Espaces prehilbertiens et euclidiens

1 Espaces préhilbertiens

1.1 Forme bilinéaire ** :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, ($X$ et Y vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$), on pose :

$$\phi(X,Y) = \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^tY \\ \hline X & A \end{array}\right)$$

A quelle condition sur A, ϕ est elle symétrique ? définie positive ?

(RÉPONSE : $\mathrm{Com}(A)$ symétrique, A définie-négative)

SOLUTION **:** Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\phi(X,Y) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & y_1 & \dots & y_n \\ \hline x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & y_1 \quad \dots \quad y_n \\ \hline x_1 & L_1 \\ \vdots & \dots \\ x_n & L_n \end{array}\right)$$

En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\phi(X,Y) = 0 - x_1 \det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ L_n \end{pmatrix} + x_2 \det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_1 \\ L_3 \\ ... \\ ... \\ L_n \end{pmatrix} + ...$$

$$... + (-1)^i \det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_1 \\ ... \\ L_{i-1} \\ L_{i+1} \\ ... \\ L_n \end{pmatrix} + ... + (-1)^n x_n \det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_1 \\ L_2 \\ ... \\ ... \\ L_{n-1} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant $\det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_1 \\ ... \\ L_{i-1} \\ L_{i+1} \\ ... \\ L_n \end{pmatrix}$ suivant la première ligne, le déterminant mineur qui apparait en rayant la j^e colonne est le déterminant mineur de A d'indices ligne-colonne respectifs (i,j).

donc $\det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ L_n \end{pmatrix} = y_1\Delta_{1,1} - y_2\Delta_{1,2} + ... + (-1)^{n-1} y_n \Delta_{1,n}$

($\Delta_{i,j}$ est le déterminant obtenu en rayant la i^e ligne et la j^e colone de la matrice A)

et de manière générale, $\det \begin{pmatrix} {}^tY \\ L_1 \\ ... \\ L_{i-1} \\ L_{i+1} \\ ... \\ L_n \end{pmatrix} \begin{aligned} &= y_1\Delta_{i,1} - y_2\Delta_{i,2} + ... + (-1)^{n-1} y_n \Delta_{i,n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} y_j \Delta_{i,j} \end{aligned}$

donc $\phi(X,Y)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^i x_i\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}y_j\Delta_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(-1)^{i+j-1}\Delta_{i,j}\right)$

$$\phi(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\times(-\mathrm{Com}(A)_{i,j})\right)=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\mathrm{Com}(A)_{i,j}$$

$$\boxed{\phi(X,Y)=-(x_1\ ...\ x_n).\ \mathrm{Com}(A)\ .\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=-\,{}^tX.\mathrm{Com}(A).Y}$$

• Notons $(V_1,V_2,...,V_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n=\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad V_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longleftarrow i^e$ composante

Si ϕ est symétrique, alors, $\forall(i,j)\in\{1,2,...,n\}^2$,

$\phi(V_i,V_j)=-\,{}^tV_i.\mathrm{Com}(A).V_j=-\mathrm{Com}(A)_{i,j}=\phi(V_j,V_i)=-\,{}^tV_j.\mathrm{Com}(A).V_i=-\mathrm{Com}(A)_{j,i}$

donc $\mathrm{Com}(A)_{i,j}=\mathrm{Com}(A)_{j,i}$ et $\mathrm{Com}(A)$ est une matrice symétrique.

Réciproquement, si la matrice $\mathrm{Com}(A)$ est symétrique, alors,

$\forall(X,Y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \phi(X,Y)=-\,{}^tX.\mathrm{Com}(A).Y=-{}^t({}^tX.\mathrm{Com}(A).Y)$ (matrice 1-1)

$\phi(X,Y)=-\,{}^tY.\mathrm{Com}(A).X=\phi(Y,X)$

En conclusion, $\boxed{\text{la forme bilinéaire } \phi \text{ est symétrique si et seulement si } \mathrm{Com}(A) \text{ est une matrice symétrique}}$.

Remarque : Il est clair que si A est symétrique, alors ϕ l'est aussi. Mais cette condition n'est que suffisante.

• La matrice de ϕ dans la base canonique $(V_1,V_2,...,V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est la matrice $-\mathrm{Com}(A)$

Donc ϕ est définie positive si et seulement si la matrice $-\mathrm{Com}(A)$ l'est, si et seulement si A est définie négative.

1.2 Espace euclidien (ORAL CCP) :

Soit E un espace préhilbertien réel tel qu'il existe une famille $(e_1,...,e_n)$ de vecteurs unitaires vérifiant:

$$\forall x\in E,\ \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2=\|x\|^2$$

Montrer que la famille $(e_1,...,e_n)$ est orthonormale, et en déduire que E est de dimension finie que l'on précisera.

SOLUTION **:** On suppose qu'il existe une famille $(e_1,...,e_n)$ de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x\in E,\ \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2=\|x\|^2$$

en particulier, pour tout vecteur e_j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_j|e_i)^2=\|e_j\|^2$

donc $(e_j|e_1)^2+(e_j|e_2)^2+...+(e_j|e_j)^2+...+(e_j|e_n)^2=\|e_j\|^2=(e_j|e_j)^2$

$\Longrightarrow\ (e_j|e_1)^2+...+(e_j|e_{j-1})^2+(e_j|e_{j+1})^2+...+(e_j|e_n)^2=0$

La somme de ces $n-1$ termes positifs ou nuls est nulle, donc chaque terme de la somme est nul:

$\forall i\neq j,\ (e_j|e_i)=0$

Le système $(e_1,...,e_n)$ est formé de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. C'est donc un **système orthonormal** de E.

En conséquence, c'est un système libre de E.

• Montrons que $(e_1,...,e_n)$ est un système générateur de E.

Il s'agit de prouver que le sous espace $F=\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n))$ est égal à E.

Supposons au contraire que $F\subsetneq\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)$. Il existe alors un vecteur z orthogonal à F.

(puisque F est de dimension finie, $F\oplus F^\perp=E$)

Par hypothèse, $\|z\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(z|e_i)}_{=0}{}^2=0$

donc $\|z\|=0$ et $z=0$. Donc $F^\perp=\{0\}$ et $F=E$.

Donc $(e_1,...,e_n)$ est un système générateur de E. C'est une base orthonormale de E. Ce qui montre que E est un espace de dimension finie n.

1.3 Suites de carré sommable (1) :

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge :

$l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \quad \text{converge} \}$

a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, que l^2 est un espace vetoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $\phi :\ ((u_n),(v_n)) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur l^2.

b) Soit $(u_n) \in l^2$, une série à termes positifs ou nuls.

Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} \leq \pi \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{6}}$ et dire pour quelles suites (u_n) il y a égalité.

c) Soit $(u_n) \in l^2$, une série à termes quelconques. Montrer que $\sum \frac{u_n}{2^n}$ converge et déterminer le plus petit réel $A > 0$ tel que : $\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| \leq A \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ et dire pour quelles suites (u_n) il y a égalité.

SOLUTION :

a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

• ϕ est bilinéaire et symétrique sur $l^2 \times l^2$ (immédiat)

Soit $(u_n) \in l^2$, non nulle : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} \neq 0$

$$\text{alors } \phi((u_n),(u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \geq u_{n_0}^2 > 0$$

Donc ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l^2 , c'est à dire un produit scalaire.

b) Soit $(u_n) \in l^2$, une série à termes positifs ou nuls.

Notons encore $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ la suite prolongée par un terme nul en indice 0. $\left(\dfrac{1}{n}\right) \in l^2$ puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, d'après a), la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ converge.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = \left\langle (u_n), \left(\frac{1}{n}\right) \right\rangle = \left| \left\langle (u_n), \left(\frac{1}{n}\right) \right\rangle \right| \leq \|(u_n)\|. \left\| \left(\frac{1}{n}\right) \right\|$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}. \sqrt{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}}} = \pi \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{6}}$$

Il y a égalité si et seulement si les suites (u_n) et $\left(\frac{1}{n}\right)$ sont liées, si et seulement si

$$u_0 = 0 \ \text{ et } \ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\lambda}{n}$$

c) Soit $(u_n) \in l^2$. $\left(\dfrac{1}{2^n}\right) \in l^2$ puisque $\sum \dfrac{1}{4^n}$ converge, donc, d'après a) la série $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$ converge.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| = \left| \left\langle (u_n), \left(\frac{1}{2^n}\right) \right\rangle \right| \leq \|(u_n)\|. \left\| \left(\frac{1}{2^n}\right) \right\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}. \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$$

$$\left(A = \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Il y a égalité si et seulement si les suites (u_n) et $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ sont liées, si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\lambda}{2^n}$$

1.4 Fonctions de carré intégrable :

E est l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, et dont le carré est intégrable sur J.

1- Montrer que E est un espace vectoriel réel et que l'application Φ :
$(f,g) \mapsto \int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

2- Soit $f \in E$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ est convergente et que :

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt\right|^2 \leq \int_1^{+\infty} f^2(t)dt$$

Quand y a-t-il égalité ?

SOLUTION :

1- Soient f et g deux élements de E et α un scalaire réel. Alors la fonction $\alpha f+g$ est continue sur J comme somme de fonctions continues.

$\forall t \in [1,+\infty[, (\alpha f+g)^2(t) = \alpha^2 \underbrace{f^2(t)+g^2(t)}_{integrables\ sur\ J} +2\alpha f(t)g(t)$

$|f(t)g(t)| \leq \frac{f^2(t)+g^2(t)}{2}$ (car $f^2(t)+g^2(t)-2|f(t)g(t)| = (|f(t)|-|g(t)|)^2 \geq 0$)

ce qui montre par majoration que $t \mapsto f(t)g(t)$ est intégrable sur J.

donc $t \mapsto (\alpha f+g)^2(t)$ est intégrable sur J et $\alpha f+g \in E$

E n'est pas vide, car contient la fonction nulle, est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur J.

2- Soit $f \in E$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t}$ appartient à E car est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'après l'étude de la question précédente, on en déduit que $h : t \mapsto f(t)h(t) = \frac{f(t)}{t}$ appartient à E. Donc $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur J et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ est convergente.

de plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt\right|^2 = |\Phi(f,h)|^2 \leq \Phi(f,f).\Phi(h,h) = \int_1^{+\infty} f^2(t)dt.\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 dt;$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_0^{+\infty} = 1$ donc $\left|\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt\right|^2 \leq \int_1^{+\infty} f^2(t)dt$

• Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux vecteurs f et h sont liés, si et seulement il existe un réel λ tel que $\forall t \in J,\ f(t) = \frac{\lambda}{t}$

1.5 Pas de supplémentaire orthogonal :

1. $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application $\Phi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$
   Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de sous espace supplémentaire orthogonal.

SOLUTION **:**

1. La forme Φ est bilinéaire symétrique. (pas de difficulté)

   Montrons qu'elle est définie positive :

   Soit $P \in E$, non nul. La fonction polynomiale P n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$, sinon le polynôme $P(X)$ serait nul pour avoir une infinité de racines.

   La fonction $t \mapsto P^2(t)$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Il s'ensuit que $\int_0^1 P^2(t)dt > 0$, donc $\Phi(P,P) > 0$.

   Φ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, c'est à dire un produit scalaire.

2. Soit $P(X) \in F^\perp$. Alors $X.P(X) \in F$

   donc $\Phi(XP(X)\ ,\ P(X)) = \int_0^1 tP^2(t)dt = 0$

   Or la fonction $t \mapsto tP^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$. Son intégrale étant nulle, c'est la fonction nulle. Donc $\forall t \in [0,1], tP^2(t) = 0$. Donc $\forall t \in]0,1], P(t) = 0$.

   Le polynôme $P(X)$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

   On a ainsi montré que $F^\perp = \{0\}$

   Il s'ensuit que F n'admet pas de sous espace supplémentaire orthogonal, car un tel sous espace G serait inclus dans $F^\perp = \{0\}$.

1.6 Suites de carré sommable (2) :

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge :

$$l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \quad \text{converge } \}$$

a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, que l^2 est un espace vetoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $\phi : \ ((u_n), (v_n)) \ \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur l^2.

b) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum (n.a_n)^2$ converge.
Montrer que $\sum a_n \sin(nx)$ converge pour tout réel x et que sa somme est une fction continue de x.

SOLUTION :

a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0 \quad$ d'où $\quad 0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

• ϕ est bilinéaire et symétrique sur $l^2 \times l^2 \qquad$ (immédiat)

Soit $(u_n) \in l^2$, non nulle : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ u_{n_0} \neq 0$

$$\text{alors } \phi((u_n), (u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \geq u_{n_0}^2 > 0$$

Donc ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l^2 , c'est à dire un produit scalaire.

b) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum (n.a_n)^2$ converge. On peut définir la suite pour l'indice 0 en posant $a_0 = 0$. Même chose pour les autres suites qui ne seraient pas définies en 0.

Puisque $(n.a_n)_{n\geq 0}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ appartiennent à l^2 , la série $\sum n.a_n.\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sum a_n$ converge absolument.

Notons alors $v_n(x) = a_n \sin(nx)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ |a_n \sin(nx)| \leq |a_n| \quad$ donc $\quad \| v_n \|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq |a_n|$

Chaque fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc la fonction somme $x \ \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2.1 Sujet 1 :

Déterminer $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n / \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n\}$

SOLUTION

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^n$, espace vetoriel des vecteurs colonnes muni du produit scalaire canonique.

$X \in E \Longleftrightarrow \big(< X, U >= n \text{ et } < X, X >= \|X\|^2 = n \ \big)$

Soit $X \in E$, $\underbrace{| < X, U > |^2}_{n^2} \quad \leq \quad < X, X >< U, U >= \underbrace{\|X\|^2}_{n} \underbrace{\|U\|^2}_{n}$

Puisqu'il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz, les vecteurs X et U sont colinéaires.

Donc $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X = \lambda U$

mais $< X, U >= n =< \lambda U, U >= \lambda < U, U >= \lambda n$ donc $\lambda = 1$ et $X = U$

Conclusion : $\boxed{E = \{U\}}$

2.2 Sujet 2 :

Soit M une matrice réelle symétrique non nulle.

Montrer que $\dfrac{(\text{tr}M)^2}{\text{tr}(M^2)} \leq \text{rg}(M)$

SOLUTION

M^2 est réelle symétrique positive ,

$$(\forall X \in M_{n,1}(R), {}^t X.M^2.X = {}^t(M.X).(M.X) = \|M.X\|^2 \geq 0)$$

donc ses valeurs propres $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sont positives ou nulles, et non toutes nulles.

donc $\mathrm{tr}(M^2) = \sum \mu_i > 0$

Soit r le rang de M et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres non nulles , les $n-r$ dernières valeurs propres de M étant 0.

$$\text{alors } (\mathrm{tr}M)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 = < (1,...,1,0,...,0), (\lambda_1,...,\lambda_r,0,...,0) >^2$$

$$\leq \| (1,...,1,0,...,0) \|^2 . \| (\lambda_1,...,\lambda_r,0,...,0) \|^2 = r.\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$$

Les λ_i^2 sont les valeurs propres de M^2

(car $M = P.\mathrm{diag}(\lambda_i).P^{-1} \Rightarrow M^2 = P.\mathrm{diag}(\lambda_i^2).P^{-1}$, M est diagonalisable car réelle symétrique)

$$\text{donc } (\mathrm{tr}M)^2 \leq r.\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \leq r.\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = r.\mathrm{tr}(M^2) \qquad \text{(en notant } M^2 = (b_{i,j}))$$

et puisque $\mathrm{tr}(M^2) > 0$, on obtient $\dfrac{(\mathrm{tr}M)^2}{\mathrm{tr}(M^2)} \leq r = \mathrm{rg}(M)$.

2.3 Sujet 3 :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice orthogonale réelle d'ordre n. Montrer que $\left|\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}\right| \leq n$

SOLUTION :

• **Première idée :** On introduit la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & ... & 1 \end{pmatrix}_n = (1)_{i,j}$ et on munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Alors $\sum_{i,j} a_{i,j} = \sum_{i,j} a_{i,j}.1 = \langle A, J\rangle$

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{j}\left(\sum_{i} a_{i,j}^2\right) = 1+1+...+1 = n \quad \text{ et } \quad \|J\|_2^2 = \sum_{i,j} 1 = n^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'affirmer que : $|\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}| = |\langle A, J\rangle| \leq \|A\|_2.\|J\|_2 = n\sqrt{n}$

On n'obtient pas le résultat souhaité.

• **Deuxième idée :** Puisque la matrice A est orthogonale, ses colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Soit U le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$

Alors, pour tout j, $< C_j, U >= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$

$$\text{donc } \sum_{i,j}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} < C_j, U > = \left\langle \sum_{j=1}^{n} C_j, U \right\rangle$$

$$\text{et donc } \left|\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}\right| = \left|\left\langle \sum_{j=1}^{n} C_j, U \right\rangle\right| \leq \|C_1 + C_2 + ... + C_n\| . \|U\| \quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

Or $\|C_1 + C_2 + ... + C_n\|^2 = \|C_1\|^2 + \|C_2\|^2 + ... + \|C_n\|^2 = 1+1+...+1 = n$

(théorème de Pythagore, les colonnes de A sont deux à deux orthogonales et normées)

et $\|U\| = \sqrt{1+1+...+1} = \sqrt{n}$

finalement, $\left|\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}\right| \leq \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$

2.4 Extrema :

Soit n un entier naturel non nul et $\mathscr{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, formé des permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$

Calculer les valeurs minimales et maximales, lorsque s décrit $\mathscr{S}_n$, de $f(s)=\sum_{k=1}^{n} k.s(k)$

SOLUTION : En introduisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$<(x_1,x_2,..,x_n),(y_1,y_2,..,y_n)>=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$$

pour tout $s\in\mathscr{S}_n$,

$$f(s)=\sum_{k=1}^{n} k.s(k)=<(1,2,...,n),(s(1),s(2),...,s(n))>\leqslant \|(1,2,...,n)\|.\|(s(1),s(2),...,s(n))\|$$

(inégalité de Cauchy - Schwarz)

$$\|(1,2,...,n)\|^2=\|(s(1),s(2),...,s(n))\|^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc $f(s)\leqslant \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ avec égalité si et seulement si $(s(1),s(2),...,s(n))$ est colinéaire à $(1,2,...,n)$, si et seulement si $s=I$ (permutation identité)

Donc $\boxed{\max_{s\in\mathscr{S}_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k.s(k)\right)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

• Dans le produit $1.s(1)+2.s(2)+...+(n-1)s(n-1)+n.s(n)$, n est le plus grand nombre, et sa contribution sera minimale lorsque $s(n)$ est le plus petit possible, c'est à dire lorsque $s(n)=1$.

Le nombre suivant, $n-1$, apportera ensuite une contribution minimale lorsque $s(n-1)$ est le plus petit possible, c'est à dire lorsque $s(n-1)=2$. Et ainsi de suite.

On doit donc avoir : $\begin{cases} s(n)=1 \\ s(n-1)=2 \\ ... \\ s(k)=n+1-k \\ ... \\ s(1)=n \end{cases}$

alors $\min_{s\in\mathscr{S}_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k.s(k)\right)=\sum_{k=1}^{n} k.(n+1-k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$=(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{6}(3(n+1)-(2n+1))$$

$\boxed{\min_{s\in\mathscr{S}_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k.s(k)\right)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}}$

2.5 Intégrale de l'inverse (1) :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive en tout point.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\geq (b-a)^2\frac{1}{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}$. Peut il y avoir égalité ?

SOLUTION :

Puisque f ne s'annule pas sur $[a,b]$, la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable.

Etant continue, positive et non identiquement nulle, son intégrale est >0.

L'application $(f,g)\longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{R})$

Par application de la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2\leq \int_a^b \sqrt{f(t)}^2\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2dt$$

donc $\left(\displaystyle\int_a^b dt\right)^2=(b-a)^2\leq\left(\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right)\left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$

soit, finalement, $\boxed{\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\geq\frac{(b-a)^2}{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}}$

Il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont liées, c'est à dire si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \sqrt{f}=\lambda\dfrac{1}{\sqrt{f}}\iff\exists\lambda\in\mathbb{R},f=\lambda$ c'est à dire si et seulement si f est une fonction constante.

2.6 Intégrale de l'inverse (2) :

Soit $\Phi \ : \ E = C^0([a,b],\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Montrer que Φ est minoré sur E et calculer $\inf\limits_{f\in E} \Phi(f)$

Φ est elle majorée ?

SOLUTION :

L'application $\Psi \ : \ (f,g) \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

D'après la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\forall f \in E, \quad \left|\int_a^b \left(\sqrt{f(t)}.\sqrt{\frac{1}{f(t)}}\right)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}^2\right)\left(\int_a^b \sqrt{\frac{1}{f(t)}}^2 dt\right)$$

Donc $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \overset{(1)}{\geq} \left|\int_a^b dt\right|^2 = (b-a)^2$ et $(b-a)^2$ est un minorant de Φ.

Il y a égalité dans (1) si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{f}}$ sont liées,

$$\iff \quad \exists\lambda \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{f} = \lambda\sqrt{\frac{1}{f}}$$

$$\iff \quad \exists\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad f = \lambda$$

Donc $\boxed{\inf\limits_E \Phi = (b-a)^2}$

• Soit M un réel positif (aussi grand qu'on veut)

Soit f la fonction affine par morceaux et continue, qui vaut M sur $\left[a \ , \ a+\dfrac{b-a}{3}\right]$ et qui vaut $\dfrac{1}{M}$ sur $\left[b-\dfrac{b-a}{3} \ , \ b\right]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^{a+\frac{b-a}{3}} Mdt = \frac{b-a}{3}M$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq \int_{b-\frac{b-a}{3}}^b Mdt = \frac{b-a}{3}M$, donc

$\Phi(f) \geq \dfrac{(b-a)^2}{9}M^2$ et $\boxed{\text{la fonction } \Phi \text{ n'est pas majorée.}}$

3 Projecteurs

3.1 Projecteur orthogonal :

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

Déterminer l'image d'un vecteur $x = (a,b,c)$ par la projection p sur le sous espace H d'équation $2x+y-3z = 0$, et donner la matrice de p dans la base canonique.

SOLUTION :

• Les vecteurs $v_1 = (1,-2,0)$ et $v_2 = (0,3,1)$ forment une base du plan H d'équation $2x+y-3z = 0$

Appliquons le procédé d'orthogonalisation de Schmitt pour obtenir une base orthogonale :

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1 \end{cases}$$

$< w_1, w_2 >= 0 \iff < v_1, v_2 + \lambda w_1 >= 0 \iff < v_1, v_2 > +\lambda < v_1, v_1 >= 0$

$$\iff \lambda = -\frac{< v_1, v_2 >}{< v_1, v_1 >} = -\frac{-6}{5} = \frac{6}{5}$$

d'où $w_2 = v_2 + \lambda w_1 = (0,3,1) + \frac{6}{5}(1,-2,0) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1)$

en normant ces vecteurs, on obtient finalement :

$w_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, $w_2 = (\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}})$

Si $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, son projeté sur le plan H est donné par la relation :

$p(x) =< w_1, x > w_1+ < w_2, x > w_2 = (\frac{a}{\sqrt{5}} - \frac{2b}{\sqrt{5}})w_1 + (\frac{6a}{\sqrt{70}} + \frac{3b}{\sqrt{70}} + \frac{5c}{\sqrt{70}})w_2$

$p(x) = \frac{a-2b}{5} \times (1,-2,0) + (\frac{6a+3b+5c}{70}) \times (6,3,5) = \left(\frac{5}{7}a - \frac{1}{7}b + \frac{3}{7}c, -\frac{1}{7}a + \frac{13}{14}b + \frac{3}{14}c, \frac{3}{7}a + \frac{3}{14}b + \frac{5}{14}c\right)$

La matrice de la projection p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{13}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

• Autre méthode :

Soit $X' = (x, y, z)$ le projeté de $X = (a, b, c)$

X est déterminé par les deux condition suivantes : $\left\{\begin{array}{c} X' \in H \\ X' - X \in H^{\perp} \end{array}\right.$

$X' \in H \iff 2x + y - 3z = 0$

$X' - X = (x - a, y - b, z - c) \in H^{\perp} \iff \dfrac{x-a}{2} = \dfrac{y-b}{1} = \dfrac{z-c}{-3}$

On obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = a - 2b \\ 3y + z = 3b + c \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} z = -3y + 3b + c \\ x = 2y + a - 2b \\ 2(2y + a - 2b) + y - 3(-3y + 3b + c) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z = -3y + 3b + c \\ x = 2y + a - 2b \\ 14y = -2a + 13b + 3c \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{2}{7}a + \frac{13}{7}b + \frac{6}{14}c + a - 2b = \frac{5}{7}a - \frac{1}{7}b + \frac{3}{7}c \\ y = -\frac{1}{7}a + \frac{13}{14}b + \frac{3}{14}c \\ z = -3y + 3b + c = \frac{3}{7}a - \frac{39}{14}b - \frac{9}{14}c + 3b + c = \frac{3}{7}a + \frac{3}{14}b + \frac{5}{14}c \end{array}\right.$

On retrouve bien les mêmes expressions qu'avec la méthode précédente, et la même matrice.

3.2 Projecteurs orthogonaux :

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal (c'est à dire $\mathrm{Im}p \perp \ker p$)

(ii) $p^* = p$ (p^* est l'endomorphisme adjoint de p)

(iii) p est 1-lipschitzien

b) PO, ensemble des projecteurs orthogonaux de E est il un compact de $L(E)$?

SOLUTION : a) Supposons que p soit un projecteur orthogonal (c'est à dire $\mathrm{Im}p \perp \ker p$)

p étant un projecteur, $\mathrm{Im}p \oplus \ker p = E$

Soient x et $y \in E$. $\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Im}p \times \ker p, x = x_1 + x_2$

$\exists (y_1, y_2) \in \mathrm{Im}p \cap \ker p, y = y_1 + y_2$

$< p(x), y > = < p(x_1) + \underbrace{p(x_2)}_{=0}, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 + y_2 >$ ($p(x_1) = x_1$ car $x_1 \in \mathrm{Im}p = \mathrm{Inv}p$)

$< p(x), y > = < x_1, y_1 > + \underbrace{< x_1, y_2 >}_{=0} = < x_1, y_1 >$

Par ailleurs $< x, p(y) > = < x_1 + x_2, y_1 > = < x_1, y_1 > + \underbrace{< x_2, y_1 >}_{=0} = < x_1, y_1 >$

donc $\forall (x, y) \in E^2, < p(x), y > = < x, p(y) >$, ce qui montre que $p^* = p$ (p est symétrique, ou auto-adjoint)

On a ainsi montré que $(i) \Longrightarrow (ii)$

• Supposons que $p^* = p$.

Sont $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathrm{Im}p$ et $x_2 \in \ker p$

$\|p(x)\|^2 = \|x_1\|^2$ et $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ (th. de Pythagore)

donc $\|p(x)\| = \|x\|$, ce qui montre, puisque p est linéaire, que p est lipschitzienne de rapport 1.

On a ainsi montré que $(ii) \Longrightarrow (iii)$

• Supposons que p est lipschitzienne de rapport 1.

Soient $x \in \mathrm{Im}p$ et $y \in \ker p$, et montrons que x et y sont orthogonaux.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\|p(x + ty)\|^2 = \|x\|^2 \leqslant \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t < x, t > + t^2\|y\|^2$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $t(2 < x, t > + t\|y\|^2) \geqslant 0$

Or, si $< x, y > \neq 0$, le polynôme $P(t) = t(2 < x, t > + t\|y\|^2)$ admet deux racines réelles, à savoir 0 et $-\frac{2<x,t>}{\|y\|^2}$, et il change de signe en traversant l'une et l'autre de ces racines. Ce qui est contraire avec le résultat : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t(2 < x, t > + t\|y\|^2) \geqslant 0$.

donc $< x, y > = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Im}p$ et $y \in \ker p$, ce qui montre que $\mathrm{Im}p \perp \ker p$, et que p est un projecteur orthogonal.

b) -PO est borné car $\forall p \in PO, \|p\| \leq 1$

- Soit(p_n) une suite d'éléments de PO, qui converge dans $L(E)$ vers $q \in L(E)$. (peu importe la norme, $L(E)$ est de dimension finie)

L'application $(f, g) \to f_o g$, de $L(E) \times L(E)$ dans $L(E)$, est bilinéaire, donc continue, puisque E est de dimension finie, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n\,o} p_n = (\lim\limits_{n\to\infty} p_n)_o (\lim\limits_{n\to\infty} p_n)$

et, puisque $p_{n\,o} p_n = p_n$, par passage à la limite, $q_o q = q$

q est un projecteur

L'application $f \to f^*$, de $L(E)$ dans lui-même, est linéaire, donc continue, donc

$\lim\limits_{n\to\infty} (p_n{}^*) = (\lim\limits_{n\to\infty} p_n)^*$

et puisque pour tout $n, p_n{}^* = p_n$, il s'ensuit que $q = q^*$

q est donc un projecteur orthogonal.

On a ainsi montré que toute suite cconvergente d'éléments de PO a sa limite dansPO, c'est à dire que PO est un fermé de $L(E)$

PO, fermé et borné, est un compact de l'espace vectoriel normé $L(E)$

3.3 Matrice de projection sur sur une droite (ORAL CCP) :

On considère un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Soit $v \in E$, de vecteur colonne V dans la base $\mathscr{B}$.

Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur la droite $\mathscr{D} = \text{Vect}(v)$ est la matrice $A = \dfrac{V.{}^tV}{{}^tV.V}$

SOLUTION :

L'espace euclidien E est muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Notons f la projection orthogonale sur la droite $\mathscr{D} = \text{Vect}(v)$

On sait que puisque la base est orthonormale, le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E, de matrices colonnes respectives X et Y dans la base $\mathscr{B}$ s'exprime par la relation :

$$< x, y >= {}^tX.Y$$

Soit $u = \dfrac{v}{\|v\|}$

Si v a pour vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors u apour vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1/\|v\| \\ v_2/\|v\| \\ \vdots \\ v_n/\|v\| \end{pmatrix}$

La j^e colonne de A est formée des composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$

La projection $f(e_j)$ est donnée par la formule :

$$f(e_j) =< u, e_j > u \qquad \text{(car } u \text{ est à lui seul une BON de } \mathscr{D})$$

$$f(e_j) =< u, e_j > u = \left\langle \sum_{k=1}^{n} u_k e_k \ , \ e_j \right\rangle u = u_j.u \ \text{ a pour vecteur colonne } \begin{pmatrix} u_j u_1 \\ u_j u_2 \\ \vdots \\ u_j u_n \end{pmatrix}$$

donc $A = \begin{pmatrix} u_1u_1 & ... & u_ju_1 & ... & u_nu_1 \\ u_1u_2 & ... & u_ju_2 & ... & u_nu_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1u_n & ... & u_ju_n & ... & u_nu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} .(u_1 \ ... \ u_j \ ... \ u_n)$

$$A = \frac{V}{\|v\|}.\frac{{}^tV}{\|v\|} \quad \text{or} \quad \|v\|^2 = {}^tV.V \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{V\ .\ {}^tV}{\|v\|^2} = \frac{V\ .\ {}^tV}{{}^tV\ .\ V}}$$

Remarque : Bien faire attention aux dimensions des matrices :

V est une matrice colonne, ${}^tV$ est une matrice ligne, $V\ .\ {}^tV$ est une matrice n - n,

${}^tV\ .\ V$ est une matrice 1 - 1 .

3.4 Hyperplan affine :

$\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire canonique, déterminer les extrema éventuels de la norme euclidienne sur l'ensemble $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$

SOLUTION :

Notons H l'hyperplan affine $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$ et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On demande les extrema de $\{\|x\|, x \in H\}$

• En considérant, pour λ réel quelconque, le vecteur $v = (\lambda, -\lambda + 1, 0, 0, ..., 0)$ qui appartient à H et a pour norme $\sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}$ aussi grande que l'on veut, il est clair que $\boxed{\sup_{x \in H} \|x\| = +\infty}$

• Le minimum de $\{\|x\|, x \in H\}$ est aussi le minimum de $\{\|x+e_1\|, x+e_1 \in H\}$ ou aussi de $\{\|x+e_1\|, x \in H - e_1\}$

$H - e_1$ est le translaté de l'hyperplan H par le vecteur $-e_1$.

$H - e_1 = \{(x_1 - 1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$

$\quad = \{(x'_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x'_1 + x_2 + ... + x_n = 0\} = H_0$

On est ainsi ramené à rechercher le minimum de $\{\|x + e_1\|, x \in H_0\}$, c'est à dire la distance du vecteur$-e_1$ à l'hyperplan vectoriel H_0.

D'après le théorème de la projection, on sait que ce minimum sera $\|v+e_1\|$ où v est le projeté orthogonal de $-e_1$ sur H_0 : $d(-e_1,H_0)=d(-e_1,v)=\|v+e_1\|$

Reste à calculer v, projeté orthogonal de $-e_1$ sur H_0.

Soit $v=(v_1,v_2,...,v_n)$. $v\in H_0$ donc $v_1+v_2+...+v_n=1$

Le vecteur $u=(1,1,...,1)$ est une base de la droite $H_0^{\perp}$

$v-(-e_1)=v+e_1\in H_0^{\perp}$ donc $v+e_1=(v_1+1,v_2,...,v_n)$ est colinéaire à $u=(1,1,...,1)$

$\implies v_1+1=v_2=...=v_n$

$\implies v_1+v_2+...+v_n=1=nv_1+(n-1)$

$\implies v_1=\dfrac{2-n}{n}$ et $\forall i\geq 2,\ v_i=\dfrac{2}{n}$

ainsi, $v+e_1=\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{2}{n},...,\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{2}{n}u$

finalement, $\boxed{\inf_{x\in H}\|x\|=d(-e_1,H_0)=\|v+e_1\|=\dfrac{2}{n}\|u\|=\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$

3.5 Distance entre projecteurs * :

a) Montrer que l'application : $(G,H)\mapsto \mathrm{tr}({}^tG.H)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

On notera $\|\quad\|$ la norme euclidienne associée.

b) Soit $V={}^t(v_1,v_2,...,v_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$

Calculer la matrice de la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par V.

c) Soient Pet Q deux matrices canoniquement associées à des projecteurs orthogonaux de rang 1. Calculer $\|P-Q\|$ en fonction de l'angle entre ImP et ImQ.

SOLUTION : a) voir le cours.

b) Soit p la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par V.

Puisque V est unitaire, il constitue une base orthogonale de Imp et

$\forall x\in\mathbb{R}^n, p(x)=<x,V>V$

Notons $(e_1,e_2,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

C'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $V=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}v_ie_i$

$\forall i\in\{1,2,...,n\}, p(e_i)=<e_i,V>V=v_i.V$

$$P=\begin{pmatrix} v_1^2 & v_2v_1 & \dots & v_nv_1\\ v_1v_2 & v_2^2 & \dots & v_nv_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1v_n & v_2v_n & \dots & v_n^2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1.V & v_2.V & \dots & v_nV\end{array}\right)\quad\text{(colonne par colonne)}$$

$$P=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.(v_1,v_2,...,v_n)=V.{}^tV$$

Finalement, $\boxed{P=V.{}^tV}$

c) Soient Pet Q deux matrices canoniquement associées à des projecteurs orthogonaux p et q de ranq 1.

d'après la question précédente, $\exists(U,V)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ P=U.{}^tU$ et $Q=V.{}^tV$

alors $\|P-Q\|^2=\mathrm{tr}({}^t(P-Q).(P-Q))$

$\|P-Q\|^2=\mathrm{tr}({}^t(U.{}^tU-V.{}^tV).{}^t(U.{}^tU-V.{}^tV))$

$=\mathrm{tr}(U.{}^tU-V.{}^tV).(U.{}^tU-V.{}^tV))$

$=\mathrm{tr}(U.{}^tU.U.{}^tU+V.{}^tV.V.{}^tV-U.{}^tU.V.{}^tV-V.{}^tV.U.{}^tU)$

or ${}^tU.U=(u_1,u_2,...,u_n).\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=1$ et de même ${}^tV.V=1$

et ${}^tU.V={}^tV.U=u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n=<U,V>$

donc $\|P-Q\|^2=\mathrm{tr}(U.{}^tU+V.{}^tV-U.\underbrace{{}^tU.V}_{<U,V>}.{}^tV-V.\underbrace{{}^tV.U}_{<U,V>}.{}^tU)$

$=\mathrm{tr}(U.{}^tU+V.{}^tV-<U,V>U.{}^tV-<U,V>V.{}^tU$

or $\mathrm{tr}(U.{}^tV)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} v_1u_1 & v_2u_1 & \dots & v_nu_1\\ v_1u_2 & v_2u_2 & \dots & v_nu_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1u_n & v_2u_n & \dots & v_nu_n\end{pmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n=<U,V>$

et de la même manière, $\mathrm{tr}(U.{}^tU)=\|U\|^2=1$ et $\mathrm{tr}(V.{}^tV)=\|V\|^2=1$

donc $\|P-Q\|^2=2-2<U,V>^2$

Si θ est l'angle des droites ImP et ImQ, alors $< U, V >= \cos(\theta)$
d'où $\| P - Q \|^2 = 2 - 2\cos^2(\theta) = 2\sin^2(\theta)$ et finalement, $\boxed{\| P - Q \| = \sqrt{2}\sin(\theta)}$

3.6 Norme d'un projecteur * :

Soient F et G deux sous espaces supplémentaires d'un espace euclidien E

On définit $c = \sup\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$

a) Montrer que $c \in [0, 1]$, qu'il existe $x_0 \in F$ et $y_0 \in G$, unitaires, tels que $c =< x_0, y_0 >$.

Peut-on avoir $c = 0$? $c = 1$? Si oui à quelle condition ?

On note $\theta_0 = \arccos c$ et θ_0 est appelé "angle des sous espaces F et G"

Que vaut $\sup\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$?

b) Soit p le projecteur sur F de direction G.

Calculer $|||p|||$.

$$\text{(on rappelle que } |||p||| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\| p(x) \|}{\| x \|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \| p(x) \| = \sup_{\|x\|=1} \| p(x) \| \text{)}$$

SOLUTION :

a) Pour $x \in F$ tel que $\| x \| \leq 1$, et $y \in G$ tel que $\| y \| \leq 1$,

$$| < x, y > | \leq \| x \| . \| y \| \leq 1 \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Donc $\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$ est majoré et sa borne supérieure c est définie, inférieure ou égale à 1.

Puisque $< x, -y >= - < x, y >$, l'ensemble comprend des nombres ≥ 0 et $c \geq 0$

Donc $c \in [0, 1]$.

Soient $B_F = \{x \in F, \| x \| \leq 1\}$ et $B_G = \{y \in G, \| y \| \leq 1\}$.

Ce sont des boules fermées donc des compacts de E.

L'application
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & < x, y > \end{array}$$

est bilinéaire donc continue (E est de dimension finie)

L'image du compact $B_F \times B_G$ est un compact, donc est fermé et contient sa borne supérieure c.

Ainsi $\exists (x_0, y_0) \in B_F \times B_G$ tel que $< x_0, y_0 >= c$

Remarquons que l'ensemble $\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$ est centré en 0 (car $< x, -y >= - < x, y >$) donc la borne inférieure de cet ensemble est l'opposée de sa borne supérieure. Cet ensemble est $[-c, c]$.

- Si $c = 0$, alors $\forall x \in F, \forall y \in G, < x, y >= 0$, F et G sont orthogonaux.

- le cas $c = 1$ est exclu car alors $< x_0, y_0 >= c = 1 =\| x_0 \| . \| y_0 \|$, donc $x_0 \in F$ et $y_0 \in G$ sont colinéaires (Cauchy-Schwarz), non nuls, ce qui est impossible car F et G sont en somme directe.

b) $|||p||| = \sup_{\|x\|=1} \| f(x) \|$

- Soit $x \in E$ quelconque tel que $\| x \| = 1$. $\exists a \in F, \exists b \in G, x = a + b$

et alors $p(x) = a$

$\| x \|^2 = 1 = \| a \|^2 + \| b \|^2 + 2 < a, b >$

or $\quad -c \leq \left\langle \dfrac{a}{\| a \|}, \dfrac{b}{\| b \|} \right\rangle \leq c \quad$ et donc $\quad -c \| a \| . \| b \| \leq < a, b > \leq c \| a \| . \| b \|$

donc $1 = \| a \|^2 + \| b \|^2 + 2 < a, b > \;\geq\; \| a \|^2 + \| b \|^2 - 2c \| a \| . \| b \|$

$1 \geq (\| b \| - c \| a \|)^2 + \| a \|^2 - c^2 . \| a \|^2 = (\| b \| - c \| a \|)^2 + \sin^2(\theta_0) \| a \|^2$

$\sin^2(\theta_0) \neq 0$ car $c \neq 1$

donc $\sin^2(\theta_0) \| a \|^2 \leq 1$ et $\| a \| = \| p(x) \| \leq \dfrac{1}{\sin \theta_0}$

Donc $|||p||| \leq \dfrac{1}{\sin \theta_0}$

- Considérons $(x_0, y_0) \in B_F \times B_G$ tel que $< x_0, y_0 >= c$ et soit $z = x_0 - c.y_0$

$\| p(z) \| = \| x_0 \| = 1$

et $\| z \|^2 = \| x_0 \|^2 + c^2 \| y_0 \|^2 - 2c < x_0, y_0 >= 1 + c^2 - 2c^2 = \sin^2 \theta_0$

donc $\dfrac{\| p(z) \|}{\| z \|} = \dfrac{1}{\sin \theta_0}$, ce qui achève de montrer que $\boxed{|||p||| = \dfrac{1}{\sin \theta_0}}$

3.7 Projecteur sur hyperplan :

Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe de dimension finie n.

1. Soients F et G deux sous espace vectoriel de E.

   Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

   et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

2. Soient $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base orthonormale de E, $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{C}^n-\{(0,0,...,0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,x_k=0$ dans la base B.

   a) Déterminer le sous espace orthogonal de H.

   b) Déterminer la distance du vecteur $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,e_k$ de E au sous-espace vectoriel H.

3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ défini par :

$$x=\sum_{k=1}^{n} x_k\,e_k\in P \quad\Longleftrightarrow\quad x_1+x_2+x_3+x_4=x_2+2x_3+3x_4=0$$

   a) Déterminer une base orthonormale de P.

   b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de E sur P.

SOLUTION :

1. • Soit $x\in(F+G)^{\perp}$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$ et donc à tout vecteur de F et à tout vecteur de G (puisque $F\subset F+G$ et $G\subset F+G$)
   d'où $x\in F^{\perp}$ et $x\in G^{\perp}$ et finalement $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$. Donc $(F+G)^{\perp}\subset F^{\perp}\cap G^{\perp}$
   • Soit $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$. Pour tout $y\in F+G$, $\exists(a,b)\in F\times G,\ y=a+b$
   $<x,y>=<x,a+b>=<x,a>+<x,b>=0+0=0$
   ($<x,a>=0$ car $x\in F^{\perp}$ et $a\in F$, $<x,b>=0$ car $x\in G^{\perp}$ et $b\in G$)
   Donc $F^{\perp}\cap G^{\perp}\subset(F+G)^{\perp}$ et la double inclusion donne l'égalité.
   Ainsi, $\boxed{(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}}$
   • Dans un espace de dimension finie, pour tout sous espace, $(F^{\perp})^{\perp}=F$
   donc $(F\cap G)^{\perp}=((F^{\perp})^{\perp}\cap(G^{\perp})^{\perp})^{\perp}\underset{(1)}{=}((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp})^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$
   ((1) provient de l'égalité précédente appliquée à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$)
   Donc, $\boxed{(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}}$

2. a) Soit $\alpha=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\,e_k$

   Pour tout vecteur $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,e_k,\ \in H\ \in H$,

$$<\alpha,x>=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\,e_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\,e_k\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\overline{\overline{a_k}}x_k=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=0$$

   donc $\alpha\in H^{\perp}$ et comme H est un hyperplan de E, son orthogonal est une droite de E qui contient le vecteur α. Ce dernier n'étant pas nul, $H^{\perp}=\mathrm{Vect}(\alpha)$

   b) Soit $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,e_k,\ \in E$.

   Soit $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\,e_k$ le projeté de x sur l'hyperplan H.

   Puisque $y\in H$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,y_k=0$ (1)

   Puisque $x-y\in H^{\perp}=\mathrm{Vect}(\alpha)$, $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, $\dfrac{y_1-x_1}{\overline{a_1}}=\dfrac{y_2-x_2}{\overline{a_2}}=...=\dfrac{y_n-x_n}{\overline{a_n}}=\lambda$ (2)

   (l'équation $\dfrac{y_i-x_i}{\overline{a_i}}=\lambda$ étant remplacée par $y_i-x_i=0$ lorsque $a_i=0$)

   donc pour tout i, $y_i=x_i+\lambda\,\overline{a_i}$ (vrai encore si $a_i=0$)

   En reportant dans (1), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,(x_k+\lambda\,\overline{a_k})=0$ d'où $\lambda=-\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\,x_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}$

et finalement, $d(x,H)^2 = \|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k\right|^2}{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$

3. P est formé des solutions d'un système de 2 équations à 4 inconnues, de rang 2 (les équations ne sont pas proportionnelles), c'est un sous espace de dimension 2 (un plan).

   P est l'intersection des plans H_1 et H_2 d'équations respectives $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $x_2+2x_3+3x_4=0$ donc, d'après la première question, $P^\perp = (H_1 \cap H_2)^\perp = H_1^\perp + H_2^\perp$

   $H_1^\perp$ est la droite engendrée par le vecteur u' de composantes $(1,1,1,1)$

   $H_2^\perp$ est la droite engendrée par le vecteur v' de composantes $(0,1,2,3)$

   Transformons u', v' en une base orthogonale par le procédé de Schmitt :

   $u'' = u'$

   et $v'' = v' + \beta u'$

   β est choisi de telle manière que $u'' \perp v''$: $\beta = -\dfrac{< u', v' >}{< u', u' >} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

   Donc $v" = (0,1,2,3) - \frac{3}{2}(1,1,1,1) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

   Il reste à normer ces vecteurs pour avoir un base orthonormée de $P^\perp$:

   $u = \dfrac{u''}{\|u''\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $v = \dfrac{v''}{\|v''\|} = (-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}})$

4 Endomorphismes orthogonaux ; isométries vectorielles :

4.1 Etude d'une transformation de l'espace :

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

a) f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature de f et ses caractéristiques géométriques.

b) Même question lorsque

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION :

a) A est une matrice orthogonale (ses vecteurs colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^3$). Donc f est un automorphisme orthogonal (isométrie vectorielle)

$\det(A) = \det(f) = 1$ (après calculs sans difficulté) donc f est une isométrie directe. C'est donc une rotation vectorielle. (éventuellement réduite à Id_E)

L'ensemble des vecteurs invariants de f est la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(après calculs sans difficulté).

f est donc une rotation d'axe la droite D engendrée par $\overrightarrow{k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (une fois normé)

Dans une base orthonormée directe bien choisie, la matrice de f est de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(A) = -\dfrac{5}{9}$ et $\cos(\theta) = -\dfrac{7}{9}$

dans ce cas simple, on remarque que le vecteur $\overrightarrow{j} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. est orthogonal à $\overrightarrow{k_1}$

On peut compléter la base par le vecteur $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k_1})$ est alors une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de f est R.
On peut récupérer $\sin(\theta)$ en calculant le produit scalaire $< f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{j} >$:
La matrice colonne de $f(\overrightarrow{i})$ est :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/9\sqrt{2} \\ 8/9\sqrt{2} \\ 7/9\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sin(\theta) = < f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{j} > = \left\langle \begin{pmatrix} -7/9\sqrt{2} \\ 8/9\sqrt{2} \\ 7/9\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

donc $\begin{cases} \cos(\theta) = -\dfrac{7}{9} \\ \sin(\theta) = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} \end{cases}$ $\quad \theta = \text{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right) = \pi - \text{Arcsin}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est la rotation de l'espace d'axe } D \text{ dirigé par le vecteur } \overrightarrow{k_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{et d'angle } \theta = \text{Arccos}\left(-\frac{7}{9}\right) = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)}$$

b) $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport au plan d'équation } x - 4y - z = 0}$

4.2 Etude d'une isométrie :

Soit E un espace euclidien, $a \in E$ et $k \in \mathbb{R}$, non nuls .
Soit $f : E \to E$, définie par : $\forall x \in E, f(x) = x + k. < a, x > a$.
a) A quelle condition sur a et k, f est elle une isométrie ?
b) Déterminer alors sa nature et ses caractéristiques .

SOLUTION :
a) $\forall x \in E, \|f(x)\|^2 = < x + k < a, x > a \ , \ x + k < a, x > a >$
$= \|x\|^2 + 2 < x \ , \ k < a, x > a > + \|k < a, x > a\|^2.$
$= \|x\|^2 + 2k < a, x >< a, x > + k^2 < a, x >^2 \|a\|^2$
$= \|x\|^2 + < a, x >^2 (2k + k^2\|a\|^2)$
f est une isométrie $\iff$ f conserve la norme
$\iff \forall x \in E, \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$
$\iff \forall x \in E, < a, x >^2 (2k + k^2\|a\|^2) = 0$
$\iff 2k + k^2\|a\|^2 = 0$ $\quad$ (car on peut trouver x tel que $< a, x > \neq 0$, par ex. $x = a$)
$\iff k = -\dfrac{2}{\|a\|^2}$

b) $\forall x \in E, f(x) = x - \dfrac{2 < a, x >}{\|a\|^2} a$

• Recherchons les vecteurs invariants par f :
$f(x) = x \iff \dfrac{2 < a, x >}{\|a\|^2} a = 0 \iff < a, x > = 0$
L'ensemble des vecteurs invariants par f est l'hyperplan orthogonal au vecteur a.

• par ailleurs, $f(a) = a - \dfrac{2 < a, a >}{\|a\|^2} a = a - 2a = -a$
donc $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur } a}$

4.3 Série d'endomorphismes antisymétriques * :

E est un espace euclidien de dimension 3, orienté.
On rappelle la formule du double produit vectoriel :
$\forall a, b, c \in E, \ a \wedge (b \wedge c) = < a, c > b - < a, b > c$
Soit a un vecteur non nul de E, et u l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E, u(x) = a \wedge x$

1- a) Déterminer l'adjoint u^* de u.
b) Montrer que $\forall x \in E, u^2(x) = < a, x > a - \|a\|^2 x$
et calculer u^3 en fonction de u et de $\|a\|$.
En déduire $u^k(x)$ pour k entier quelconque.

2- Soit $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire de E , θ un réel et r_θ la rotation d'axe $\overrightarrow{k}$ et d'angle θ.
Montrer que :

$$\forall x \in E, \ r_\theta(x) = \cos(\theta).x + (1 - \cos(\theta)) < x, \overrightarrow{k} > .\overrightarrow{k} + \sin(\theta).\overrightarrow{k} \wedge x$$

3- Montrer que pour tout $x \in E$, la série vectorielle $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k(x)}{k!}$ converge.

On note f l'application qui au vecteur $x \in E$ fait correspondre la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k(x)}{k!}$

Donner une expression de $f(x)$ faisant apparaitre $\cos(\|a\|)$ et $\sin(\|a\|)$.

En déduire la nature de f et ses caractéristiques géométriques.

SOLUTION :

1- a) $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >=< a \wedge x, y >= [a,x,y] = [x,y,a] =< x, y \wedge a >$
$=< x, -a \wedge y >=< x, -u(y) >=< x, u^*(y) >$

et par unicité de l'endomorphisme adjoint de u, $\boxed{u^* = -u}$

b) $\forall x \in E, u^2(x) = u(u(x)) = a \wedge (a \wedge x) =< a, x > a- < a, a > x$ d'après la formule du double produit vectoriel

donc $u^2(x) =< a, x > a - \|a\|^2 x$

• $\forall x \in E, u^3(x) = u(u^2(x)) = a \wedge (< a, x > a - \|a\|^2 x)$
$=< a, x > \underbrace{a \wedge a}_{=0} - \|a\|^2 a \wedge x = -\|a\|^2 u(x)$

donc $\boxed{u^3 = -\|a\|^2 .u}$

• d'où $u^4 = -\|a\|^2 .u^2$
$u^5 = -\|a\|^2 .u^3 = \|a\|^4 .u$
$u^6 = -\|a\|^2 .u^3 = \|a\|^4 .u^2$

et par une récurrrence sans difficulté,
$\forall k \in \mathbb{N},\ u^{2k+1} = (-1)^k \|a\|^{2k} u$ et $u^{2k+2} = (-1)^k \|a\|^{2k} u^2$

3- • $\forall x \in E, \|u(x)\|^2 =< u(x), u(x) >=< x, u^*(u(x)) >=< x, -u^2(x) >$
$= -\left\langle x, < a, x > a - \|a\|^2 x \right\rangle = - < x, a >< a, x > + \|a\|^2 \|x\|^2 \leq \|a\|^2 \|x\|^2$

donc $\|u(x)\| \leq \|a\| \|x\|$

et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N},\ \|u^k(x)\| \leq \|a\|^k \|x\|$

donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \left\| \dfrac{u^k(x)}{k!} \right\| \leq \|x\| \dfrac{\|a\|^k}{k!}$

or la série numérique $\sum \dfrac{\|a\|^k}{k!}$ converge (et a pour somme $e^{\|a\|}$)

donc, par majoration, la série vectorielle $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k(x)}{k!}$ est absolument convergente.

• $f(x) = x + u(x) + \dfrac{u^2(x)}{2!} + \dfrac{u^3(x)}{3!} + ...$

compte tenu des relations $\forall k \in \mathbb{N},\ u^{2k+1}(x) = (-1)^k \|a\|^{2k} u(x)$ et $u^{2k+2}(x) = (-1)^k \|a\|^{2k} u^2(x)$,

$$f(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}(x)}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+2}(x)}{(2k+2)!}$$

$$f(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \|a\|^{2k}}{(2k+1)!} u(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \|a\|^{2k}}{(2k+2)!} u^2(x)$$

$$f(x) = x + \left(\frac{1}{\|a\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \|a\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) u(x) + \left(\frac{1}{\|a\|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \|a\|^{2k}}{(2k)!} \right) u^2(x)$$

$$f(x) = x + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|} u(x) + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} u^2(x)$$

$$f(x) = x + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|} a \wedge x + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} \left(< a, x > a - \|a\|^2 x \right)$$

$$f(x) = \cos(\|a\|).x + (1 - \cos(\|a\|)) \left\langle \frac{a}{\|a\|}, x \right\rangle . \frac{a}{\|a\|} + \sin(\|a\|) \frac{a}{\|a\|} \wedge x$$

On reconnait ici l'expression de $\boxed{\text{la rotation d'axe } \overrightarrow{k} = \dfrac{a}{\|a\|} \text{ et d'angle } \theta = \|a\|}$

4.4 Endomorphisme orthogonal * :

E est un espace euclidien de dimension 3, orienté.

On rappelle la formule du double produit vectoriel :

$\forall a, b, c \in E,\ a \wedge (b \wedge c) =< a, c > b- < a, b > c$

Soit a un vecteur non nul de E, et u l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E, u(x) = a \wedge x$

1- a) Déterminer u^* en fonction de u. Que peut on dire de la matrice de u dans une base orthonormée de E ?

b) Montrer que u admet une unique valeur propre qu'on précisera et déterminer le sous espace propre associé.

c) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, l'endomorphisme $v_\alpha = (u+\alpha I)^{-1}_O(-u+\alpha I)$ est bien défini et que v_α est un endomorphisme orthogonal de E.

2- a) Montrer que $\forall x \in E, u^2(x) =< a, x > a - \|a\|^2 x$ et calculer u^3 en fonction de u et de $\|a\|$.

b) Montrer qu'il existe deux réels m et p, qu'on calculera en fonction de α et de $\|a\|$ tels que $v_\alpha = mu^2 + pu + I$

Montrer alors que v_α est une rotation de l'espace dont on déterminera l'axe, et l'angle en calculant les sinus et cosinus de ce dernier. (on pourra considérer la matrice de v_α dans une base orthonormé directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que $\overrightarrow{h} = \dfrac{a}{\|a\|}$)

SOLUTION :

1- a) $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >=< a \wedge x, y >= [a,x,y] = [x,y,a] =< x, y \wedge a >$
$=< x, -a \wedge y >=< x, -u(y) >=< x, u^*(y) >$

et par unicité de l'endomorphisme adjoint de u, $u^* = -u$

u est un endomorphisme antisymétrique. Si A est la matrice de u dans base orthonormée, ${}^tA$ est la matrice de u^* et l'égalité $u^* = -u$ entraîne ${}^tA = -A$.

A est donc une matrice antisymétrique.

b) Soit λ une valeur propre de u : $\exists x \in E - \{0\},\ u(x) = \lambda x$

alors $< u(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda\|x\|^2 =< x, u^*(x) >=< x, -u(x) >=< x, -\lambda x >= -\lambda\|x\|^2$

donc $\lambda\|x\|^2 = -\lambda\|x\|^2$ et donc $\lambda = 0$ puisque $\|x\| \neq 0$

Un endomorphisme antisymétrique ne peut avoir que 0 pour valeur propre. 0 est bien valeur propre de u puisque $u(a) = a \wedge a = 0$.

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{0\}}$

$\forall x \in E,\ u(x) = 0.x \ \Leftrightarrow\ a \wedge x = 0 \ \Leftrightarrow\ x$ est colinéaire à a.

Donc $\boxed{E_u^0 = \mathrm{Vect}(a)}$

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$-\alpha$ n'est pas valeur propre de u puisque $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

L'endomorphisme $(u+\alpha I)$ est donc inversible et $v_\alpha = (u+\alpha I)^{-1}_O(-u+\alpha I)$ est bien défini.

- $v_\alpha\, {}_O\, v_\alpha^* = \left((u+\alpha I)^{-1}\, {}_O(-u+\alpha I)\right)_O \left((u+\alpha I)^{-1}\, {}_O(-u+\alpha I)\right)^*$

$$= \left((u+\alpha I)^{-1}\, {}_O(-u+\alpha I)\right)_O \left((-u+\alpha I)^*\, {}_O \left((u+\alpha I)^{-1}\right)^*\right)$$
$$= (u+\alpha I)^{-1}\, {}_O(-u+\alpha I)_O(-u^*+\alpha I)\, {}_O \left((u+\alpha I)^*\right)^{-1}$$
$$= (u+\alpha I)^{-1}\, {}_O \underbrace{(-u+\alpha I)_O(u+\alpha I)}_{commutent}\, {}_O \left((u^*+\alpha I)\right)^{-1}$$
$$= \underbrace{(u+\alpha I)^{-1}\, {}_O(u+\alpha I)}_{=I}\, {}_O \underbrace{(-u+\alpha I)_O \left((-u+\alpha I)\right)^{-1}}_{=I} = I$$

donc $v_\alpha\, {}_O\, v_\alpha^* = I$ et v_α est un automorphisme orthogonal de E.

2- a) $\forall x \in E, u^2(x) = u(u(x)) = a \wedge (a \wedge x) =< a, x > a- < a, a > x$ d'après la formule du double produit vectoriel

donc $u^2(x) =< a, x > a - \|a\|^2 x$

- $\forall x \in E, u^3(x) = u(u^2(x)) = a \wedge (< a, x > a - \|a\|^2 x)$

$=< a, x > \underbrace{a \wedge a}_{=0} - \|a\|^2 a \wedge x = -\|a\|^2 u(x)$

donc $\boxed{u^3 = -\|a\|^2.u}$

2- b) Soient $m, p \in \mathbb{R}$.

$v_\alpha = mu^2 + pu + I \iff (u+\alpha I)^{-1}_O(-u+\alpha I) = mu^2 + pu + I$
$\iff -u + \alpha I = (u+\alpha I)_O(mu^2 + pu + I)$
$\iff -u + \alpha I = mu^3 + pu^2 + u + \alpha mu^2 + \alpha pu + \alpha I$
$\iff -u = -m\|a\|^2 u + pu^2 + u + \alpha mu^2 + \alpha pu$
$\iff (p + \alpha\, m)u^2 + (2 - m\|a\|^2 + \alpha p)u = 0$

Pour que $v_\alpha = mu^2 + pu + I$, il suffit que $\begin{cases} p + \alpha\, m = 0 \\ \text{et} \\ 2 - m\|a\|^2 + \alpha p = 0 \end{cases}$

c'est à dire que $m = \dfrac{2}{\|a\|^2 + \alpha^2}$ et $p = \dfrac{-2\alpha}{\|a\|^2 + \alpha^2}$

donc $\boxed{v_\alpha = \dfrac{2}{\|a\|^2 + \alpha^2}\, u^2 - \dfrac{2\alpha}{\|a\|^2 + \alpha^2}\, u + I}$

- Soient $\overrightarrow{h} = \dfrac{a}{\|a\|}$, puis $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire orthognal à $\overrightarrow{h}$ dans E et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{h} \wedge \overrightarrow{i}$ de sorte que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ soit unr base orthonormée directe de E.

- Puisque $u(a) = 0$, $u(\overrightarrow{h}) = 0$, $u^2(\overrightarrow{h}) = 0$, et $v_\alpha(\overrightarrow{h}) = (mu^2 + pu + I)(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{h}$

donc $\overrightarrow{h}$ est invariant par v_α.

- $v_\alpha(\overrightarrow{i}) = mu^2(\overrightarrow{i}) + pu(\overrightarrow{i}) + \overrightarrow{i}$

$= m(\underbrace{< a, \overrightarrow{i} >}_{=0} a - \|a\|^2 \overrightarrow{i}) + p \underbrace{a \wedge \overrightarrow{i}}_{=\|a\| \overrightarrow{j}} + \overrightarrow{i}$

$= -m\|a\|^2 \overrightarrow{i} + p\|a\| \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$

$v_\alpha(\overrightarrow{i}) = (1 - m\|a\|^2) \overrightarrow{i} + p\|a\| \overrightarrow{j}$

un calcul analogue montre que :

$v_\alpha(\overrightarrow{j}) = (1 - m\|a\|^2) \overrightarrow{j} - p\|a\| \overrightarrow{i}$

Ces relations montrent que les vecteurs invariants sont ceux de la droite Vect(a) et que le plan orthognal à cette droite, c'est à dire le plan Vect$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est stable par u.

La matrice de l'endomorphisme $\widetilde{u}$ induit par u sur ce plan est : $A = \begin{pmatrix} 1 - m\|a\|^2 & -p\|a\| \\ p\|a\| & 1 - m\|a\|^2 \end{pmatrix}$

$\widetilde{u}$ est une isométrie de ce plan puisque u en est une.

$\widetilde{u}$ est donc soit une rotation (si $\det(\widetilde{u}) = 1$), soit une réflexion (si $\det(\widetilde{u}) = -1$)

$\det(\widetilde{u}) = (1 - m\|a\|^2)^2 + p^2\|a\|^2 = 1 - 2m\|a\|^2 + m^2\|a\|^4 + p^2\|a\|^2$

$$= 1 - \frac{4\|a\|^2}{\|a\|^2 + \alpha^2} + \frac{4\|a\|^4}{(\|a\|^2 + \alpha^2)^2} + \frac{4\alpha^2\|a\|^2}{(\|a\|^2 + \alpha^2)^2}$$

$$= 1 + \frac{-4\|a\|^4 - 4\|a\|^2\alpha^2 + 4\|a\|^4 + 4\alpha^2\|a\|^2}{(\|a\|^2 + \alpha^2)^2} = 1$$

donc $\widetilde{u}$ est une rotation. Dans le plan orienté par la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ prise comme base directe, son angle θ vérifie :

$$\cos(\theta) = 1 - m\|a\|^2 = 1 - \frac{2\|a\|^2}{\|a\|^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2 - \|a\|^2}{\alpha^2 + \|a\|^2}$$

et $\sin(\theta) = p\|a\| = \dfrac{-2\alpha\|a\|}{\alpha^2 + \|a\|^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{\alpha^2 - \|a\|^2}{\alpha^2 + \|a\|^2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-2\alpha\|a\|}{\alpha^2 + \|a\|^2} \end{array}}$$

En conclusion, u est la rotation de l'espace d'axe dirigé par le vecteur a (ou $\overrightarrow{h}$) et d'angle θ défini par son sinus et son cosinus comme ci-dessus.

4.5 Endomorphisme orthogonal (ORAL Mines)

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que deux des propositions suivantes entraînent la troisième :

(i) f est une isométrie

(ii) $f^2 = -Id_E$

(iii) Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.

SOLUTION :

a) Supposons (i) et (ii)

alors $\forall x \in E, < f(x), x > = < f_o f(x), f(x) >$ (d'après (i), f conserve le produit scalaire)

$< f(x), x > = < -Id_E(x), f(x) > = < -x, f(x) > = - < f(x), x >$

donc pour tout $x \in E, < f(x), x > = 0$.

b) Supposons (i) et (iii) et montrons que $f^2 = -Id_E$

$\forall x \in E, \|f^2(x) + x\|^2 = < f^2(x) + x, f^2(x) + x >$

$= < f^2(x), f^2(x) > + 2 < f^2(x), x > + < x, x >$

$= 2(< f^2(x), x > + < x, x >)$ $(< f^2(x), f^2(x) > = < x, x >$ d'après (i))

par ailleurs, $< f^2(x) + f(x), f(x) + x > = 0$ (d'après (iii))

$\Longrightarrow \underbrace{< f^2(x), f(x) >}_{=0 \ d'apres \ (i)} + < f^2(x), x > + < f(x), f(x) > + \underbrace{< f(x), x >}_{=0 \ d'apres \ (i)} = 0$

donc $< f^2(x), x > = - < f(x), f(x) > = - < x, x >$ (d'après (i))

En reportant dans le premier calcul, on obtient :

$\forall x \in E, \|f^2(x) + x\|^2 = 2(< f^2(x), x > + < x, x >) = 0$

donc $\forall x \in E, f^2(x) + x = 0$, ce qui montre bien que $f^2 = -Id_E$

c) Supposons (ii) et (iii) et montrons que f est une isométrie.

$\forall x \in E, < f^2(x) - f(x), f(x) - x > = 0$ (d'après (iii))

$\Longrightarrow 0 = < -x - f(x), f(x) - x > = < x, x > - < f(x), f(x) >$

donc $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ et f est une isométrie.

4.6 Exponentielle d'une matrice antisymétrique :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, antisymétrique. Montrer que $\exp(A)$ est une matrice orthogonale .

SOLUTION : Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$

donc $({}^tA)^2 = {}^t(A^2)$, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $({}^tA)^k = {}^t(A^k)$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{({}^tA)^k}{k!}$ et en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, par continuité de l'application $(A \mapsto {}^t A)$ qui est linéaire,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[{}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)\right] = {}^t\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)\right] = {}^t\exp(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{({}^tA)^k}{k!}\right) = \exp({}^tA)$$

Si A est antisymétrique, alors ${}^tA = -A$ et les matrices A et ${}^tA$ commutent :

${}^tA.A = -A^2 = A.{}^tA$ et il s'ensuit que $\exp({}^tA).\exp(A) = \exp({}^tA + A)$

d'où $({}^t\exp(A)).\exp(A) = \exp({}^tA).\exp(A) = \exp({}^tA + A) = \exp(0) = I_n$

et l'égalité $({}^t\exp(A)).\exp(A) = I_n$ montre que la matrice $\exp(A)$ est orthogonale.

4.7 Endomorphisme orthogonal diagonalisable :

E est un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in O(E)$

Quelle est la nature de f s'il est diagonalisable ?

SOLUTION : Un endomorphisme orthogonal ne peut avoir que 1 et -1 pour valeur propre.

S'il est diagonalisable, il existe une base $e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle sa matrice est diagonale de la forme :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

alors $\Delta^2 = I_n$ donc $f^2 = Id_E$ et f est une symétrie orthogonale.

Les automorphismes orthogonaux diagonalisables sont les symétries orthogonales.

4.8 Matrice de Householder :

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $H = I_n - \frac{2}{{}^tV.V} V.{}^tV$

a) Vérifier que H est une matrice orthogonale

b) De quel type d'endomorphisme est-elle la matrice ?

SOLUTION :

a) Remarquons d'abord que H est symétrique :

$${}^tH = {}^t\left(I_n - \frac{2}{{}^tV.V} V.{}^tV\right) = {}^tI_n - \frac{2}{{}^tV.V}.{}^t\left(V.{}^tV\right) = I_n - \frac{2}{{}^tV.V} V.{}^tV = H$$

($\frac{2}{{}^tV.V}$ est un scalaire et $V.{}^tV$ est une matrice carrée)

- ${}^tH.H = H^2 = \left(I_n - \frac{2}{{}^tV.V} V.{}^tV\right)^2 = I_n - \frac{4}{{}^tV.V} V.{}^tV + \frac{4}{({}^tV.V)^2}(V.{}^tV)^2$

$${}^tH.H = I_n - \frac{4}{{}^tV.V} V.{}^tV + \frac{4}{({}^tV.V)^2}(V.{}^tV).(V.{}^tV)$$

$$= I_n - \frac{4}{{}^tV.V} V.{}^tV + \frac{4}{({}^tV.V)^2} V.(\underbrace{{}^tV.V}_{scalaire}).{}^tV \quad \text{(associativité de la multiplication matricielle)}$$

$$= I_n - \frac{4}{{}^tV.V} V.{}^tV + \frac{4}{{}^tV.V} V.{}^tV = I_n$$

Ainsi, ${}^tH.H = I_n$ et la matrice H est une matrice orthogonale.

b) Soit h un endomorphisme d'un espace euclidien E dont la matrice dans une base orthonormée B est H.

Alors h est un automorphisme orthogonal (car H est une matrice orthogonale), et c'est une symétrie (car $H^2 = I_n$).

- Recherchons les vecteurs invariants :

Soit x un vecteur de E de vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base B.

$$h(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad H.X = X \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{2}{{}^tV.V}}_{scalaire} V.{}^tV.X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V.(\underbrace{{}^tV.X}_{scalaire}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^tV.X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1x_1 + ... + v_nx_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \perp V$$

L'ensemble des vecteurs invariants par h est l'hyperplan orthogonal au vecteur v de matrice colonne V. h est donc la réflexion par rapport à cet hyperplan.

4.9 Nature d'un endomorphisme :

Avec un minimum de calculs, déterminer la nature et les caractéristiques géométriques des endomorphismes de R^3 canoniquement associés aux matrices suivantes :

a) $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

a) sans calcul, on voit que les vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 de la matrice A sont colinéaires au premier d'entre eux, C_1 : $C_2 = 2C_1, C_3 = -C_1$.

Donc A est de rang 1. Donc 0 est valeur propre de A et son sous espace propre, E_A^0, est de dimension 2. (3 $-\mathrm{rg}(A)$)

0 est donc valeur propre double de A. ($\dim(E_A^0) \leq \mathrm{ordre}(0)$)

$\mathrm{Tr}(A) = 1$ donc la troisième valeur propre est 1. (la somme des valeurs propres d'une matrice complexe est égale à sa trace)

Ainsi, 0 est valeur propre double et E_A^0, est de dimension 2.

1 est valeur propre simple. Donc A est diagonalisable.

Elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. f, endomorphisme associé à la matrice A est une projection.

A étant symétrique, $f_\circ f = f = f^*$ donc f est un projecteur orthogonal. Son image (sous espace sur lequel on projette) est celui engendré par les vecteurs colonnes, c'est à dire par le vecteur C_1.

Finalement, f est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur C_1.

b) $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que les vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 de la matrice A sont deux à deux orthogonaux et normés.

$(< C_i, C_j >= \frac{1}{7}(-12 + 18 - 6) = 0$ et $\|C_i\|^2 = \frac{1}{49}(4 + 36 + 9) = 1$)

B est donc une matrice orthogonale. Comme elle est symétrique, ${}^tB.B = B^2 = I_n$. B est donc la matrice d'une symétrie orthogonale.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $\quad B.X = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -9x + 6y - 3z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + z = 0$

B est la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $3x - 2y + z = 0$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $\quad B.X = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -y = z$

L'ensemble des vecteurs invariants est la droite dirigée par le vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f est donc une rotation autour de l'axe dirigé par le vecteur V_3, ou par le vecteur

$$\overrightarrow{k} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son angle θ vérifie $\mathrm{tr}(C) = 2\cos(\theta) + 1 = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$

5 Etude d'endomorphismes :

5.1 Rang de l'adjoint : CES RÉSULTATS SONT à CONSIDÉRER COMME DU COURS

E est un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in L(E)$

1- Montrer que $\ker(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$
A quoi est égal $\text{Im}(u^*)$?
Montrer que $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$

2- Montrer que $\ker(u^* {}_o u) = \ker(u)$
et que $\text{Im}(u^* {}_o u) = \text{Im}(u^*)$

3- Montrer que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}({}^tM.M) = \text{rg}(M)$

SOLUTION : 1- Soit $x \in \ker(u^*)$.
$\forall y \in \text{Im}(u), \exists t \in E, y = u(t),\ < x, y >=< x, u(t) >=< \underbrace{u^*(x)}_{=0}, t >= 0$

donc $\ker(u^*) \subset (\text{Im}(u))^\perp$.
Réciproquement, soit $x \in (\text{Im}(u))^\perp$. $\forall y \in E, < u^*(x), y >=< \underbrace{x}_{\in(\text{Im}(u))^\perp}, \underbrace{u(y)}_{\in \text{Im} u} >= 0$

donc $u^*(x) \in E^\perp = \{0\}$, et $x \in \ker(u^*)$, ce qui montre que $(\text{Im}(u))^\perp \subset \ker(u^*)$.
Par double inclusion, $\boxed{\ker(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp}$

• En appliquant la formule précédente pour u^*, on obtient :
$\ker((u^*)^*) = (\text{Im}(u^*))^\perp$, et compte tenu de la relation $(u^*)^* = u$, en prenant les sous espaces orthogonaux, $\boxed{\text{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp}$

• Il s'ensuit que $\dim(\text{Im}(u^*)) = \dim((\ker(u))^\perp)$, soit $\text{rg}(u^*) = n - \dim(\ker(u))$, et par le théorème du rang, $\boxed{\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)}$

2- $\forall x \in \ker(u), u(x) = 0$, donc $(u^*_o u)(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$ et $x \in \ker(u^* {}_o u)$, ce qui montre que $\ker(u) \subset \ker(u^*_o u)$
Réciproquement, si $x \in \ker(u^*_o u)$, $u^*_o u(x) = 0$, alors $\|u(x)\|^2 =< u(x), u(x) >=< x, \underbrace{u^*_o u(x)}_{=0} >= 0$, ce qui montre que $\ker(u^*_o u) \subset \ker(u)$. Par double inclusion, $\boxed{\ker(u) = \ker(u^*_o u)}$

Il s'ensuit que $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^*_o u))$ et par le théorème Durand, que $\boxed{\text{rg}(u) = \text{rg}(u^* {}_o u)}$

• Il est clair que $\text{Im}(u^*_o u) \subset \text{Im}(u^*)$.
Par ailleurs, $\text{rg}(u^*_o u) = \text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$, et par égalité des dimensions $\boxed{\text{Im}(u^*_o u) = \text{Im}(u^*)}$

3- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat précédent à l'endorphisme canoniquement associé à la matrice M, on obtient : $\boxed{\text{rg}({}^tM.M) = \text{rg}(M)}$

5.2 Endomorphisme adjoint : (ORAL CCP)

a) Montrer que l'application $(A, B) \xrightarrow{\Phi} \text{Tr}({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soient A et B deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $f : X \mapsto A.X - X.B$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver son adjoint.

SOLUTION :
a) Par linéarité de la trace et les relations $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A)$, Φ est clairement bilinéaire et symétrique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle. Alors $\text{Tr}({}^tA.B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2} a_{i,j}^2 > 0$ car l'un des $a_{i,j}^2$ au moins est strictement positif.

Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $M_n(\mathbb{R})$, donc un produit scalaire.

b) f est linéaire (immédiat).
Recherchons $g \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que : $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(f(X), Y) = \Phi(X, g(Y))$ (1)
$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \Phi(f(X), Y) = \text{Tr}({}^tf(X).Y) = \text{Tr}({}^t(A.X - X.B).Y)$
$\Phi(f(X), Y) = \text{Tr}({}^tX.{}^tA.Y - {}^tB.{}^tX.Y) = \text{Tr}\left({}^t({}^tX.{}^tA.Y - {}^tB.{}^tX.Y)\right)$ (car $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}A$)
$\Phi(f(X), Y) = \text{Tr}({}^tY.A.X - {}^tY.X.B) = \text{Tr}({}^tY.A.X) - \text{Tr}(({}^tY.X).B)$
$= \text{Tr}({}^tY.A.X) - \text{Tr}(B.({}^tY.X))$ (car $\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A)$)

$= \mathrm{Tr}((^tY.A - B.^tY).X) = \mathrm{Tr}(^tX.(^tA.Y - Y.^tB).Y) = \Phi(X, (^tA.Y - Y.^tB))$

Donc $\quad \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \Phi(f(X),Y) = \Phi(X, (\underbrace{^tA.Y - Y.^tB}_{g(Y)}))$

d'où : $\boxed{\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f^*(Y) =^t A.Y - Y.^tB}$

5.3 Endomorphisme et son adjoint * : **(ORAL Centrale)**

On considère un espace vectoriel euclidien E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f\,_o f = 0$

Question préliminaire : Un tel endomorphisme peut il être symétrique ?

a) Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker f \cap \ker f^*$

b) Montrer que $\ker(f + f^*) \in GL(E) \iff \mathrm{Im}(f) = \ker f$

SOLUTION **: Question préliminaire :** Si un endomorphisme symétrique f vérifie f^2, alors f est diagonalisable (car symétrique), et admet X^2 comme polynôme annulateur. Son spectre est donc réduit à $\{0\}$ (seule racine de X^2), et dans une base diagonale pour f, sa matrice est la matrice nulle. Donc $f = 0$.

a) • L'inclusion $\ker f \cap \ker f^* \subset \ker(f + f^*)$ est immédiate.

• Réciproquement, soit $x \in \ker(f + f^*)$. Alors $f(x) + f^*(x) = 0$, et en composant par f, $\underbrace{f\,_o f(x)}_{=0} + f\,_o f^*(x) = 0$, donc $f(f^*(x)) = 0$, donc $f^*(x) \in \ker f$.

Or on sait que $\mathrm{Im}(f^*) = (\ker f)^\perp$, donc $f^*(x) \in \mathrm{Im}(f^*) \cap \ker f = (\ker f)^\perp \cap \ker f = \{0\}$

Donc $f^*(x) = 0$, et par différence $f(x) = 0$ aussi.

On a ainsi montré que $\ker(f + f^*) \subset \ker f \cap \ker f^*$, et l'égalité par double inclusion.

b) Montrer que $\ker(f + f^*) \in GL(E) \iff \mathrm{Im}(f) = \ker f$

L'hypothèse $f\,_o f = 0$ entraîne dans tous les cas que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

• Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \ker f$.

$\forall x \in \ker(f + f^*), \ f(x) + f^*(x) = 0$, et en composant par f, $\underbrace{f\,_o f(x)}_{=0} + f\,_o f^*(x) = 0$

donc $f^*(x) \in \ker(f) = (\mathrm{Im}(f^*))^\perp$, donc $f^*(x) \in \mathrm{Im}(f^*) \cap (\mathrm{Im}(f^*))^\perp = \{0\}$

par différence, on a ausii $f(x) = 0$, donc $x \in \ker(f)$ et $x \in \ker(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp = (\ker(f))^\perp$

donc $x \in \ker(f) \cap (\ker(f))^\perp = \{0\}$ et x est nul.

On a ainsi montré que $\ker(f + f^*) = \{0\}$, ce qui montre que $f + f^*$ est injectif et donc inversible : $\ker(f + f^*) \in GL(E)$

• Réciproquement, supposons que $f + f^* \in GL(E)$. Alors $f + f^*$ est surjectit,

$\underbrace{\mathrm{Im}(f + f^*)}_{=E} \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(f^*) \subset E$, donc $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(f^*) = E$ par double inclusion.

D'après la formule de Grassmann, $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^*) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(f^*)) = \dim(E) = n$

donc $\mathrm{rg}(f) = n - \mathrm{rg}(f^*) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(f^*)) \geqslant n - \mathrm{rg}(f^*) = n - \dim((\ker f)^\perp)$

(puisque $\mathrm{Im} f^* = (\ker f)^\perp$)

donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant n - (n - \dim(\ker f)) = \dim(ker f)$

L'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, et l'égalité des dimensions, entraînent alors que $\mathrm{Im}(f) = \ker f$.

5.4 Etude de $A = \{f \in \mathscr{L}(E), \ f_o f_o^* f = f\}$: **(ÉCRIT ESTP)**

Soit E un espace euclidien, F un sous espace vectoriel de E, et $F^\perp$ le sous espace orthogonal de F.

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, f^* désigne l'endomorphisme adjoint de f.

Si $x \in E$, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x.

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que $\ker(f_o^* f) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f_o^* f) = (\ker f)^\perp$

Par la suite, on considère l'ensemble $A = \{f \in \mathscr{L}(E), \ f_o f_o^* f = f\}$

2) - a) Caractériser les automorphismes de E appartenant à A.

b) Montrer que tout projecteur orthogonal appartient à A .

3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in A$ si et seulement si $f^*\,_o f$ est un projecteur orthogonal.

4) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in A$ si et seulement si :

$\forall x \in (\ker f)^\perp, \|f(x)\| = \|x\|$

5) Soit $f \in A$.

Montrer que $(\ker f)^\perp = \{x \in E, \ \|f(x)\| = \|x\|\}$

6) Soit $f \in A$. Calculer $|||f||| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

SOLUTION :

1) • L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f_o^* f)$ est immédiate.

Soit $x \in \ker(f_o^* f)$. Alors $\|f(x)\|^2 =< f(x), f(x) >=< f^*[f(x)], x >=< (f_o^* f)(x), x >= 0$
donc $f(x) = 0$ et $\ker(f_o^* f) \subset \ker f$
La double inclusion établit l'égalité $\ker(f_o^* f) = \ker f$

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f_o^* f)$; $\exists t \in E,\ x = f_o^* f(t)$
$\forall y \in \ker f,\ < x, y >=< f_o^* f(t), y >=< f(t), \underbrace{f(y)}_{=0} >= 0$ donc $x \in (\ker f)^\perp$

On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(f_o^* f) \subset (\ker f)^\perp$

d'après le théorème Durand,
$\dim(\mathrm{Im}(f_o^* f)) = n - \dim(\ker(f_o^* f) = n - \dim(\ker f) = \dim((\ker f)^\perp)$
L'inclusion et l'égalité des dimension entrainent que $\mathrm{Im}(f_o^* f) = (\ker f)^\perp$

2- a) Soit f un automorphisme de E appartenant à A. Alors $f_o f_o^* f = f$ et en composant à gauche par f^{-1} (qui existe puisque f est un automorphisme), on obtient : $f^*{}_o f = Id_E$
Donc $f \in \mathcal{O}(E)$
Réciproque immédiate.
Les automorphismes de E qui appartiennent à A sont donc les automorphismes orthogonaux de E.

2- b) Soit f un projecteur orthogonal de E. Alors $f\,{}_o f = f = f^*$
donc $f\,{}_o f^*{}_o f = f\,{}_o f\,{}_o f = f\,{}_o f = f$ et $f \in A$.

3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- Si $f \in A$, alors $f\,{}_o f^*{}_o f = f$ donc $(f^*{}_o f)\,{}_o (f^*{}_o f) = f^*{}_o f$ et $f^*{}_o f$ est un projecteur.
Par ailleurs, $(f^*{}_o f)^* = f^*{}_o (f^*)^* = f^*{}_o f$ donc $f^*{}_o f$ est un projecteur orthogonal.
- Réciproquement, supposons que $f^*{}_o f$ est un projecteur orthogonal.
Alors $(f^*{}_o f)\,{}_o (f^*{}_o f) = f^*{}_o f$
On doit montrer que $f_o f^*{}_o f = f$
Puisque $\ker(f) \oplus (\ker f)^\perp = E$, il suffit de montrer que $f_o f^*{}_o f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \ker f$ d'une part et pour tout $x \in (\ker f)^\perp$ d'autre part.
$\circ\circ\circ$ Pour $x \in \ker f$, l'égalité $f_o f^*{}_o f(x) = f(x)$ est vérifiée puisque les deux membres sont alors nuls.
$\circ\circ\circ$ Soit $x \in (\ker f)^\perp$. $\exists t \in E, x = f^*{}_o f(t)$ puisque $\mathrm{Im}(f_o^* f) = (\ker f)^\perp$ (question 1)
$f_o f^*{}_o f(x) = f_o f^*{}_o f(f^*{}_o f(t)) = \underbrace{f_o f^*{}_o f\,{}_o f^*}_{=f\,{}_o f^*}{}_o f(t) = f_o \underbrace{f^*{}_o f(t)}_{=x} = f(x)$ CQFD

4) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- Supposons que $f \in A$.
$\forall x \in (\ker f)^\perp, \exists t \in E,\ x = f^*{}_o f(t)$ (puisque $\mathrm{Im}(f_o^* f) = (\ker f)^\perp$ question 1)
alors $\|f(x)\|^2 =< f(x), f(x) >=< f(x), \underbrace{f_o f^*{}_o f}_{=f}(t) >$
$=< f(x), f(t) >=< x, f^*{}_o f(t) >=< x, x >= \|x\|^2$
- Réciproquement, supposons que $\forall x \in (\ker f)^\perp, \|f(x)\| = \|x\|$
$f^*{}_o f$ est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable.
$\ker(f^*{}_o f) = \ker f$ (question 1) est un sous espace propre de $f^*{}_o f$, associé à la valeur propre 0.
Soit x un vecteur propre de $f^*{}_o f$, associé à une valeur propre λ autre que 0 : $f^*{}_o f(x) = \lambda x$
Puisque les sous espaces propres de $f^*{}_o f$ sont deux à deux orthognaux,
$E_f(\lambda) \perp E_f(0) = \ker(f)$. Donc $x \in (\ker f)^\perp$ et $\|f(x)\| = \|x\|$
mais $\|f(x)\|^2 =< f(x), f(x) >=< x, f^*{}_o f(x) >=< x, \lambda x >= \lambda\|x\|^2$ donc $\lambda = 1$
Ainsi, $f^*{}_o f$ est un endomorphisme diagonalisable de E, dont les seules valeurs propres sont 0 et 1. C'est donc un projecteur. Et puisqu'il est symétrique, c'est un projecteur orthogonal.
Donc $f \in A$ d'après la question précédente.

5.5 Réduction dans une base orthonormée :

Dans l'espace vectoriel R^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est orthogonal. En déduire quelles sont les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f.

   En déduire le polynôme caractéristique de f.

4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre positive.

   En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1

5. Montrer que l'espace propre E_2 associé à la valeur propre négative satisfait $E_2 = (E_1)^{\perp}$.

   En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire une base de E_2

6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

SOLUTION :

1. f est un endomorphisme symétrique car sa matrice dans une base orthonormée est réelle symétrique. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée.

2. Les vecteurs colonnes de A sont unitaires et deux à deux orthogonaux. La matrice A est une matrice orthogonale et l'endomorphisme f aussi.

   Les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1

3. $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 2$

   Les valeurs propres ne pouvant être que 1 et -1, en ajoutant 4 nombres valant soit 1 soit -1, la seule manière d'obtenir 2 pour somme est $1+1+1+(-1)$

   Donc 1 est valeur propre d'ordre 3 et -1 est valeur propre simple.

   Le polynôme caractéristique de f est donc $\chi_f(X) = (X-1)^3(X+1)$

4. • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ le vecteur colonne de $\overrightarrow{x} \in E$

   $$f(x) = 1x \iff A.X = X \iff \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

   $$\iff \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\iff 2x + y - z + t = 0$$

   E_1 est l'hyperplan d'équation $2x + y - z + t = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

   • Une base de E_1 est constituée par exemple des vecteurs $w_1 = (1, -2, 0, 0)$,
   $w_2 = (0, 0, 1, 1)$ et $w_3 = (0, 1, 1, 0)$

   (sans aucun coût de calcul, on a choisi w_1 et w_2 de telle sorte qu'ils soient orthogonaux.)

   Le procédé d'orthogonalisation de Schmitt permet de construire les vecteurs v_1, v_2 et v_3 comme suit :

   $$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \\ v_3 = w_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 \end{cases}$$

   $$v_3 \perp v_1 \quad \Leftrightarrow \quad < w_3 + \alpha v_1 + \beta v_2, v_1 >= 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad < w_3, v_1 > + \alpha < v_1, v_1 > + \beta \underbrace{< v_2, v_1 >}_{=0} = 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{< w_3, v_1 >}{< v_1, v_1 >} = \frac{2}{5}$$
   $$v_3 \perp v_2 \quad \Leftrightarrow \quad < w_3 + \alpha v_1 + \beta v_2, v_2 >= 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad < w_3, v_2 > + \alpha \underbrace{< v_1, v_2 >}_{=0} + \beta < v_2, v_2 >= 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad \beta = -\frac{< w_3, v_2 >}{< v_2, v_2 >} = -\frac{1}{2}$$

   donc $v_3 = w_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 = (0, 1, 1, 0) + \frac{2}{5}(1, -2, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1) = \frac{1}{10}(4, 2, 5, -5)$

   Une base orthonormée de E_1 sera constituée des vecteurs $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}$, c'est à dire de : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0, 0), \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1), \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(4, 2, 5, -5)$

5. Les sous espaces propres d'un endomorphisme symétrique étant deux à deux orthogonaux, le sous espace propre E_2 relatif à la valeur propre -1 est la droite orthogonale à l'hyperplan E_1.
Elle est dirigée par le vecteur $v_4 = (2, 1, -1, 1)$ ou, en le normant, $\varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, -1, 1)$

6. Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ qui est orthonormée, f a pour matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
f est la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à l'hyperplan E_1.

5.6 Endomorphisme antisymétrique :

Soient E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E tel que :
$$\forall x \in E, < u(x), x >= 0$$

1- Montrer que u est antisymétrique (c'est à dire que $u^* = -u$).
Réciproque ?
Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
Si n est impair déterminer le spectre de u.

2- Montrer que si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

3- Montrer que u^2 est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont des réels ≤ 0.

4- Soit a un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$.
Quitte à diviser a par sa norme, on suppose que a est unitaire.
Montrer que $G =$Vect$(a, u(a))$ est un plan stable par u.
Déterminer, dans une base orthnormée (a, b), la matrice M_G de $\widetilde{u}$, endomorphisme induit par u sur G.
Déterminer les valeurs propres de M_G en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\widetilde{u}$ est la composée commutative d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal que l'on précisera.

5- En déduire que rg(u) est pair.

SOLUTION :

1- Par hypothèse, $\forall x \in E, < u(x), x >= 0$
Soit $(x, y) \in E^2$, $< u(x + y), x + y >= 0 \quad \Rightarrow \quad < u(x) + u(y), x + y >= 0$
$\Rightarrow \quad \underbrace{< u(x), x >}_{=0} + < u(x), y > + < u(y), x > + \underbrace{< u(y), y >}_{=0} = 0$
$\Rightarrow \quad < u(x), y >= - < x, u(y) >=< x, -u(y) >$
or u^* est l'unique endomorphisme de E qui vérifie :
$\forall (x, y) \in E^2$, $< u(x), y >=< x, u^*(y) >$
donc, par unicité de u^*, $u^* = -u$.

• Réciproquement, soit $u \in L(E)$ antisymétrique, c'est à dire tel que $u^* = -u$ ou encore tel que : $\forall (x, y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < x, u(y) >$
alors, $\forall x \in E$, $< u(x), x >= - < x, u(x) >$ et donc $< u(x), x >= 0$

• Soit $\lambda \in$ Sp(u) : $\exists x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$.
$< u(x), x >= 0 \quad \Rightarrow \quad < \lambda.x, x >= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \|x\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$
(puisque $x \neq 0$)
Donc la seule valeur propre possible de u est 0.
Remarquons que la rotation plane d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ vérifie bien : $\forall x \in E$, $< u(x), x >= 0$, mais n'a aucune valeur propre.

• Si n est impair, alors le polynôme caractèristique de u, de dégré impair, vérifie $\lim\limits_{-\infty} \chi_u = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \chi_u = +\infty$ et est continue, donc s'annule pour au moins une valeur réelle.
Donc Sp$(u) \neq \emptyset$ et alors Sp$(u) = \{0\}$

2- Soit F est un sous-espace de E stable par u.
Soit y un vecteur quelconque de $F^\perp$.
Alors $\forall x \in F, < u(y), x >=< y, u^*(x) >=< y, \underbrace{-u(x)}_{\in F} >= 0$
donc $u(y) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u.

3- $(u^2)^* = u^*_\circ u^* = (-u)_\circ(-u) = u^2$
L'endomorphisme u^2 est symétrique, donc diagonalisable.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$: $\exists x \neq 0,\ u^2(x) = \lambda x$.
alors $< u^2(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda \|x\|^2$
mais aussi : $< u^2(x), x >=< u[u(x)], x >=< u(x), u^*(x) >=< u(x), -u(x) >= -\|u(x)\|^2$
donc $\lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$ et puisque $x \neq 0,\ \lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$

4- Soit a un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$, a étant pris unitaire.
Si $u(a)$ est colinéaire à a, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ u(a) = \mu a$. Alors $u^2(a) = \mu^2 a = \lambda a$ et d'après la question précédente, $\mu^2 \leq 0$ puisque μ^2 est une valeur propre de u. Donc $\mu = 0$ et $\lambda = 0$.
Donc $u(a)$ n'est pas colinéaire à a, le système $(a, u(a))$ est libre et engendre un plan.

• L'image $u(a)$ de a est dans ce plan. L'image $u^2(a)$ de $u(a)$ l'est aussi puisque $u^2(a) = \lambda a$.
Les images de deux vecteurs qui engendrent G étant dans G, $G =\mathrm{Vect}(a, u(a))$ est un plan stable par u.

• Le vecteur a est un vecteur unitaire de G.
$< u(a), a >= 0$ par hypothèse. donc en prenant $b = \dfrac{u(a)}{\|u(a)\|}$, on obtient un repère orthonormé du plan G.
$u(a) = \|u(a)\|.b$ et $u(b) = u\left(\dfrac{u(a)}{\|u(a)\|}\right) = \dfrac{u^2(a)}{\|u(a)\|} = \dfrac{\lambda.a}{\|u(a)\|} = \dfrac{\lambda}{\|u(a)\|}\, a$
par ailleurs, $< u(a+b), a+b >= 0 =< u(a) + u(b), a+b >$
$=< u(a), a > + < u(a), b > + < u(b), a > + < u(b), b >$
$=< \|u(a)\|\, b, b > + < \dfrac{\lambda}{\|u(a)\|}\, a, a >= \|u(a)\| + \dfrac{\lambda}{\|u(a)\|}$ car a et b sont unitaires.
donc $\lambda = -\|u(a)\|^2$ ou, de manière équivalente, $\|u(a)\| = \sqrt{-\lambda}$
Finalement, $u(a) = \|u(a)\|.b = \sqrt{-\lambda}\, b$ et $u(b) = \dfrac{\lambda}{\|u(a)\|}\, a = -\sqrt{-\lambda}\, a$
et la matrice de $\widetilde{u}$ dans la base (a, b) est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix}$
$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} & -x \end{vmatrix} = x^2 - \lambda$$
Les valeurs propres de A sont $i\sqrt{-\lambda}$ et $-i\sqrt{-\lambda}$
L'égalité $A = \sqrt{-\lambda}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-\lambda} I_n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{-\lambda} I_n$
montre que $\widetilde{u}$ est la composée commutative de l'homothétie de rapport $\sqrt{-\lambda}$ et de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

5.7 Produit vectoriel, produit mixte :

u est un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3 orienté.
Pour tout $x \in E$, on définit $f(x) = u_\wedge(u_\wedge x)$
f est il un automorphisme orthogonal ?
Caractériser géométriquement l'endomorphisme f.

SOLUTION :
• Remarquons que si $x \in \mathrm{Vect}(u)$ alors $u_\wedge x = 0$ et $x \in \ker(f)$. Donc $\mathrm{Vect}(u) \subset \ker(f) \neq \{0\}$ et f n'est pas injectif, donc n'est pas un automorphisme orthogonal.
Si par contre $x \notin \mathrm{Vect}(u)$ alors le vecteur $u_\wedge x$ est non nul et orthogonal à u. Donc $f(x) = u_\wedge(u_\wedge x) \neq 0$ et $x \notin \ker f$. Il s'ensuit que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$. Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim(\ker f) = 2$
Or pour tout $x \in E,\ f(x) = u_\wedge(u_\wedge x) \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$
Par inclusion et égalité des dimension, $\mathrm{Im}(f)$ est donc le plan $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ orthogonal à la droite $\mathrm{Vect}(u)$.

• Complétons u en une base orthonormée directe (u, v, w) de E.
Alors, $f(u) = 0$
$f(v) = u_\wedge(u_\wedge v) = u_\wedge w = -v$
$f(w) = u_\wedge(u_\wedge w) = u_\wedge(-v) = -w$
La restriction de f au plan $(\mathrm{Vect}(u))^\perp = \mathrm{Vect}(v, w)$ est donc $-Id$.
On peut en conclure que f est la composée de la projection orthogonale sur le plan $(\mathrm{Vect}(u))^\perp = \mathrm{Vect}(v, w)$ et de la symétrie centrale de centre 0. (peu importe le sens de composition)

5.8 Produit vectoriel, produit mixte. Equation fonctionnelle :

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. **(ORAL Mines - Ponts)**
$[x, y, z]$ désigne le produit mixte des vecteurs x, y et z de E.
Soit f un endomorphisme donné de E.
a) Soit $(x, y, z) \in E^3$; simplifier $[f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)]$

b) Trouver les endomorphismes g de E qui vérifient :

$\forall (x,y) \in E^2, f(x) \wedge y - f(y) \wedge x = g(x \wedge y)$

SOLUTION :

a) Soit φ l'application de E^3 dans $\mathbb{R}$ qui à $(x,y,z) \in E^3$ associe $[f(x),y,z]+[x,f(y),z]+[x,y,f(z)]$

$\forall (x_1,x_2,y,z) \in E^4, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1+\lambda x_2,y,z) = [f(x_1+\lambda x_2),y,z]+[x_1+\lambda x_2,f(y),z]+[x_1+\lambda x_2,y,f(z)]$

$$= [f(x_1)+\lambda f(x_2),y,z]+[x_1+\lambda x_2,f(y),z]+[x_1+\lambda x_2,y,f(z)]$$

$$= [f(x_1),y,z]+[x_1,f(y),z]+[x_1,y,f(z)]+\lambda\Big([f(x_2),y,z]+[x_2,f(y),z]+[x_2,y,f(z)]\Big)$$

$$= \varphi(x_1,y,z)++\lambda\varphi(x_2,y,z)$$

Donc ϕ est une forme 3-linéaire sur E.

De plus, $\phi(x,x,z) = \underbrace{[f(x),x,z]+[x,f(x),z]}_{=0}+\underbrace{[x,x,f(z)]}_{=0} = 0$

de même $\phi(x,y,x) = \varphi(x,y,y) = 0$

Donc φ est une forme tri-linéaire alternée sur E. Or on sait que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est un espace vectoreil de dimemsion 1 (droite vectorielle).

Soir $B = (e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée directe de l'espace E_3. L'application déterminant dans cette base forme une base de cette droite vectorielle.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi = \lambda.det_B$: $\qquad \forall (x,y,z) \in E^3, \varphi(x,y,z) = \lambda.det_B(x,y,z)$

Par définition du déterminant dans la base B, $det_B(e_1,e_2,e_3) = 1$,

donc $\varphi(e_1,e_2,e_3) = \lambda.det_B(e_1,e_2,e_3) = \lambda.1 = \lambda$

$\lambda = \varphi(e_1,e_2,e_3) = [f(e_1),e_2,e_3]+[e_1,f(e_2,),e_3]+[e_1,e_2,f(e_3)]$

Soit $A = \mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

alors $\lambda = [f(e_1),e_2,e_3]+[e_1,f(e_2,),e_3]+[e_1,e_2,f(e_3)]$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$\lambda = a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3} = \mathrm{tr}(f)$

Finalement, $\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3, \quad [f(x),y,z]+[x,f(y),z]+[x,y,f(z)] = \mathrm{tr}(f).[x,y,z]}$

b) • Soit $g \in L(E)$ telle que

$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x) \wedge y - f(y) \wedge x = g(x \wedge y) \qquad (*)$

alors, en prenant le produit scalaire avec un vecteur z quelconque,

$\forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad [f(x),y,z]-[f(y),x,z] =< g(x\wedge y),z >$

d'après la question précédente,

$[f(x),y,z]-[f(y),x,z] = [f(x),y,z]+[x,f(y),z] = \mathrm{tr}(f).[x,y,z]-[x,y,f(z)]$

donc, $\forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad \mathrm{tr}(f).[x,y,z]-[x,y,f(z)] =< g(x\wedge y),z >$

$\Longrightarrow \qquad \forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad \mathrm{tr}(f).< x\wedge y,z > - < x\wedge y, f(z) > =< g(x\wedge y),z >$

Quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $t = x\wedge y$ décrit E

donc, $\forall t \in E, \forall z \in E, \quad \mathrm{tr}(f).< t,z > - < t,f(z) > =< g(t),z >$

$\Longrightarrow \qquad \mathrm{tr}(f).< t,z > - < f^*(t),z > =< g(t),z >$

$\Longrightarrow \qquad < (\mathrm{tr}(f).Id_E - f^*)(t),z > =< g(t),z >$

Ceci étant vrai pour tout $z \in E$, on en déduit que $g = \mathrm{tr}(f).Id_E - f^*$

Donc il existe au plus un endomorphisme g de E qui vérifie la condition $\quad (*)$.

• Réciproquement, soit $g = \mathrm{tr}(f).Id_E - f^*$

Pour vérifier que $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x)\wedge y - f(y)\wedge x = g(x\wedge y)$, on montre que :

pour tout $z \in E$, $< f(x)\wedge y - f(y)\wedge x, z > =< g(x\wedge y),z >$.

En effet, $< f(x)\wedge y - f(y)\wedge x, z > = [f(x),y,z]-[f(y),x,z]$

$$= [f(x),y,z]+[x,f(y),z] = \mathrm{tr}(f).[x,y,z]-[x,y,f(z)]$$

et $< g(x\wedge y),z > =< \mathrm{tr}(f).x\wedge y \ , \ z > - < f^*(x\wedge y),z >$

$= \mathrm{tr}(f).[x,y,z] - < x \wedge y, f(z) > = \mathrm{tr}(f).[x,y,z] - [x,y,f(z)]$

5.9 Décomposition en sous espaces stables * :

u est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que :

$\forall x, y \in E,\ < u(x), y > = < x, u^2(y) >$

1- Etudier les valeurs propres de u. Calculer u^4.

Montrer que les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

2- Soit $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_u^\lambda$ où $E_u^\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$

a) Montrer que pour tout $x \in E$, $u^3(x) - x \in \ker(u)$ et $u(x) + u^2(x) + u^3(x) \in \ker(u - Id_E)$

b) Montrer que $F^\perp$ est stable par u et que l'endomorphime $\widetilde{u}$ induit par u sur $F^\perp$ est une isométrie.

Montrer que $\widetilde{u}^2 + \widetilde{u} + Id_{F^\perp} = 0$ et que $Sp(\widetilde{u}) = \emptyset$

c) Montrer que pour tout x de $F^\perp$, non nul, $\mathrm{Vect}(x, \widetilde{u}(x))$ est un plan, stable par $\widetilde{u}$.

Déterminer la nature de $\widetilde{\widetilde{u}}$, endomorphisme induit par $\widetilde{u}$ sur $\mathrm{Vect}(x, \widetilde{u}(x))$.

Montrer qu'il existe une suite $W_1, W_2, ..., W_q$ de plans stables par u deux à deux orthogonaux telle que : $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_u^\lambda \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_q = E$

et telle que l'endomorphisme induit par u sur chacun des W_i soit une isométrie qu'on précisera.

SOLUTION :

1- • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé : $u(x) = \lambda.x$

$< u(x), x > = < \lambda.x, x > = \lambda.\|x\|^2 = < x, u^2(y) > = < x, \lambda^2.x > = \lambda^2.\|x\|^2$

Puisque $x \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda \in \{0, 1\}$

• $\forall x, y \in E,\ < u(x), y > = < x, u^*(y) > = < x, u^2(y) >$

et par unicité de l'adjoint d'un endomorphisme, $u^* = u^2$

$u^* = u_o u \implies u = (u_o u)^* = u^*_o u^*$

donc $u = (u^*)^2 = (u^2)^2 = u^4$

• u possède **au plus** deux valeurs propres, 0 et 1.

dans le cas où 0 et 1 sont effectivement valeurs propres, soient $x \in E_u^0$ et $y \in E_u^1$; $u(x) = 0$ et $u(y) = y$.

$< x, y > = < x, u(y) > = < u^*(x), y > = < u^2(x), y > = < 0, y > = 0$

Donc $E_u^0 \perp E_u^1$

2- a) Soit $x \in E$.

• $u(u^3(x) - x) = u^4(x) - u(x) = 0$ puisque $u^4 = u$.

donc $u^3(x) - x \in \ker(u) = E_u^0$.

• $u(u(x) + u^2(x) + u^3(x)) = u^2(x) + u^3(x) + u^4(x) = u(x) + u^2(x) + u^3(x)$

donc $u(x) + u^2(x) + u^3(x) \in \ker(u - Id_E) = E_u^1$

b) • Soit $x \in F^\perp$.

Pour tout $z \in F$, quelconque. $\exists (a,b) \in \ker(u) \times \ker(u - Id_E),\ z = a + b$

$< u(x), z > = < u(x), a + b > = < x, u^*(a) + u^*(b) > = < x, b > = 0$. Donc $u(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u.

• Soit $x \in F^\perp$. On a vu que $u^3(x) - x \in \ker(u)$ donc $x \perp (u^3(x) - x)$.

donc $< x, u^3(x) - x > = 0 = < x, u^3(x) > - < x, x >$

$= < x, u^*{}_o u(x) > - < x, x > = < u(x), u(x) > - < x, x >$

Donc $\forall x \in F^\perp,\ < \widetilde{u}(x), \widetilde{u}(x) > = < x, x >$ et $\widetilde{u}$ est une isométrie (automorphisme orthogonal) de $F^\perp$.

• Soit $x \in F^\perp$.

$\|x + \widetilde{u}(x) + \widetilde{u}^2(x)\|^2 = < x + u(x) + u^2(x), x + u(x) + u^2(x) >$

$= < x, x > + < u(x), u(x) > + < u^2(x), u^2(x) > +2 < x, u(x) > +2 < x, u^2(x) > +2 < u(x), u^2(x) >$

$= < x, x > + < u^3(x), x > + < u^6(x), x > +2 < u(x), x > +2 < x, u^2(x) > +2 < x, u^4(x) >$

$= < x, x > +2 < u^3(x), x > +4 < u(x), x > +2 < x, u^2(x) >$

$= < x, x > +2 \underbrace{< x + u(x) + u^2(x), x >}_{=0 \text{ d'apres } 2-a)} +2 < u(x), x >$

$=<x,x>+2<u(x),x>$
$=<x,x>+<u(x),x>+<x,u^*(x)>$
$=<x,x+u(x)+u^2(x)>=0$

Donc $\forall x \in F^\perp,\ x+\widetilde{u}(x)+\widetilde{u}^2(x)=0$ et donc $\widetilde{u}^2+\widetilde{u}+Id_{F^\perp}=0$

c) • Le polynôme X^2+X+1 est un polynôme annulateur de $\widetilde{u}$. Toute valeur propre de $\widetilde{u}$ est racine de ce polynôme. Or X^2+X+1 n'a pas de racine réelle. Donc $\widetilde{u}$ n'a pas de valeur propre : $\mathrm{Sp}(\widetilde{u})=\emptyset$

Soit $x \in F^\perp$, non nul. Alors $(x, \widetilde{u}(x))$ est un système libre, puisque x n'est pas vecteur propre de $\widetilde{u}$.

Donc $\mathrm{Vect}(x,\widetilde{u}(x))$ est un plan.

Montrons qu'il est stable par $\widetilde{u}$: $\forall x \in \mathrm{Vect}(x,\widetilde{u}(x)),\ \widetilde{u}^2(x)=-x-\widetilde{u}(x)$ puisque $\widetilde{u}^2+\widetilde{u}+Id_{F^\perp}=0$

donc $\widetilde{u}^2(x) \in \mathrm{Vect}(x,\widetilde{u}(x))$

• Les isométries vectorielles d'un plan sont soit des réflexions (symétries oprthogonales par rapport à une droite) qui ont 1 et -1 pour valeurs propres, et les rotations vectorielles, qui n'ont pas de valeurs propres, excepté pour celles d'angle 0 ou π.

Donc $\widetilde{\widetilde{u}}$ est une rotation vectorielle.

Sa matrice dans une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(x,\widetilde{u}(x))$ est de la forme $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$

$$\widetilde{\widetilde{u}}^2+\widetilde{\widetilde{u}}+Id=0 \implies A^2+A+I_2=0$$
$$\implies \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases}\cos(2\theta)-\cos(\theta)+1=0\\ \text{et} \quad \sin(2\theta)+\sin(\theta)=0\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases}2\cos^2(\theta)-\cos(\theta)=0\\ \text{et} \quad \sin(\theta)(2\cos(\theta)-1)=0\end{cases}$$

Les cas $\cos(\theta)=0$ et $\sin(\theta)=0$ sont à écarter car $\widetilde{\widetilde{u}}$ aurait alors au moins une valeur propre.

Donc $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et $\widetilde{\widetilde{u}}$ est une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$

(le signe dépend de l'orientation choisie pour le plan $\mathrm{Vect}(x,\widetilde{u}(x))$).

• Si $E=\ker(u)\oplus\ker(u-Id_E)$, la décomposition s'arrête là.

Sinon, il existe un vecteur non nul, x_1, dans $F^\perp$. Soit alors $W_1=\mathrm{Vect}(x_1,u(x_1))$. W_1 est un plan stable par u orthogonal à $F=\ker(u)\oplus\ker(u-Id_E)$.

- Si $\ker(u)\oplus\ker(u-Id_E)\oplus W_1=E$, la décomposition s'arrête là.

Sinon, il existe un vecteur non nul, x_2, dans $F^\perp$, orthogonal à W_1.

$$<u(x_2),x_1>=<x_2,\underbrace{u^2(x_1)}_{\in W_1}>=0$$
$$<u(x_2),u(x_1)>=<x_2,\underbrace{u^3(x_1)}_{\in W_1}>=0$$

Donc $u(x_2)$ est lui aussi orthogonal à W_1 et $W_2=\mathrm{Vect}(x_2,u(x_2))$ est un sous espace de $F^\perp$ orthogonal à W_1.

- Si $\ker(u)\oplus\ker(u-Id_E)\oplus W_1\oplus W_2=E$, la décomposition s'arrête là.....

On construit ainsi par ce procédé une suite de sous espaces $W_1,W_2,...,W_q$, jusqu'à ce que $\ker(u)\oplus\ker(u-Id_E)\oplus W_1\oplus W_2\oplus ...\oplus W_q=E$, ce qui se produit puisque E est de dimension finie.

6 Matrices et endomorphismes symétriques :

6.1 Endomorphisme symétrique et valeurs propres (ORAL Mines - Ponts)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, a et b deux vecteurs de E formant un système libre.

On considère l'application $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E\\ x & \mapsto & <a,x>b+<b,x>a\end{cases}$

a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

b) Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres de f.

SOLUTION : a) On vérifie que f est une application linéaire de E dans E (sans difficulté).

Soient $x, y \in E$.

$< f(x), y >= \langle < a,x > b+ < b,x > a\ ,\ y \rangle =< a,x >< b,y > + < b,x >< a,y >$

$< x, f(y) >= \langle x\ ,\ < a,y > b+ < b,y > a \rangle =< a,y >< b,x > + < b,y >< a,x >$

donc $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f(y) >$, ce qui montre que $f^* = f$, c'est à dire que f est symétrique.

b) Soit x un vecteur propre de E, associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$f(x) =< a,x > b+ < b,x > a = \lambda.x$

• Si $\lambda \neq 0$, alors $x = \frac{1}{\lambda}(< a,x > b+ < b,x > a) \in \text{Vect}(a,b)$

donc $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ x = \alpha.a + \beta.b$

$\Longrightarrow f(x) = \alpha.f(a) + \beta.f(b) = \alpha(\|a\|^2 b+ < b,a > a) + \beta(< a,b > b + \|b\|^2 a)$

$\Longrightarrow f(x) = (\alpha < b,a > +\beta\|b\|^2)a + (\alpha\|a\|^2 + \beta < a,b >)b$

or $f(x) = \lambda.x = \lambda.(\alpha.a + \beta.b)$

par unicité de la décomposition sur le système libre (a,b),

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha < b,a > +\beta\|b\|^2 = \lambda.\alpha \\ \alpha\|a\|^2 + \beta < a,b >= \lambda.\beta \end{array}\right. \iff (\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{l} (< b,a > -\lambda)\,\alpha + \|b\|^2.\beta = 0 \\ \|a\|^2\,\alpha + (< a,b > -\lambda).\beta = 0 \end{array}\right.$$

$(\mathcal{S})$ est un système linéaire de deux équations aux deux inconnues α et β. Son déterminant est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} < b,a > -\lambda & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & < a,b > -\lambda \end{vmatrix} = (< b,a > -\lambda)^2 - \|a\|^2\|b\|^2$$

Si ce déterminant est non nul, le système $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer homogène qui a pour unique solution que la solution nulle $(\alpha,\beta) = (0,0)$. Donc $x = \alpha.a + \beta.b = 0$. Donc λ n'est pas valeur propre.

Si $\Delta = 0$ (ce qui équivaut à dire que $\lambda =< b,a > +\|a\|.\|b\| = \lambda_1$ ou $\lambda =< b,a > -\|a\|.\|b\| = \lambda_2$)

alors $(\mathcal{S})$ est un système linéaire homogène de rang 1. Il est compatible car homogène et équivaut à l'une des deux équations seule :

$(\mathcal{S}) \iff -\|a\|\,\alpha + \|b\|.\beta = 0$ lorsque $\lambda = \lambda_1$

$\iff (\alpha,\beta)$ est colinéaire à $(\|b\|, \|a\|)$

$(\mathcal{S}) \iff \|a\|\,\alpha + \|b\|.\beta = 0$ lorsque $\lambda = \lambda_2$

$\iff (\alpha,\beta)$ est colinéaire à $(\|b\|, -\|a\|)$

En conclusion,

$\lambda_1 =< b,a > +\|a\|.\|b\|$ est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur $w_1 = \|b\|a + \|a\|b$

$\lambda_2 =< b,a > -\|a\|.\|b\|$ est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur $w_1 = \|b\|a - \|a\|b$

Ces deux valeurs propres sont bien distinctes puisque $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\|a\|.\|b\| \neq 0$

Elles sont non nulles car l'égalité $< b,a >= \pm\|a\|.\|b\|$ entrainerait l'égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz $| < b,a > | \leqslant \|a\|.\|b\|$ et le système (a,b) serait lié.

• Si $\lambda = 0$, l'égalité $f(x) =< a,x > b+ < b,x > a = 0$ entraîne que $< a,x >=< b,x >= 0$ puisque (a,b) est un système libre. x est alors orthogonal à tout vecteur de $\text{Vect}(a,b)$: $x \in (\text{Vect}(a,b))^\perp$.

Réciproquement, si $x \in (\text{Vect}(a,b))^\perp$, alors $f(x) = \underbrace{< a,x >}_{=0} b + \underbrace{< b,x >}_{=0} a = 0$

Donc 0 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est $(\text{Vect}(a,b))^\perp$

Remarque : Au bilan final, 0 est valeur propre avec un sous espace propre de dimension $n-2$, λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes non nulles avec pour chacune au sous espace propre de dimension 1. La somme des dimension est égale à $(n-2)+1+1 = n$, ce qui confirme que f, endomorphisme symétrique, est diagonalisable.

6.2 Coefficients et valeurs propres :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

Sans autre calcul, en déduire les valeurs propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

• L'application $(A,B) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Tr}({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{Tr}({}^tA.B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$

(voir Ex. 1)

Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}({}^tA.A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ puisque A est symétrique.

A est diagonalisable puisque réelle et symétrique, il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$A = P.\Delta.P^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}((P.\Delta.P^{-1})^2) = \mathrm{Tr}(P.\Delta^2.P^{-1}) = \mathrm{Tr}((P.\Delta^2).P^{-1})$

$$= \mathrm{Tr}(P^{-1}.(P.\Delta^2)) = \mathrm{Tr}(\Delta^2) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

• Dans la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, les colonnes 1 et n sont égales,

de même que les colonnes $2, 3, .., n-1$, non colinéaires aux premières. Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$, 0 est valeur propre de B, et le sous espace propres associé est de dimension $n - \mathrm{rg}(B) = n - 2$.

0 est valeur propre d'ordre $\geq n-2$. Il reste au plus deux valeurs propres à trouver λ_1 et λ_2 (éventuellement nulle(s))

d'après le résultat ci-dessus, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 4(n-1)$

Par ailleurs, les matrices B et Δ sont semblables donc ont même trace : $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(B) = 0$

De ces deux équations, on déduit : $\lambda_1 = -\lambda_2 = 2\sqrt{n-1}$

En conclusion, B possède deux valeurs propres simples, $\lambda_1 = 2\sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{n-1}$, et 0 valeur propre d'ordre $n-2$

6.3 Matrice symétrique positive :

Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $(a < b)$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de terme général : $a_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$

a) montrer que A est une matrice symétrique positive.

b) montrer que A est définie positive si et seulement si le système $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est libre .

SOLUTION :

a) pour tout couple $(i,j) \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_{j,i} = \int_a^b f_j(t)f_i(t)dt = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt = a_{i,j}$

et la matrice A est clairement symétrique.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
{}^tX.A.X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{n,i}x_i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{j,i}x_i \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}^tX.A.X = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n x_i \int_a^b f_j(t)f_i(t)dt \right) = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t) \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right) dt
$$

$$
{}^tX.A.X = \sum_{j=1}^n \int_a^b x_j f_j(t) \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right) dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right) dt
$$

$$
{}^tX.A.X = \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right)^2}_{\geq 0} dt \geq 0
$$

Ainsi, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX.A.X \geq 0$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est symétrique positive.}}$

b) • Si le système $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est lié, il existe des scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ on tous nuls tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n = 0$

En prenant $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, on a alors ${}^tX.A.X = \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(t) \right)^2}_{=0} dt = 0$ bien que $X \neq 0$

La matrice A n'est pas définie positive.

• Si le système $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est libre, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, l'égalité ${}^tX.A.X = 0$ entraîne

que $\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right)^2 dt = 0$, qui entraîne que pour tout $t \in [a, b]$, $\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) = 0$ car la fonction $t \mapsto \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(t) \right)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle.

Il s'en suit l'égalité $\sum_{j=1}^n x_j f_j = 0$ entre fonctions et donc $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ puisque le système $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est libre.

Dans ce cas, la matrice A est bien définie positive.

6.4 Matrice de Gram * :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de E.

On appelle **matrice de Gram** de cette famille la matrice $G = Gram(x_1, x_2, ..., x_p) = (g_{i,j})$ telle que : $\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., p\}^2,\ g_{i,j} =< x_i, x_j >$

a) Montrer que $G = {}^tM.M$ où M est la matrice de $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dans une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. $\quad (M \in M_{n,p}(\mathbb{R}))$

Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^p$ (écrit en colonne), $\quad G.X = 0 \iff M.X = 0$

En déduire que $\text{rg}(x_1, x_2, ..., x_p) = \text{rg}(G)$.

b) Montrer que $Gram(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une matrice symétrique positive.

Montrer que $\det(G) \geq 0$ et que : $\det(G) = 0 \iff (x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre dans E.

En déduire une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec le cas d'égalité.

c) Soit F un sous espace de E et $(v_1, v_2, ..., v_p)$ une base de F (non supposée orthonormée).

Soit y un vecteur de E et $p(y)$ son projeté orthogonal sur F.

On note $d(y, F)$ la distance du vecteur y au sous espace F.

Montrer que $\det[Gram(v_1, v_2, ..., v_p, y - p(y))] = \det[Gram(v_1, v_2, ..., v_p, y)]$

En déduire que $d(y, F)^2 = \dfrac{\det[Gram(v_1, v_2, ..., v_p, y)]}{\det[Gram(v_1, v_2, ..., v_p)]}$

SOLUTION :

$$G = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \dots & < v_1, v_p > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \dots & < v_2, v_p > \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ < v_p, v_1 > & < v_p, v_2 > & \dots & < v_p, v_p > \end{pmatrix} \quad G \text{ est symétrique.}$$

$$\text{et} \quad M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} < x_1, e_1 > & < x_2, e_1 > & \dots & < x_p, e_1 > \\ < x_1, e_2 > & < x_2, e_2 > & \dots & < x_p, e_2 > \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ < x_1, e_n > & < x_2, e_n > & \dots & < x_p, e_n > \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \qquad (M_{i,j} =< x_j, e_i >)$$

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., p\}^2,\ ({}^tM.M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tM)_{i,k}.M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{k,i}.M_{k,j}$$

$$({}^tM.M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} < x_i, e_k >< x_j, e_k >= \left\langle x_j,\ \sum_{k=1}^{n} < x_i, e_k > e_k \right\rangle =< x_j, x_i >= g_{i,j}$$

Donc ${}^tM.M = G$

• Soit $X \in \mathbb{R}^p$;

$M.X = 0 \implies {}^tM.M.X = 0 \implies G.X = 0$

réciproquement, $\quad G.X = 0 \implies {}^tX.G.X = 0 \implies {}^tX.{}^tM.M.X = 0$

$\implies \|M.X\|^2 = 0 \implies M.X = 0$

Finalement, $G.X = 0 \iff M.X = 0$

En considérant les endomorphismes g et μ canoniquement associés à G et M ($g \in L(\mathbb{R}^p)$ et $\mu \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$), l'équivalence précédente montre que $\ker(g) = \ker(\mu)$

Alors, par le théorème du rang, $\text{rg}(g) = p - \dim(\ker(g))$ et $\text{rg}(\mu) = p - \dim(\ker(\mu))$

donc $\text{rg}(g) = \text{rg}(\mu)$ et en passant aux matrices, $\text{rg}(G) = \text{rg}(M) = \text{rg}(x_1, x_2, ..., x_p)$

b) • $G = Gram(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une matrice symétrique réelle.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, ${}^tX.G.X = {}^tX.{}^tM.M.X ={}^t (M.X).(M.X) = \|M.X\|^2 \geq 0$

Donc G est une matrice symétrique positive.

• $\det(G) = \det({}^tM.M) = \det({}^tM).\det(M) = (\det M)^2 \geq 0$

• $\det(G) \neq 0 \iff G$ est inversible $\iff \text{rg}(G) = p \iff \text{rg}(M) = p \iff \text{rg}(x_1, x_2, ..., x_p) = p \iff (x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre.

• Soient x et y deux vecteurs de E.

Alors $Gram(x,y) = \begin{pmatrix} <x,x> & <x,y> \\ <y,x> & <y,y> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & <x,y> \\ <y,x> & \|y\|^2 \end{pmatrix}$

dans tous les cas, $\det(G) = \|x\|^2\|y\|^2 - <x,y>^2 \geq 0$ d'après l'étude précédente.

donc $|<x,y>| \leq \|x\|.\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

L'équivalence $\det(G) = 0 \Leftrightarrow (x,y)$ est lié, montre alors qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si le système (x,y) est lié.

c) • $\det[Gram(v_1, v_2, ..., v_p, y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1, y-p(y)> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2, y-p(y)> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p, y-p(y)> \\ <y-p(y),v_1> & \dots & <y-p(y),v_p> & <y-p(y), y-p(y)> \end{vmatrix}_{p+1}$

Or $p(y) \in F$, donc $p(y)$ est combinaison linéaire de $(v_1, v_2, ..., v_p)$: $p(y) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_k$

$$\det[G(v_1, v_2, ..., v_p, y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1, y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2, y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p, y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k> \\ <y-p(y),v_1> & \dots & <y-p(y),v_p> & <y-p(y), y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k> \end{vmatrix}_{p+1}$$

$$= \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y> - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k <v_1,v_k> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y> - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k <v_2,v_k> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y> - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k <v_p,v_k> \\ <y-p(y),v_1> & \dots & <y-p(y),v_p> & <y-p(y),y> - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k <y-p(y),v_k> \end{vmatrix}_{p+1}$$

En ajoutant à la $(p+1)^e$ et dernière colonne la somme $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k C_k$ où C_k désigne la k^e colonne, on obtient :

$$\det[G(v_1, v_2, ..., v_p, y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y> \\ <y-p(y),v_1> & \dots & <y-p(y),v_p> & <y-p(y),y> \end{vmatrix}_{p+1}$$

$$= \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y> \\ <y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k, v_1> & \dots & <y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k, v_p> & <y-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k, y> \end{vmatrix}_{p+1}$$

$$= \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y> \\ <y,v_1> - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k <v_k,v_1> & \dots & <y,v_p> - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k <v_k,v_p> & <y,y> - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k <v_k,y> \end{vmatrix}_{p+1}$$

Enfin, en ajoutant à la $(p+1)^e$ et dernière ligne la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k$ où L_k désigne la k^e ligne, on obtient :

$$\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y> \\ <y,v_1> & \dots & <y,v_p> & <y,y> \end{vmatrix}_{p+1}$$

soit : $\boxed{\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y-p(y))] = \det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y)]}$

• En reprenant l'égalité

$$\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & <v_1,y-p(y)> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & <v_2,y-p(y)> \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & <v_p,y-p(y)> \\ <y-p(y),v_1> & \dots & <y-p(y),v_p> & <y-p(y),y-p(y)> \end{vmatrix}_{p+1}$$

Remarquons que $y-p(y) \in F^{\perp}$ donc le produit scalaire $<v_i, y-p(y)>$ est nul pour tout i:

$$\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y-p(y))] = \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> & 0 \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> & 0 \\ 0 & \dots & 0 & <y-p(y),y-p(y)> \end{vmatrix}_{p+1}$$

et en développant suivant la dernière ligne (ou colonne),

$$\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y-p(y))] = \|y-p(y)\|^2 . \begin{vmatrix} <v_1,v_1> & \dots & <v_1,v_p> \\ <v_2,v_1> & \dots & <v_2,v_p> \\ \vdots & \dots & \vdots \\ <v_p,v_1> & \dots & <v_p,v_p> \end{vmatrix}_{p}$$

ce qui montre finalement que : $\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y)] = \|y-p(y)\|^2 . \det[Gram(v_1,v_2,...,v_p)]$

et donc $\boxed{d(y,F)^2 = \|y-p(y)\|^2 = \dfrac{\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p,y)]}{\det[Gram(v_1,v_2,...,v_p)]}}$

6.5 Matrice symétrique positive :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

a) A est une matrice symétrique positive.

b) $\exists M \in M_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tM.M$.

c) Il existe des vecteurs colonnes $V_1, V_2, ..., V_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2,\ a_{i,j} = {}^tV_i.V_j$$

SOLUTION : • Supposons qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tM.M$.

Alors ${}^tA = {}^t({}^tM.M) = {}^tM.{}^t({}^tM) = {}^tM.M = A$ donc A est une matrice symétrique.

Pour tout vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$${}^tX.A.X = {}^tX.({}^tM.M).X = {}^t(M.X).MX = \|M.X\|^2 \geq 0$$

Donc A est symétrique positive.

On a ainsi montré que $b) \implies a)$

• Supposons qu'il existe des vecteurs colonnes $V_1, V_2, ..., V_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2,\ a_{i,j} = {}^tV_i.V_j$$

Alors, $A = \begin{pmatrix} {}^tV_1.V_1 & {}^tV_1.V_2 & ... & {}^tV_1.V_n \\ {}^tV_2.V_1 & {}^tV_2.V_2 & ... & {}^tV_2.V_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ {}^tV_n.V_1 & {}^tV_n.V_2 & ... & {}^tV_n.V_n \end{pmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^tV_1 \\ \hline {}^tV_2 \\ \hline \cdots \\ \hline {}^tV_n \end{pmatrix}}_{\textit{blocs de lignes}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} V_1 & V_2 & ... & V_n \end{array}\right)}_{\textit{blocs de colonnnes}} = {}^tM.M$$

où M est la matrice $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} V_1 & V_2 & ... & V_n \end{array}\right)$ de $M_n(\mathbb{R})$ définie par blocs de vecteurs colonnes.

On a ainsi montré que $c) \implies b)$

• Soit A une matrice symétrique positive.

Elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale et ses valeurs propres sont positives ou nulles :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists (\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \text{ tels que } A = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.{}^tP$$

En posant $A = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.{}^tP$

En posant $A = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.{}^tP = Q.{}^tQ$

en ayant posé $Q = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Si on note alors $L_1, L_2, ..., L_n$ les vecteurs lignes de Q, de sorte que $Q = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \cdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$, on obtient :

$$A = Q.{}^tQ = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \cdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}.\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} {}^tL_1 & {}^tL_2 & ... & {}^tL_n \end{array}\right) = \begin{pmatrix} L_1.{}^tL_1 & L_1.{}^tL_2 & ... & L_1.{}^tL_n \\ L_2.{}^tL_1 & L_2.{}^tL_2 & ... & L_2.{}^tL_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ L_n.{}^tL_1 & L_n.{}^tL_2 & ... & L_n.{}^tL_n \end{pmatrix}$$

On a bien pour tout couple (i,j) , $a_{i,j} = L_i.{}^tL_j = {}^tV_i.V_j$ en posant $\forall k,\ V_k = {}^tL_k$

On a ainsi montré que $a) \implies c)$

6.6 Racine carrée d'une matrice symétrique positive :

On rappelle qu'une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX.A.X \geq 0$$

ou de manière équivalente si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Celle-ci est appelée "racine carrée positive de A".

Application : Avec MAPLE, calculer la racine carrée positive de la matrice $A = \begin{pmatrix} 54 & -14 & 12 \\ -14 & 38 & 4 \\ 12 & 4 & 24 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

• **Existence :** Soit A une matrice symétrique positive. Elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale et ses valeurs propres sont positives ou nulles :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists(\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \text{ tels que } A = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.{}^tP$$

Alors $A = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.{}^tP.P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.{}^tP$

D'où $A = B^2$ où $B = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.{}^tP$ et la matrice B est bien symétrique (vérification immédiate).

• **Unicité :** Soit A une matrice symétrique positive et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

○ ○ ○ Considérons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{\mu_1, ..., \mu_q\}$

(chaque valeur propre ayant un ordre de multiplicité ≥ 1)

$\forall X \in E^B_{\mu_i},\ B.X = \mu_i.X \implies A.X = B^2.X = \mu_i^2.X$

donc $\mu_i^2 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E^A_{\mu_i^2}$

d'où l'on déduit que $\{\mu_1^2, ..., \mu_q^2\} \subset \mathrm{Sp}(A)$ et $\forall i,\ E^B_{\mu_i} \subset E^A_{\mu_i^2}$

L'application $t \longrightarrow t^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, et les réels $\mu_1^2, ..., \mu_q^2$ sont donc deux à deux distincts. Il s'ensuit que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = p \geq q = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(B))$

La matrice B, réelle symétrique, est diagonalisable, donc $E^B_{\mu_1} \oplus E^B_{\mu_2} \oplus ... \oplus E^B_{\mu_q} = \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccccccc} E^B_{\mu_1} & \oplus & E^B_{\mu_2} & \oplus & ..... & \oplus & E^B_{\mu_q} = E \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ E^A_{\mu_1^2} & \oplus & E^A_{\mu_2^2} & \oplus & ..... & \oplus & E^A_{\mu_q^2} \subset E \end{array}$$

Puisque la somme $E^B_{\mu_1} \oplus E^B_{\mu_2} \oplus ... \oplus E^B_{\mu_q}$ est déja égale à $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit que $p = q$, que $\mathrm{Sp}(A) = \{\mu_1^2, ..., \mu_q^2\}$ et que $\forall i,\ E^B_{\mu_i} = E^A_{\mu_i^2}$.

Les matrices A et B ont donc les mêmes sous espaces propres.

○ ○ ○ Soit alors $C_1, C_2, ..., C_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et P la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ayant pour colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$.

Alors $P^{-1}.A.P$ est une matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Puisque $C_1, C_2, ..., C_n$ forment aussi une base de vecteurs propres de B, la matrice $P^{-1}.B.P$ est elle aussi diagonale :

$$P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mu_2 & ... & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.B^2.P = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & ... & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donc $\forall i$, $\mu_i^2 = \lambda_i$ et comme les λ_i et les μ_i sont positifs, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ et finalement

$B = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.{}^tP$ et la matrice B est déterminée de manière unique.

Application : $A = \begin{pmatrix} 54 & -14 & 12 \\ -14 & 38 & 4 \\ 12 & 4 & 24 \end{pmatrix}$

>with(linalg):
A:=matrix(3,3,[54,-14,12,-14,38,4,12,4,24]); eigenvects(A);

[36, 1, {[1, 3, 2]}], [64, 1, {[4, -2, 1]}], [16, 1, {[1, 1, -2]}]

Les résultas donnés par MAPLE permettent de diagonalser A de la manière suivante :

$A = P.\Delta.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

et la racine carrée positive de A est $B = P.\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.P^{-1}$, que nous calculons avec MAPLE :

P:=matrix(3,3,[1,1,4,3,1,-2,2,-2,1]);B:=multiply(P, diag(6,4,8),inverse(P));

$$\boxed{B = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 151 & -23 & 22 \\ -23 & 127 & 10 \\ 22 & 10 & 100 \end{pmatrix}}$$

On peut vérifier la justesse du calcul par : **>multiply(B,B);**

6.7 Matrice symétrique non diagonalisable :

Existe des matrices symétriques complexes non diagonalisables ?

SOLUTION :

Une matrice non nulle de $M_2(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique serait X^2 ne serait pas diagonalisable, car la seule matrice diagonalisable dont le spectre est réduit à $\{0\}$ est la matrice nulle.

Puisque $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$, recherchons une matrice complexe symétrique, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ telle que $\operatorname{tr}(A) = \det(A) = 0$

$\operatorname{tr}(A) = 0 \iff c = -a$ et $\det(A) = 0 \iff -a^2 - b^2 = 0$.

Il suffit de prendre par exemple $a = 1$, $b = i$ et $c = -1$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \text{ est symétrique mais pas diagonalisable.}}$

6.8 Produit de deux matrices symétriques :

Soient A et B deux matrices réelles symétriques d'ordre n. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) $A.B$ est symétrique.

(ii) $A.B = B.A$

(iii) il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^tP.A.P$ et ${}^tP.B.P$ soient diagonales.

SOLUTION :

• Si $A.B$ est symétrique, alors ${}^t(A.B) = \underbrace{{}^tB}_{B}.\underbrace{{}^tA}_{A} = A.B$ donc $A.B = B.A$.

- Réciproquement, si $A.B = B.A$, puisque A et B sont symétriques, $A.B = B.A = {}^tB.{}^tA = {}^t(A.B)$ donc $A.B$ est symétrique.

On a ainsi montré que $(i) \iff (ii)$

• S'il existe une matrice P orthogonale telle que $\Delta_1 = {}^tP.A.P$ et $\Delta_2 = {}^tP.B.P$ soient diagonales, alors

$$A.B = (P.\Delta_1.\underbrace{{}^tP}_{P^{-1}}).(P.\Delta_2.{}^tP) = P.\Delta_1.\Delta_2.{}^tP = P.\Delta_2.\Delta_1.{}^tP = (P.\Delta_2.{}^tP).(P.\Delta_1.{}^tP) = B.A$$

($\Delta_1.\Delta_2 = \Delta_2.\Delta_1$ car deux matrices diagonales commutent toujours)

On a ainsi montré que $(iii) \implies (ii)$

- Réciproquement, supposons que $A.B = B.A$. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B respectivement.

f et g sont symétriques comme A et B, donc diagonalisables et commutent.

Donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} E_\lambda^f$

Puisque f et g commutent, chaque sous-espace propre E_λ^f de f est stable par g. L'endomorphisme $\widetilde{g}_\lambda$ induit par g sur E_λ^f est symétrique (le justifier...) donc diagonalisable. Il existe une base orthonormale B_λ de E_λ^f formée de vecteurs propres de $\widetilde{g}_\lambda$ donc de g. Ces vecteurs de B_λ sont aussi des vecteurs propres de f puisqu'ils appartiennent à E_λ^f. Les sous espaces E_λ^f étant deux à deux orthogonaux, la réunion des bases B_λ forme une base orthonormale de E, composée de vecteurs propres à la fois de f et de g.

Les matrices Δ_1 et Δ_2 de f et de g dans cette base $(\cup B_\lambda)$ respectivement sont diagonales. Soit P la matrice de passage de la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^n$ à la base $(\cup B_\lambda)$. P est une matrice orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormales, et d'après la formule de changement de bases, $A = P.\Delta_1.P^{-1}$ et $B = P.\Delta_2.\underbrace{P^{-1}}_{{}^tP}$

En inversant les rôles de P et de sa transposée, on a établi que $(ii) \implies (iii)$

6.9 Pseudo-solutions ; Droite des moindres carrés * :

On considère une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne $B \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques et normes euclidiennes canoniques associées notées $\| \quad \|_2$.

1- On note $\ker A$ l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^p$ tels que $A.X = 0$ et $\mathrm{Im}A$ l'ensemble des vecteurs Y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tels que $Y = A.X$

a) Montrer que $\ker A = (\mathrm{Im}({}^tA))^\perp$

b) Montrer que $\ker A = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = p$

2- On étudie l'équation $(*)$: $A.X = B$ où X est un vecteur colonne inconnu de $\mathbb{R}^p$.

On suppose que l'équation $(*)$ est incompatible, c'est à dire qu'elle n'a pas de solution. On appelle pseudo-solution tout vecteur $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|A.X - B\|_2$ soit minimale.

a) Montrer que $(*)$ admet toujours une pseudo solution, et que les vecteurs X peudo-solutions de $(*)$ forment un espace affine dont on précisera la direction.

b) Montrer que X est une pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si X est solution de l'équation $(**)$: ${}^tA.A.X = {}^tA.B$

Montrer que ce deuxième système est de Cramer lorsque $\mathrm{rg}(A) = p$

c) Montrer que le système (S) :

$$\begin{cases} -2x + 2y = 9 \\ x + 5y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

admet une unique pseudo-solution et la calculer.

3- Application : *Droite des moindres carrés* :

Soit une famille de points de $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ (provenant par exemple d'une série de mesures de grandeurs physiques).

On étudie s'il existe une droite passant par tous ces points, c'est à dire s'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $y_i = ax_i + b$

Montrer que le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} x_1\,a+b=y_1 \\ \quad \dots \\ x_n\,a+b=y_n \end{array}\right.$

admet en général (à préciser) une unique pseudo solution, donnée par :

$$a=\frac{n.\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n.\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\ ,\quad b=\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)}{n.\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

SOLUTION :

1- a) Soit $X\in\ker A$; donc $A.X=0$.

Pour tout $Y\in\mathrm{Im}({}^tA), \exists Z\in\mathbb{R}^n, Y={}^tAZ$

alors $<X,Y>={}^tX.Y={}^tX.{}^tAZ={}^t(\underbrace{A.X}_{=0})Z=0$ donc $X\in\mathrm{Im}({}^tA))^\perp$

On a ainsi montré que $\ker A\subset(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp$

• $\ker A$ est le noyau d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ donc $\dim(\ker A))=p-\mathrm{rg}(A)$

Par ailleurs $(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp$ est l'orthogonal dans $\mathbb{R}^p$ du sous espace $\mathrm{Im}({}^tA)$,

donc $\dim((\mathrm{Im}({}^tA))^\perp)=p-\dim(\mathrm{Im}({}^tA))=p-\mathrm{rg}({}^tA)=p-\mathrm{rg}(A)$

Par inclusion et égalité des dimensions, on a finalement l'égalité $\ker A=(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp$

b) La relation $\dim(\ker A))=p-\mathrm{rg}(A)$ qui vient d'être établie montre que :

$$\ker A=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{rg}(A)=p$$

2- a) Lorsque X décrit $\mathbb{R}^p, A.X$ décrit le sous espace $\mathrm{Im}(A)$ de $\mathbb{R}^n$.

La distance $\|A.X-B\|_2$ est celle entre le vecteur fixe B de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur $A.X$ qui décrit $\mathrm{Im}(A)$, c'est donc la distance de B au sous espace $\mathrm{Im}(A)$, et on sait que cette distance est celle de B au projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$:

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^p}\|A.X-B\|_2=\inf_{Y\in Im(A)}\|Y-B\|_2=\|Y_0-B\|_2$$

où Y_0 est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$.

Puisque $Y_0\in\mathrm{Im}(A)$, $\exists X_0\in\mathbb{R}^p,\ Y_0=A.X_0$. Fixons un tel X_0.

Pour tout $X\in\mathbb{R}^p$, $\|A.X-B\|_2$ est minimale si et seulement si $A.X=Y_0$,

$$\begin{array}{ll}\Longleftrightarrow & A.X=A.X_0\\ \Longleftrightarrow & A.(X-X_0)=0\\ \Longleftrightarrow & X-X_0\in\ker A\\ \Longleftrightarrow & X=X_0+V,\ V\in\ker A\end{array}$$

donc l'ensemble des vecteurs X peudo-solutions de $(*)$ est un espace affine, contenant X_0 , et parallèle au sous espace $\ker A$

b) Y_0, projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$, est défini par les deux conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} Y_0\in\mathrm{Im}(A)\\ \quad\text{et}\\ B-Y_0\in(\mathrm{Im}(A))^\perp=\ker({}^tA)\quad\text{(d'après la question 1-a)}\end{array}\right.$$

• Soit $X\in\mathbb{R}^p$ pseudo solution de $(*)$.

Alors $A.X=Y_0\implies{}^tA.A.X={}^tA.Y_0$

or ${}^tA.(B-Y_0)=0$ puisque $B-Y_0\in\ker({}^tA)$ donc ${}^tA.Y_0={}^tA.B$

Ainsi, si $X\in\mathbb{R}^p$ pseudo solution de $(*)$, alors ${}^tA.A.X={}^tA.B$

• réciproquement, soit $X\in\mathbb{R}^p$ tel que ${}^tA.A.X={}^tA.B$

On a vu que ${}^tA.Y_0={}^tA.B$, donc ${}^tA.A.X={}^tA.Y_0$ et ${}^tA.(A.X-Y_0)=0$

Donc $A.X-Y_0\in\ker({}^tA)=(\mathrm{Im}A)^\perp$

Mais par définition $A.X$ et Y_0 appartiennent à $\mathrm{Im}(A)$,

donc $A.X-Y_0\in\mathrm{Im}(A)\cap(\mathrm{Im}A)^\perp=\{0\}$

Ainsi $A.X=Y_0$ et X est bien pseudo solution de $(*)$ d'après la question 2-a)

Finalement, on a montré qu'un vecteur $X\in\mathbb{R}^p$ est une pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si il est solution de l'équation $(**)$: ${}^tA.A.X={}^tA.B$

• $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA\in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et ${}^tA.A\in M_p(\mathbb{R})$

Il est immédiat que $\ker A\subset\ker({}^tA.A)$

Réciproquement, si $X \in \ker({}^tA.A)$, alors

$${}^tA.A.X = 0 \Rightarrow {}^tX.{}^tA.A.X = 0 \Rightarrow {}^t(A.X).(A.X) = 0 \Rightarrow \|A.X\|^2 = 0 \Rightarrow A.X = 0$$

donc $\ker A = \ker({}^tA.A)$

par le théorème Durand, il s'ensuit que :

$$\mathrm{rg}(A) = p - \dim(\ker A) = p - \dim(\ker({}^tA.A)) = \mathrm{rg}({}^tA.A)$$

Puisque ${}^tA.A \in M_p(\mathbb{R})$, le système $(**)$: ${}^tA.A.X = {}^tA.B$ est de Cramer si et seulement si $\mathrm{rg}({}^tA.A) = p$ ssi $\mathrm{rg}(A) = p$

c) Pour le système (S) : $\left\{\begin{array}{c} -2x+2y=9 \\ x+5y=5 \\ x+2y=4 \end{array}\right.$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$ donc le système formé des colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est libre, on ne peut pas décomposer le vecteur B comme combinaison linéaire $xC_1 + yC_2$ des colonnes C_1 et C_2. Le système $(*)$ est incompatible.

- ${}^tA.A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 33 \end{pmatrix}$ et ${}^tA.B = \begin{pmatrix} -9 \\ 51 \end{pmatrix}$

Le système $(**)$ s'écrit : $\left\{\begin{array}{c} 6x+3y=-9 \\ 3x+33y=51 \end{array}\right.$

C'est bien un système de Cramer, qui admet pour solution unique $(x,y) = (-\frac{50}{21}, \frac{37}{21})$

(en accord avec l'étude théorique qui précède car ici, $p = 2 = \mathrm{rg}(A)$)

Le système (S) admet donc une unique pseudo-solution, $(-\frac{50}{21}, \frac{37}{21})$

3- Application : *Droite des moindres carrés* :

Pour le système (S) : $\left\{\begin{array}{c} x_1\,a+b=y_1 \\ \dots \\ x_n\,a+b=y_n \end{array}\right.$ aux inconnues a et b,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$${}^tA.A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$$

$${}^tA.B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_iy_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

$$\det({}^tA.A) = n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

En posant $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$| < U,V > |^2 \leq \|U\|^2\|V\|^2$ soit $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^n x_i^2$ avec égalité si et seulement si U et V sont colinéaires, c'est à dire ssi $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Dans ce cas les points seraient alignés sur une même verticale.

Dans le cas général où les points ne sont pas alignés, $\det({}^tA.A) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$

La matrice ${}^tA.A$ est donc inversible et le système $(**)$ est de Cramer.

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + \quad nb \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

On peut écrire les formules de Cramer pour obtenir l'unique solution (a, b) du système $(**)$:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}}{\det({}^tA.A)} = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n.\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}}{\det({}^tA.A)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n.\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

6.10 Formes linéaires continues sur l^2 (dual topologique de l^2)

On note l^2 l'ensemble des suites à valeurs réelles dont la série des carrés converge : $l^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \text{ converge }\}$

1-a) Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

Montrer que l^2 est un espace vectoriel sur réel et que l'application $(u_n) \longrightarrow \|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ est une norme sur l^2.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application T_n de troncature au rang n, qui à la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ fait correspondre la suite tronquée (v_k) telle que : $v_k = u_k$ si $k \leq n$ et $v_k = 0$ si $k > n$.

Montrer que T_n est une application linéaire de l^2 dans lui même, continue, et calculer sa norme subordonnée.

Montrer que pour toute suite $u \in l^2$, $\lim_{n\to\infty} T_n(u) = u$

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$. D'après 1-a) on sait que pour toute suite $u = (u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Montrer que l'application Φ_a qui à la suite u fait correspondre $\Phi_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est une forme linéaire sur l^2, continue, et calculer sa norme $|||\Phi_a|||$.

b) Réciproquement, soit Ψ une forme linéaire continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\geq 0} \in l^2$ telle que $\Psi = \Phi_b$

(on pourra déterminer b_n en fonction de Ψ et des suites $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$ et justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n$, $\sum_{k=0}^{n} b_n^2 \leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_n^2}$ pour montrer la convergence de $\sum b_n^2$)

SOLUTION :

1-a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

• Soient (u_n) et (v_n) $\in l^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

alors $(u_n+\lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$

$\{u_n^2\}$ et $\{v_n^2\}$ sont des séries convergentes par hypothèse et $\{u_n.v_n\}$ l'est aussi par ce qui précède, donc $\sum (u_n+\lambda v_n)^2$ converge et $(u_n)+\lambda(v_n) \in l^2$.

l^2, stable par addition et par multiplication par un scalaire, est un sous espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

• On montre sans difficulté que $\| \ \|_2$ est une norme sur l^2 (euclidienne).

b) $T_n:\ (u_k)_{k\geq 0} = (u_0,u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1},...,u_{n+p},...) \longrightarrow (v_k)_{k\geq 0} = (u_0,u_1,u_2,...,u_n,0,0,...,0,...)$

La suite $(v_k)_{k\geq 0}$ étant à support fini, la série $\sum v_k^2$ converge (somme finie) et $(v_k) \in l^2$.

• T_n est linéaire (immédiat) , donc $T_n \in L(l^2)$.

$$\forall (u_k) \in l^2, \quad \|T_n(u)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 = \|u\|^2$$

T_n est lipschitzienne de rapport 1, elle est donc continue et $|||T_n||| \leq 1$

En considérant la suite $\Delta_0 = (1,0,0,0,...,0,...)$, on obtient $||T_n(\Delta_0)|| = ||\Delta_0||$. Donc $\boxed{|||T_n||| = 1}$

• Soit $u \in l^2$. Pour tout entier n, $u - T_n(u) = (0,0,0,...,0,u_{n+1},...,u_{n+p},...)$

donc $\|u-T_n(u)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^2 = r_n$, reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n^2$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|u-T_n(u)\|^2 = \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, ce qui montre que la suite $(T_n(u))_{n\geq 0}$ converge vers u dans l'espace vectoriel normé $(l^2, || \ ||_2)$.

2-a) Soit $a = (a_n) \in l^2$.

Pour toute suite $u=(u_n)$ de l^2, la série $\sum a_n u_n$ converge (question 1-a)),

et $|\Phi_a(u)| = |<a,u>| \leq \| a \| \,.\, \| u \|$, ce qui montre que Φ_a est lipschitziznnz de rapport $\| a \|$ donc est continue et $|||\Phi_a||| \leq \| a \|$

Par ailleurs, $|\Phi_a(a)| = |<a,a>| = \| a \|^2$, ce qui montre que $\boxed{|||\Phi_a||| = \| a \|}$

b) Soit Ψ une forme linéaire continue sur l^2.

• Analyse : Supposons qu'il existe une suite $(b_n) \in l^2$ telle que $\forall u \in l^2,\ \Psi(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$.

Pour tout entier i notons $\Delta_i = (\delta_{i,n})_{n\geq 0}$

Ainsi, $\Delta_0 = (1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_1 = (0,1,0,0,...,0,...)$

$\Delta_2 = (0,0,1,0,...,0,...)$ etc...

Pour tout $i \in \mathbb{N}, \Psi(\Delta_i) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \delta_{i,n} = b_i$. Donc la suite (b_n) est unique et vérifie :

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \Psi(\Delta_n)$

• Synthèse : Soit donc la suite $b=(b_n)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \Psi(\Delta_n)$

Pour tout n, $\Psi(T_n(b)) = \Psi(b_0,b_1,...,b_n,0,0...,0...) = \Psi(b_0\Delta_0 + b_1\Delta_1 + ... + b_n\Delta_n$

$= b_0\Psi(\Delta_0) + b_1\Psi(\Delta_1) + ... + b_n\Psi(\Delta_n) = b_0^2 + b_1^2 + ... + b_n^2$

Or Ψ est continue, linéaire, donc lipschitzienne :

$\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \in l^2,\ |\Psi(u)| \leq \mu.\|u\|$

en particulier, pour tout n, $|\Psi(T_n(b))| \leq \mu.\|T_n(b)\|$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M.\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$

donc $\displaystyle\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2} \leq M$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k^2 \leq M^2$ et la série $\sum b_n^2$ dont les sommes partielles sont majorées, converge.

Donc $(b_n) \in l^2$.

• Enfin, $\forall u=(u_n)\in l^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \Psi(T_n(u))=\Psi\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\Delta_k\right)=\sum_{k=0}^{n}u_k\Psi(\Delta_k)=\sum_{k=0}^{n}u_kb_k$

Quand $n\to+\infty,\ T_n(u)\to u$ (question 1-b) et par continuité de la forme linéaire $\Psi,\ \Psi(T_n(u))\longrightarrow \Psi(u)$

Dans le second membre, puisque u et b appartiennent à l^2, d'après 1-a), la série $\sum b_nu_n$ converge et $\sum_{k=0}^{n}u_kb_k\to\sum_{k=0}^{\infty}u_kb_k$

Donc en passant à la limite quand $n\longrightarrow+\infty$, dans la dernière égalité, on obtient $\Psi(u)=\sum_{k=0}^{\infty}u_kb_k$

Ce qui montre que $\Psi=\Phi_b$.

Finalement, $\boxed{\text{les formes linéaires continues sur } l^2 \text{ sont les applications de la forme } \Phi_a \text{ où } a\in l^2.}$