	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	0

Donc y possède au plus un zéro sur $\mathbb{R}$.

b) supposons que (E) possède une solution z définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Si z possède un zéro a, alors, par périodicité, z en possède une infinité, $(a+T, a+2T, \ldots)$, ce qui est impossible d'après la question précédente.

Donc z, ne s'annulant pas, garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires), que l'on peut supposer positif, quitte à changer z en $-z$.

z'', qui a même signe que z est également positive et z' est croissante sur $\mathbb{R}$.

z' possède alors au plus une racine et garde donc un signe constant négatif sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ou un signe constant positif sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$

Dans le premier cas, z est décroissante sur $]-\infty, a[$ et ne peut pas être périodique, dans le seconc cas, z est croissante sur $]a, +\infty[$ et ne peut non plus être périodique.

1.12 ** Solution maximale :

On considère l'équation différentielle $(E)\quad y' = y^2 + x$

et f la solution maximale vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

On rappelle qu'une telle solution maximale est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

1- Montrer que f est développable en série entière.

Donner un procédé récurrent pour déterminer les coefficients et calculer à l'aide de MAPLE les 20 premiers coefficients de ce développement.

Vérifier le résultat obtenu en demandant à MAPLE de résoudre directement cette équation différentielle sous forme de série avec un nombre suffisant de termes.

2- Montrer que f est définie sur un intervalle majoré.

SOLUTION :

1- • Recherchons les séries entières solutions de (E) :

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et vérifiant la condition initiale $S(0) = 0$ (donc $a_0 = 0$).

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x \in]-R, R[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières, la fonction S^2 peut s'écrire sur l'intervalle $]-R, R[$ sous forme d'une série entière $S^2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ avec :

$$\begin{cases} c_0 = a_0^2 = 0 \\ c_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0 \\ c_2 = a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 = a_1^2 \\ \forall n \geq 2, c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad \text{(car } a_0 = 0\text{)} \end{cases}$$

S est solution de (E) sur $]-R, R[\iff \forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = S^2(x) + x$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = 0 \quad \text{(termes constants)} \\ 2a_2 = 1 \quad \text{(termes en } x\text{)} \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_{n+1} = c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \end{cases}$$ (par unicité des coeff. d'une SE de rayon non nul)

Finalement $a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

• Réciproquement, considérons la suite définie par :

$$a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \geq 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

On montre immédiatement par récurrence que pour tout n, $0 \leq a_n \leq 1$, ce qui assure que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Par ailleurs, la fonction somme S est bien solution de (E) sur $]-1,1[$ puisqu'il a été procédé par équivalence dans le calcul des a_n.

Ainsi, sur l'intervalle $]-1,1[$, S est une solution de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $S(0) = 0$.

Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que f et S coincident sur $]-1,1[$, ce qui montre que f est dévelopable en série entière au moins sur l'intervalle $]-1,1[$.

• Utilisons MAPLE pour le calcul des premiers coefficients :

>a[0]:=0;a[1]:=0;a[2]:=1/2;

for n from 2 to 20 do a[n+1]:=add(a[k]*a[n-k],k=1..n-1)/(n+1) od;

on obtient $a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = \dfrac{1}{20}$, $a_6 = a_7 = 0$, $a_8 = \dfrac{1}{160}$, $a_9 = a_{10} = 0$, $a_{11} = \dfrac{7}{8800}$, $a_{12} = a_{13} = 0$,

$$a_{14} = \frac{1}{9856},\ a_{15} = a_{16} = 0\ ,\ a_{17} = \frac{2169}{167552000},\ a_{18} = a_{19} = 0$$

Ces résultats sont confirmés si on demande à MAPLE de résoudre l'équation en calculant les premiers termes de son développement avec l'options **series** dans **dsolve** :

>EquaDiff := diff(y(t),t)= y(t)^2 + t;

Order:=20;

S := dsolve(EquaDiff,y(0)=0, y(t), type=series);

$$S = y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{160}t^8 + \frac{7}{8800}t^{11} + \frac{1}{9856}t^{14} + \frac{2169}{167552000}t^{17} + O(t^{20})$$

2- f, solution maximale , est définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Il s'agit de montrer que b est fini.

Supposons au contraire que $b = +\infty$.

alors, $\forall x \geq 1,\ f'(x) = f^2(x) + x \geq f^2(x) + 1 > 0$

donc $\forall x \geq 1,\ \dfrac{f'(x)}{f^2(x)+1} \geq 1$ et en intégrant,

$$\forall x \geq 1,\ \int_1^x \frac{f'(t)}{f^2(t)+1}dt \geq \int_1^x 1\ dt$$

$$\implies \forall x \geq 1,\ \text{Arctan} f(x) - \text{Arctan} f(1) \geq x - 1$$

et cette inégalité montre que $\text{Arctan} f(x)$ ne serait pas majoré (quand $x \to +\infty$) , ce qui est absurde.

1.13 Chute libre et avec parachute : (Équation non linéaire)

Un corps se déplaçant dans un fluide est soumis à une force de résistance au mouvement opposé à sa vitesse. Dans le cas d'un corps en chute libre dans l'atmosphère, on supposera que cette force est proportionnelle au carré de la vitesse, c'est à dire en intensité de la forme kv^2.

1- Un parachutiste saute sans vitesse initiale à l'instant 0 d'un point situé à une hauteur H. (sommet d'une tour, ballon sonde ...)

On prendra ce point de départ Ω comme origine de repère, et on choisira un axe vertical $\overrightarrow{\Omega z}$ orienté vers le bas. On notera $z(t)$ sa coordonnée dans le repère à l'instant $t \geqslant 0$.

Montrer que z est solution de l'équation différentielle (E) : $z'' + \dfrac{k}{m} z'^{\,2} = g$

2- Résoudre l'équation différentielle (E) : $z'' = a^2 - b^2 z'^{\,2} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+^*)$

3- a) Donner l'expression de la vitesse et de la coordonnée $z(t)$.

Quel est le développement au premier ordre de $z(t)$ en fonction de t lorsque t est petit. Quel résultat classique retrouve-t-on ?

Montrer que la vitesse admet une valeur limite quand $t \to +\infty$

b) En pratique, dans le cas d'un parachutiste, la constante k est de la forme : $k = \frac{1}{2}\,\rho\, S\, C_x$ où :

- ρ est la masse volumique de l'air (qu'on supposera constante avec l'altitude)

- S (surface alaire) est la surface frontale, c'est à dire la surface projetée suivant la trajectoire du mobile sur un plan perpendiculaire à cette trajectoire.

- C_x, coefficient de trainée, dépend de la forme et la consistance du matériau.

• Calculer la vitesse limite en m/s et en km/h dans le cas d'une chute en feuille morte, où le parachutiste allongé cherche la position qui donne la plus grande résistance de l'air.

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$g \simeq 9,81 m/s^2 \qquad \rho \simeq 1,2 kg/m^3 \qquad C_x = 0,6 \qquad S = 1,2 m^2 \qquad m = 100 kg$ (avec l'équipement)

• Calculer la vitesse limite en dans le cas d'une chute en piqué, où le parachutiste debout cherche la position qui donne la plus petite résistance de l'air.

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$g \simeq 9,81 m/s^2 \qquad \rho \simeq 1,2 kg/m^3 \qquad C_x = 0,6 \qquad S = 0,2 m^2 \qquad m = 100 kg$

c) Après la chute libre, on ouvre un parachute hémisphérique de C_x égal à 0,7.

Quelle doit être le rayon de ce parachute pour que la vitesse d'aterrissage au sol, soit de 24 km/h ?

SOLUTION : 1- Les force extérieures qui s'appliquent au parachutiste sont :

son poids $m.\overrightarrow{g}$, la résistance de l'air, opposée à la vitesse et proportionnelle au carré de celle -ci, de la forme $-kv\overrightarrow{v}$.

D'après le principe fondamental de la dynamique, : $\quad m\dfrac{D^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = m\overrightarrow{g} - kv\overrightarrow{v}$

et en projettant sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$, $v' = g - kv^2$

2- L'équation différentielle (E) : $v' = a^2 - b^2 v^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+^*)$

est une équation à variables séparables : $\dfrac{v'}{a^2 - b^2 v^2} = 1$ ou $\dfrac{dv}{a^2 - b^2 v^2} = dt$

$$\frac{1}{a^2 - b^2 v^2} = \frac{1}{(a - bv)(a + bv)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{(a - bv) + (a + bv)}{(a - bv)(a + bv)}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a + bv} + \frac{1}{a - bv}\right)$$

$$\int \frac{dv}{a^2 - b^2 v^2} = \frac{1}{2ab}\left(\ln|a + bv| - \ln|a - bv|\right) = t + cste$$

$$\int \frac{dv}{a^2 - b^2 v^2} = \frac{1}{2ab}\left(\ln\frac{|a + bv|}{|a - bv|}\right) = t + cste$$

$$\ln\left|\frac{a + bv}{a - bv}\right| = 2ab(t + cste) \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a + bv}{a - bv}\right| = e^{2ab(t + cste)}$$

$$\frac{a + bv}{a - bv} = \lambda e^{2abt} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{a}{b}\frac{\lambda e^{2abt} - 1}{\lambda e^{2abt} + 1}$$

et puisque $v = 0$ à l'intant $t = 0$, $\lambda = 0$, $\boxed{v(t) = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{e^{abt} - e^{-abt}}{e^{abt} + e^{-abt}} = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{th}(abt)}$

Intégrons encore une fois :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a}{b}\,\mathrm{th}(abt) = \frac{a}{b}\,\frac{\mathrm{sh}(abt)}{\mathrm{ch}(abt)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z(t) = \frac{1}{b^2}\,\ln(\mathrm{ch}(abt))}$$

3 -a) La chute libre a pour équation (F) : $v' + \frac{k}{m}v^2 = g$

C'est l'équation précédente (E) avec $a = \sqrt{g}$ et $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On a pour solutions : $\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)}$

$$\boxed{z(t) = \frac{m}{k}\ \ln\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\ t\right)\right)}$$

- $\ln(\mathrm{ch}(u)) = \ln(1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)) = \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

En prenant $u = \sqrt{\frac{kg}{m}}\ t$, on obtient :

$$z(t) = \frac{m}{k}\ \ln\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\ t\right)\right) = \frac{1}{2} \times \frac{m}{k} \times \frac{kg}{m} \times t^2 = \frac{1}{2}gt^2 + 0(t^2)$$

et on retrouve à petites vitesse, en première approximation, l'expression de la chute libre dans le vide :

$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$

b) On sait que $\lim\limits_{u \to +\infty} \mathrm{th}(u) = 1$

La limite de la vitesse est $\boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$

Remarque : on retrouve cette valeur par l'équation (F) : $v' + \frac{k}{m}v^2 = g$

La vitesse limite est approchée lorsque l'accélération v' est nulle :

on a alors $\frac{k}{m}v^2 = g$ et $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

- Cas de la chute en feuille morte :

$g \simeq 9,81 m/s^2 \qquad \rho \simeq 1,2 kg/m^3 \qquad C_x = 0,6 \qquad S = 1,2 m^2 \qquad m = 100 kg$

alors $k = \frac{1}{2}\,\rho\, S\, C_x \simeq 0,36$ et $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \simeq 52,2 m/s \simeq 187,92 km/h$

- Cas d'une plongée en piqué :

$g \simeq 9,81 m/s^2 \qquad \rho \simeq 1,2 kg/m^3 \qquad C_x = 0,6 \qquad S = 0,2 m^2 \qquad m = 100 kg$

alors $k = \frac{1}{2}\,\rho\, S\, C_x \simeq 0,072$ et $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \simeq 116,72 m/s \simeq 420,2 km/h$

c) Après la chute libre, on ouvre un parachute hémisphérique de C_x égal à 0,7.

Quelle doit être la rayon de ce parachute pour que la vitesse d'aterrissage au sol, soit de 24 km/h ?

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} = 24 km/h = \frac{24\,000}{3\,600} = \frac{20}{3} m/s^2 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{9\ mg}{400} \simeq 22,0725$$

$$k = \frac{1}{2}\,\rho\, S\, C_x \simeq 0,072 \qquad \Longrightarrow \qquad S = \frac{2\ k}{S\ C_x} = 52,55 m^2$$

$$S = \pi \times R^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \simeq 4,09\ m}$$

2 Equations linéaires du second ordre : Utilisation de séries entières :

2.1 Equation linéaire du second ordre 1 : changement de fonction

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$

Rechercher les séries entières solutions et les exprimer à l'aide des fonctions classiques.

Résoudre (E). On pourra faire le changement de fonction $z = x^2.y$

SOLUTION :

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

et $\quad S''(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

S est solution de (E) sur $]-R, R[\quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in]-R, R[,\ x^2S''(x) + 4xS'(x) + (2 - x^2)S(x) = \alpha$

avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$ selon que l'on cherche à résoudre l'équation complète (E) ou l'équation homogène associée (E_0)

S est solution de (E)

$$\iff \forall x \in]-R,R[,\ x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + (2-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha$$

$$\iff \quad \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \alpha$$

$$\iff \quad \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = \alpha$$

$$\iff \quad \begin{cases} 2a_0 = \alpha \quad \text{(pour } n=0) \\ 6a_1 = 0 \quad \text{(pour } n=1) \\ \forall n \geq 2, (n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$$\iff \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\alpha}{2} \qquad (1) \\ a_1 = 0 \qquad (2) \\ \forall n \geq 2,\ \ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \quad (3) \end{cases}$$

$$\iff \forall p \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{2p+1} = 0 \qquad \text{compte tenu de (2) et (3)} \\ a_{2p} = \dfrac{\alpha}{2.3.4.....(2p+1)(2p+2)} \quad \text{compte tenu de (1) et (3)} \end{cases}$$

Donc (E) admet une seule série entière solution : $S_1(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(2p+2)!}x^{2p} \quad (\alpha = 1)$

Son rayon de convergence est infini (critère de d'Alembert) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ S_1(x) = \sum_{p'=1}^{\infty} \frac{x^{2p'-2}}{(2p')!} = \frac{1}{x^2}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$$

Par contre l'équation homogène (E_0) n'admet aucune série entière non nulle solution (prendre $\alpha = 0$)

• On a trouvé une solution de l'équation complète (E). Recherchons la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $\ x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0$

Soit y une solution de (E_0) sur un intervalle I (le plus grand possible) et introduisons alors la fonction z telle que : $\forall x \in I,\ z(x) = x^2y(x)$

$\forall x \in I,\ \ z'(x) = x^2y'(x) + 2xy(x)\ $ et $\ z''(x) = x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)$

donc $\ x^2y''(x) + 4xy'(x) + (2-x^2)y(x) = z''(x) - 2y(x) + 2y(x) - x^2y(x) = z''(x) - z(x)$

d'où, y est solution de (E_0) sur $I \iff \forall x \in I,\ \ z''(x) - z(x) = 0$

$\iff \quad \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall x \in I,\ \ z''(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$

On obtient alors $\ y(x) = \dfrac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}$ solution générale de (E_0) sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$

• La solution générale de (E) sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$ est alors donnée par :

$y(x) = \dfrac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2} + \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$ qui peut s'écrire sous la forme $\ y(x) = \dfrac{\lambda' e^x + \mu' e^{-x} - 1}{x^2}$ puisque $\mathrm{ch}(x)$ est combinaison linéaire de e^x et e^{-x}.

La solution générale de (E) sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$ est de la forme : $y(x) = \dfrac{\lambda e^x + \mu e^{-x} - 1}{x^2}$ où λ et μ sont des constantes réelles

2.2 Equation linéaire du second ordre 2 : séries entières et variation de la constante

Soit (E) l'équation différentielle $\ (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

Résoudre cette équation.

En déduire la somme de la série $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!\,(n-1)!}x^{2n}$

SOLUTION :

Soit $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R\neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x\in]-R,R[,\ S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$

et $\quad S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

S est solution de (E) sur $]-R,R[\iff \forall x\in]-R,R[,\ (1+x^2)S''(x)+xS'(x)-S(x)=0$

$\iff \forall x\in]-R,R[,\ (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\iff \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n+\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\iff \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)a_n\,x^n=0$

$\iff \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2-1)a_n]\,x^n=0$

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2-1)a_n=0$

(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)a_{n+2}+(n-1)a_n=0$ (en simplifiant par $n+1\neq 0$)

Pour $n=1$, on obtient $a_3=0$.

Pour toutes les autres valeurs de n, $\quad a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}a_n$

Puisque $a_3=0$, cette dernière relation entraine par récurrence immédiate que pour tout $k\geq 1,\ a_{2k+1}=0$, a_1 étant quelconque.

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n}=-\frac{2n-3}{2n}a_{2n-2}$

$a_{2n-2}=-\frac{2n-5}{2n-2}a_{2n-4}$

....

....

$a_6=-\frac{3}{6}a_4$

$a_4=-\frac{1}{4}a_2$

$a_2=\frac{1}{2}a_0$

par récurrence immédiate, $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5).....5.3.1}{(2n)(2n-2).....6.4.2}a_0$

$$a_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6).....5.4.3.2.1}{2^nn!(2n-2)(2n-4).(2n-6)....6.4.2}a_0=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^nn!2^{n-1}(n-1)!}a_0$$

Finalement, a_1 est quelconque, $\forall k\geq 1,\ a_{2k+1}=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}a_0$

Ainsi, les séries entières solutions sont : $S(x)=a_1x+a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^{2n}$

La fonction $S_1(x)=x$ est une solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1 puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+2}x^2=x^2 \quad \text{(critère de d'Alembert)}$$

Sur l'intervalle $]-1,1[$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E) est un espace vectoriel de dimension 2. Or S_1 et S_2 sont deux solutions linéairement indépendantes, elle forment donc une base de cet espace et toute solution de (E) est de la forme $\lambda S_1+\mu S_2$.

• Profitons de ce que la solution $S_1(x)=x$ est explicite pour rechercher toutes les solutions de (E) par une méthode de Lagrange :

Recherchons une solution de (E) de la forme $y(x)=xz(x)$ où $z(x)$ est une fonction inconnue de classe C^2.

Alors pour tout x, $y'(x)=z(x)+xz'(x)$ et $y''(x)=2z'(x)+xz''(x)$

y est solution de (E) $\iff$ $(1+x^2)(2z'(x)+xz''(x))+xz(x)+x^2z'(x)-xz(x)=0$

$\iff$ $(x+x^3)z''(x)+(2+3x^2)z'(x)=0$

$\iff$ $\dfrac{z''(x)}{z'(x)}=-\dfrac{3x^2+2}{x(1+x^2)}=\dfrac{-2}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$

$\iff$ $\ln|z'(x)|=-2\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+cte$

$\iff$ $z'(x)=\dfrac{\lambda}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\iff$ $z(x)=\lambda\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}+\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Effectuons le changement de variable $x=\tan t$, $dx=(1+\tan^2 t)dt$

$$z(x)=\lambda\int\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t\,\sqrt{\tan^2 t+1}}+\mu=\lambda\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt+\mu=\frac{-\lambda}{\sin t}+\mu$$

Or $\cos^2 t=\dfrac{1}{1+\tan^2 t}=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 t=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

d'où $z(x)=\lambda\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\mu$ et $y(x)=x.z(x)=\lambda\sqrt{1+x^2}+\mu x$

Finalement,

La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $y(x)=\lambda\sqrt{1+x^2}+\mu x$ où λ et μ sont des constantes réelles

• La fonction $g:x\longrightarrow 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!\,(n-1)!}x^{2n}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+....$ est une solution de (E) sur $]-1,1[$.

Donc $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall x\in]-1,1[,\ g(x)=\lambda\sqrt{1+x^2}+\mu x$

$g(0)=1$ donc $\lambda=1$.

g est paire donc $\mu=0$

Finalement, $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ g(x)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!\,(n-1)!}x^{2n}=\sqrt{1+x^2}}$

2.3 Equation linéaire du second ordre 3 : séries entières solutions

Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$

Résoudre cette équation.

SOLUTION :

Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R\neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x\in]-R,R[,\ S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$

et $S''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

S est solution de (E) sur $]-R,R[,\iff\ \forall x\in]-R,R[,\ \ (1+x^2)S''(x)+2xS'(x)-2S(x)=0$

$$\iff\forall x\in]-R,R[,(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+2x\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\iff\forall x\in]-R,R[,\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n+\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+2\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n-2)a_n\, x^n = 0$$
$$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)(n+2)a_n]\, x^n = 0$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n = 0$$

(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

Pour $n = 1$, on obtient $a_3 = 0$.

Pour toutes les autres valeurs de n, $a_{n+2} = -\dfrac{n-1}{n+1}a_n$

Puisque $a_3 = 0$, cette dernière relation entraine par récurrence immédiate que pour tout $k \geq 1$, $a_{2k+1} = 0$, a_1 étant quelconque.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = -\frac{2n-3}{2n-1}a_{2n-2}$$
$$a_{2n-2} = -\frac{2n-5}{2n-3}a_{2n-4}$$

....

....

$$a_6 = -\frac{3}{5}a_4$$
$$a_4 = -\frac{1}{3}a_2$$
$$a_2 = a_0$$

par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = (-1)^{n-1}\dfrac{2n-3}{2n-1}.\dfrac{2n-5}{2n-3}.\dfrac{2n-7}{2n-5}.....\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{3}.a_0 = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}a_0$

Finalement, a_1 est quelconque, $\forall k \geq 1,\ a_{2k+1} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}a_0$

Ainsi, les séries entières solutions sont : $S(x) = a_1 x + a_0 \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\right)$

La fonction $S_1(x) = x$ est une solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction $S_2(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1

$$\forall x \in]-1,1[,\ S_2(x) = 1 + x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}}_{T(x)}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

donc $\forall x \in]-1,1[,\ T(x) = \underbrace{T(0)}_{=0} + \text{Arctan}\, x$

d'où, $\forall x \in]-1,1[,\ S_2(x) = 1 + x\text{Arctan}\, x$

Ainsi, les séries entières solutions de l'équation (E) sur $]-1,1[$ sont : $S(x) = \lambda x + \mu(1 + x\text{Arctan}\, x)$

Ces fonctions sont encore solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ (vérification immédiate)

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel de dimension 2, puisque le coefficient de y'', la fonction $x \longrightarrow 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Finalement, $\boxed{\begin{array}{c}\text{la solution générale de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est l'ensemble des fonctions de la forme} \\ x \longrightarrow \lambda x + \mu(1 + x\text{Arctan}\, x) \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\end{array}}$

2.4 Equation linéaire du second ordre 4 : séries entières solutions + variation des constantes

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' - 2y = x^2$

Résoudre cette équation.

SOLUTION : • Résolution de l'équation homogène (E_0) : $x^2y'' - 2xy' - 2y = 0$

Première méthode : recherchons les séries entières solutions :

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x \in]-R,R[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$\text{et} \qquad S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

S est solution de (E_0) sur $]-R,R[, \iff \forall x \in]-R,R[,\ +x^2 S''(x) - 2xS'(x) + 2S(x) = 0$

$$\iff \forall x \in]-R,R[, x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - 2n + 2]\, a_n x^n = 0$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n_2 - 3n + 2)a_n = 0$ (par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n-1)(n-2)a_n = 0.$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} - \{1,2\},\ a_n = 0$

$\boxed{\text{Les séries entières solutions de } (E_0) \text{ sont donc les fonctions } S:\ x \mapsto a_1 x + a_2 x^2}$

Deuxième méthode : L'équation (E_0) : $x^2y'' - 2xy' - 2y = 0$ est une **équation d'Euler**.

Ses solutions sont à priori définies sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, puisque le coefficint de y'' s'annule au point 0.

On procède au changement de variable $t = \ln(|x|)$:

On recherche les fonctions z telles que $y(x) = z(t) = z(\ln(|x|))$

alors $\forall x \in I_k,\ y'(x) = \dfrac{1}{x} z'(\ln(|x|))$ et $y''(x) = \dfrac{1}{x^2} z''(\ln(|x|)) - \dfrac{1}{x^2} z'(\ln(|x|))$

y est solution de (E) sur $I_k \iff \forall x \in I_k,\ x^2y'' - 2xy' - 2y = 0$

$$\iff \forall x \in I_k,\ x^2 \left(\frac{1}{x^2} z''(\ln(|x|)) - \frac{1}{x^2} z'(\ln(|x|)) \right) - 2x \left(\frac{1}{x} z'(\ln(|x|)) \right) + 2z(\ln(|x|)) = 0$$

$$\iff \forall x \in I_k,\ z''(\ln(|x|)) - 3z'(\ln(|x|)) + 2z(\ln(|x|)) = 0$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0 \quad (\text{quand } x \text{ décrit } I_k,\ t = \ln(|x|) \text{ décrit } \mathbb{R})$$

On est ramené à une équation du second ordre linéaire **à coefficients constants** : (F) :

$$z'' - 3z' + 2z = 0$$

L'équation caractéristique associée, $r^2 - 3r + 2 = 0$, a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

La solution générale de (F) est de la forme : $z(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

En revenant à $y(x)$ par la relation $y(x) = z(\ln(|x|))$, on obtient la solution générale de (E) sur I_1 et I_2 :

$$y(x) = \lambda e^{\ln(|x|)} + \mu e^{2\ln(|x|)},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

soit aussi $\boxed{y(x) = \lambda x + \mu x^2}$

• Résolution de l'équation complète (E) : $x^2y'' - 2xy' - 2y = x^2$

On utilise la méthode de variation des constantes : on recherche une solution de (E) de la forme $x \mapsto y(x) = y_1(x)\lambda(x) + y_2(x)\mu(x)$ où y_1 est la solution $x \mapsto x$, y_1 la solution $x \mapsto x^2$, λ et μ des fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_k.

On impose de plus la condition : $\boxed{y_1(x)\lambda'(x) + y_2(x)\mu'(x) = 0 \qquad (1)}$

alors, $\forall x \in I_k,\ y'(x) = y_1(x)\lambda'(x) + y_1'(x)\lambda(x) + y_2(x)\mu'(x) + y_2'(x)\mu(x)$

$$y'(x) = y_1'(x)\lambda(x) + y_2'(x)\mu(x)$$

$\forall x \in I_k,\ y''(x) = y_1''(x)\lambda(x) + y_1'(x)\lambda'(x) + y_2''(x)\mu(x) + y_2'(x)\mu'(x)$

y est solution de (E) sur $I_k, \iff \forall x \in I_k,\ x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2$

$$\iff \forall x \in I_k,\ x^2 \left(y_1''(x)\lambda(x) + y_1'(x)\lambda'(x) + y_2''(x)\mu(x) + y_2'(x)\mu'(x)\right) - 2x\left(y_1'(x)\lambda(x) + y_2'(x)\mu(x)\right)$$
$$+2\left(y_1(x)\lambda(x) + y_2(x)\mu(x)\right) = x^2$$

$$\iff \forall x \in I_k,\ \underbrace{\left(x^2y_1''(x) - 2xy_1'(x) - 2xy_1(x)\right)}_{=0}\lambda(x) + \underbrace{\left(x^2y_2''(x) - 2xy_2'(x) - 2xy_2(x)\right)}_{=0}\mu(x)$$
$$+y_1'(x)\lambda'(x) + y_2'(x)\mu'(x) = x^2$$

$$\iff \forall x \in I_k,\ \boxed{x^2y_1'(x)\lambda'(x) + x^2y_2'(x)\mu'(x) = x^2 \qquad (2)}$$

λ' et μ' sont solutions du système :

$$\forall x \in I_k, \left\{ \begin{array}{ll} y_1(x)\lambda'(x) + y_2(x)\mu'(x) = 0 & (1) \\ y_1'(x)\lambda'(x) + y_2'(x)\mu'(x) = 1 & (2) \end{array} \right. \iff \forall x \in I_k, \left\{ \begin{array}{l} x\lambda'(x) + x^2\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \forall x \in I_k, \left\{ \begin{array}{l} \lambda'(x) = -1 \\ \mu'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. \iff \forall x \in I_k, \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x) = -x + cste \\ \mu'(x) = \ln|x| + cste \end{array} \right.$$

Une solution de (E) est : $x \mapsto f(x) = y_1(x)\lambda(x) + y_2(x)\mu(x) = x\lambda(x) + x^2\mu(x) = -x^2 + x^2 \ln|x|$

$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ sur chaque intervalle } I_k \text{ est : } x \mapsto y(x) = A.x + B.x^2 + x^2 \ln|x|}$

2.5 Equation linéaire du second ordre 5 : SE solutions

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$

Rechercher les séries entières solutions et les exprimer à l'aide des fonctions classiques.

Résoudre (E)

SOLUTION :

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

et $S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

S est solution de (E) sur $]-R, R[\iff \forall x \in]-R, R[,\ x^2 S''(x) - 2xS'(x) + (2 - x^2)S(x) = \alpha$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (2 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 3n + 2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} 2a_0 = 0 \quad (\text{pour } n = 0) \\ 0\, a_1 = 0 \quad (\text{pour } n = 1) \\ 0\, a_2 = a_0 \quad (\text{pour } n = 2) \\ \forall n \geq 3, (n-1)(n-2)a_n - a_{n-2} = 0 \end{array} \right.$$

(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 3,\ \ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n-1)(n-2)} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p)!} \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \dfrac{a_2}{(2p-1)!} \end{array} \right.$$

Donc (E) admet pour séries entières solutions celles de la forme :

$$S(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = a_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p-1)!} + a_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p)!}$$

Leur rayon de convergence est infini (critère de d'Alembert) et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = a_2 x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + a_1 x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = a_2 x \mathrm{sh}(x) + a_1 x \mathrm{ch}(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Les solutions de } (E \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, +\infty[\text{ sont les fonctions de la forme :} \\ x \mapsto y(x) = Ax\mathrm{sh}(x) + Bx\mathrm{ch}(x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array}}$$

2.6 Equation linéaire du second ordre 6 : SE solutions + variation constante

Résoudre l'équation différentielle (E) : $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$

SOLUTION :

Exercice 1 : L'équation différentielle (E) est linéaire homogène du second ordre, mais n'est pas à coefficients constants.

• Commençons par rechercher s'il existe des séries entières solutions.

Soit $S\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de raon de convergence $r \neq 0$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in]-r,r[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \ \text{ et }\ S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

S est solutionde (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-r,r[,\ xS''(x) + 3S'(x) - 4x^3 S(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+3)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r,r[,\ 3a_1 + 8a_2 x + 15a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}[(n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3}]x^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'une série entièer de rayon non nul, on obtient :

$$\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \forall n \geq 3,\ (n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3} = 0 \end{cases}$$

La dernière relation de récurrence, appliquée aux conditions initiales $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ donne :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{4k+1} = a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$$

Elle donne, appliquée à $n = 4k-1$: $\quad 4k(4k+2)a_{4k} = 4a_{4k-4} \quad \Longrightarrow \quad a_{4k} = \dfrac{a_{4k-4}}{2k(2k+1)}$

d'où $\quad a_4 = \dfrac{a_0}{2.3},\quad a_8 = \dfrac{a_4}{4.5},\quad a_{12} = \dfrac{a_8}{6.7},\quad ....., a_{4k} = \dfrac{a_{4k-4}}{2k(2k+1)}$

par récurrence immédiate, $\quad a_{4k} = \dfrac{a_0}{1.2.3.4.5.\ ...\ 2k.(2k+1)} = \dfrac{a_0}{(2k+1)!}$

Donc $\ S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k}x^{4k} = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4k}}{(2k+1)!}$

Réciproquement, la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4k}}{(2k+1)!}$ a un rayon de convergence infini (immédiat par le critère de D'alembert)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$$

• Le coefficient de y'' dans l'équation s'annule en 0, mais ne s'annule pas sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ni sur $I_2 =]0, +\infty[$. Les solutuions de (E) sur chacun de ces intervalles forment donc un espace vectoriel de dimension 2. Les séries entières trouvées précédemment, de la forme λS_0 ne forment qu'un espace de dimension 1.

Nous n'avons donc pas encore trouvé toutes les solutions de (E).

Puisque le fonction S_0 ne s'annule ni sur I_1 ni sur I_2, recherchons les solutions de (E) sur chaque I_k de la forme $\ y(x) = \lambda(x)S_0(x)$

alors $\ \forall x \in I_k,\ y'(x) = \lambda'(x)S_0(x) + \lambda(x)S_0'(x)$

et $\ y''(x) = \lambda''(x)S_0(x) + 2\lambda'(x)S_0'(x) + \lambda(x)S_0''(x)$

y est solution de (E) sur I_k si et seulement si $\ \forall x \in I_k,\ xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3 y(x) = 0$

$$\Leftrightarrow\ \forall x \in I_k,\ x[\lambda''(x)S_0(x) + 2\lambda'(x)S_0'(x) + \lambda(x)S_0''(x)] + 3[\lambda'(x)S_0(x) + \lambda(x)S_0'(x)] - 4x^3\lambda(x)S_0(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall x \in I_k,\ (xS_0(x))\lambda''(x) + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))\lambda'(x) + \underbrace{(xS_0''(x) + 3S_0'(x) - 4x^3 S_0(x))}_{=0}\lambda(x) = 0$$

$\iff \forall x \in I_k,\ xS_0(x)\lambda''(x) + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))\lambda'(x) = 0$

La fonction λ' est donc solution sur I_k de l'équation du premer ordre (F) :

$$xS_0(x)z' + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))z = 0$$

Sur chaque I_k la solution générale de (F) est : $z(x) = \mu \exp\left(-\int_a^x \frac{2tS_0'(t) + 3S_0(t)}{tS_0(t)}dt\right)$

$$z(x) = \mu \exp\left(-\int_a^x \frac{2S_0'(t)}{S_0(t)} + \frac{3}{t}dt\right) = \mu \exp\left(-2\ln|S_0(x)| - 3\ln|x| + cte\right)$$

$$z(x) = \frac{\mu'}{x^3 S_0^2(x)} = \frac{\mu'\,x}{\mathrm{sh}^2(x^2)}$$

donc $\forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \dfrac{\mu'\,x}{\mathrm{sh}^2(x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x) = \dfrac{\mu'}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{\mathrm{sh}^2(x^2)}dx = \frac{-\mu'}{2}\coth(x^2) + \mu''$

et $y(x) = \lambda(x)S_0(x) = \left(\dfrac{-\mu'}{2}\coth(x^2) + \mu''\right)\dfrac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2} = A\dfrac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2} + B\dfrac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$

Finalement, la solution générale de (E) sur les intervalles I_1 et I_2 est :

$$\boxed{y(x) = A\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2} + B\frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2} = C\frac{e^{x^2}}{x^2} + D\frac{e^{-x^2}}{x^2} \quad \text{où } A, B, C, D \text{ sont des constantes.}}$$

2.7 Equation linéaire du second ordre 7 : SE solutions + variation constante

Résoudre l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

SOLUTION : • Les séries entières solutions sont $S(x) = A\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}$

• Sur $]0, +\infty[$, $S(x) = A\ \mathrm{ch}(\sqrt{x})$

La recherche de la solution générale sous la forme $y(x) = A(x)y_0(x)$ où $y_0(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$, donne :

$$\boxed{y(x) = A\ \mathrm{ch}(\sqrt{x}) + B\ \mathrm{sh}(\sqrt{x})}$$

2.8 Cauchy-Lipschitz en échec :

On considère l'équation différentielle (E) : $(x-2)y'' + (1-x)y' + y = 0$

1- Résoudre (E). On pourra commencer par rechercher les solutions polynomiales

2- a) Rechercher les solutions définies sur $\mathbb{R}$. Quel est la dimension de l'espace qu'elles forment ?

b) Étudier l'existence et l'unicité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions initiales :

a) $\begin{cases} y(2) = 0 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y(2) = 1 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$ Conclusion ?

SOLUTION : 1- Si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$),

le terme dominant de $(X-2)P''(X) + (1-X)P'(X) + P(X)$ est $-Xn.a_nX^{n-1} + a_nX^n = (1-n)a_nX^n$

Si P est solution de (E) alors $n = 1$.

Réciproquement soit $P(X) = aX + b$ un polynôme de degré 1. Alors P est solution de (E) si et seulement si $(x-2).0 + (1-x)a + (ax+b) = 0 \iff a + b = 0$

Les polynômes solutions de (E) sont donc les polynômes de la forme : $P(X) = a(X-1)$

• On recherche les solutions de (E) sous la forme $y(x) = z(x)(x-1)$ où z est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle considéré.

y est solution de $(E) \iff \forall x, (x-2)(x-1)z''(x) + (-x^2 + 4x - 5)z'(x) = 0$ (après calculs sans difficulté)

$$\iff \forall x \in J, \frac{z''(x)}{z'(x)} = 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\iff \forall x \in J, \ln|z'(x)| = x - 2\ln|x-1| + \ln|x-2| + cste$$

$$\iff \forall x \in J, z'(x) = \lambda\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

$$\iff \forall x \in J, z(x) = \lambda\frac{e^x}{x-1} + \mu$$

Finalement, sur chacun des intervalles $J_1 =]-\infty, 2[$ et $J_2 =]2, +\infty[$, la solution générale de (E) est : $\boxed{x \mapsto y(x) = \lambda e^x + \mu(x-1)}$

Sur chacun des intervalles J_1 et J_2, l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est formée par exemple des fonctions $y_1 : x \mapsto e^x$ et $y_2 : x \mapsto x-1$

2- a) Soit f une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et est solution de (E) sur J_1 et sur J_2 :

$$\begin{cases} \exists(\lambda_1,\mu_1)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in J_1, f(x)=\lambda_1 e^x+\mu_1(x-1) \\ \exists(\lambda_2,\mu_2)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in J_2, f(x)=\lambda_2 e^x+\mu_2(x-1) \end{cases}$$

f est continue au point 2 $\Longrightarrow \lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{2^+} f \iff \lambda_1 e^2+\mu_1=\lambda_2 e^2+\mu_2$

f' est continue au point 2 $\Longrightarrow \lim\limits_{2^-} f' = \lim\limits_{2^+} f' \iff \lambda_1 e^2+\mu_1=\lambda_2 e^2+\mu_2$

(on obtient la même condition)

f'' est continue au point 2 $\Longrightarrow \lim\limits_{2^-} f'' = \lim\limits_{2^+} f'' \iff \lambda_1=\lambda_2$

Réciproquement, les trois conditions précédentes sont satisfaites si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x\mapsto y(x)=\lambda e^x+\mu(x-1)$ où λ et μ sont deux constantes réelles ou complexes.

b) Soit f une solution de l'équation (E) définie sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda e^x+\mu(x-1)$

• $\begin{cases} y(2)=0 \\ y'(2)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda e^2+\mu=0 \\ \lambda e^2+\mu=1 \end{cases}$ Le système est incompatible.

$\boxed{\text{Le problème aux conditions initiales de Cauchy-Lipschitz n' a aucune solution}}$.

• $\begin{cases} y(2)=1 \\ y'(2)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda e^2+\mu=1 \\ \lambda e^2+\mu=1 \end{cases}$ Le système admet une infinité de solutions, tous les couples (λ,μ) de la forme $(\lambda,\ 1-\lambda e^2)$.

$\boxed{\text{Le problème aux conditions initiales de Cauchy-Lipschitz admet une infinité de solutions}}$.

Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse selon laquelle le coefficient de y'' (ici $(x-2)$) ne doit pas s'annuler sur l'intervalle contenant la valeur de x en laquelle on impose les conditions initiales.

2.9 Equation à coefficients constants 1 :

Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle (E) : $y''+4y=\cos^2(x)$

Vérifier le résultat obtenu avec MAPLE

SOLUTION :

• (E) est une équation du deuxième ordre linéaire à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2+4=0$

Elle admet pour racines $r_1=2i$ et $r_2=-2i$

La solution générale (complexe) de l'équation homogène associée (E_0) est :

$y(x)=\alpha e^{2ix}+\beta e^{-2ix} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$

La solution générale réelle de (E_0) est :

$y(x)=\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x) \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

• (E) : $y''+4y=\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{2ix}}{4}+\dfrac{e^{-2ix}}{4}$

Pour trouver une solution particulière de (E), il suffit de superposer trois solutions des équations (F_1), (F_2) et (F_3) suivantes :

(F_1) : $y''+4y=\dfrac{1}{2}$

(F_2) : $y''+4y=\dfrac{e^{2ix}}{4}$

(F_3) : $y''+4y=\dfrac{e^{-2ix}}{4}$

• Une solution particulière de (F_1) est la fonction constante $f_1(x)=\dfrac{1}{8}$

• Recherchons une solution particulière de (F_2) de la forme $f_2(x)=\lambda\, x\, e^{2ix}$ (et non pas $f_2(x)=\lambda\, e^{2ix}$ puisque 2 est racine de l'équation caractéristique)

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_2'(x)=\lambda\,(2ix\, e^{2ix}+e^{2ix})$

$f_2''(x)=\lambda\,(-4x\, e^{2ix}+4ie^{2ix})$

$$f_2''(x)+4f_2(x)=\frac{e^{2ix}}{4} \iff \lambda\left(-4x\,e^{2ix}+4ie^{2ix}\right)+4\lambda\,x\,e^{2ix}=\frac{e^{2ix}}{4}$$
$$\iff 4i\lambda e^{2ix}=\frac{e^{2ix}}{4} \iff \lambda=\frac{1}{16i}=\frac{-i}{16}$$
donc $f_2(x)=\dfrac{-i}{16}x\,e^{2ix}$

- Par conjugaison, $f_3(x)=\overline{f_2(x)}=\dfrac{i}{16}x\,e^{-2ix}$ est solution de (F_3)
- Donc une solution particulière de (E) est :

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=\frac{1}{8}-\frac{i}{16}x\,e^{2ix}+\frac{i}{16}x\,e^{-2ix}$$
$$f(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16i}x\,e^{2ix}-\frac{1}{16i}x\,e^{-2ix}=\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}=\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin(2x)$$

- Finalement, la solution générale réelle de (E) est :

$$\boxed{y(x)=\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)+\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin(2x)\quad \text{où}\quad \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des réels}}$$

Avec MAPLE :

>Equadif := diff(y(x),x,x)+4*y(x)= cos(x)*cos(x);
dsolve(Equadif);
simplify(%,trig);

2.10 Equation à coefficients constants 2 :

Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin(2x)$

SOLUTION : • Résolution de l'équation homogène :

- (E) est une équation du deuxième ordre linéaire à coefficients constants.

L'équation homogène associée, $y''+2y'+5y=0$ a pour équation caractéristique associée :
$$r^2+2r+5=0.$$
Le discriminant $\delta=4-20=-16$ est négatif.
Elle admet deux racines complexes conjuguées : $r_1=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$ et $r_2=-1-2i$
La solution générale (complexe) de l'équation homogène associée (E_0) est :
$$y(x)=\alpha e^{(-1+2i)x}+\beta e^{(-1-2i)x} \qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$$
La solution générale réelle de (E_0) est :
$$y(x)=\lambda e^{-x}\cos(2x)+\mu e^{-x}\sin(2x) \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution générale réelle de } (E_0) \text{ est :}\\ \quad x\mapsto y(x)=Ae^{-x}\cos(2x)+Be^{-x}\sin(2x) \qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2\end{array}}$$

- Résolution de l'équation complète (E) :

Puisque $e^{-x}\sin(2x)=\operatorname{Im}\left(e^{(-1+2i)x}\right)$, on résoudra l'équation (E') : $y''+2y'+5y=e^{(-1+2i)x}$, et on prendra la partie réelle. On recherche une solution particulière que (E') de la forme $f: x\mapsto P(x)e^{(-1+2i)x}$ où P est un polynôme. Puisque $-1+2i$ est racine de l'équation caractéristique, on prendra P de la forme $P(x)=kx, k\in C$:

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=kxe^{(-1+2i)x}$
$$f'(x)=k[(-1+2i)x+1]e^{(-1+2i)x}$$
$$f''(x)=k[(-3-4i)x-2+4i]e^{(-1+2i)x}$$
f est solution de (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+2f'(x)+5f(x)=e^{(-1+2i)x}$$
$$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ k\left[((-3-4i)x-2+4i)+2((-1+2i)x+1)+5\right]e^{(-1+2i)x}=e^{(-1+2i)x}$$
$$\iff 4ik=1 \iff \boxed{k=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}}$$

donc $f(x)=-\frac{i}{4}xe^{(-1+2i)x}=-\frac{ix}{4}e^{-x}\left(\cos(2x)+i\sin(2x)\right)$
Une solution réelle de (E) est : $\boxed{g(x)=\operatorname{Im}(f(x))=-\frac{x}{4}e^{-x}\cos(2x)}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution générale réelle de } (E) \text{ est :}\\ \quad x\mapsto y(x)=Ae^{-x}\cos(2x)+Be^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}\,x\,e^{-x}\cos(2x) \qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2\end{array}}$$

2.11 Equations d'Euler :

1 - Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' - 6y = 0$
Rechercher les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

2- Mêmes questions pour l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$

SOLUTION :

1- • On reconnait une équation du type $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, c'est à dire une équation d'Euler.
Ses solutions sont à priori définies sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, puisque le coefficint de y'' s'annule au point 0.

On procède au changement de variable $t = \ln(|x|)$:
On recherche les fonctions z telles que $y(x) = z(t) = z(\ln(|x|))$
alors $\forall x \in I_k,\ y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(|x|))$ et $y''(x) = \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(|x|)) - \dfrac{1}{x^2}z'(\ln(|x|))$
y est solution de (E) sur $I_k \iff \forall x \in I_k,\ x^2y'' - 6y = 0$

$\iff \forall x \in I_k,\ x^2\left(\dfrac{1}{x^2}z''(\ln(|x|)) - \dfrac{1}{x^2}z'(\ln(|x|))\right) - 6z(\ln(|x|)) = 0$

$\iff \forall x \in I_k,\ z''(\ln(|x|)) - z'(\ln(|x|)) - 6z(\ln(|x|)) = 0$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) - 6z(t) = 0$ (quand x décrit I_k, $t = \ln(|x|)$ décrit $\mathbb{R}$)

On est ramené à une équation du second ordre linéaire **à coefficients constants** : (F) :
$$z'' - z' - 6z = 0$$
L'équation caractéristique associée, $r^2 - r - 6 = 0$, a pour racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$.
La solution générale de (F) est de la forme : $z(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{3t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
En revenant à $y(x)$ par la relation $y(x) = z(\ln(|x|))$, on obtient la solution générale de (E) sur I_1 et I_2 :
$$y(x) = \lambda e^{-2\ln(|x|)} + \mu e^{3\ln(|x|)},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
soit aussi $y(x) = \dfrac{\lambda}{x^2} + \mu x^3$ (quitte à changer μ en $-\mu$ sur I_1).

$$\boxed{\text{Sur } I_1 \text{ ou sur } I_2\text{, la solution générale de } (E) \text{ est : } y(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \mu x^3,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

• Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et est nécessairement solution de (E) sur I_1 et sur I_2 :
$$\exists(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I_1,\ f(x) = \frac{\lambda_1}{x^2} + \mu_1 x^3$$
$$\exists(\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I_2,\ f(x) = \frac{\lambda_2}{x^2} + \mu_2 x^3$$
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et f n'est pas continue au point 0. Donc $\lambda_1 = 0$.
Pour une raison analogue, $\lambda_2 = 0$
Donc $\forall x \in I_1,\ f(x) = \mu_1 x^3$ et $\forall x \in I_2,\ f(x) = \mu_2 x^3$
Réciproquement, une fonction f définie par $\forall x \in I_1,\ f(x) = \mu_1 x^3$ et $\forall x \in I_2,\ f(x) = \mu_2 x^3$ est continue en 0 ($\lim\limits_{0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{0^+} f(x)$)
Elle est dérivable en 0 car $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ ($\forall x \in I_1,\ f'(x) = 3\mu_1 x^2$ etc....)
Elle est dérivable deux fois en 0 car $f''_g(0) = f''_d(0) = 0$ ($\forall x \in I_1,\ f''(x) = 6\mu_1 x$ etc....)
Donc f est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
alors les deux fonctions f_1 et f_2 définies par :
$\forall x \in I_1,\ f_1(x) = x^3$ et $\forall x \in I_2,\ f_1(x) = 0$
$\forall x \in I_1,\ f_2(x) = 0$ et $\forall x \in I_2,\ f_2(x) = x^3$ constituent une base des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$
et $\boxed{\text{l'espace vectoriel des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est de dimension 2.}}$

2- • Par le même changement de variable que dans la première question,
l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$ devient $(F) : z'' - 6z' + 5z = 0$
L'équation caractéristique associée, $r^2 - 6r + 5 = 0$, a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 5$.
La solution générale de (F) est de la forme : $z(t) = \lambda e^t + \mu e^{5t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
et $\boxed{\text{celle de } (E) \text{ sur } I_1 \text{ ou sur } I_2 \text{ est de la forme : } y(x) = \lambda x + \mu x^5}$

• Un raisonnement analogue à celui de la première question fournit pour base de l'espce vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}\ f_1(x) = x$ (pour que f soit C^1 en 0, il faut cette fois que $\lambda_1 = \lambda_2$)

$\forall x \in I_1,\ f_2(x) = x^5$ et $\forall x \in I_2,\ f_2(x) = 0$ (pas de condition entre μ_1 et μ_2)

$\forall x \in I_1,\ f_3(x) = 0$ et $\forall x \in I_2,\ f_3(x) = x^5$

Il en résulte que $\boxed{\text{l'espace vectoriel des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est de } \textbf{dimension 3}.}$

Remarque : On peut trouver des exemples d'équations d'Euler pour lesquelles la dimension des solutions est **tout nombre entier entre 0 et 4 inclus**.

2.12 * Inégalité :

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) \geq 0$

Monter que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$

SOLUTION :

Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f''(x) + f(x)$

g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$

et f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = g(x)$

• (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, et avec second membre.

La solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est :

$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ où A et B sont des constantes réelles.

Recherchons une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$ où A et B sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2 1$ sur $\mathbb{R}$ (méthode de variation des constantes)

On impose de plus la condition : $\forall x \in \mathbb{R},\ A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \underbrace{A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x)}_{=0} - A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x)$$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) = -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) - A(x)\cos(x) - B(x)\sin(x)$

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + y(x) = g(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (-A'(x)\sin(x) + B'\cos(x) - A(x)\cos(x) - B(x)\sin(x)) + (A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)) = g(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -A'(x)\sin(x) + B'\cos(x) = g(x)$

$A'(x)$ et $B'(x)$ sont solutions du système : $\begin{cases} A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0 & (1) \\ -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = g(x) & (2) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} A'(x) = -g(x)\sin(x) \\ B'(x) = g(x)\cos(x) \end{cases}$

$A(x) = -\displaystyle\int_0^x g(t)\sin(t)dt + cte$ et $B(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\cos(t)dt + cte$

La solution générale de (E) est donc :

$$y(x) = -\left(\int_0^x g(t)\sin(t)dt\right)\cos x + \left(\int_0^x g(t)\cos(t)dt\right)\sin x + \alpha\cos x + \beta\sin x$$

$$y(x) = \int_0^x g(t)(\sin x\cos(t) - \cos x\sin(t))dt + \alpha\cos x + \beta\sin x$$

$$y(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos x + \beta\sin x$$

La fonction f est donc de cette forme :

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos x + \beta\sin x}$$

• Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(x+\pi) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt + \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)dt + \alpha\underbrace{\cos(x+\pi)}_{=-\cos x} + \beta\underbrace{\sin(x+\pi)}_{=-\sin x}$$

$$f(x) + f(x+\pi) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt - \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)dt$$

$$f(x)+f(x+\pi)=\int_0^x g(t)\sin(x-t)dt-\left(\int_0^x g(t)\sin(x-t)dt+\int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)dt\right)$$
$$f(x)+f(x+\pi)=-\int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)dt=\int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)dt=\int_0^{\pi}\underbrace{g(u+x)}_{\geq 0}\underbrace{\sin(u)}_{\geq 0}du\geq 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi)\geq 0}$

2.13 * Comportement d'une fonction en $+\infty$:

On considère une fonction à valeurs réelles f de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, telle que :
$$\lim_{x\to+\infty}(f''(x)+3f'(x)+2f(x))=0$$
Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f=0$

SOLUTION :

• Soit g la fonction définie par :
$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \ g(x)=f''(x)+3f'(x)+2f(x)$$
g est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$.

f est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation (E) : $y''+3y'+2y=g$

La solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $y''+3y'+2y=0$ est :

$y(x)=A.e^{-x}+Be^{-2x}$, $A,B\in\mathbb{R}$

(l'équation caractéristique $r^2+3r+2=0$ a pour solutions $r_1=-1$ et $r_2=-2$).

• Recherchons une solution particulière de (E) de la forme $z(x)=A(x).e^{-x}+B(x).e^{-2x}$ où A et B sont deux fonctions de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, qui vérifient de plus la condition (1) : $A'(x).e^{-x}+B'(x).e^{-2x}=0$

Alors $\forall x\in[0,+\infty[,\ z'(x)=\underbrace{A'(x).e^{-x}+B'(x).e^{-2x}}_{=0}-A(x).e^{-x}-2B(x).e^{-2x}$

et $z''(x)=-A'(x).e^{-x}-2B'(x).e^{-2x}+A(x).e^{-x}+4B(x).e^{-2x}$

z est solution de (E) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si :
$$\forall x\in[0,+\infty[,\ z''(x)+3z'(x)+2z(x)=g(x)$$
$$\iff \forall x\in[0,+\infty[,\ (-A'(x).e^{-x}-2B'(x).e^{-2x}+A(x).e^{-x}+4B(x).e^{-2x})$$
$$+3(-A(x).e^{-x}-2B(x).e^{-2x})+2(A(x).e^{-x}+B(x).e^{-2x})=g(x)$$
$$\iff \forall x\in[0,+\infty[,\ -A'(x).e^{-x}-2B'(x).e^{-2x}=g(x)$$

Les fonctions A' et B' sont solutions du système : $\begin{cases} A'(x).e^{-x}+B'(x).e^{-2x}=0\\ A'(x).e^{-x}+2B'(x).e^{-2x}=-g(x)\end{cases}$

d'où $A'(x)=g(x)e^{x}$ et $B'(x)=-g(x)e^{2x}$

et $A(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)e^t dt+cte_1$, $B(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)e^{2t}dt+cte_2$

La solution générale de (E) est donc :
$$y(x)=\left(\int_0^x g(t)e^t dt+\lambda\right)e^{-x}+\left(\int_0^x g(t)e^{2t}dt+\mu\right)e^{-2x}\qquad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

• f est une solution de (E) sur $[0,+\infty[$, donc
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\left(\int_0^x g(t)e^t dt+\lambda\right)e^{-x}+\left(\int_0^x g(t)e^{2t}dt+\mu\right)e^{-2x}\qquad(2)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$

Il reste à montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)e^{2t}dt\right)e^{-2x}=0$

Soit $\varepsilon>0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, il existe $A>0$ tel que $\forall t\geq A, |g(t)|\leq\varepsilon$
$$\forall x\geq A,\ \left(\int_0^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}=\left(\int_0^A g(t)e^t dt\right)e^{-x}+\left(\int_A^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}$$
$$\text{et }\left|\left(\int_A^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|\leq\left(\int_A^x |g(t)e^t|dt\right)e^{-x}\leq e^{-x}\int_A^x\varepsilon e^t dt=\varepsilon e^{-x}\left[\,e^t\right]_A^x=\varepsilon e^{-x}(e^x-e^a)\leq\varepsilon$$

Par ailleurs, pour ε donné, A est fixé et $\displaystyle\int_0^A g(t)e^t dt$ est un réel fixé, donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^A g(t)e^t dt\right)e^{-x}=0$

et $\exists B>A$ tel que $\forall x\geq B$, $\left|\left(\int_0^A g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|\leq\varepsilon$

Dès lors, $\forall x\geq B$, $\left|\left(\int_0^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|\leq\underbrace{\left|\left(\int_0^A g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|}_{\leq\varepsilon}+\underbrace{\left|\left(\int_A^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|}_{\leq\varepsilon}\leq 2\varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \forall x\geq B,\ \left|\left(\int_0^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}\right|\leq 2\varepsilon$, c'est à dire que

$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x g(t)e^t dt\right)e^{-x}=0$

On montre de même que $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x g(t)e^{2t} dt\right)e^{-2x}=0$

L'égalité (2) permet alors de conclure que $\boxed{\lim_{+\infty} f=0}$

2.14 Etude d'une fonction et calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1- Montrer que g est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Calculer $g(0)$ et $\lim_{+\infty} g$.

2- Montrer que g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et donner une expression intégrale de $g''(x)$.

En déduire que g est solution sur $]0,+\infty[$ d'une équation différentielle (E) du second ordre, linéaire, à coefficients constants.

3- Résoudre l'équation (E).

En déduire que $\forall x>0,\ g(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}du$.

Retrouver la valeur de $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

SOLUTION :

1- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$

• $\forall x\geq 0,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leq\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$ où la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Par majoration, l'intégrale $\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est donc convergente et $g(x)$ est défini.

• Si $x<0$, alors $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}=+\infty$ (croissance comparée puissace-exponentielle) et l'intégrale $\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est divergente.

Donc le domaine de défintion de la fonction g est $[0,+\infty[$.

• Notons $F(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ pour $(x,t)\in\underbrace{[0,+\infty[}_{J}\times\underbrace{[0,+\infty[}_{I}$

- pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto F(x,t)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $x\in J$, la fonction $t\mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $(x,t)\in J\times I$, $|F(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2}$ avec $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ continue et intégrable sur I. (H_3)

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ et affirmer que

$\boxed{g \text{ est continue sur } J=[0,+\infty[}$

• $g(0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=[\text{Arctan}(t)]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{g(0)=\frac{\pi}{2}}$$

• $\forall x>0,\ 0\leq g(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\leq\int_0^{\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}$

donc par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0}$

2- La fonction F admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$\forall(x,t)\in J\times I,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$

- pour tout $x\in J$, la fonction $t\mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J. (H'_1)
- pour tout $x\in J$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H'_2)

Soir $a>0$ quelconque,

- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times I$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}\right|\leq t.e^{-at}$ avec $t\mapsto t.e^{-at}$ continue et intégrable sur I'. (H'_3)

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=\int_{]0,+\infty[}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{\infty}\frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$$

• F admet une dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et

$\forall(x,t)\in J\times I,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)=\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$

- pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur J. (H''_1)
- pour tout $x\in J$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H''_2)

Soir $a>0$ quelconque,

- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times I$, $\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right|=\left|\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right|\leq e^{-at}$ avec $t\mapsto e^{-at}$ continue et intégrable sur I.

(H''_3)

Par application à nouveau du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ g''(x)=\int_{]0,+\infty[}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)dt=\int_0^{\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$$

• alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)+g''(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt+\int_0^{\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt=\int_0^{\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}$

Donc $\boxed{g \text{ vérifie l'équation différentielle } (E) : y''+y=\frac{1}{x} \text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[.}$

3- La solution générale de l'équation homogène (E_0) : $y''+y=0$ associée à (E) est :

$y(x)=\lambda\sin(x)+\mu\cos(x),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Recherchons une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation des constantes, c'est à dire sous la forme $y(x)=\lambda(x)\sin(x)+\mu(x)\cos(x)$ où λ et μ sont des fonctions inconnues, de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et en imposant la condition $\lambda'(x)\sin(x)+\mu'(x)\cos(x)=0$ (pour que les dérivées secondes de λ et μ n'apparaissent pas dans le calcul de $y''(x)$).

alors, $\forall x\in]0,+\infty[,\ y'(x)=\lambda(x)\cos(x)-\mu(x)\sin(x)+\underbrace{\lambda'(x)\sin(x)+\mu'(x)\cos(x)}_{0}$

et $y''(x)=-\lambda(x)\sin(x)-\mu(x)\cos(x)+\lambda'(x)\cos(x)-\mu'(x)\sin(x)$

y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\forall x\in]0,+\infty[,\ y''(x)+y(x)=\dfrac{1}{x}$

$\iff\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \lambda'(x)\cos(x)-\mu'(x)\sin(x)=\dfrac{1}{x}$

Le système d'équations $\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)\sin(x)+\mu'(x)\cos(x)=0\\ \lambda'(x)\cos(x)-\mu'(x)\sin(x)=\frac{1}{x}\end{array}\right.$ donne :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)=\dfrac{\cos(x)}{x}\\ \mu'(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x}\end{array}\right.$$

d'où $\left\{\begin{array}{l}\lambda(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du+cte\\ \mu(x)=-\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du+cte\end{array}\right.$

(on a pris la borne 1 mais tout autre réel de $]0,+\infty[$ conviendrait aussi, à l'exclusion de 0 car l'intégrale $\displaystyle\int_0^x\frac{\cos(u)}{u}du$ est divergente)

Une solution particulière de (E) est donc $y_1(x)=\sin x\displaystyle\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du-\cos x\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du$

et
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la solution générale de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est :}\\ y(x)=y_1(x)+\alpha\sin x+\beta\cos x=\left(\displaystyle\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du+\alpha\right)\sin x-\left(\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du+\beta\right)\cos x\\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{array}}$$

• g est **une** des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$, donc

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=\left(\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du+\alpha\right)\sin x-\left(\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du+\beta\right)\cos x$$

Chacune des deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ sont convergentes.

(étudié en cours, on intègre par parties pour avoir $\frac{1}{u^2}$ au dénominateur)

notons L_1 et L_2 leurs valeurs respectives.

$$g(x)=\underbrace{\left(\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du+\alpha\right)}_{\to L_1\ qd\ x\to+\infty}\sin x-\underbrace{\left(\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du+\beta\right)}_{\to L_2\ qd\ x\to+\infty}\cos x$$

A cause du déphasage entre les fonctions cos et sin, $g(x)$ ne peut avoir une limite nulle quand $x\to+\infty$ que si $L_1=L_2=0$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du+\alpha=0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du+\beta=0$

soit $\alpha=-\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du$ et $\beta=-\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$

d'où $g(x)=\left(\displaystyle\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}du-\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)\sin x-\left(\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}du-\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\right)\cos x$

$$g(x)=\left(-\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)\sin x+\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\right)\cos x$$

$$g(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)\cos(x)-\cos(u)\sin(x)}{u}du=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}du$$

Finalement, $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}du}$

• Notons qu'on ne peut pas sans justification remplacer x par 0 dans l'égalité $g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}du$ qui n'est valable à priori que pour $x\in]0,+\infty[$.

Utilisons plutôt la relation $g(x)=\left(-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)\sin x+\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\right)\cos x$

- Le terme $\left(\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\right)\cos x$ a pour limite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\right).1=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ quand $x\to 0$.

- Le terme $\left(-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)\sin x$ présente la forme indéterminée $\infty\times 0$

En scindant l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du$ en $\displaystyle\int_x^{1}\frac{\cos(u)}{u}du + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du}_{cte}$

et par la majoration $\displaystyle\left|\int_x^{1}\frac{\cos(u)}{u}du\right| \le \int_x^1 \frac{1}{u}du = -\ln x = |\ln x|$

on obtient $\displaystyle\left(-\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right) = O(\ln x)$ et puisque $\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$ on en conclut que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du\right)\sin x = 0$

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ et puisque g est continue sur $[0,+\infty[$, et en particulier au point 0, $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \frac{\pi}{2}$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}}$

2.15 Recherche de développement en série entière (1) :

La fonction $g\ :\ x\ \mapsto\ \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ admet elle un développement en série entière ?

SOLUTION :

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\Longrightarrow\ 4(x^2+1)g'^2(x) = g^2(x)$

$\Longrightarrow\ 8(x^2+1)g''(x)g'(x) + 8xg'^2(x) = 2g'(x)g(x)$

$\Longrightarrow\ 4(x^2+1)g''(x) + 4xg'(x) = g(x)$ (en simplifiant par $g'(x)$ qui ne s'annule jamais)

La fonction g est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ 4(x^2+1)y''+4xy'-y=0$

• Recherchons les séries entières solutions de (E) :

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R\neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x\in]-R,R[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

S est solution de (E) sur $]-R,R[\iff \forall x\in]-R,R[,\ 4(x^2+1)S''(x)+4xS'(x)-S(x)=0$

$$\iff \forall x\in]-R,R[,\ 4(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\iff \forall x\in]-R,R[, 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 4\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n + 4\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\iff \forall x\in]-R,R[,\ 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(4n^2-1)a_n\,x^n = 0$$

$$\iff \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(4(n+2)(n+1)a_{n+2} + (4n^2-1)a_n\right)x^n = 0$$

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ 4(n+2)(n+1)a_{n+2} + (4n^2-1)a_n = 0$ (par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+4)}a_n$$

on obtient alors : $a_2 = \dfrac{1}{2.4}a_0$, $a_4 = -\dfrac{3.5}{6.8}a_2$, $a_6 = -\dfrac{7.9}{10.12}a_4$, ... , $a_{2p} = -\dfrac{(4p-5)(4p-3)}{(4p-2).4p}a_{2p-2}$

donc $a_{2p} = (-1)^{p-1}\dfrac{1}{2.4}\dfrac{3.5}{6.8}\dfrac{7.9}{10.12}.....\dfrac{(4p-5)(4p-3)}{(4p-2).4p}a_0 = (-1)^{p-1}\dfrac{1.2.3.4.5.6.....(4p-3)(4p-2)}{(2.4.6.8.10....(4p-2))^2(4p)}a_0$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}(4p-2)!}{(2^{2p-1}(2p-1)!)^2 4p}a_0 = \frac{(-1)^{p-1}(4p-2)!}{2^{4p-1}(2p-1)!(2p)!}a_0$$

un calcul analogue donne $\quad a_{2p+1}=\dfrac{(-1)^p(4p)!}{2^{4p+2}(2p)!(2p+1)!}a_1$

Les séries entière solutions de (E) sont donc :

$$S(x)=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}(4p-2)!}{2^{4p-1}(2p-1)!(2p)!}x^{2p}+a_1\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(4p)!}{2^{4p+2}(2p)!(2p+1)!}x^{2p+1}$$

leur rayon de convergence est 1 (immédiat par le critère de d'Alembert)

Le coefficient $4(x^2+1)$ de l'équation différentielle (E) ne s'annulant pas , l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ forme un espace vectoriel de dimension 2.

Or les fonctions $\quad S_0(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}(4p-2)!}{2^{4p-1}(2p-1)!(2p)!}x^{2p}\quad$ et $\quad S_1(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(4p)!}{2^{4p}(2p)!(2p+1)!}x^{2p+1}$ sont linéairement indépendantes et forment donc une base de l'espace des solutions.

La fonction g s'exprime donc sur cette base : $\quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in]-1,1[,\ g(x)=\lambda S_0(x)+\mu S_1(x)$

Or $\quad g(0)=1=\lambda S_0(0)+\mu S_1(0)=\lambda\quad$ et $\quad g'(0)=\frac{1}{2}=\lambda S_0'(0)+\mu S_1'(0)=\mu$

donc finalement,

$$\boxed{g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}=S_0(x)+\frac{1}{2}S_1(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}(4p-2)!}{2^{4p-1}(2p-1)!(2p)!}x^{2p}+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(4p)!}{2^{4p}(2p)!(2p+1)!}x^{2p+1}}$$

2.16 Recherche de développement en série entière (2) :

La fonction $g\ :\ x\ \mapsto\ \mathrm{Arcsin}^2(x)$ admet elle un développement en série entière ?

Si oui, le calculer.

SOLUTION :

• La fonction Arcsin admet un développement en série entière sur $]-1,1[$, obtenu par intégration de celui de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et qui est :

$$\mathrm{Arcsin}(x)=x+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+...+\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Par un produit de Cauchy de ce développement par lui-même, on peut affirmer que la fonction $\mathrm{Arcsin}^2(x)$ admet une DSE sur $]-1,1[$.

• $\forall x\in]-1,1[,\ g'(x)=\dfrac{2\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ $ et donc $\ (1-x^2)g'^2(x)=4g(x)$

en dérivant à nouveau, $-2xg'^2(x)+2(1-x^2)g'(x)g''(x)=4g'(x)$

$g'(x)$ est non nul, sauf au point 0. Donc $\forall x\in]-1,1[-\{0\},\ -2xg'(x)+2(1-x^2)g''(x)=4$

Cette égalité se prolonge encore par continuité au point 0.

Donc g est solution sur l'intervalle $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-x^2)y''-xy'=2$

et g' est solution de l'équation linéaire du premier ordre $(F)\ :\ (1-x^2)y'-xy=2$

• Recherchons les séries entières solutions de (F) :

Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R\neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x\in]-R,R[,\ S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$

S est solution de (F) sur $]-R,R[\quad\iff\quad\forall x\in]-R,R[,\ \ (1-x^2)S'(x)-xS(x)=2$

$$\iff\quad\forall x\in]-R,R[,\ \ (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=2$$

$$\iff\quad\forall x\in]-R,R[,\ \ \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=2$$

$$\iff\quad\forall x\in]-R,R[,\ \ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=2$$

$$\iff \quad \forall x \in]-R,R[, \quad a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)a_{n+2} - na_n - a_n)x^{n+1} = 2$$
$$\iff \quad a_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$$
$$\iff \quad a_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)}a_n$$

On obtient alors pour les indices impairs : $a_1 = 2, \ a_3 = \dfrac{2}{3}a_1, \ a_5 = \dfrac{4}{5}a_3, \ldots . \ a_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}a_{2p-1}$

d'où $a_{2p+1} = \dfrac{2p.(2p-2)...6.4.2}{(2p+1)(2p-1)...5.3}a_1 = \dfrac{(2p.(2p-2)...6.4.2)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)...6.5.4.3.2}a_1$

$a_{2p+1} = \dfrac{(2^p.p\,!)^2}{(2p+1)!}a_1 = \dfrac{2^{2p+1}(p\,!)^2}{(2p+1)!}$

Pour les indices pairs : $a_2 = \dfrac{1}{2}a_0, \ a_4 = \dfrac{3}{4}a_2, \ldots . \ a_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p}a_{2p-2}$

d'où $a_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)...5.3.1}{2p.(2p-2)...6.4.2}a_0 = \dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)...6.5.4.3.2}{(2p.(2p-2)...6.4.2)^2}a_0 = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p\,!)^2}a_0$

puisque $\lim\left(\dfrac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_nx^n}\right) = x^2\lim\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) = x^2$, le rayon de convergence de chacune des deux séries destermes pairs et impairs est 1.

Les séries entière solutions de (F) sur $]-1,1[$ sont donc :

$$S(x) = a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p\,!)^2}x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p+1}(p\,!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

Elles forment un **espace affine de dimension 1**. On bien là **toutes** les solutions de (F) sur $]-1,1[$.

Donc $\exists\lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]-1,1[, \ g'(x) = \lambda\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p\,!)^2}x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p+1}(p\,!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$

Puisque $g'(0) = 0$, nécessairement, $\lambda = 0$ et donc $\forall x \in]-1,1[, \ g'(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p+1}(p\,!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$

Par intégration, compte tenu de la condition $g(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \ g(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p+1}(p\,!)^2}{(2p+2)!}x^{2p+2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^{2p-1}((p-1)\,!)^2}{(2p)!}x^{2p}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \mathrm{Arcsin}^2(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^{2p-1}((p-1)\,!)^2}{(2p)!}x^{2p}}$$

2.17 Etude d'une fonction et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}dt$

1- Montrer que g est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

2- Montrer que g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et calculer $g''(x)$ à l'aide des fonctions classiques.
En déduire $g'(x)$ et $g(x)$.

3- Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

SOLUTION :

1- Soit h la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$

Elle est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \overset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

La fonction ainsi prolongée, que nous appellerons encore h , est continue sur $[0,+\infty[$, dominée par $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ est donc convergente et $g(0)$ est défini.

Pour tout $x > 0$, $\forall t \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \dfrac{2}{t^2} e^{-xt} \leq 2e^{-xt}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ est convergente par majoration et $g(x)$ est défini.

Donc g est définie sur $[0, +\infty[$.

• Notons $F(x,t) = h(t)e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \underbrace{[0,+\infty[}_{J} \times \underbrace{[0,+\infty[}_{I}$

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $(x,t) \in J \times I$, $|F(x,t)| \leq h(t)$ avec h continue et intégrable sur I, comme montré ci-dessus. (H_3)

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ et affirmer que

$\boxed{g \text{ est continue sur } J = [0, +\infty[}$

2- La fonction F admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ continue sur $[0,+\infty[\times \underbrace{]0,+\infty[}_{I'}$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I',\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$$

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2)
- pour tout $t \in I'$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J. (H_1')
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2')

Soir $a > 0$ quelconque,

- pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times I'$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\right| \leq t.h(t)e^{-at}$ avec $t \mapsto t.h(t)e^{-at}$ continue et intégrable sur I'. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) dt = -\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} dt$$

• F admet une dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I',\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$$

- pour tout $t \in I'$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur J. (H_1'')
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2'')

Soir $a > 0$ quelconque,

- pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times I'$, $\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|(1-\cos t)e^{-xt}\right| \leq 2e^{-at}$ avec $t \mapsto 2e^{-at}$ continue et intégrable sur I'. (H_3'')

Par application à nouveau du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) dt = \int_0^{\infty} (1-\cos t)e^{-xt} dt$$

$$\forall x > 0,\ g''(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{\infty} \cos t\ e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{\infty} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(i-x)t}\right) dt$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{\infty}\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}}$

• Par intégration, $\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$g'(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)}} + \lambda$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (après prolongement par continuité en 0) , de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée sur $[0,+\infty[$.

Donc pour tout $x > 0$, $|g'(x)| = \left| \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \displaystyle\int_0^{\infty} M e^{-xt} dt = \frac{M}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

d'où il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ et donc $\lambda = 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}}$

• Par intégration, $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \displaystyle\int \ln(x)dx - \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)dx + \mu$

$$g(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}\left(x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx \right) + \mu \quad \text{(en intégrant par parties)}$$

$$g(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx + \mu$$

$$g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \mu$$

Par une majoration analogue à celle de $g'(x)$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et donc $\mu = \frac{\pi}{2}$

$$\text{(car } x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \sim -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}}$

g étant **continue en 0**, $g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2} = g(0)$
(puisque $\displaystyle\lim_0 (x\ln x) = 0$)

Donc $g(0) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

3- Par intégration par parties sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, puis par passage à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient :

$$\int_a^b (1-\cos t)\frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin t}{t}dt$$

et donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

2.18 Equation d'ordre n - Centrale

Soit n un entier positif et $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$

a) Quelle est la dimension sur $\mathbf{R}$ le l'espace vetoriel $S_{(E)}$ des solutions de l'équation différentielle (E) : $\quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$

b) Montrer que l'endomorphisme de dérivation laisse cet espace stable. Calculer la trace et le déterminant de l'endorphisme induit.

SOLUTION :

a) $S_{(E)}$ est un sous espace vectoriel de $C^n(\mathbf{R},\mathbf{R})$ espace des fonctions de classe C^n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Considérons l'application Φ qui à la fonction $f \in S_{(E)}$ fait correspondre la fonction vectorielle $X \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$: $\quad f \longrightarrow X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$

f est solution de l'équation $(E) \iff X$ est solution de l'équation (E') :

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} .X$$

Donc Φ est une application de $S_{(E)}$ dans $S_{(E')}$, sous espace des solutions de (E').

On sait que l'espace $S_{(E')}$ des solutions du système différentiel linéaire (E') est un espace de dimension n.

Φ est linéaire (immédiat) . Montrons que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel de $S_{(E)}$ dans $S_{(E')}$

Injectivité : Soit $f \in \ker \Phi$. Alors $\Phi(f) = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f = 0$

Ainsi, $\ker \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

Surjectivité : Soit $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{(E')}$. $\qquad Y' = A.Y$

donc $\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

ce qui donne, composante par composante :

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \quad y_1' = y_2 \quad ... \quad y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = -a_0 y_0 - a_1 y_1 - a_2 y_2 ... - a_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = y_0' \quad y_2 = y_1' = y_0'' \quad ... \quad y_{n-1} = y_0^{(n-1)} \\ y_0^{(n)} = -a_0 y_0 - a_1 y_0' - a_2 y_0'' ... - a_{n-1} y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Donc y_0 est solution de (E) et $Y = \Phi(y_0)$, ce qui montre que Φ est surjective.

Ainsi, Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $S_{(E)}$ sur $S_{(E')}$. Donc $\dim(S_{(E)}) = \dim(S_{(E')}) = n$

b) ♣ Soit f un élément de $S_{(E)}$.

$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + a_{n-2} f^{(n-2)}(x) + ... + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$

les a_i étant constants, en dérivant cette égalité, on vérifie que f' satisfait le même équation.

Donc $S_{(E)}$ est stable par l'endomorphisme de dérivation D.

Notons $\widetilde{D}$ l'endomorphisme induit par D sur $S_{(E)}$.

♣ Notons $(e_0, e_1, ..., e_{n-1}) = B$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ... \quad e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$ le système fondamental de solutions de (E') qui vérifie :

$Y_0(0) = e_0, \quad Y_1(0) = e_1, \quad ... \quad Y_{n-1}(0) = e_{n-1}$

Soit $W(x) = \det_B(Y_0(x), Y_1(x), ..., Y_{n-1}(x))$ le wronskien du système $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$

$W(0) = \det_B(e_0, e_1, ..., e_{n-1}) = 1 \neq 0$ qui montre que $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$ est bien une base de $S_{(E')}$

Soient alors $f_i = \Phi^{-1}(Y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1$ les images réciproques des Y_i par Φ.

$(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est une base de $S_{(E)}$ comme image par l'isomorphisme Φ^{-1} d'une base de $S_{(E')}$.

$$\Phi(f_0) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \\ \vdots \\ f_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = Y_0 \quad \text{et} \quad \Phi(f_0)(0) = Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(0) \\ f_0'(0) \\ \vdots \\ f_0^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$$

de sorte que $\quad f_0(0) = 1, \quad f_0'(0) = 0, \quad ... \quad f_0^{(n-1)}(0) = 0$

de même, $\quad f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 1, \quad ... \quad f_1^{(n-1)}(0) = 0$

et de manière générale, $\quad f_i^{(k)}(0) = \delta_{i,k}$

♣ Soit $g_0 = \widetilde{D}(f_0) = f_0'$

-Puisque $g_0 \in S_{(E)}$, il se décompose sur la base $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ de $S_{(E)}$

$$g_0 = f_0' = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i \quad \text{et pout tout } k, \quad g_0^{(k)} = f_0^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(k)}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-2\}$, $\quad g_0^{(k)}(0) = \underbrace{f_0^{(k+1)}(0)}_{\delta_{0,k+1}=0} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \underbrace{f_i^{(k)}(0)}_{\delta_{i,k}} = b_k$

donc $b_0 = b_1 = ... = b_{n-2} = 0$

pour $k = n-1$, $\quad g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$

or $f_0^{(n)}(0) + a_{n-1} \underbrace{f_0^{(n-1)}(0)}_{0} + ... + a_1 \underbrace{f_0'(0)}_{0} + a_0 \underbrace{f_0(0)}_{1} = 0$ donc $g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = -a_0$

donc $g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = -a_0 \qquad$ et $\quad b_{n-1} = -a_0$

d'où finalement, $\widetilde{D}(f_0) = f_0' = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(k)} = -a_0 f_{n-1}$

-Plus généralement, calculons $\widetilde{D}(f_j)$: $g_j = \widetilde{D}(f_j) = f_j' = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i$ puisque $\widetilde{D}(f_j) \in S_{(E)}$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-2\}$, $\quad g_j^{(k)}(0) = \underbrace{f_j^{(k+1)}(0)}_{\delta_{j,k+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \underbrace{f_i^{(k)}(0)}_{\delta_{i,k}} = c_k$

donc $c_0 = c_1 = ... = c_{j-2} = c_j = c_{n-2} = 0 \quad$ et $\quad c_{j-1} = 1$

pour $k = n-1$, $\quad g_j^{(n-1)}(0) = f_j^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \underbrace{f_i^{(n-1)}(0)}_{\delta_{i,n-1}} = c_{n-1}$

là encore, la relation $f_j^{(n)}(0) + a_{n-1} \underbrace{f_j^{(n-1)}(0)}_{0} + ... + a_j \underbrace{f_j^{(j)}(0)}_{1} + ... + a_0 \underbrace{f_j(0)}_{0} = 0$

entraîne que $f_j^{(n)}(0) = -a_j \qquad$ donc $\quad c_{n-1} = -a_j$

d'où finalement, $\widetilde{D}(f_j) = f_j' = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i = f_{j-1} - a_j f_{n-1}$

La matrice de $\widetilde{D}$ dans la base $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est donc

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f_0' & f_1' & f_2' & ... & f_{n-1}' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{array} \end{array}$$

C'est la matrice A du système (E')

♣ Alors $\mathrm{tr}(\widetilde{D}) = \mathrm{tr}(A) = -a_{n-1}$

et $\quad \det(\widetilde{D}) = \det(A) = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0$

$$\boxed{\mathrm{tr}(\widetilde{D}) = -a_{n-1} \quad \text{et} \quad \det(\widetilde{D}) = (-1)^n a_0}$$

2.19 ** Sous espace de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
a) Montrer qu'il existe une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ de F et une suite finie $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{array}{l} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{array}$$

En déduire que si une suite (h_n) d'éléments de F converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, alors $H \in F$ et (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé F.

b) On suppose de plus que le sous espace F est stable par translation, c'est à dire que pour toute fonction f de F, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow f(x+a)$ appartient encore à F.

b1) Montrer que $\forall f \in F, f' \in F$.

En déduire que $F \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

b2) Montrer que toute fonction $f \in F$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E_f) linéaire, d'ordre $\leq m$, à coefficients constants.

b3)) Montrer qu'il existe une équation différentielle (EE) linéaire, d'ordre m , à coefficients constants, dont toute fonction de F est solution.

c) Donner un exemple d'un tel espace F pour $m = 1$ et $m = 2$, avec D inversible.

SOLUTION :

a) Soit P_m la propriété : " Tout sous espace vectoriel F_m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie m admet une base $(g_1, g_2, ..., g_m)$ pour laquelle il existe des réels $(a_1, a_2, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ .... \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases} \quad "$$

• Pour $m = 1$, soit F_1 un sous espace vectoriel de dimension 1 de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit g une fonction non nulle de F_1 (il en existe car $F_1 \neq \{0\}$). g étant non nulle, il existe un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

La proposition P_1 est donc vérifiée.

• Supposons que la propriété P_{m-1} est vérifiée.

Soit F_m un sous espace vectoriel de dimension m de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit g_1 une fonction non nulle de F_m et un réel a_1 tel que $g_1(a_1) \neq 0$.

L'application $\varphi : h \rightarrow h(a_1)$ est une forme linéaire sur F_m, non nulle car $\varphi(g_1) = g_1(a_1) \neq 0$.

Son noyau H est un hyperplan de F_m, c'est à dire un sous espace de F_m de dimension $m-1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à H, il existe une base $(g_2, g_3, ..., g_m)$ de H et des réels $(a_2, a_3, ..., a_m)$ deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ .... \\ g_m(a_2) = g_m(a_3) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Aucun des $a_i, i \geq 2$, n'est égal à a_1 car $(g_2, g_3, ..., g_m)$, éléments de $H = \ker \varphi$, sont tous nuls en a_1, alors que $g_2(a_2) \neq 0, g_3(a_3) \neq 0, ..., g_m(a_m) \neq 0$

Finalement, les fonctions $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ de F_m vérifient : $\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ g_3(a_1) = g_3(a_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_3(a_3) \neq 0 \\ .... \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$

$(g_2, g_3, ..., g_m)$ est un système libre car c'est une base de H.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$ est libre aussi, sinon g_1 serait combainaison linéaire de $(g_2, g_3, ..., g_m)$, ce qui n'est pas possible car $(g_2, g_3, ..., g_m)$ s'annulent en a_1 et g_1 ne s'y annule pas.

$(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, système libre de m élémenst de l'espace F_m de dimension m, est une base de F_m.

• Soit $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $H \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $(g_1, g_2, ..., g_m)$ une base de F et $(a_1, a_2, ..., a_m)$ des réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} g_1(a_1) \neq 0 \\ g_2(a_1) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(a_2) \neq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(a_1) = g_m(a_2) = ... = g_m(a_{m-1}) = 0 \quad \text{et} \quad g_m(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Chaque h_n, élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{m,n}) \in \mathbb{R}^m$ tels que $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$

donc $\quad h_n(a_1) = \lambda_{1,n}\underbrace{g_1(a_1)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n}\underbrace{g_2(a_1)}_{=0} + ... + \lambda_{m,n}\underbrace{g_m(a_1)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,n} = -\dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)} = \underbrace{\dfrac{-1}{g_1(a_1)}}_{\mu_{1,1}} h_n(a_1)$

de même, $\quad h_n(a_2) = \lambda_{1,n}\underbrace{g_1(a_2)}_{\neq 0} + \lambda_{2,n}\underbrace{g_2(a_2)}_{\neq 0} + ... + \lambda_{m,n}\underbrace{g_m(a_2)}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \lambda_{1,n}g_1(a_2)}{g_2(a_2)}$

$\Rightarrow \lambda_{2,n} = \dfrac{h_n(a_2) - \dfrac{h_n(a_1)}{g_1(a_1)}g_1(a_2)}{g_2(a_2)} = \mu_{2,1}h_n(a_1) + \mu_{2,2}h_n(a_2) \quad$ ($\mu_{2,1}$ et $\mu_{2,2}$ ctes réelles indépendantes de n)

... et plus généralement, $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{k,n}$ ayant été déterminés, $\lambda_{k,n} = \dfrac{h_n(a_k) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n}g_i(a_k)}{g_k(a_k)}$

et en remplaçant les $\lambda_{i,n}$ déja calculés comme combinaisons linéaires de $h_n(a_1), h_n(a_2), ..., h_n(a_{k-1})$,

$\lambda_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}h_n(a_i)$, les $\mu_{k,i}, i = 1...k$ étant des constantes réelles indépendantes de n.

Par hypothèse de convergence simple de la suite de fonctions (h_n), pour tout $i = 1...m$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(a_i) = H(a_i)$,

donc pour tout k, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}h_n(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{k,i}h_n(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{k,i}H(a_i)$

Notons $\Lambda_k = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k,n}$

L'égalité $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$ entraîne que pour tout x réel,

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{1,n}g_1(x) + \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{2,n}g_2(x) + ... + \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{m,n}g_m(x) = \Lambda_1 g_1(x) + \Lambda_2 g_2(x) + ... + \Lambda_m g_m(x)$

Donc $H = \Lambda_1 g_1 + \Lambda_2 g_2 + ... + \Lambda_m g_m$, ce qui montre que H, s'écrivant comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de F, appartient à F.

Enfin, le calcul de la limite de la limite de $h_n = \lambda_{1,n}g_1 + \lambda_{2,n}g_2 + ... + \lambda_{m,n}g_m$ s'effectuant composante par composante dans la base $(g_1, g_2, g_3, ..., g_m)$, la suite (h_n) converge vers H dans l'espace vectoriel normé de dimension fnie F. (peu importe le choix de la norme sur F puisq'il est de dimension finie)

b1) Soit $f \in F$.

• F étant stable par translation, pour tout entier n, la fonction $f_n \;:\; x \longrightarrow \dfrac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ appartient encore à F.

Or pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f'(x)$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f'.

On en déduit d'après la question précédente que $f' \in F$.

• Soit $f \in F$. Alors $f' \in F$. Donc f' est C^1 et f est C^2. Par récurrence immédiate, f est dérivable à tout ordre, donc est C^∞.

b2) Soit $f \in F$. On vient de montrer que F est stable par dérivation. Donc les fonctions $f, f', f", f^{(3)}, ..., f^{(m)}$ sont dans F. Elles forment un système de $m+1$ vecteurs dans un espace de dimension m. Ce système est donc lié.

Donc il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ (dépendants à priori de f) tels que $\alpha_0 f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f" + ... + \alpha_m f^{(m)} = 0$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_f) : $\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y" + ... + \alpha_m y^{(m)} = 0$.

C'est bien une équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre $\leq m$ (α_m ou d'autres coefficients peuvent être nuls)

b3) Notons D l'endomorphisme de dérivation de F.

Soit χ_D son polynôme caractéristique : $\chi_D(X) = \beta_m X^m + ... + \beta_1 X + \beta_0$

C'est un polynôme annulateur de D. Donc $\beta_m D^m + ... + \beta_1 D + \beta_0 Id_F = 0$

Donc $\forall f \in F, \quad \beta_m D^m(f) + ... + \beta_1 D(f) + \beta_0 f = 0_F$

Toute fonction f de F est donc solution de l'équation différentielle (EE) :

$$\beta_m y^m + ... + \beta_2 y'' + \beta_1 y' + \beta_0 y = 0$$

Oral Cachan

1- Étudier les valeurs propres réelles et les valeurs propres complexes d'une matrice A réelle et antisymétrique : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA = -A$

Montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

2- On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (${}^tA = -A$) et le système différentiel :

$$\mathscr{S}: \quad X'(t) = A.X(t)$$

a) Montrer que les trajectoires de $\mathscr{S}$ sont dans un sous espace affine dirigé par $\mathrm{Im}(A)$, et que $X(t)$ a une norme constante.

b) Lorsque $n = 3$, montrer que les trajectoires sont des cercles (décrits en entier) et sont périodiques.

SOLUTION :

1 - • Soit λ une valeur propre réelle de A : $\exists V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), A.V = \lambda.V$

alors $\underbrace{{}^tV.A.V}_{matrice\ 1-1} = {}^t({}^tV.A.V) = {}^tV.{}^tA.V = -{}^tV.A.V$ donc ${}^tV.A.V = 0$

${}^tV.A.V = {}^tV.(\lambda.V) = \lambda.\underbrace{\|V\|^2}_{\neq 0} = 0$ donc $\lambda = 0$ $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}}$

• Soit λ une valeur propre complexe de A : $\exists V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), A.V = \lambda.V$

alors $\underbrace{{}^t\overline{V}.A.V}_{matrice\ 1-1} = {}^t\overline{V}.\lambda.V = \lambda\,{}^t\overline{V}.V = \lambda(\overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + ... + \overline{x_n}x_n) = \lambda\|V\|^2$

$\underbrace{{}^t\overline{V}.A.V}_{matrice\ 1-1} = {}^t({}^t\overline{V}.A.V) = {}^tV.{}^tA.\overline{V} = -\,{}^tV.A.\overline{V}$ (A est antisymétrique)

$= -\,{}^tV.\overline{A}.\overline{V}$ (A est réelle)

$= -\,{}^tV.\overline{A.V} = {}^tV.\overline{\lambda.V} = -\overline{\lambda}\,{}^tV.\overline{V} = -\lambda(x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + ... + x_n\overline{x_n}) = -\overline{\lambda}\|V\|^2$

donc $\lambda = -\overline{\lambda}$ et $\boxed{\lambda \text{ est un imaginaire pur}}$.

• Soient $X \in \ker(A)$ et $Y \in \mathrm{Im}(A)$; $\exists Z \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ Y = AZ$.

$< X, Y >= {}^tX.Y = {}^tX.A.Z = {}^t({}^tX.A.Z) = {}^tZ.{}^tA.X = -\,{}^tZ.\underbrace{A.X}_{=0} = 0$

donc $\boxed{\ker(A) \perp \mathrm{Im}(A)}$

Les deux sous espaces $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont en somme directe.

D'après la formule de Grassmann et le théorème du rang,

$\dim(\ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A)) = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$

L'inclusion $\ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^n$ et l'égalité des dimensions entraînent que $\ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Les sous espaces } \ker(A) \text{ et } \mathrm{Im}(A) \text{ sont supplémentaires orthogonaux}}$

2 - a) • Soit $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, solution de $\mathscr{S}$: $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A.X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

En intégrant entre 0 et t :

$$X(t)-X(0)=\int_0^t X'(u)du=\int_0^t A.X(u)du=A.\int_0^t X(u)du \quad \text{(car } A \text{ est constante)}$$

$$=\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, C_n \right).\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{(en écrivant } A\\ \text{par blocs colonnes)}\end{array}$$

$$=\underbrace{x_1(t)C_1+x_2(t)C_2+\dots+x_n(t)C_n}_{\in Im(A)=Vect(C_1,C_2,\dots,C_n)}$$

$X(t)=X(0)+x_1(t)C_1+x_2(t)C_2+\dots+x_n(t)$, ce qui montre que

$\boxed{X(t) \text{ est dans le sous espace affine de } \mathbb{R}^n \text{ passant par le point } X(0) \text{ et dirigé par } \mathrm{Im}(A)}$

- Soit $X\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ une solution de $\mathscr{S}$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{d}{dt}\left(\|X(t)\|^2\right)=\dfrac{d}{dt}\left(<X(t),X(t)>\right)=<X'(t),X(t)>+<X(t),X'(t)>$

$\dfrac{d}{dt}\left(\|X(t)\|^2\right)=2<X(t),X'(t)>=2<X(t),A.X(t)>$

or $<X(t),A.X(t)>=\underbrace{{}^tX(t).A.X(t)}_{matrice\ 1-1}={}^t\left({}^tX(t).A.X(t)\right)={}^tX(t).{}^tA.X(t)=X(t).(-A).X(t)$

$<X(t),A.X(t)>=-<X(t),A.X(t)>$ $\qquad$ (A est antisymétrique)

donc $<X(t),A.X(t)>=0$

$\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{d}{dt}\left(\|X(t)\|^2\right)=0$, ce qui montre que $\boxed{\|X(t)\| \text{ est une fonction constante}}$.

2 - b) On suppose que $n=3$ et que A est une matrice antisymétrique non nulle.

- $\chi_A(x)=-x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\chi_A(x)=\underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

La fonction χ_A étant continue, elle s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists t_0\in\mathbb{R},\ \chi_A(t_0)=0$

Or on a vu que 0 était la seule valeur propre réelle possible de A, donc $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0\}}$.

Donc 0 est valeur propre, $\ker(A)$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension ≥ 1.

- $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ A=\begin{pmatrix} 0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$.

A n'étant pas nulle, l'un des réels a,b ou c est non nul.

Si $a\neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & a\\ -a & 0\end{vmatrix}=a^2\neq 0$, les colonnes C_1 et C_2 de la matrice A forment un système libre.

Si $c\neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{vmatrix}=c^2\neq 0$, les colonnes C_2 et C_3 de la matrice A forment un système libre.

Si $b\neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & b\\ -b & 0\end{vmatrix}=b^2\neq 0$, les colonnes C_1 et C_3 de la matrice A forment un système libre.

dans tous les cas, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3)\geqslant 2$

d'après le théorème du rang, $\underbrace{\dim(\ker A)}_{\geqslant 1}+\underbrace{\dim(\mathrm{Im}A)}_{\geqslant 2}=n=3$

donc $\boxed{\dim(\ker A)=1 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}A)=2}$

- Considérons une base orthormale (u,v) de $\mathrm{Im}(A)$ et w un vecteur unitaire de $\ker(A)$.

Puisque $\ker A$ et $\mathrm{Im}A$ sont supplémentaires orthogonaux, (u,v,w) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Soit X une solution de $\mathscr{S}$. Puisque la trajectoire est incluse dans le plan affine passant par $X(0)$ et dirigé par $\mathrm{Im}A$, il existe deux fonctions α et β telles que :

$\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)-X(0)=\alpha(t)u+\beta(t)v$

$\mathrm{Im}(A)$ est stable par A, l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Im}(A)$ est antisymétrique, sa matrice dans la base (u,v) est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \mu\\ -\mu & 0\end{pmatrix}$. Donc $A.u=-\mu v$ et $A.v=\mu u$

En dérivant : $\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=\alpha'(t)u+\beta'(t)v=A.X(t)=A.X(0)+\alpha(t)A.u+\beta(t)A.v$

$A.X(0)\in\mathrm{Im}(A)$ se décompose sur la base (u,v) : $A.X(0)=\alpha_0u+\beta_0v$

$X'(t)=\alpha_0u+\beta_0v+\alpha'(t)u+\beta'(t)v=\mu\beta(t)u-\mu\alpha(t)v$

$$\implies \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha'(t)+\alpha_0=\mu\beta(t) \\ \beta'(t)+\beta_0=-\mu\alpha(t) \end{cases}$$

$$\implies \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha''(t)=\mu\beta'(t)=-\mu^2\alpha(t)-\mu\beta_0 \\ \beta''(t)=-\mu\alpha'(t)=-\mu^2\beta(t)+\mu\alpha_0 \end{cases}$$

$$\implies \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha''(t)+\mu^2\alpha(t)=-\mu\beta_0 \\ \beta''(t)+\mu^2\beta(t)=\mu\alpha_0 \end{cases}$$

$$\implies \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha(t)=a\cos(\mu t)+b\sin(\mu t)-\frac{\beta_0}{\mu} \\ \beta(t)=c\cos(\mu t)+d\sin(\mu t)+\frac{\alpha_0}{\mu} \end{cases}$$

Les conditions initiales $\alpha(0)=0$ et $\beta(0)=0$ donnent : $\begin{cases} a=\frac{\beta_0}{\mu} \\ c=-\frac{\alpha_0}{\mu} \end{cases}$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha(t)=\frac{\beta_0}{\mu}\left(\cos(\mu t)-1\right)+b\sin(\mu t) \\ \beta(t)=\frac{\alpha_0}{\mu}\left(1-\cos(\mu t)\right)+d\sin(\mu t) \end{cases}$$

et en dérivant : $\begin{cases} \alpha'(t)+\alpha_0=\mu\beta(t) \\ \beta'(t)+\beta_0=-\mu\alpha(t) \end{cases} \implies \begin{cases} -\beta_0\sin(\mu t)+b\mu\cos(\mu t)+\alpha_0=\alpha_0(1-\cos(\mu t))+\mu d\sin(\mu t) \\ \alpha_0\sin(\mu t)+d\mu\cos(\mu t)+\beta_0=\beta_0\left(1-\cos(\mu t)\right)-\mu b\sin(\mu t) \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} -\beta_0=\mu d \\ -\alpha_0=\mu b \end{cases} \implies \begin{cases} b=-\frac{\alpha_0}{\mu} \\ d=-\frac{\beta_0}{\mu} \end{cases}$$

d'où : $\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha(t)=\frac{\beta_0}{\mu}\left(\cos(\mu t)-1\right)-\frac{\alpha_0}{\mu}\sin(\mu t) \\ \beta(t)=\frac{\alpha_0}{\mu}\left(1-\cos(\mu t)\right)-\frac{\beta_0}{\mu}\sin(\mu t) \end{cases}$