– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Les exercices plus difficiles sont marqués d'un ou deux astérisques $*$

# I - Dénombrements, probabilités .

**Exercice 1 :**

On tire une main de cinq cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelles sont les probabilités
a) Que cette main contienne 4 as ?
b) Que cette main contienne 3 as et deux rois ?
c) Que cette main contienne au moins un as ?
d) Que cette main contienne 5 trèfles ?
e) Que cette main contienne 5 cartes de la même couleur ?
f) Que cette main contienne 5 cartes qui se suivent (mais peuvent être de couleurs quelconques) ?
(par exemple, dame de coeur, valet de pique, 10 de trèfle, 9 de coeur et 8 de carreau)
g) Que cette main soit un full (3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur) ?

**Exercice 2 :**

Soient $E$ un ensemble de cardinal $n, A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties de $E$.
a) De combien de façon peut on choisir le couple $(A, B)$ ?
b) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ ?
c) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A \cup B = E$ ?
d) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ formant une partition de $E$ ? ($A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$) ?

**Exercice 3 :** On lance $n$ fois une pièce de monnaie.
a) Combien de combinaisons sont elles possibles ?
b) Combien de combinaisons donnent elles un résultat alterné ?
c) Combien de combinaisons donneront $k$ fois pile exactement (peu importe l'ordre, $0 \leqslant k \leqslant n$)

**Exercice 4 :** Une urne contient 5 boules blanches et 2 boules noires.
1- On tire trois boules de cette urne, sans remise.
a) Combien a-t-on de résultats possibles ?
b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne 3 boules blanches ?
c) Quelle est la probabilité qu'on obtienne 2 boules blanches ?
d) Quelle est la probabilité qu'on obtienne une seule boule blanche ?
2- Mêmes questions a), b), c), d) lorsqu'on remet dans l'urne la boule sortie après chaque tirage.

**Exercice 5 :** Le code pin ( Personal Identification Number ) d'un téléphone portable comporte quatre chiffres.
a) Combien y a-t-il de codes pin possibles ?
b) J'ai oublié mon code pin, mais je me souviens que le premier chiffre de mon code est 1, qu'il contient aussi le chiffre 5, que c'est un nombre pair et multiple de trois . Quelle est la probabilité que j'allume mon portable sachant que je n'ai droit qu'à trois essais pour entrer le code ?

**Exercice 6 :** Un pirate tente d'accéder à un serveur protégé par un mot de passe en essayant systématiquement à l'aide d'un robot tous les mots de passe possibles. Chaque essai dure $0,1$ milliseconde. Un mot de passe est formé de 8 caractères, et chaque caractère est codé sur 7 bits.
a) Combien de temps mettra le pirate pour trouver le bon code dans le pire des cas ?
b) Même question si le pirate connait deux des 8 caractères, mais pas leur emplacement.

## Exercice 7 :

Un joueur lance deux dés jusqu'à ce qu'il obtienne un double-6, auquel cas il arrète. On note $X$ le nombre de lancers qui ont été effectués.

a) Décrire l'ensemble $\Omega$ des issues, et donner la loi de probabilité de la variable $X$.

b) Calculer en moyenne le nombre de lancers qu'il faudra effectuer pour obtenir un double-6. (c'est à dire l'espérance de la loi $X$ )

c) Mêmes questions en remplaçant le succès est l'apparition de deux dés dont la somme est supérieure ou égale à 10 :

## Exercice 8 :

Un version du jeu d'argent et de hasard américain "chuck a luck" est la suivante : On mise un dollar en pariant sur un nombre entier. Puis on lance trois dés.

Si le nombre sur lequel on a parié sort 3 fois, on gagne 10 dollars

Si le nombre sur lequel on a parié sort 2 fois, on gagne 2 dollars

Si le nombre sur lequel on a parié sort 1 fois, on gagne 1 dollar.

Sinon le nombre misé ne sort pas, on ne gagne rien (ce qui signifie qu'on perd sa mise)

$X$ désigne la somme effectivement gagnée (mise de départ déduite)

Déterminer la loi de $X$. Quelle somme gagne-t-on en moyenne ?

## Exercice 9 :

Sur le trajet que doit parcourir un automobiliste, on dénombre $n$ feux rouges. Chaque feu rouge est vert 40% du temps et rouge 60% du temps. Ces feux ne sont pas synchronisés, le fait qu'ils soient vert ou rouge est indépendant d'un feu à l'autre.

a) Quelle est la probabilité que l'automobiliste ne rencontre que des feux verts sur son passage ?

Quelle est la probabilité qu'il ait la malchance que de tomber que sur des feux rouges ?

Cas $n = 10$ ?

b) On note $X$ le nombre de feux passés au vert avant que l'automobiliste ne soit arrété par un feu rouge.

Donner loi de probabilité de $X$ et calculer la valeur moyenne de $X$.

Vérifier que par le calcul de la somme de leurs propbabilité que les évènements $(X = k)$ forment bien une système complet d'évènements.

Rédiger un programme Python qui fait le calcul lorsque $n = 10$ .

## Exercice 10 :

20% des chaudières sont sous garantie.

La proportion de chaudières sous garantie qui sont défectueuses est de 1%.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la proportion de chaudières défectueuses est de 10%.

1 - Calculer la probabilité pour que :

a) une chaudière prise au hasard soit sous garantie,

b) une chaudière prise au hasard soit défectueuse,

c) qu'une chaudière soit sous garantie et défectueuse.

2 - Dans un logement, une chaudière est défectueuse. calculer la probabilité pour qu'elle soit garantie. (rép. $\frac{1}{41}$)

## Exercice 11 :

Quelle est la probabilité que dans une classe de 38 élèves, deux élèves au moins aient la même date anniversaire? (on supposera que toutes les années ont 365 jours).

**Exercice 12 :** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, et soient A et B deux évènements.

a) Montrer que si $P(A) = P(B) = 0,9$ , alors, $P(A \cap B) \geqslant 0,8$ .

b) Dans le cas général, montrer que $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

**Exercice 13 :** Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur peut tomber en panne indépendamment des autres, et on estime à $p$ la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à $q$ la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent :

Quelle est la probabilité que l'avion puisse voler sans encombre ?

### Exercice 14 :

Un trousseau de clés comporte 8 clés, toutes semblables.

Pour ouvrir la serrure en question, on fait des essais successifs jusqu'à ce qu'on trouve la bonne clé, en écartant au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que l'on ouvre la porte :

a) du premier coup ? b) au troisième essai ?

c) au cinquième essai ? d) au huitième essai ?

e) au neuvième essai ?

a) P(ouvrir la serrure au premier essai) $= \frac{1}{8}$

b) P(ouvrir la serrure au troisième essai) $= \dfrac{7 \times 6}{8 \times 7 \times 6} = \dfrac{1}{8}$

c) P(ouvrir la serrure au cinquième essai) $= \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \dfrac{1}{8}$

d) P(ouvrir la serrure au huitième essai) $= \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{1}{8}$

e) P(ouvrir la serrure au huitième essai) $= 0$ (la porte a été ouverte avant)

## II - Probabilités conditionnelles

**Exercice 15 :** Une entreprise confie à une société de sondage par telephone une enquête sur la qualité de ses produits.

On constate que lors du premier appel telephonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est de 40%, et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est de 30%.

On note $D_1$ l'évènement : "la personne décroche au premier appel"

et $R_1$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire lors du premier appel"

1- Calculer la probabilité de l'évènement $R_1$ :

2- Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est de 30%, et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est de 20%. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note : $D_2$ l'évènement : "la personne décroche au second appel"

$R_2$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire lors du second appel".

et $R$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire".

Calculer la probabilité de l'évènement $R$ (rép. 0,236).

3- Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel.

4- Un enquêteur a une liste de $n$ personnes à contacter ($n > 1$).

Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

a) Calculer en fonction de $n$ la probabilité qu'au moins une personne de la liste réponde au questionnaire.

b) Déterminer le nombre minimal de personnes que doit contenir la liste pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles réponde au questionnaire, soit supérieure à 90%.

**Exercice 16 :** Dans un certain pays il y a deux régions : celle du Nord où habite 40% de la population et celle du Sud où habite le reste.

En été, 30% des habitants du Nord part en vacances à l'étranger mais seulement 15% des habitants du Sud part en été à l'étranger.

Si vous rencontrez à l'étranger un habitant de ce pays, quelle est la probabilité qu'il vienne du Sud?

**Exercice 17 : Probabilité des causes** Une proportion $\varepsilon$ d'une population est atteinte d'une maladie pour laquelle un test de dépistage a été mis au point. Le suivi de volontaires, malades ou sains, qui ont été soumis à ce test montre que :

-sur une personne malade, le test donne un résultat positif ($T^+$) avec une probabilité $p$.

-sur une personne saine, le test donne un résultat négatif ($T^-$) avec une probabilité $q$.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade ?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test est négatif soit saine ?

**Exercice 18 : Probabilité des causes** Parmi les personnes qui se soignent pour un mal de tête, 60% d'entre elles prennent de l'aspirine, et 40% un médicament $M$. 75% des personnes qui ont pris de l'aspirine sont soulagées, de même que 90% de celles qui ont pris du médiament $M$.

1- Quelle est, parmi la population des gens qui soignent leur mal de tête la proportion de personnes soulagées ?

2- Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

## III - Variables aléatoires :

**Exercice 20 :** Une urne contient une boule rouge, une boule verte et $n-2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note $X$ le rang d'apparition de la boule rouge et $Y$ le rang d'apparition de la boule verte.

1- Expliciter les lois des variables aléatoires $X$ et $Y$.
Calculer leur espérance et leur variance.

2- Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

3- Calculer la covariance du couple $(X, Y)$.

**Exercice 21 : HEC 2002 maths II - option technologique**

**Exercice 22 :**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à $n$ ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \cdots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est moélisée par espace propbabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note $Y$ le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à $X_1$, sous réserve qu'un tel numéro existe.

1. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = (X_k < X_1)$

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_k)$

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = 0$

c) Que peut on dire de l'ensemble des éléments $\omega$ de $\Omega$ pour lesquels $Y(\omega)$ existe ?
On admet désormais que cet ensemble est confondu avec $\Omega$.

2. a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, $P(Y = m+1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \times \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1} \times \left(1 - \frac{i}{n}\right)$

b) Montrer que $Y$ admet une espérance, et que $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

3. On ne considère plus l'entier $n$ fixé, et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment $Y$.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $p_m = \lim_{n \to +\infty} P(Y^{(n)} = m+1)$

b) Montrer que la famille $(p_m)_{m \geqslant 1}$ définit la loi d'une variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui ne possède pas d'espérance.

**Exercice 23 : ESCP 2004 - 3.2**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}; \mathcal{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Soit $Z$ et $T$ les variables aléatoires définies par :

$Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance de la variable aléatoire $A$.

1. a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de $Z$ et $T$.

b) Montrer que $E(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque $n$ tend vers l'infini.

2. Soit $U$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leqslant U \leqslant K$

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de l'espérance $E(U)$.

b) Calculer de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U), E(U^2), E(U^3)$.

3. a) Calculer pour tout $j \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geqslant j)$.

b) En utilisant la question 2. a), retrouver la valeur de $E(T)$.

4. Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance $\sigma_X^2$ de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 24 : ESCP 2005 - 3.17**

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3. On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

Soit $X$ le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note $p_n$ la probabilité de l'évènement $(X = n)$ et $c_n$ la probabilité de l'évènement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent $p_1$ et $p_2$ ? Calculer $p_3$ et $p_4$.

Calculer $c_2$, $c_3$ et $c_4$.

b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.

2. a) Montrer que pour $n \geqslant 1, p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1 - c_n)$

b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27} p_n = 0$.

3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = p_{n+2} - \frac{2}{3} p_{n+1} - \frac{2}{9} p_n$ .

Calculer $u_2$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite nulle.

b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} \right)$

c) Montrer que la série de terme général $p_n$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} p_n$.

Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que $X$ admet des moments à tous les ordres, et calculer son espérance.

**Exercice 25 : ESCP 2005 - 3.29**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$, que l'on notera $u_n$.

Etudier les variations et la limite de la suite $(u_n)$.

2. a) Montrer qu'il existe des réels $k$ et $q$ pour lesquels il existe des variables aléatoires $X$ et $Y$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q.u_n^n \ \text{ et } \ P(Y = n) = k\left(\tfrac{1}{2} - u_n\right)$$

b) $X$ et $Y$ étant de telles variables, montrer que $X$ et $Y$ admettent une espérance, qui vérifient :

$$E(X) \leqslant 2q \ \text{ et } \ E(Y) \leqslant \tfrac{k}{4}$$

$X$ et $Y$ admettent elles une variance ?

**Exercice 26 : ESCP 2006 - 3.2**

Soit $N$ un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant $N$ jetons numérotés de 1 à $N$ dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise d'un jeton, en notant, à chaque fois, le numero obtenu.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $T_n$ le nombre aléatoire de numéros distincts obtenus au cours des $n$ premiers tirages.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   a) Quelles sont les valeurs prises par $T_n$ ?
   b) Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$
   c) Calculer $P(T_n = 2)$ .
2. Soit $(k, n)$ un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$.
   Déterminer une relation liant $P(T_{n+1} = k)$, $P(T_n = k)$,$P(T_n = k - 1)$.
3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère le polynôme :

$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)X^k$$

a) Prouver l'égalité : $\quad G_{n+1} = \dfrac{1}{N}(X - X^2)G_n' + XG_n$

b) Pour tout entier naturel $n$ non nul, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à $G_n$, exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$, $N$ et $n$, puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de $N$ et $n$ .

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{E(T_n)}{N}$

**Exercice 27 : ESCP 2007 - 3.17**

1. Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives $r$ et $b$, avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$. Un joueur effectue $n$ tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.

Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne 1 point au $k^{ieme}$ tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.

Soit $G$ la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des $n$ tirages.

a) Pour $k \in [[2, n]]$, on définit la variable aléatoire $X_k$ égale au gain du joueur pour le tirage de rang $k$.

Préciser la loi de $X_k$ et calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in [[2, n - 1]]$.

b) Calculer l'espérance et la variance de $G$.

c) Peut-on choisir $r$ et $b$ pour que $G$ suive une loi binomiale ?

3. On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire $T_n$ par :
   si $G \geqslant 1$, $T_n$ est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, $T_n$ vaut $n + 1$.
   a) Déterminer la loi de $T_n$.
   b) Dans cette question, $r = b = 1/2$.
   Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $1/2$.
   En déduire une estimation de $E(T_n)$ quand $n$ est grand.

**Exercice 28 : Greffes de rosiers**

On greffe simultanément les $R$ rosiers, qui seront numérotés de 1 à $R$. On désigne par $X_k$ la variable aléatoire qui compte le nombre de greffes nécessaires à la prise du rosier $k$, $1 \leqslant k \leqslant R$, et par $X$ le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les $R$ rosiers. Les variables aléatoires $X_k$ sont indépendantes.

2-a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_k$ ?

2-b) Exprimer $X$ en fonction des $X_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$

2-c) Calculer l'espérance et la variance de $X$.
D'après le cours, puisque $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $E(X_k) = \frac{1}{p}$ et $V(X_k) = \frac{q}{p^2}$

3- On se propse de calculer la loi de $X$.

3-a) Déterminer l'ensemble $J$ des valeurs prises par $X$.

3-b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n$
Exprimer $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_R = x_R)$ en fonction de $p, q, n$ et $R$ .

3-c) On note $(E)$ l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n$ où les $x_i$ sont des entiers strictement positifs, et $\alpha(R, n)$ le nombre de $R-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R$ solutions de $(E)$.
A l'aide du résultat précédent, montrer que $P(X = n) = \alpha(R, n)p^R q^{n-R}$

**Exercice 29 : Couple de variables ; lois de Poisson**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires positives ou nulles vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où $\alpha$ et $\lambda$ sont des constantes réelles vérifiant : $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$

1- Quelle est la loi de $X$ ?

2- Quelle est la loi de $Y$ ?

3- Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

4- On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de $Z$ ?

5- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = j)|Z = n)$

6- Que peut on en déduire concernnat les variables $Y$ et $Z$ ?

**Exercice 30 : Loi de Poisson**

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre $N$ variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson. La moyenne journalière des visiteurs est de 4000.

1- Quelle est la loi de Poisson suivie par la variable aléatoire $N$ ?

2- Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur choisit une entrée de manière aléatoire, et sans tenir compte du choix des autres visiteurs.
$X$ désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n°1.

2- a) Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?

2- b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $X$ sachant que $N = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2- c) $n$ est un entier naturel. Montrer que $P(X = n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} P(X = n|N = k)P(N = k)$

En déduire que $X$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

3- Un jeu de lancer de balles consiste à lancer une balle dans un trou en s'éloignant de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :

- Le premier lancer est réussi de façon certaine,
- Le second lancer est réussi une fois sur deux,
- Lorsque les $n-1$ premier lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^e$ lancer est de $\frac{1}{n}$.
- Le jeu s'arrête au premier échec.

si $i$ est un entier naturel non nul, $S_i$ désigne l'évènement "le $i^e$ lancer est réussi".

$Z$ est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.

3- a) Quelles sont les valeurs prises par $Z$ ?

3- b) $n$ étant un entier naturel non nul donné, exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction des évènements $S_i$ ou de leurs contraires. En déduire que $P(Z = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}$

3- c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(Z = n) = 1$ 3- d) Calculer l'espérance et la variance de $Z$.

**Exercice 31: Loi de Poisson:**

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage $A$ et $B$ qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que $A$ produit 60% des objets et $B$ produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine $A$ soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine $B$ soit défectueux est $0,2$

1- On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine $A$" .

2- On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.

a) Rappeler la loi de $Y$ ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de $Y$.

b) Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$ (On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$).

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

## IV - Inégalités (Markov, Bienaymé - Tchebychev)

**Exercice 32**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On extrait $n$ fois avec remise une boule d'une urne qui contient 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit $X_n$ la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des $n$ tirages. On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

1- Donner la loi de $X$. En déduire l'espérance et la variance de $X_n$ puis de $F_n$.

2- On suppose dans cette question que $n = 10000$. Donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in ]0.22, 0.26[\}$ .

3- Donner une estimation du nombre minimal $n$ de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in ]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 99% .

**Exercice 33 : sondages :**

Une société de sondages est chargée d'étudier les intentions de vote d'une population pour un referendum à venir.

Au moment de l'étude, une partie $p \in [0, 1]$ de la population ayant l'intention d'aller voter déclare qu'elle votera "oui", la partie restante (proportion $(1 - p)$ des votants) votera "non".

On enquête sur un échantillon de $n$ électeurs pris au hasard parmi les votants.

Chacun d'entre eux répondra par "oui" ou "non" sur son intention de vote, et on note $X_k$ la variable représentant la réponse du $k^e$ individu sondé à la question posée ($X_k = 1$ en cas de vote "oui", $X_k = 0$ en cas de vote "non", $k \in [[1, n]]$).

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, indépendantes les unes des autres. Le but est d'obtenir une approximation du paramètre $p$.

Cette approximation sera donnée par la moyenne des réponses, à savoir $Y = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^k$.

a) Calculer espérance et variance de chacune des variables $X_k$, et de $Y$ .

b) Combien de personnes faut il sonder pour être sûr à 95 % que $p$ est approchée par $Y$ à $k$% ?

Etudier les cas particuliers où $k = 5$ et $k = 1$.

**Exercice 34 : Acuité de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

Une observation sur plusieurs mois a montré que le nombre d'avions se posant en une heure dans un aéroport pouvait être modélisé par une variable aléatoire $X$ d'espérance $E(X) = 16$ et de variance $V(X) = 16$

1- A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de $P(10 < X < 22)$.

2- Comparer le résultat obtenu en supposant que $X$ suive une loi de Poisson.

**SOLUTION :** 1- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$,

Or, $P(10 < X < 22) = P(11 \leqslant X \leqslant 21) = P(|X - 16| \leqslant 5) = 1 - P(|X - 16| \geqslant 6)$

Pour $\alpha = 6$, $P(|X - 16| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{V(X)}{\alpha^2} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

donc $P(10 < X < 22) = 1 - P(|X - 16| \geqslant 6) \geqslant 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \simeq 0,5555555$

2- Si $X$ suit une loi de Poisson, c'est nécessairement $\mathscr{P}(16)$ puisque $E(X) = V(X) = 16$

L'évènement $(10 < X < 22)$ est $\displaystyle\bigcup_{10<k<22} (X = k)$, et ces évènements étant deux à deux incompatibles, $P(10 < X < 22) = \displaystyle\sum_{k=11}^{21} e^{-16}\frac{16^k}{k\,!} \simeq 0,833377$

On remarque que dans le cas d'une loi normale, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$P(10 < X < 22) \geqslant 0,5555555$, résultat qui est bien médiocre en comparaison avec l'égalité : $P(10 < X < 22) \simeq 0,833377$

## *SOLUTIONS :*

# I - Dénombrements, probabilités .

**Exercice 1 :** On tire une main de cinq cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelles sont les probablités

a) Que cette main contienne 4 as ? $\dfrac{1\times 48}{\binom{52}{5}} = \dfrac{48}{2598960} \simeq 1.8469\times 10^{-5} \simeq 0,000018469\ \%$

b ) Que cette main contienne 3 as et deux rois ? $\dfrac{\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

c ) Que cette main contienne au moins un as ?

La probabilité pour qu'elle ne contienne aucun as est $\dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 65,88\ \%$

La probabilité pour qu'elle contienne au moins un as est $1-\dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 34,12\ \%$

d) Que cette main contienne 5 trèfles ? $\dfrac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

e) Que cette main contienne 5 cartes de la même couleur ? $\dfrac{4\times\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

f) Que cette main contienne 5 cartes qui se suivent (mais peuvent être de couleurs quelconques) ? (par exemple, dame de coeur, valet de pique, 10 de trèfle, 9 de coeur et 8 de carreau)

$\dfrac{10\times 4^5}{\binom{52}{5}}$

g) Que cette main contienne soit un full (3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur) ?

$\dfrac{13\times\binom{4}{3}\times 12\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

**Exercice 2 :** Soient $E$ un ensemble de cardinal $n, A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties de $E$.

a) De combien de façon peut on choisir le couple $(A, B)$ ?

b) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A\cap B = \emptyset$ ?

c) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ tels que $A\cup B = E$ ?

d) Combien existe-t-il de couples $(A, B)$ formant une partition de $E$ ? $\quad(A\cap B=\emptyset$ et $A\cup B = E)$ ?

**Réponses :**

a) $2^n\times 2^n = 4^n$.

b) Détaillons suivant le cardinal de $A$ : soit $k = Card(A) \in [[0, n]]$

$k$ étant donné, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir un sous ensemble $A$ de $E$ à $k$ éléments.

Pour chacun de ces choix, $B$ doit être un sous ensemble de $\overline{A}$, qui est un ensemble à $n-k$ éléments. Cela fait $2^{n-k}$ possibilités.

Au bilan final, il y a $m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ 1^k\ 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ couples de sous ensembles disjoints de $E$.

c) En passant aux complémentaires dans $E$, le couple $(A, B)$ vérifie $A\cup B = E$ si et seulement si leurs complémentaires $\overline{A}$ et $\overline{B}$ vérifient $\overline{A}\cap\overline{B} = \emptyset$

Donc il existe $3^n$ couples $(A, B)$ tels que $A\cup B = E$.

d) Un couple $(A, B)$ vérifie $A\cap B = \emptyset$ et $A\cup B = E$ si et seulement si $B = \overline{A}$.

Pour choisir un tel couple, il suffit de prendre $A$ sous ensemble quelconque de $E$, et de prendre $B = \overline{A}$. Il y a donc $2^n$ solutions.

**Exercice 3 :** On lance $n$ fois une pièce de monnaie.

a) Combien de combinaisons sont elles possibles ? $\quad(2^n)$

b) Combien de combinaisons donnent elles un résultat alterné $\quad(2)$

c) Combien de combinaisons donneront $k$ fois pile exactement (peu importe l'ordre, $0\leqslant k\leqslant n$) $\quad(\binom{n}{k})$

**Exercice 4 :** Une urne contient 5 boules blanches et 2 boules noires.

1- On tire trois boules de cette urne, sans remise.

a) Combien a-t-on de résultats possibles ? $\left(\binom{7}{3} = 35\right)$

b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne 3 boules blanches ? $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} \simeq 28,57\ \%$

c) Quelle est la probabilité qu'on obtienne 2 boules blanches ? $\frac{\binom{5}{2}\times 2}{\binom{7}{3}} \simeq 57,14\ \%$

d) Quelle est la probabilité qu'on obtienne une seule boule blanche ? $\frac{5}{\binom{7}{3}} \simeq 14,28\ \%$

2- Mêmes questions a), b), c), d) lorsqu'on remet dans l'urne la boule sortie après chaque tirage.

a) $7 \times 7 \times 7 = 343$ b) $\frac{5\times5\times5}{7\times7\times7} \simeq 36,44\ \%$ c) $\frac{3\times5\times5\times2}{7\times7\times7} \simeq 43,73\ \%$ d) $\frac{5\times2\times2}{7\times7\times7} \simeq 5,83\ \%$

**Exercice 5 :** Le code pin ( Personal Identification Number ) d'un téléphone portable comporte quatre chiffres.

a) Combien y a-t-il de codes pin possibles ?

b) J'ai oublié mon code pin, mais je me souviens que le premier chiffre de mon code est 1, qu'il contient aussi le chiffre 5, que c'est un nombre pair et multiple de trois . Quelle est la probabilité que j'allume mon portable sachant que je n'ai droit qu'à trois essais pour entrer le code ?

**Réponses :**

a) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\ 000$ codes pin possibles.

b) Le code pin commence par 1, il sera de la forme : $\boxed{1 \mid a \mid b \mid c}$

Il contient le chiffre 5, donc sera de la forme :

$\boxed{1 \mid 5 \mid a \mid b}$ ou $\boxed{1 \mid a \mid 5 \mid b}$ ou $\boxed{1 \mid a \mid b \mid 5}$

Le dernier cas est exclu car c'est un nombre pair :

Restent $\boxed{1 \mid 5 \mid a \mid b}$ ou $\boxed{1 \mid a \mid 5 \mid b}$, où $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Le nombre pin formé $p = 1000 + 500 + 10\ a + b$, ou $p = 1000 + 100\ a + 50 + b$ est divisible par 3 :

• Dans le premier cas, $p = 1500 + 10\ a + b = 3 \times (500 + 3a) + a + b$, donc $a + b$ est multiple de 3. Cela donne comme possibilités : $b = 0, a \in \{0, 3, 6, 9\}$

$b = 2, a \in \{1, 4, 7\}$

$b = 4, a \in \{2, 5, 8\}$

$b = 6, a \in \{0, 3, 6, 9\}$

$b = 8, a \in \{1, 4, 7\}$, soit 17 possibilités.

• Dans le deuxième cas, $p = 1050 + 100\ a + b = 3 \times (350 + 33a) + a + b$, donc $a + b$ est multiple de 3. Cela donne les mêmes 17 possibilités. **Il faut encore s'assurer qu'un code pin n'a pas été compté deux fois**.

Pour que les nombres $\boxed{1 \mid 5 \mid a \mid b}$ et $\boxed{1 \mid a' \mid 5 \mid b'}$ soient égaux, il faut et suffit que $a = a' = 5$, et que $b = b'$. Ceci est possible pour le nombre 1554, qui a donc été compté 2 fois.

Il y a donc $17 + 17 - 1 = 33$ codes possibles.

• Entrer un code dans un téléphone revient à choisir un nombre parmi 10 000. Dans les conditions décrites, il y a 33 possibilités. Essayer 3 codes revient à prendre un sous ensemble à 3 éléments de l'ensemble des 17 codes potentiels. Il y a donc $\binom{33}{3} = \frac{33!}{30!\times3!} = \frac{33\times32\times31}{3\times2\times1}$ manières de le faire.

Le portable s'allumera si l'un des trois nombres essayés est le bon code, c'est à dire si le sous ensemble à 3 éléments extrait de l'ensemble des 17 codes potentiels, contient le bon code. Il y a $\binom{32}{2} = \frac{32!}{30!\times2!} = \frac{32\times31}{2}$ sous ensembles de ce type.

La probabilité pour que le téléphone s'allume est donc : $\frac{\frac{32\times31}{2}}{\frac{33\times32\times31}{3\times2\times1}} = \frac{1}{11}$ .

**Exercice 6 :** Un pirate tente d'accéder à un serveur protégé par un mot de passe en essayant systématiquement à l'aide d'un robot tous les mots de passe possibles. Chaque essai dure 0, 1 milliseconde. Un mot de passe est formé de 8 caractères, et chaque caractère est codé sur 7 bits.

a) Combien de temps mettra le pirate pour trouver le bon code dans le pire des cas ?

b) Même question si le pirate connait deux des 8 caractères, mais pas leur emplacement.

**Réponses :** Un caractère étant codé sur 7 bits, il y a $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{7\ fois} = 2^7$ caractères différents.

Chaque mot de passe comporte 8 caractères ; il y a donc $\underbrace{2^7 \times 2^7 \times \cdots \times 2^7}_{8\ fois} = (2^7)^8 = 2^{56}$ mots de passe différents.

Pour les tester tous, cela prendra $2^{56} \times 10^{-4} = 7205759403792$ secondes, soit 2001599834 heures, ou 83399993 jours, soit encore 228 493 ans.

**Exercice 7 :** Un joueur lance deux dés jusqu'à ce qu'il obtienne un double-6, auquel cas il arrète. On note $X$ le nombre de lancers qui ont été effectués.

a) Décrire l'ensemble $\Omega$ des issues, et donner la loi de probabilité de la variable $X$.

b) Calculer en moyenne le nombre de lancers qu'il faudra effectuer pour obtenir un double-6. (c'est à dire l'espérance de la loi $X$ )

c) Mêmes questions en remplaçant le succès est l'apparition de deux dés dont la somme est supérieure ou égale à 10 :

***SOLUTION*** **:** a) Si on note $S$ un succès, c'est à dire l'apparition d'un double-6, et $E$ un échec, $S$ est l'évènement élémentaire $(6,6)$, et $E$ est l'un quelconque des couples $(x,y) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{(6,6)\}$.

$P(S) = \frac{1}{36}$ et $P(E) = \frac{35}{36}$

$\Omega = \{(6,6),\ (E_1,(6,6)),\ (E_i,E_j,(6,6)),\ (E_i,E_j,E_k,(6,6)),\ \cdots,(\underbrace{E_{i_1},E_{i_2},\cdots E_{i_{n-1}}}_{n-1},(6,6)),\cdots\cdots\}$

où chaque $E_1$ est un échec.

• $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36}$

b) $E(X) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} k \times P(X=k) = \frac{1}{36} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} k \left(\frac{35}{36}\right)^{k-1}$

Or, en dérivant la série entière $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, on obtient : $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

Cette série entière ayant pour rayon de convergence 1, on peut appliquer la formule précédente à $x = \frac{35}{36}$ : $\dfrac{1}{(1-\frac{35}{36})^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1}$,

d'où : $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{36} \times \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} k \left(\frac{35}{36}\right)^{k-1} = \frac{1}{36} \times \frac{1}{(1-\frac{35}{36})^2} = 36}$

c) $S$ est un l'un des évènements élémentaires $(5,5),(5,6),(6,5)$ ou $(6,6)$, et $E$ est l'un quelconque des couples $(x,y) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

$P(S) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et $P(E) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

• $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9}$

• $E(X) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} k \times P(X=k) = \frac{1}{9} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} k \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{(1-\frac{8}{9})^2} = 9$

## Exercice 8 :

Un version du jeu d'argent et de hasard américain "chuck a luck" est la suivante : On mise un dollar en pariant sur un nombre entier. Puis on lance trois dés.

Si le nombre sur lequel on a parié sort 3 fois, on gagne 10 dollars
Si le nombre sur lequel on a parié sort 2 fois, on gagne 2 dollars
Si le nombre sur lequel on a parié sort 1 fois, on gagne 1 dollar.
Sinon le nombre misé ne sort pas, on ne gagne rien (ce qui signifie qu'on perd sa mise)
$X$ désigne la somme effectivement gagnée (mise de départ déduite)
Déterminer la loi de $X$. Quelle somme gagne-t-on en moyenne ?

***SOLUTION*** **:** Chaque lancer de dé est indépendant des deux autres, et peut prendre 6 valeurs. Donc $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$.

$X(\Omega) = \{9,1,0,-1\}$.

Notons $m$ le nombre misé.

L'évènement $(X=9)$ est $\{(m,m,m)\}$. Donc $P(X=9)=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

L'évènement $(X=1)$ est formé des triplets $(m,m,x),x$ différent de $m$ (5 possibilités), $(m,x,m),x$ différent de $m$ (5 possibilités), $(x,m,m),x$ différent de $m$ (5 possibilités), soit en tout 15 possibilités différentes.

Donc $P(X=1)=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$

L'évènement $(X=0)$ est formé des triplets $(m,x,y),x,y$ différents de $m$ (25 possibilités), $(x,m,y),x,y$ différents de $m$ (25 possibilités), $(x,y,m),x,y$ différents de $m$ (25 possibilités), soit en tout 75 possibilités différentes.

Donc $P(X=0)=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$

L'évènement $(X=0)$ est formé des triplets $(x,y,z),\ x,y,z$ différents de $m$.

Donc $P(X=-1)=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

**Remarque :** il est prudent de vérifier que $\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1$

$E(X)=\frac{125}{216}\times(-1)+\frac{75}{216}\times 0+\frac{15}{216}\times 1+\frac{1}{216}\times 9=-\frac{101}{216}\simeq -0.4676$

## Exercice 9 :

Sur le trajet que doit parcourir un automobiliste, on dénombre $n$ feux rouges. Chaque feu rouge est vert 40% du temps et rouge 60% du temps. Ces feux ne sont pas synchronisés, le fait qu'ils soient vert ou rouge est indépendant d'un feu à l'autre.

a) Quelle est la probabilité que l'automobiliste ne rencontre que des feux verts sur son passage ?

Quelle est la probabilité qu'il ait la malchance que de tomber que sur des feux rouges ?

Cas $n=10$ ?

b) On note $X$ le nombre de feux passés au vert avant que l'automobiliste ne soit arrété par un feu rouge.

Donner loi de probabilité de $X$ et calculer la valeur moyenne de $X$.

Vérifier que par le calcul de la somme de leurs propbabilité que les évènements $(X=k)$ forment bien une système complet d'évènements.

Rédiger un programme Python qui fait le calcul losque $n=10$ .

***SOLUTION*** **:** a) L'automobiste a 40% de chances d'avoir le premier feu au vert, et de même pour les suivants.

La probabilité qu'il ne rencontre que des feux verts sur son passage est:

$P(tous\ verts)=\left(\frac{40}{100}\right)^n=\left(\frac{2}{5}\right)^n.$

Si $n=10$, $P(tous\ verts)\simeq 0,0001048576\simeq 0,01\%$

$P(tous\ rouges)=\left(\frac{60}{100}\right)^n=\left(\frac{3}{5}\right)^n.$

Si $n=10$, $P(tous\ rouges)\simeq 60466176\simeq 0,0060466176\simeq 0,6\%$

b) $X(\Omega)=\{0,1,\cdots,n\}$

$\forall k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\},\ P(X=k)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\times\dfrac{3}{5}$

Mais attention ! ! ! : $P(X=n)=\left(\frac{2}{5}\right)^n$

**Vérification :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^k+\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{3}{5}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$=1-\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n=1$$

• $\displaystyle E(X)=\sum_{k=0}^{n}k.P(X=k)=\frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n-1}k.\left(\frac{2}{5}\right)^k+n\left(\frac{2}{5}\right)^n$

**Application :** $n=10$. Calcul avec python :

```
n=10
s=3/5*sum([(2/5)**k*k for k in range(n)])
s=s+n*(2/5)**n
print(s)
```

$E(X)\simeq 0,6665967616$

## Exercice 10 :

Dans un immeuble, 20% des chaudières sont sous garantie.

La proportion de chaudières sous garantie qui sont défectueuses est de 1%.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la proportion de chaudières défectueuses est de 10%.

1 - Calculer la probabilité pour que :

a) une chaudière prise au hasard soit sous garantie,

b) une chaudière prise au hasard soit défectueuse,

c) qu'une chaudière soit sous garantie et défectueuse.

2 - Dans un logement, une chaudière est défectueuse. calculer la probabilité pour qu'elle soit garantie. (rép. $\frac{1}{41}$)

***SOLUTION*** **:** Soit $G$ l'évènement "la chaudière est sous garantie", et $D$ l'évènement "la chaudière est défectueuse".

1-a) $P(G) = 20\%$ $\qquad P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap \overline{G})$

$P(D) = P(D|G).P(G) + P(D|\overline{G}).P(\overline{G}) = \frac{1}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{80}{100} = 8,2\%$

$P(D \cap G) = P(D|G).P(G) = \frac{1}{100} \times \frac{20}{100} = 0,2\%$

2 - $P(G|D) = \dfrac{P(D \cap G)}{P(D)} = \dfrac{0,2\%}{8,2\%} = \dfrac{1}{41}$

## Exercice 11 :

Quelle est la probabilité que dans une classe de 38 élèves, deux élèves au moins aient la même date anniversaire? (on supposera que toutes les années ont 365 jours).

***Solution*** **:** Considérons l'application qui à un élève associe sa date de naissance. C'est une application d'un ensemble à 38 éléments dans un ensemble à 265 éléments. Il y en a $365^{38}$.

L'événement "les 38 élèves ont 38 jours anniversaires deux à deux differents" correspond aux applications injectives ; il y en a $365 \times \cdots \times 328$.

La probabilité que les élèves aient des jours anniversaires deux à deux distincts est donc égale à $\dfrac{365 \times \cdots \times 328}{365^{38}} \simeq 0,041442737\%$

La probabilité que deux élèves au moins aient la même date anniversaire est

$$p = 1 - \frac{365 \times \cdots \times 328}{365^{38}} \simeq 99.958557\%$$

## Exercice 12 :

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, et soient A et B deux évènements.

a) Montrer que si $P(A) = P(B) = 0,9$ , alors, $P(A \cap B) \geqslant 0,8$ .

b) Dans le cas général, montrer que $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

***Solution*** **:** a) et b) • Les ensembles $A \cap B, \overline{A} \cap B, A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ forment une partition de $\Omega$ .

Par ailleurs $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ forment une partition de $B$,

$A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ forment une partition de $A$.

Donc $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\Omega) = 1$

et en ajoutant $P(A \cap B)$ :

$$P(A \cap B) + 1 = \underbrace{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}_{P(A)} + \underbrace{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}_{P(B)} + \underbrace{P(\overline{A} \cap \overline{B})}_{\geqslant 0}$$

On en déduit que $P(A \cap B) + 1 \geqslant P(A) + P(B)$

• En appliquant cette inégalité au cas où $P(A) = 0,9$ et $P(B) = 0,9$ , on obtient : $P(A \cap B) + 1 \geqslant 1,8$ et donc $\boxed{P(A \cap B) \geqslant 0,8}$

## Exercice 13 :

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur peut tomber en panne indépendamment des autres, et on estime à $p$ la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à $q$ la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent :

Quelle est la probabilité que l'avion puisse voler sans encombre ?

**Application numérique :** $p = 0,01\%, \quad q = 0,02\%$

Notons A1 et A2 les moteurs des ailes, C le moteur central.

"l'avion tombe en panne" = ("A1 est en panne et C est en panne") ou ("A2 est en panne et C est en panne")

Les pannes des moteurs étant indépendantes,

P("A1 est en panne et C est en panne") = P("A1 est en panne") × P("C est en panne")= $q.p$

P("A2 est en panne et C est en panne") = P("A2 est en panne") × P("C est en panne")= $q.p$

En appliquant la formule de probabilité d'une union ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$),

P("l'avion tombe en panne") = P("A1 est en panne et C est en panne")

+ P("A2 est en panne et C est en panne") − P(A1, A2, C sont en panne).

P("l'avion tombe en panne") = $q.p + q.p - q.q.p = p.q(2-q)$

La probabilité que l'avion vole sans encombre est :

$\boxed{1- \text{P("l'avion tombe en panne")} = 1 - p.q(2-q)}$

**Application numérique :**

P("l'avion vole sans encombre") $= 1 - 10^{-4} \times 2 \times 10^{-4}(2 - 10^{-4}) \simeq 1 - 4 \times 10^{-8}$

### Exercice 14 :

Un trousseau de clés comporte 8 clés, toutes semblables.

Pour ouvrir la serrure en question, on fait des essais successifs jusqu'à ce qu'on trouve la bonne clé, en écartant au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que l'on ouvre la porte :

a) du premier coup ? b) au troisième essai ?

c) au cinquième essai ? d) au huitième essai ?

e) au neuvième essai ?

a) P(ouvrir la serrure au premier essai) = $\frac{1}{8}$

b) P(ouvrir la serrure au troisième essai) = $\dfrac{7 \times 6}{8 \times 7 \times 6} = \dfrac{1}{8}$

c) P(ouvrir la serrure au cinquième essai) = $\dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \dfrac{1}{8}$

d) P(ouvrir la serrure au huitième essai) = $\dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{1}{8}$

e) P(ouvrir la serrure au huitième essai) = 0 (la porte a été ouverte avant)

## II - Probabilités conditionnelles

### Exercice 15 :

Une entreprise confie à une société de sondage par telephone une enquête sur la qualité de ses produits.

On constate que lors du premier appel telephonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est de 40%, et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est de 30%.

On note $D_1$ l'évènement : "la personne décroche au premier appel"

et $R_1$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire lors du premier appel"

1- Calculer la probabilité de l'évènement $R_1$ :

2- Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est de 30%, et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est de 20%. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note : $D_2$ l'évènement : "la personne décroche au second appel"

$R_2$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire lors du second appel".

et $R$ l'évènement : "la personne répond au questionnaire".

Calculer la probabilité de l'évènement $R$ (rép. 0,236).

3- Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel.

4- Un enquêteur a une liste de $n$ personnes à contacter ($n > 1$).

Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

a) Calculer en fonction de $n$ la probabilité qu'au moins une personne de la liste réponde au questionnaire.

b) Déterminer le nombre minimal de personnes que doit contenir la liste pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles réponde au questionnaire, soit supérieure à 90%.

***Solution*:** 1- $P(R_1) = P(R_1|D_1)P(D_1) = \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{18}{100} = 18\%$

2- $R = (D_1 \cap R_1) \cup (\overline{D_1} \cap D_2 \cap R_2)$ ces évènements sont incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(D_1 \cap R_1) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap R_2) \\ &= P(R_1|D_1)P(D_1) + P(R_2|\overline{D_1} \cap D_2) \times P(D_2|\overline{D_1}) \times P(\overline{D_1}) \\ &= \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{70}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{18}{100} + \frac{56}{1000} = \frac{236}{1000} = 23,6\% \qquad \boxed{P(R) = 23,6\%} \end{aligned}$$

3- La probabilité demandée est $P(R_1|R) = \dfrac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(R_1)}{P(R)}$ (car $R_1 \cap R = R_1$)

$$P(R_1|R) = \frac{18}{100} \times \frac{1000}{236} = \frac{9 \times 10}{118} = \frac{90}{118} \simeq 0,7627 \simeq 76,27\%$$

3- a) La probabilité qu'une personne ne réponde pas au questionnaire est :

$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = \frac{28}{118} \simeq 23,73\%$

Les sondages étant indépendants les uns des autres, l'évènement "aucune des personnes contactées ne sépond au questionnaire" est l'intersection des ébènements suivants :

- la première personne ne répond pas au questionnaire (probabilité $= 1 - P(R) = \frac{28}{118} \simeq 23,73\%$)
- la deuxième personne ne répond pas au questionnaire (probabilité $= 1 - P(R) = \frac{28}{118} \simeq 23,73\%$)

$\vdots$

- la $n^e$ personne ne répond pas au questionnaire (probabilité $= 1 - P(R) = \frac{28}{118} \simeq 23,73\%$)

et sa probabilité est $(1 - P(R))^n = \left(\frac{28}{118}\right)^n \simeq (0,2373)^n$

L'évènement "au moins une personne de la liste répond au questionnaire" est le contarire de l'évènement "aucune des personnes contactées ne sépond au questionnaire".

Sa probabilté est donc : $1 - (1 - P(R))^n = 1 - \left(\frac{28}{118}\right)^n$

3- b) Pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à 90%, il faut et suffit que $1 - \left(\frac{28}{118}\right)^n \geqslant 0,9$

$\iff \left(\frac{28}{118}\right)^n \leqslant 0,1$

$\iff n \ln\left(\frac{28}{118}\right) \leqslant \ln(0,1)$

$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{28}{118}\right)}$ (ATTENTION, on divise par $\ln\left(\frac{28}{118}\right) < 0$, il faut renverser le sens de l'inégalité)

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{28}{118}\right)} \simeq 8,55$.

Donc il faut que la liste contienne au moins 9 personnes pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles réponde au questionnaire soit supérieure à 90%.

## Exercice 16 :

Dans un certain pays il y a deux régions : celle du Nord où habite 40% de la population et celle du Sud où habite le reste.

En été, 30% des habitants du Nord part en vacances à l'étranger mais seulement 15% des habitants du Sud part en été à l'étranger.

Si vous rencontrez à l'étranger un habitant de ce pays, quelle est la probabilité qu'il vienne du Sud?

***Solution*:** Notons $N$ l'évènement "la personne habite au Nord" et $S$ l'évènement "la personne habite au Sud".

Notons $E$ l'évènement "la personne part en vacances à l'étranger".

On demande de calculer $P(S|E)$.

$$P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|S)P(S)}{P(E \cap S) + P(E \cap N)} = \frac{P(E|S)P(S)}{P(E|S)P(S) + P(E|N)P(N)}$$

$$P(S|E) = \frac{\frac{15}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{15}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{40}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{100} + \frac{12}{100}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \simeq 42,86\%$$

## Exercice 17 : Probabilité des causes

Une proportion $\varepsilon$ d'une population est atteinte d'une maladie pour laquelle un test de dépistage a été mis au point. Le suivi de volontaires, malades ou sains, qui ont été soumis à ce test montre que :

-sur une personne malade, le test donne un résultat positif ($T^+$) avec une probabilité $p$.

-sur une personne saine, le test donne un résultat négatif ($T^-$) avec une probabilité $q$.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade ?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test est négatif soit saine ?

**Application numérique :** $\varepsilon = 1\%, \quad p = 90\%, \quad q = 95\%$

Les hypothèses se traduisent ainsi : $P(M) = \varepsilon$

$$P(T^+|M) = p = \frac{P(T^+ \cap M)}{P(M)} \qquad P(T^-|\overline{M}) = q = \frac{P(T^- \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$$

• $P(M|T^+) = \dfrac{P(T^+ \cap M)}{P(T^+)} = \dfrac{P(T^+ \cap M)}{P(T^+ \cap M) + P(T^+ \cap \overline{M})} = \dfrac{p.\varepsilon}{p.\varepsilon + P(T^+ \cap \overline{M})}$

or $P(T^+ \cap \overline{M}) + \underbrace{P(T^- \cap \overline{M})}_{=q(1-\varepsilon)} = P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \varepsilon$

donc $P(T^+ \cap \overline{M}) = 1 - \varepsilon - q(1 - \varepsilon)$

d'où $P(M|T^+) = \dfrac{p.\varepsilon}{p.\varepsilon + 1 - \varepsilon - q(1 - \varepsilon)} \simeq 15,38\%$

• $P(\overline{M}|T^-) = \dfrac{P(T^- \cap \overline{M})}{P(T^-)} = \dfrac{P(T^- \cap \overline{M})}{P(T^- \cap \overline{M}) + P(T^- \cap M)} = \dfrac{q.(1-\varepsilon)}{q.(1-\varepsilon) + P(T^- \cap M)}$

or $P(T^- \cap M) + \underbrace{P(T^+ \cap M)}_{=p.\varepsilon} = P(M) = \varepsilon$

donc $P(T^- \cap M) = \varepsilon - p.\varepsilon$

d'où $P(\overline{M}|T^-) = \dfrac{q.(1-\varepsilon)}{q.(1-\varepsilon) + \varepsilon - p.\varepsilon} \simeq 99,89\%$

## Exercice 18 : Probabilité des causes

Parmi les personnes qui se soignent pour un mal de tête, 60% d'entre elles prennent de l'aspirine, et 40% un médicament $M$. 75% des personnes qui ont pris de l'aspirine sont soulagées, de même que 90% de celles qui ont pris du médiament $M$.

1- Quelle est, parmi la population des gens qui soignent leur mal de tête la proportion de personnes soulagées ?

2- Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

1- Notons $A$ l'évènement : "le patient a pris de l'aspirine", $M = \overline{A}$ l'évènement : "le patient a pris du médicament $M$", et notons $S$ l'évènement "le patient est soulagé".

Les hypothèses nous disent :

$P(A) = 60\%,\ P(M) = 40\%,\ P_A(S) = P(S|A) = 75\%,\ P_M(S) = P(S|M) = 90\%.$

La famille $(A, M)$ est un système complet d'évènements.

donc $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap M)$

$P(S \cap A) = P(A) \times P(S|A) = 60\% \times 75\% = \frac{9}{20} = 45\%$

$P(S \cap M) = P(M) \times P(S|M) = 40\% \times 90\% = 36\%$

d'où : $\boxed{P(S) = 45\% + 36\% = 81\%}$

2- **Méthode élémentaire :** On demande la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé, c'est à dire $P(A|S)$

En revenant à la définition, $P(A|S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{45\%}{81\%} = \dfrac{5}{9} \simeq 55,55\%$

**Par la formule de Bayles :** $P(A \cap S) = P(S \cap A) \times \dfrac{P(A)}{P(S)} = 75\% \times \dfrac{60\%}{81\%} = \dfrac{5}{9}$

# III - Variables aléatoires :

**Exercice 20 :** Une urne contient une boule rouge, une boule verte et $n - 2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note $X$ le rang d'apparition de la boule rouge et $Y$ le rang d'apparition de la boule verte.

1- Expliciter les lois des variables aléatoires $X$ et $Y$.
Calculer leur espérance et leur variance.

2- Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

3- Calculer la covariance du couple $(X, Y)$.

***SOLUTION*** **:** 1- $X$ et $Y$ prennnent leurs valeurs entre 1 et $n$.

L'univers $\Omega$ est formé de toutes les permutations possibles de l'ensemble $[[1, n]]$. Il comporte $n!$ éléments.

Soit $k \in [[1, n]]$. Comptons les cas favorables où la boule rouge est tirée en $k^e$ position : Les $n-1$ boules restantes peuvent être tirées dans n'importe quel ordre : il y en a autant que de permutations de $[[1, n-1]]$, soit $(n-1)!$

Donc $P(X = k) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

Un raisonnement analogue montre que la variable $Y$ suit la même loi.

$X$ et $Y$ suivent la loi uniforme de l'intervalle $[[1, n]]$.

• $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$

• $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k)}_{formule\ du\ transfert} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 - \dfrac{(n+1)^2}{4}$

$$V(X) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

2- Le couple $(X, Y)$ prend ses valeurs dans $[[1, n]]^2$ .

$\forall k \in [[1, n]], P((X, Y) = (k, k)) = 0$. On ne peut pas tirer à la fois en $k^e$ position la boule rouge et la boule verte.

L'évènement $(X, Y) = (h, k)$ est formé des tirages pour lesquels la $h^e$ boule tirée est rouge, la $k^e$ est verte, et les autres sont une permutation des $(n-2)$ tirages restant.

Donc $P((X, Y) = (h, k)) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

• Remarquons que $P((X, Y) = (k, k)) = 0$ et que $P(X = k) \times P(X = k) = \frac{1}{n^2}$

Donc $P((X, Y) = (k, k)) \neq P(X = k) \times P(X = k)$

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

3- Par définition, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{h,k=1}^{n} hkP((X, Y) = (h, k)) = \sum_{h \neq k}^{n} hk \times \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \times 2 \times \sum_{h<k}^{n} hk \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left( 1 \times \sum_{k=2}^{n} k + 2 \times \sum_{k=3}^{n} k + \cdots + (n-2) \times \sum_{k=n-1}^{n} k + (n-1) \times n \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{h=1}^{n-1} \left( h \sum_{k=h+1}^{n} k \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{h=1}^{n-1} h \left( \frac{n(n+1)}{2} - \frac{h(h+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{n-1} \sum_{h=1}^{n-1} h - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{h=1}^{n-1} (h^3 + h^2) \\
&= \frac{n+1}{n-1} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \left( \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \left( \frac{n(n-1)}{4} - \frac{2n-1}{6} \right) = \frac{6n^2 + 6n - 3n^2 + 3n - 4n + 2}{12}
\end{aligned}$$

$$E(XY) = \frac{3n^2 + 5n + 2}{12}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3n^2+5n+2}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{3n^2+5n+2-3n^2-6n-3}{12}$$

$\boxed{Cov(X,Y) = \frac{-n-1}{12}}$

## Exercice 21 : HEC 2002 maths II - option technologique

A. 1)

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

$E(X) = -1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3} = 0$ $X$ est une variable centrée.

D'après le théorème du transfert, $E(X^2) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = 1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$

2) Remarquons que $(-1)^3 = -1$, $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, donc $\forall u \in \Omega, [X(u)]^3 = X(u)$ . Donc $X^3 = X$.

d'où : $\boxed{XY = X.X^2 = X^3 = X}$ $\boxed{Y^2 = X^2.X^2 = X^4 = X^2 = Y}$

3) $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = E(Y) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ $\boxed{V(Y) = \frac{2}{9}}$

Cov$(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \underbrace{E(X)}_{=0} - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$

4) $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$, $Y(\Omega) = \{0,1\}$, donc $(X,Y)(\Omega) \subset \{-1,0,1\}\times\{0,1\}$

$P((X,Y) = (-1,0)) = P((X=-1)\cap(X^2=0)) = P(\emptyset) = 0$

$P((X,Y) = (-1,1)) = P((X=-1)\cap(X^2=1)) = P((X=-1)) = \frac{1}{3}$

$P((X,Y) = (0,0)) = P((X=0)\cap(X^2=0)) = P((X=0)) = \frac{1}{3}$

$P((X,Y) = (0,1)) = P((X=0)\cap(X^2=1)) = P(\emptyset) = 0$

$P((X,Y) = (1,0)) = P((X=1)\cap(X^2=0)) = P(\emptyset) = 0$

$P((X,Y) = (1,1)) = P((X=1)\cap(X^2=1)) = P((X=1)) = \frac{1}{3}$

La loi conjointe peut être résumée par le tableau suivant :

| $\backslash\ x$ <br> $y\ \backslash$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ |
| $1$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ |

5) $P((X,Y) = (-1,0)) = 0$ d'après le tableau précédent.

$P(X=-1)\times P(Y=0) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq 0$

Donc $P[(X=-1)\cap(Y=0)] \neq P(X=-1)\times P(Y=0)$. Les deux variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

B.1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . D'après le cours, $\boxed{E(X) = p}$ et $\boxed{V(X) = p(1-p)}$

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ . De même, $\boxed{E(Y) = q}$ et $\boxed{V(Y) = q(1-q)}$

2) $X$ et $Y$ prennent leurs valeurs dans $\{0,1\}$. Il en est de même du produit $X.Y$ :

$(0\times 0 = 0\times 1 = 1\times 0 = 0$ et $1\times 1 = 1)$

Les évènements $(XY=0)$ et $(XY=1)$ sont contraires l'un de l'autre.

Par ailleurs $(XY=1) = [(X=1)\cap(Y=1)]$. Donc $P(XY=1) = P[(X=1)\cap(Y=1)] = \lambda$, et en passant à l'évènement contraire, $P(XY=0) = P(\overline{(XY=1)}) = 1 - P(XY=1) = 1-\lambda$

| $z$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $P(XY=z)$ | $\lambda$ | $1-\lambda$ |

On en déduit que $\boxed{XY \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \lambda}$ .

3) D'après la formule des probabilités totales, puisque $[(Y=0),(Y=1)]$ est un système complet d'évènements,

$$\underbrace{P(X=1)}_{=p} = p[(X=1)\cap(Y=0)] + \underbrace{p[(X=1)\cap(Y=1)]}_{=\lambda}$$

donc $P[(X=1)\cap(Y=0)] = p-\lambda$

par un calcul analogue, $P[(X=0)\cap(Y=1)] = q-\lambda$

$(XY = (1,1),\ XY = (1,0),\ XY = (0,1),\ XY = (0,0))$ étant un système complet d'évènements, la somme de leurs probabilité vaut 1.

donc $P(XY = (0,0)) = P[(X=0)\cap(Y=0)] = 1-\lambda-(p-\lambda)-(q-\lambda) = 1-p-q+\lambda$

La loi conjointe $(X,Y)$ peut être résumée par le tableau suivant :

| $y \setminus x$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $\lambda$ | $q-\lambda$ |
| 0 | $p-\lambda$ | $1-p-q+\lambda$ |

4) $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \lambda - pq}$

5) Les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si:

$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x).P(Y=y)$

$\iff \forall x \in \{0,1\}, \forall y \in \{0,1\},\ P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x).P(Y=y)$

Ceci donne quatre conditions :

- pour $(X=1)\cap(Y=1),\ \lambda = p.q$
- pour $(X=1)\cap(Y=0),\ p-\lambda = p.(1-q)$
- pour $(X=0)\cap(Y=1),\ q-\lambda = q.(1-p)$
- pour $(X=0)\cap(Y=0),\ 1-p-q+\lambda = (1-p).(1-q)$

qui équivalent à l'unique condition : $\lambda = p.q$ . Et cette dernière condition équivaut bien à "$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$" puisque $\mathrm{Cov}(X,Y) = \lambda - pq$ .

Donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes si et seulement si } \mathrm{Cov}(X,Y)=0}$

**Exercice 22 :**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à $n$ ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \cdots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est moélisée par espace propbabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note $Y$ le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à $X_1$, sous réserve qu'un tel numéro existe.

1. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = (X_k < X_1)$

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_k)$

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = 0$

c) Que peut on dire de l'ensemble des éléments $\omega$ de $\Omega$ pour lesquels $Y(\omega)$ existe ?

On admet désormais que cet ensemble est confondu avec $\Omega$.

2. a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, $P(Y=m+1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \times \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1} \times \left(1-\frac{i}{n}\right)$

b) Montrer que $Y$ admet une espérance, et que $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

3. On ne considère plus l'entier $n$ fixé, et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment $Y$.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $p_m = \lim\limits_{n\to+\infty} P(Y^{(n)} = m+1)$

b) Montrer que la famille $(p_m)_{m\geqslant 1}$ définit la loi d'une variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui ne possède pas d'espérance.

***SOLUTION*** **:**

Soit $k$ un entier $\geqslant 2$.

$(X_k < X_1) = [(X_1=2)\cap(X_k=1)] \cup [(X_1=3)\cap(X_k\leqslant 2)] \cup [(X_1=4)\cap(X_k\leqslant 3)] \cup \cdots \cup [(X_1=n)\cap(X_k \leqslant n-1)]$

$$= \bigsqcup_{i=2}^{n} [(X_1=i)\cap(X_k \leqslant i-1)]$$

Les évènements $(X_1=i)\cap(X_k\leqslant i-1)$ sont incompatibles les uns les autres (car $(X_1=i)$ et $(X_1=j)$ le sont lorsque $i \neq j$)

Donc, $P(X_k < X_1) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} [(X_1=i)\cap(X_k\leqslant i-1)]$

$$= \sum_{i=2}^{n} \underbrace{P(X_1 = i)}_{\frac{1}{n}} \underbrace{P(X_k \leqslant i-1)}_{\frac{i-1}{n}}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1) \times n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$\boxed{\forall k \in \{2, 3, \cdots, n\},\ P(X_k < X_1) = \frac{n-1}{2n}}$$

Les tirages successifs étant aléatoires, les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes les unes des autres. Il en est de même des évènements $(X_i < X_1) = B_i$ pour $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$.

donc $P(B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_k) = P(B_2)P(B_3) \cap \cdots \cap P(B_k)$

$$= \prod_{i=2}^{k} \frac{n-1}{2n} = \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{k-1} \qquad \boxed{P(B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_k) = \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{k-1}}$$

b) La suite $\left(\bigcap_{i=2}^{k} B_i\right)_{k \geqslant 2}$ est une suite décroissante d'évènements.

On sait qu'alors, $P\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = \lim_{k \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=2}^{k} B_i\right) = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{k-1} = 0$

(suite géométrique de raison $\left|\frac{n-1}{2n}\right| < 1$) $\boxed{P\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = 0}$

c) $Y(\omega)$, rang du premier tirage pour lequel le numéro tiré est supérieur ou égal à $X_1$ existe sauf si :

$\forall k \geqslant 2, X_k < X_1$ , c'est à dire sauf si $\omega \in \bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k$

Donc $\{\omega \in \Omega / Y(\omega)$ est défini $\}$ est le complémentaire dans $\Omega$ de $\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k$

Puisque $P\left(\bigcap_{i=2}^{+\infty} B_i\right) = 0$, $P(Y$ existe $) = 1 - 0 = 1$. $\boxed{\text{L'évènement "}P(Y)\text{ existe" est presque certain.}}$

2-a) Soit $m$ un entier $\geqslant 1$.

$(Y = m+1) = (X_2 < X_1) \cap (X_3 < X_1) \cap \cdots \cap (X_m < X_1) \cap (X_{m+1} \geqslant X_1)$

Ces évènements étant indépendants les uns des autres,

$P(Y = m+1) = \underbrace{P(X_2 < X_1)}_{\frac{n-1}{2n}} P(X_3 < X_1) \times \cdots \times \underbrace{P(X_m < X_1)}_{\frac{n-1}{2n}} \underbrace{P(X_{m+1} \geqslant X_1)}_{1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}}$

$$\boxed{P(Y = m+1) = \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{m-1} . \frac{n+1}{2n}}$$

Ce résultat, le plus simple à obtenir avec les calculs déjà faits, n'est pas celui qui est demandé.

• Pour $m = 1$ ,

$(Y = 2) = (X_1 = 1) \cup [(X_1 = 2) \cap (X_2 \geqslant 2)] \cup [(X_1 = 3) \cap (X_2 \geqslant 3)] \cup \cdots$
$\cdots \cup [(X_1 = n-1) \cap (X_2 \geqslant n-1)] \cup [(X_1 = n) \cap (X_2 = n)]$

d'où $P(Y = 2) = P(X_1 = 1) + P[(X_1 = 2) \cap (X_2 \geqslant 2)] + P[(X_1 = 3) \cap (X_2 \geqslant 3)] + \cdots$
$\cdots + P[(X_1 = n-1) \cap (X_2 \geqslant n-1)] + P[(X_1 = n) \cap (X_2 = n)]$

$P(Y = 2) = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \times \frac{n-2}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \times \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1} \times \left(1 - \frac{i}{n}\right)$ avec $m = 1$.

• Soit $m \geqslant 2$.

Décomposons l'évènement $(Y = m+1)$ suivant les diverses valeurs que peut prendre $X_1$ :

Remarquons que si $X_1 = 1$, alors $X_2 \geqslant X_1 = 1$ et $Y = 2$. Donc $(Y = m+1)$, avec $m \geqslant 2$ est impossible si $X_1 = 1$.

d'où :

$(Y = m+1) = [(X_1 = 2) \cap (X_2 = X_3 = \cdots = X_m = 1) \cap (X_{m+1} \geqslant 2)]$

$$\cup[(X_1=3)\cap(X_2<3)\cap(X_3<3)\cap\cdots\cap(X_m<3)\cap(X_{m+1}\geqslant 3)]$$
$$\cup[(X_1=4)\cap(X_2<4)\cap(X_3<4)\cap\cdots\cap(X_m<4)\cap(X_{m+1}\geqslant 4)]$$
$$\vdots$$
$$\cup[(X_1=n)\cap(X_2<n)\cap(X_3<n)\cap\cdots\cap(X_m<n)\cap(X_{m+1}=n)]$$

$$(Y=m+1)=\bigcup_{k=2}^{n}[(X_1=k)\cap(X_2<k)\cap(X_3<k)\cap\cdots\cap(X_m<k)\cap(X_{m+1}\geqslant k)]$$

d'où $P(Y=m+1)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}P[(X_1=k)\cap(X_2<k)\cap(X_3<k)\cap\cdots\cap(X_m<k)\cap(X_{m+1}\geqslant k)]$

(par incompatibilité des évènements)

$$=\sum_{k=2}^{n}\underbrace{P(X_1=k)}_{\frac{1}{n}}.\underbrace{P(X_2<k)}_{\frac{k-1}{n}}.P(X_3<k)\times\cdots\times\underbrace{P(X_m<k)}_{\frac{k-1}{n}}.\underbrace{P(X_{m+1}\geqslant k)}_{\frac{n-k+1}{n}}$$

(par indépendance des évènements)

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\times\left(\frac{k-1}{n}\right)^{m-1}\times\frac{n-k+1}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\times\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\frac{n-i}{n}\qquad\text{(par le changement d'indice } i=k-1\text{)}$$

Pour $i=0$, le facteur $\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$ est nul. On peut le rajouter dans la somme. On obtient alors :

$$\boxed{P(Y=m+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\times\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\frac{n-i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\times\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\left(1-\frac{i}{n}\right)},$$

ce qui est la formule demandée.

b) $Y(\Omega)=\{2,3,4,\cdots\}$.

Sous réserve de convergence,

$$E(Y)=\sum_{m=2}^{\infty}mP(m)=\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)P(m+1)\qquad\text{(par décalage d'indice)}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0,1}^{n-1}\frac{(m+1)}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\left(1-\frac{i}{n}\right)\qquad\text{(terme nul pour } i=0\text{)}$$

$$=\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\times\left(1-\frac{i}{n}\right)\qquad\text{(somme de } n \text{ séries)}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}-\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\left(\frac{i}{n}\right)^{m}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}m\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}+\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}-\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\left(\frac{i}{n}\right)^{m}$$

Par dérivation de la série entières $T(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{1}{1-x}$, on obtient :

$$\forall x\in]-1,1[,\ T'(x)=\sum_{m=0,1}^{\infty}mx^{m-1}$$

d'où : $E(Y)=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{i}{n}}-\frac{1}{n}\sum_{i=0,1}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}$

?????? Revoir les indices après tirage sur papier ! ! ! ! !

3. a) Pour tout $n \geqslant 2$, $P(Y^{(n)} = m+1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \times \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1} \times \left(1 - \frac{i}{n}\right)$

Cette somme est une **somme de Riemann** pour la fonction $g : x \mapsto x^{m-1}(1-x)$ sur le segment $[0,1]$, partagé en $n$ intervalles égaux. ($x_i = \frac{i}{n}$, $n = 0, 1, \cdots, n-1$)

Puisque $g$ est continue sur le segment $[0,1]$ (fonction polynomiale),

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y^{(n)} = m+1) = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)dt = \left[\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ p_m = \lim_{n\to+\infty} P(Y^{(n)} = m+1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)}}$$

3. a) Pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{k} p_m = \sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$ (somme telescopique)

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} p_m = \lim_{k\to+\infty}\sum_{m=1}^{k} p_m = 1}$, et la famille $(p_m)_{m\geqslant 1}$ définit une loi de variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{k} mP(Z=m) = \sum_{m=1}^{k} mp_m = \sum_{m=1}^{k} m \times \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

La série $\displaystyle\sum_{m\geqslant 2}^{k} mP(Z=m)$ est donc divergente. $\boxed{\text{L'espérance de la variable aléatoire } Z \text{ n'est pas définie}}$.

**Exercice 23 : ESCP 2004 - 3.2**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}; \mathcal{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Soit $Z$ et $T$ les variables aléatoires définies par :

$Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance de la variable aléatoire $A$.

1. a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de $Z$ et $T$.

b) Montrer que $E(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque $n$ tend vers l'infini.

2. Soit $U$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leqslant U \leqslant K$

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de l'espérance $E(U)$.

b) Calculer de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U), E(U^2), E(U^3)$.

3. a) Calculer pour tout $j \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geqslant j)$.

b) En utilisant la question 2. a), retrouver la valeur de $E(T)$.

4. Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance $\sigma_X^2$ de la variable aléatoire $X$.

***SOLUTION*** : 1. a) $Z$ et $T$ sont des variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Elles admettent donc des moments de tous ordres puisque les sommes qui les définissent sont des sommes finies : le moment d'ordre $m$ de la vaiable aléatoire $Z$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^m P(X = m)$

b) Puisque $X$ et $Y$ prennent les valeurs $0, 1, \cdots, n$, $X - Y$ prend ses valeurs dans $\{-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\}$, et $Z = |X - Y|$ prend les valeurs $0, 1, \cdots, n$.

Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$,

$$(Z = i) = [(X = i) \cap (Y = 0)] \cup [(X = i+1) \cap (Y = 1)] \cup \cdots \cup [(X = n) \cap (Y = n - i)]$$
$$\cup [(X = 0) \cap (Y = i)] \cup [(X = 1) \cap (Y = i+1)] \cup \cdots \cup [(X = n - i) \cap (Y = n)]$$

Chaque évènement $(X=i)\cap(Y=j)$ a pour probabilité $\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ puisque $X$ et $Y$ suivent une loi uniforme sur $\{0,1,\cdots,n-1,n\}$ et sont indépendantes.

L'évènement $(Z=i)$ étant décomposé en une union disjoints de $2(n-i+1)$ évènements,

$$P(Z=i)=2(n-i+1)\times\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2(n-i+1)}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}E(Z)&=\sum_{i=0}^{n} iP(Z=i)=\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} i(n-i+1)\\&=\frac{2}{(n+1)^2}\left((n+1)\sum_{i=0}^{n} i-\sum_{i=0}^{n} i^2\right)\\&=\frac{2}{(n+1)^2}\left((n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\&=\frac{2}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(2n+1)}{6}\right)=\frac{2}{n+1}\left(\frac{3n^2+3n-2n^2-n}{6}\right)=\frac{2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z)=\frac{n(n+2)}{3(n+1)}}$$

c) Pour tous réels $x$ et $y$ ,

$$|x-y|=\max(x,y)-\min(x,y)\quad\text{et}\quad x+y=\max(x,y)+\min(x,y)$$

donc par différence, $T=\min(X,Y)=\frac{1}{2}\left[(X+Y)-|X-Y|\right]=\frac{1}{2}\left[X+Y-Z\right]$

Par linéarité de l'espérance, $E(T)=\frac{1}{2}\left[E(X)+E(Y)-E(Z)\right]$

et comme $X$ et $Y$ suivent une loi uniforme sur $\{0,1,\cdots,n-1,n\}$, $E(X)=E(Y)=\dfrac{n}{2}$

$$E(T)=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-\frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right]=\frac{3n^2+3n-n^2-2n}{6(n+1)}=\frac{2n^2+n}{6(n+1)}$$

$$\boxed{E(T)=\frac{2n^2+n}{6(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{3}}$$

2. Soit $U$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K\in\mathbb{N}^*$ vérifiant : $0\leqslant U\leqslant K$

a) $P(U\geqslant 1)=P(U=1)+P(U=2)+\cdots+P(K)$ car $(U\geqslant 0)=(U=0)\cup P(U=1)\cup\cdots\cup P(K)$ et ces évènements sont incompatibles. De même,

$P(U\geqslant 2)=P(U=2)+P(U=3)+\cdots+P(K)$

$P(U\geqslant 3)=P(U=3)+P(U=4)+\cdots+P(K)$

$\vdots$

$P(U\geqslant K)=P(K)$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$P(U\geqslant 1)+P(U\geqslant 2)+\cdots+P(U\geqslant K)=P(U=1)+2P(U=2)+3P(U=3)+\cdots+K.P(K)$

ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{K}P(U\geqslant j)=\sum_{j=0,1}^{K} j.P(U=j)=E(U)}$$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{K} j^2P(U\geqslant j)&=\sum_{j=1}^{K} j^2\left(\sum_{i=j}^{K}P(U=i)\right)\\&=1^2\sum_{i=1}^{K}P(U=i)+2^2\sum_{i=2}^{K}P(U=i)+3^2\sum_{i=3}^{K}P(U=i)+\cdots+K^2\sum_{i=K}^{K}P(U=i)\\&=1^2P(U=1)+(1^2+2^2)P(U=2)+(1^2+2^2+3^2)P(U=3)+\cdots+(1^2+2^2+\cdots+K^2)P(U=K)\\&=\sum_{j=1}^{K}\left[\left(\sum_{i=1}^{j} i^2\right)P(U=j)\right]=\sum_{j=1}^{K}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}P(U=j)\\&=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{K} j^3P(U=j)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K} j^2P(U=j)+\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{K} jP(U=j)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{K} j^2P(U\geqslant j)=\frac{1}{3}E(U^3)+\frac{1}{2}E(U^2)+\frac{1}{6}E(U)}$$

3. a) Remarquons que $(T \geqslant j) = (\min(X,Y) \geqslant j) = (X \geqslant j) \cap (Y \geqslant j)$
Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$P(T \geqslant j) = P(X \geqslant j) \times P(Y \geqslant j) = \frac{n-j+1}{n+1} \times \frac{n-j+1}{n+1} = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2$$

$$\boxed{P(T \geqslant j) = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2}$$

- D'après la question 2.a), $E(T) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(T \geqslant j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)^2$

Or quand $j$ varie de 1 à $n$, $h = n-j+1$ varie de $n$ à 1. Par le changement d'indice $h = n-j+1$,
$E(T) = \displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$
On retrouve bien la formule obtenue en 1.c)

4. $E(Z^2) = E(|X-Y|^2) = E((X-Y)^2)$ car $X$ et $Y$ sont à valeurs réelles,
$= E(X^2 + Y^2 - 2XY) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)$ par linéarité de l'epérance,
$= E(X^2 + Y^2 - 2XY) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)$ par indépendance de $X$ et $Y$,
$= 2E(X^2) - 2(E(X))^2$ puisque $X$ et $Y$ suivent la même loi

$$\boxed{E(Z^2) = 2[E(X^2) - (E(X))^2] = 2V(X) = 2(\sigma(X))^2}$$

**Exercice 24 : ESCP 2005 - 3.17**

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3. On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

Soit $X$ le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note $p_n$ la probabilité de l'évènement $(X = n)$ et $c_n$ la probabilité de l'évènement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent $p_1$ et $p_2$ ? Calculer $p_3$ et $p_4$.
Calculer $c_2$, $c_3$ et $c_4$.
b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.
2. a) Montrer que pour $n \geqslant 1, p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1 - c_n)$
b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27} p_n = 0$.
3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = p_{n+2} - \frac{2}{3} p_{n+1} - \frac{2}{9} p_n$ .
Calculer $u_2$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite nulle.
b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} \right)$
c) Montrer que la série de terme général $p_n$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} p_n$.
Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que $X$ admet des moments à tous les ordres, et calculer son espérance.

***SOLUTION*** : 1.a) $p_1$ est la probabilité de l'évènement $(X = 1)$, c'est à dire que le même numero sorte trois fois de suite en un seul tirage. Cet évènement est impossible, donc $p_1 = 0$.

Pour la même raison (le même numero ne peut sortir trois fois de suite en deux tirages), $p_2 = 0$.

$p_3$ est la probabilité que le même numero sorte trois fois de suite en trois tirage. Ces tirages peuvent être $(1,1,1)$, ou $(2,2,2)$, ou $(3,3,3)$, qui sont deux à deux incompatibles, et on chacun pour probabilté $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Donc $\boxed{p_3 = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}}$

$p_3$ est la probabilité que le même numero sorte pour la première fois trois fois de suite en trois tirage. Un tel évènement correspond au tirage d'un certain numéro $i$ parmi $1, 2, 3$ au premier tirage (probabilité $= 1$), et d'un numero $j \neq i$ aux deuxième, troisième et quatrième tirage.

Les tirages favorables sont : $(1,2,2,2), (1,3,3,3), (2,1,1,1), (2,3,3,3), (3,1,1,1), (3,2,2,2)$. ils sont incompatible et on chacun pour probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ . Donc $\boxed{p_4 = \frac{6}{3^4} = \frac{2}{27}}$

$c_2 = P(X \leqslant 2) = P(\emptyset) = 0$

$c_3 = P(X \leqslant 3) = P(X = 3) = p_3 = \frac{1}{9}$
$c_4 = P(X \leqslant 4) = P((X = 3) \cup (X = 4)) = p_3 + p_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $(X \leqslant n) = (X \leqslant n-1) \cup (X = n)$. Ces deux derniers évènements étant incompatibles,

$P(X \leqslant n) = P(X \leqslant n-1) + P(X = n)$, donc $c_n = c_{n-1} + p_n$, de qui donne bien la relation : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ p_n = c_n - c_{n-1}.}$

2. a) L'évènement $(X = n+3)$ est réalisé si et seulement si jusqu'au tirage de rang $n$, on n'a jamais tiré trois fois consécutivement le même numéro (c'est à dire si $(X > n)$) et si on a obtenu aux tirages de rangs $n+1$, $n+2$ et $n+3$ le même numéro, distinct de celui obtenu au tirage de rang $n$.

Comme les tirages successifs sont indépendants,

$$p_{n+3} = \underbrace{(1 - c_n)}_{P(X>n)=1-P(X\leqslant n)} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2(1 - c_n)\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

b) $\forall n \geqslant 2, p_{n+3} - p_{n+2} = 2(1 - c_n)\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2(1 - c_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 2(-c_n + c_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{2}{27}p_n.$

donc $\boxed{p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27}p_n = 0}$.

3. a) $u_2 = p_4 - \frac{2}{3}p_3 - \frac{2}{9}p_2 = \frac{2}{27} - \frac{2}{27} + 0 = 0.$

$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = p_{n+3} - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} = p_{n+2} - \frac{2}{27}p_n - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} - \frac{2}{27}p_n = \frac{1}{3}\left(p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n\right) = \frac{1}{3}u_n$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{3}$.

Puisque $u_2 = 0$, par une récurrence immédiate, $\boxed{\forall n \geqslant 2, u_n = 0}$

b) La suite $(u_n)$ vérifie la relation de récurrence linéaire à deux pas :

$$(R): \quad \forall n \geqslant 2,\ p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

L'équation carctérisque associée est : $t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} = 0$

Son discriminant esst $\delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ , et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$$

Les suites vérifiant la relation de récurrence $(R)$ sont les suites de la forme :

$$v_n = a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles.}$$

Donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \geqslant 2,\ p_n = a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n$, ou,

en posant $a' = a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2$ et $b' = b\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2$,

$$\begin{cases} p_2 = 0 = a' + b' \\ p_3 = \frac{1}{9} = a'x_1 + b'x_2 \end{cases}$$

d'où : $b' = -a'$ et $\frac{1}{9} = a'(x_1 - x_2) = a' \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a' = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$ et $b' = -\frac{\sqrt{3}}{18}$

Finalement, pour tout $\boxed{n \geqslant 2,\ p_n = \frac{\sqrt{3}}{18}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right]}$

c) $|x_1| = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \simeq 0.91 < 1$ et $|x_2| = \frac{\sqrt{3}-1}{3} \simeq 0.24 < 1$

Les deux séries géométriques $\sum x_1^n$ et $\sum x_2^n$ convergent, puisque leur raison est en module strictement plus petite que 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n = \frac{\sqrt{3}}{18}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n}\right] = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{1}{1-x_1} - \frac{1}{1-x_2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{3}{2-\sqrt{3}} - \frac{3}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2\sqrt{3} = 1$$

donc $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1}$, ce dont on pouvait se douter puisque le suite $(X = n)_{n \geqslant 2}$ est une suite complète d'évènements.

• $c_n = P(X \leqslant n) = \sum_{k=2}^{n} p_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=2}^{+\infty} p_k = 1$

Ceci montre qu'en répétant le tirage suffisamment de fois, l'obtention de trois numeros consécutifs égaux est un évènement presque sûr.

d) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum n^k x_1^n$ et $\sum n^k x_2^n$ convergent.

$X$ admet donc des moments à tous les ordres.

• En particuler, pour $k = 1$, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} np_n$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \sum_{n=2}^{\infty} n \left[ \left( \frac{1+\sqrt{3}}{3} \right)^{n-2} - \left( \frac{1-\sqrt{3}}{3} \right)^{n-2} \right]$$

Par dérivation de la série entière sur l'ouvert $]-1, 1[$, $\sum_{n=0,1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

d'où $E(X) = \frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{3}{1+\sqrt{3}} \sum_{n=2}^{\infty} n \left( \frac{1+\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{3}{1-\sqrt{3}} \sum_{n=2}^{\infty} n \left( \frac{1-\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1 \right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})} \left[ \frac{9}{(2-\sqrt{3})^2} - 1 \right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})} \left[ \frac{9}{(2+\sqrt{3})^2} - 1 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})} \left[ 9(2+\sqrt{3})^2 - 1 \right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})} \left[ 9(2-\sqrt{3})^2 - 1 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})} \left[ 62 + 36\sqrt{3} \right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})} \left[ 62 - 36\sqrt{3} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{12} \left[ 62 + 36\sqrt{3} \right] + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{12} \left[ 62 - 36\sqrt{3} \right]$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{6} \left[ 31 + 18\sqrt{3} \right] + \frac{3+\sqrt{3}}{6} \left[ 31 - 18\sqrt{3} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[ 93 - 54 + 23\sqrt{3} + 93 - 54 - 23\sqrt{3} \right] = \frac{78}{6} = 13 \qquad \boxed{E(X) = 13}$$

**Exercice 25 : ESCP 2005 - 3.29**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$, que l'on notera $u_n$.

Etudier les variations et la limite de la suite $(u_n)$.

2. a) Montrer qu'il existe des réels $k$ et $q$ pour lesquels il existe des variables aléatoires $X$ et $Y$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q.u_n^n \text{ et } P(Y = n) = k\left(\tfrac{1}{2} - u_n\right)$$

b) $X$ et $Y$ étant de telles variables, montrer que $X$ et $Y$ admettent une espérance, qui vérifient :

$$E(X) \leqslant 2q \text{ et } E(Y) \leqslant \tfrac{k}{4}$$

$X$ et $Y$ admettent elles une variance ?

***SOLUTION*** : 1. La fonction $f_n$ a une dérivée positive sur $[0, +\infty[$ et est donc strictement croissante sur cet intervalle. Elle s'annulera au plus une fois sur $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, $f_n(0) = -4 < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $f_n$, polynômiale, étant continue, elle prend toute valeur entre $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, et en particulier la valeur 0.

Finalement, il existe un unique réel $u_n \in [0,+\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + 16u_n^2 - 4 = u_n^{n+1} - u_n^n + \underbrace{u_n^n + 16u_n^2 - 4}_{=0} = u_n^n \underbrace{(u_n - 1)}_{<0} < 0$

$$\left.\begin{array}{r} f_{n+1}(u_n) < 0 \\ f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \\ f_{n+1} \text{ est strictement croissante} \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n < u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc elle est convergente, et de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$

• L'encadrement $0 < u_n < \frac{1}{2}$ entraine que $0 < u_n^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$

L'égalité $f_n(u_n) = 0 = u_n^n + 16u_n^2 - 4$ entraîne alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} 16u_n^2 = 4$, et puisque la suite $(u_n)$ est à termes positifs, que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}}$

2. a) La majoration $0 < u_n^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ où la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente entraîne, par majoration, que la série $\sum u_n^n$ converge, et que sa somme, $\sigma$, est strictement positive.

En prenant $q = \frac{1}{\sigma}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q u_n^n = q \times \sigma = 1$.

Il existe donc une variable aléatoire $X$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q\ u_n^n$

• Il s'agit de montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{2} - u_n\right)$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0 = u_n^n + 16\left(u_n - \frac{1}{2}\right)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$

donc $\left|\frac{1}{2} - u_n\right| = \dfrac{u_n^n}{16\left(\frac{1}{2} + u_n\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^n}{16} = \dfrac{1}{16} u_n^n$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

On a vu que la série $\sum u_n^n$ convergeait. L'équivalence précédente montre alors que la série $\sum \left(\frac{1}{2} - u_n\right)$ converge absolument, et que sa somme est positive, puisque $0 < u_n < \frac{1}{2}$. En notant $s$ sa somme, et en prenant $k = \frac{1}{s}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{2} - u_n\right) = k \times s = 1$.

Il existe donc une variable aléatoire $Y$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = k\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$

b) L'encadrement $0 < q\ u_n^n < q\left(\frac{1}{2}\right)^n$, entraîne que $0 < nP(X = n) < qn\left(\frac{1}{2}\right)^n$ où la série $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, et par sommation,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) \leqslant q \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par dérivation de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ on obtient : $\forall x \in ]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0,1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

d'où : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) \leqslant q \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{q}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2q$

• Reprenons l'égalité $P(Y = n) = k\left(\frac{1}{2} - u_n\right) = k\ \dfrac{u_n^n}{16\left(\frac{1}{2} + u_n\right)} \leqslant k\dfrac{u_n^n}{8} \leqslant \dfrac{k}{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\text{d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y = n) \leqslant \frac{k}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{k}{16} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{k}{4}$$

• Les majorations $0 < n^2P(X = n) = q.n^2u_n^n < q.n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et
$0 < n^2P(Y = n) = k.n^2\left(\frac{1}{2} - u_n\right) \leqslant \frac{k}{8} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

et la convergence des séries $\sum n^2 x^n$ pour $x \in ]-1,1[$ entraine la convergence des moments d'ordre 2

$E(X^2) = \sum n^2 P(X = n)$ et $E(Y^2) = \sum n^2 P(Y = n)$ et l'existence des variances $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et $V(Y)$ .

**Exercice 26 : ESCP 2006 - 3.2**

Soit $N$ un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant $N$ jetons numérotés de 1 à $N$ dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise d'un jeton, en notant, à chaque fois, le numero obtenu.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $T_n$ le nombre aléatoire de numéros distincts obtenus au cours des $n$ premiers tirages.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   a) Quelles sont les valeurs prises par $T_n$ ?
   b) Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$
   c) Calculer $P(T_n = 2)$ .
2. Soit $(k, n)$ un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$.
   Déterminer une relation liant $P(T_{n+1} = k)$, $P(T_n = k)$,$P(T_n = k-1)$.
3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère le polynôme :
$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)X^k$$
   a) Prouver l'égalité : $\quad G_{n+1} = \dfrac{1}{N}(X - X^2)G'_n + XG_n$
   b) Pour tout entier naturel $n$ non nul, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à $G_n$, exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$, $N$ et $n$, puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de $N$ et $n$ .
   c) Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{E(T_n)}{N}$

***SOLUTION*** **:** 1. a) $T_n$ compte le nombre de numéros distincts obtenus au cours des $n$ premiers tirages. L'urne ne comprenant que $N$ numéros distintcs, $T_n \leqslant N$.

Puisque'on a procédé à $n$ tirages, $T_n \leqslant n$.

Enfin, pout tout nombre $k \in [[1, \min(n, N)]]$, $T_n$ peut prendre la valeur $k$, par exemple dans la succession tirage $(1, 2, 3, \cdots, k-1, k, 1, 1, \cdots, 1)$ de $n$ tirages.

Donc les valeurs prises par $T_n$ sont $[[1, \min(n, N)]]$ .

b) L'avènement $(T_n = 1)$ correspond aux tirages $\underbrace{(k, k, \cdots, k)}_{n\ fois}$ où $k \in [[1, \min(n, N)]]$. Il y a $N$ manières de choisir $k$, entre 1 et $N$.

Il y a par ailleurs $\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n\ fois} = N^n$ successions de $n$ tirages avec remise possibles.

Donc $\boxed{P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}}$

• Si $n > N$, L'évènement $T_n = n$ est impossible (en $n$ tirages successifs, on ne peut pas avoir $n$ résultts distincts, puisque le nombre de boules distinctes est $N < n$). Dans ce cas, $\boxed{P(T_n = n) = 0}$

• Si $n \leqslant N$, L'évènement $T_n = n$ correspont aux possibiltés d'avoir $n$ tirages distincts.

Il y a $N$ possibilités pour le premier tirage, $N-1$ pour le second, $\cdots$ , et $N-n+1$ pour le $n^e$ tirage. Donc $\boxed{P(T_n = n) = \dfrac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-n+1)}{N^n} = \dfrac{N!}{(N-n)!\ N^n} = \dfrac{(N-1)!}{(N-n)!\ N^{n-1}}}$

c) L'évènement $(T_n = 2)$ est formé des successions de $n$ tirages ne comprenant que deux mêmes numeros $p$ et $q$, distincts, appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \cdots, N\}$ . Il y a $\dbinom{N}{2} = \dfrac{N(N-1)}{2}$ manières de choisir ces deux numeros. Le nombre de successions de $n$ tirages ne comportant que ces deux numeros est $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\ fois} = 2^n$. Son comptés dans ces $2^n$ tirages les successions $(p, p, \cdots, p)$ et $(q, q, \cdots, q)$. Restent donc $2^n - 2$ successions de $n$ tirages ayant exactement $p$ et $q$ comme résultats.

Finalement, $\boxed{P(T_n = 2) = \dfrac{\binom{N}{2} \times (2^n - 2)}{N^n} = \dfrac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}}$

2. a) Si $T_{n+1} = k$, alors $T_n = k$ ou $T_n = k-1$.

Par la formule des probabilités totales,
$$P(T_{n+1} = k) = P[(T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)] + P[(T_{n+1} = k) \cap (T_n = k-1)],$$
$$= P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k)] \times P(T_n = k) + P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k-1)] \times P(T_n = k-1)$$

Dans le cas où $T_n = k$, au $(n+1)^e$ tirage, on doit obtenir l'un des $k$ numéros déjà apparus lors des $n$ premiers tirages : cela donne $k$ possibilité : $P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k)] = \frac{k}{N}$

Dans le cas où $T_n = k-1$, au $(n+1)^e$ tirage, on doit obtenir l'un des $N-(k-1)$ numéros qui ne sont pas lors des $n$ premiers tirages : cela donne $N-(k-1)$ possibilité : $P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k-1)] = \frac{N-k+1}{N}$

En reportant ces deux probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\boxed{P(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}\times P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\times P(T_n=k-1)}$$

3. On considère le polynôme :

$$G_n(X)=\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)X^k$$

alors $G_n'(X)=\sum_{k=1}^{N}k.P(T_n=k)X^{k-1}$

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_{n+1}(X)=\sum_{k=1}^{N}P(T_{n+1}=k)X^k$ . En utilisant la question précédente,

$$G_{n+1}=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}\times P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\times P(T_n=k-1)\right]X^k$$
$$=\frac{X}{N}\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k+1}{N}\times P(T_n=k-1)X^k$$

Par le changement d'indice $h=k-1$ dans la deuxième somme,

$$G_{n+1}=\frac{X}{N}\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}+\sum_{h=0}^{N-1}\frac{N-h}{N}\times P(T_n=h)X^{h+1}$$

Dans la dernière somme, on peut faire varier $h$ jusqu'à la valeur $N$ puisque le coefficient $N-h$ est alors nul:

$$G_{n+1}=\frac{X}{N}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}}_{G_n'(X)}+\underbrace{\sum_{h=0}^{N}P(T_n=h)X^{h+1}}_{XG_n(X)}-\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{h=0}^{N}hP(T_n=h)X^{h+1}}_{X^2G_n'(X)}$$

ce qui donne bien l'égalité : $\boxed{G_{n+1}=\frac{1}{N}(X-X^2)G_n'+XG_n}$

b) L'égalité $G_n'(X)=\sum_{k=1}^{N}k.P(T_n=k)X^{k-1}$ donne au point 1 :

$$G_n'(1)=\sum_{k=1}^{N}k.P(T_n=k)=E(T_n)\qquad\boxed{E(T_n)=G_n'(1)}$$

• En dérivant l'égalité : $G_{n+1}=\frac{1}{N}(X-X^2)G_n'+XG_n$, on obtient :

$$G_{n+1}'=\frac{1}{N}(X-X^2)G_n''+\frac{1}{N}(1-2X)G_n'+XG_n'+G_n\ ,$$

et en prenant la valeur au point 1 :

$$G_{n+1}'(1)=-\frac{1}{N}G_n'(1)+G_n'(1)+G_n(1).$$

En injectant les égalités : $E(T_n)=G_n'(1)$ et $E(T_{n+1})=G_{n+1}'(1)$ , et en tenant compte de l'égalité $G_n(1)=\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)=1$, on obtient :

$$E(T_{n+1})=-\frac{1}{N}E(T_n)+E(T_n)+1.\qquad\text{Donc }\boxed{E(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1}$$

• La suite $(E(T_n))_{n\geqslant1}$ satisfait une relation de récurrence arithmético-géométrique.

On recherche $a\in\mathbb{R}$ tell que la suite $(v_n)=(E(T_n)-a)$ satisfasse une relation géométrique :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}=E(T_{n+1})-a=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1-a$

$=\left(1-\frac{1}{N}\right)(v_n+a)+1-a$

$=\left(1-\frac{1}{N}\right)v_n+\left(1-\frac{1}{N}\right)a+1-a$

$=\left(1-\frac{1}{N}\right)v_n+-\frac{1}{N}a+1$

Cette suite est géométrique, et de raison $\left(1-\frac{1}{N}\right)$ si $a=N$

En prenant $a=N$, on a donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}v_1=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(E(T_1)-N)$

Or $E(T_1)=P(T_1=1)=1$ car $\forall k\geqslant2$, l'évènement $(T_1=k)$ est impossible.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(1-N)+N = N\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{N}-1\right)+1\right)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right)}$$

c) $\dfrac{E(T_N)}{N} = 1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{N} = 1-e^{N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} e^{N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)} = e^{-1}$ , donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{E(T_N)}{N} = 1-e^{-1}}$

**Exercice 27 : ESCP 2007 - 3.17**

1. Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives $r$ et $b$, avec $0 < r < 1$ et $b = 1-r$. Un joueur effectue $n$ tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.

Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne 1 point au $k^{ieme}$ tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.

Soit $G$ la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des $n$ tirages.

a) Pour $k \in [[2,n]]$, on définit la variable aléatoire $X_k$ égale au gain du joueur pour le tirage de rang $k$.

Préciser la loi de $X_k$ et calculer la covariance $\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in [[2, n-1]]$.

b) Calculer l'espérance et la variance de $G$.

c) Peut-on choisir $r$ et $b$ pour que $G$ suive une loi binomiale ?

3. On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire $T_n$ par :

si $G \geqslant 1$, $T_n$ est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, $T_n$ vaut $n+1$.

a) Déterminer la loi de $T_n$.

b) Dans cette question, $r = b = 1/2$.

Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $1/2$.

En déduire une estimation de $E(T_n)$ quand $n$ est grand.

***SOLUTION*** : 1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables aléatoires qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $p$ et $q$.

On sait que si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$

• Réciproquement, supposons que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

Alors $X(\Omega) = X(\Omega) = \{0,1\} \implies (XY)(\Omega) = \{0,1\}$. Donc $\boxed{XY \text{ suit une loi de Bernoulli}}$.

On sait qu'une loi de Bernoulli a pour paramètre $E(XY) = P(XY=1)$

Or $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0 = E(XY) - E(X)E(Y) \implies E(XY) = E(X)E(Y) = p \times q$

Donc $P[(X=1)\cap(Y=1)] = P(XY=1) = E(XY) = p.q = P(X=1).P(Y=1)$. Les évènements $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants.

On sait qu'alors les évènements $(X=1)$ et $\overline{(Y=1)} = (Y=0)$ le sont, de même que les évènements $(X=0) = \overline{(X=1)}$ et $(Y=1)$ et les évènements $(X=0) = \overline{(X=1)}$ et $(Y=0) = \overline{(X=1)}$ .

On a fait le tour de tous les évènements $(X=k)$, $(Y=h)$ pour des lois de Bernoulli (seulement 4 cas à considérer).

Donc $\boxed{\text{les lois } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

2. a) Notons $R_k$ l'évènement : la $k^e$ boule tirée est rouge $(1 \leqslant k \leqslant n)$

et $B_k$ l'évènement : la $k^e$ boule tirée est blanche.

$X_k$ est égale au gain du joueur pour le tirage de rang $k$, à savoir $+1$ si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent et 0 sinon.

$X_k$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou 0 ; elle suit une loi de Bernoulli.

$X_k = 1$ si les tirages de rangs $k-1$ et $k$ sont l'un des deux types suivantes :

$(\cdots, R_{k-1}, B_k, \cdots)$ ou $(\cdots, B_{k-1}, R_k, \cdots)$. Ces deux cas qui s'excluent mutuellement ont pour probabilités respectives : $r \times b$ et $b \times r$.

Donc $P(X_k = 1) = r \times b + b \times r = 2b.r$ . Il en résulte que $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2b.r)}$

• Pour chacune des variables aléatoires $X_k$ et $X_{k+1}$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramères $b.r$, $E(X_k) = E(X_{k+1}) = 2b.r$

Or $\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_kX_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1})$

$X_k.X_{k+1}$, produit de deux variables suivant une loi de Bernoulli, suit encore une loi de Bernoulli, de paramètre $P(X_k.X_{k+1} = 1)$

$$P(X_k.X_{k+1} = 1) = P[(X_k = 1)\cap(X_{k+1} = 1)] = P[(\cdots, R_{k-1}, B_k, R_{k+1}\cdots)\cup(\cdots, B_{k-1}, R_k, B_{k+1}\cdots)]$$
$$= r.b.r + b.r.b = b.r\underbrace{(b+r)}_{=1} = b.r$$

donc $\boxed{\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_kX_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1}) = b.r - 4b^2.r^2}$

b) Par linéarité de l'espérance, $E(G) = E\left(\sum_{k=2}^{n} X_k\right) = \sum_{k=2}^{n} E(X_k) = (n-1)\times 2.b.r$

$\boxed{E(G) = 2(n-1)br}$

**Exercice 28 : Greffes de rosiers**

On greffe simultanément les $R$ rosiers, qui seront numérotés de 1 à $R$. On désigne par $X_k$ la variable aléatoire qui compte le nombre de greffes nécessaires à la prise du rosier $k$, $1 \leqslant k \leqslant R$, et par $X$ le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les $R$ rosiers. Les variables aléatoires $X_k$ sont indépendantes.

2-a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_k$ ?

2-b) Exprimer $X$ en fonction des $X_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$

2-c) Calculer l'espérance et la variance de $X$.

D'après le cours, puisque $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $E(X_k) = \frac{1}{p}$ et $V(X_k) = \frac{q}{p^2}$

3- On se propse de calculer la loi de $X$.

3-a) Déterminer l'ensemble $J$ des valeurs prises par $X$.

3-b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n$

Exprimer $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_R = x_R)$ en fonction de $p, q, n$ et $R$ .

3-c) On note $(E)$ l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n$ où les $x_i$ sont des entiers strictement positifs, et $\alpha(R, n)$ le nombre de $R-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R$ solutions de $(E)$.

A l'aide du résultat précédent, montrer que $P(X = n) = \alpha(R, n)p^Rq^{n-R}$

**SOLUTION :**

On greffe un rosier, et on contrôle une semaine plus tard si la greffe a pris. La probabilité qu'une greffe prenne est $p \in ]0, 1[$. Si la greffe n'a pas pris, on recommence, et ceci chaque semaine jusqu'à ce que la greffe prenne.

Ce schéma correspond à une épreuve de Bernoulli (succès si la greffe a pris, échec sinon) répétée jusqu'au premier succès. $G$ suit donc une loi géométrique de paramètre $p$ : $G \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ :

$G(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(G = k) = pq^{n-1}$

2-a) Le raisonnement fait à la question précédente pour un rosier quelconque vaut pour le $k^e$ rosier, donc $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)}$

2-b) $X$ compte le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les $R$ rosiers :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r = \sum_{k=1}^{R} X_k$$

2-c) D'après le cours, puisque $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $E(X_k) = \frac{1}{p}$ et $V(X_k) = \frac{q}{p^2}$

Par linéarité de l'espérance, $E(X) = \sum_{k=1}^{R} E(X_k) = R \times \frac{1}{p} = \frac{R}{p}$ $\qquad \boxed{E(X) = \frac{R}{p}}$

Puisque les variables $X_k$, $1 \leqslant k \leqslant R$ sont indépendantes,

$$V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{R} X_k\right) = \sum_{k=1}^{R} V(X_k) = R \times \frac{q}{p^2} = \frac{R\,q}{p^2} \qquad \boxed{V(X) = \frac{R\,q}{p^2}}$$

3-a) Une greffe, au minimum est nécessaire pour chacun des rosiers, donc chaque $X_k$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

$X$ a donc pour valeur minimale $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{R\,fois} = R$

Donc $J = X(\Omega) = \{R, R+1, R+2, \cdots\cdots\} = \mathbb{N} - \{0, 1, \cdots, R-1\}$

3-b) $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R$ vérifie $x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n$

$$\begin{aligned}P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_R = x_R) &= P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_R = x_R))\\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_R = x_R) \quad \text{(par indépendance des variables } X_1, X_2, \cdots, X_R)\\ &= \prod_{k=1}^{R} P(X_k = x_k) = \prod_{k=1}^{R} p\, q^{x_k - 1} = p^R q^{x_1+x_2+\cdots+x_R-R} \quad (p \text{ figure } R \text{ fois dans le produit})\\ &= p^R q^{n-R}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } x_1 + x_2 + \cdots + x_R = n, \qquad P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_R = x_R) = p^R q^{n-R}}$$

**Exercice 29 : Couple de variables ; lois de Poisson**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires positives ou nulles vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où $\alpha$ et $\lambda$ sont des constantes réelles vérifiant : $\quad 0 < \alpha < 1 \quad$ et $\quad \lambda > 0$

1- Quelle est la loi de $X$ ?

2- Quelle est la loi de $Y$ ?

3- Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

4- On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de $Z$ ?

5- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = j)|Z = n)$

6- Que peut on en déduire concernnat les variables $Y$ et $Z$ ?

***SOLUTION*** **:** 1- D'après la défintion de la loi conjointe $(X, Y)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $i \in N$, $(X = i) = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} (X = i, Y = j)$ car les évènements $(Y)j)_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'évènements.

donc $P(X = i) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum\limits_{j=0}^{i} P(X = i, Y = j)$ (car $j > i \Longrightarrow P(X = i, Y = j) = 0$)

$$\begin{aligned}P(X = i) &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)!} = \lambda^i e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i} \frac{\alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)!}\\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda} (1-\alpha)^i}{i\,!} \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j \frac{i\,!}{j\,!\,(i-j)!}\\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda} (1-\alpha)^i}{i\,!} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1\right)^i \quad \left(\text{formule du binôme puisque } \frac{i\,!}{j\,!\,(i-j)!} = \binom{i}{j}\right)\end{aligned}$$

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda} (1-\alpha)^i}{i\,!} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\,!} \qquad \boxed{\text{Donc } X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)}$$

2- D'après la définition de la loi conjointe $(X, Y)$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $j \in N$, $(Y = j) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} (X = i, Y = j)$

donc $P(Y = j) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum\limits_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j)$ (car $i < j \Longrightarrow P(X = i, Y = j) = 0$)

$$\begin{aligned}P(Y = j) &= \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j}{j\,!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i (1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\alpha^j}{j\,!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k} (1-\alpha)^k}{k!} \quad \text{(par le changement d'indice } i = j + k)\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j\,!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j\,!}e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\lambda\alpha}\alpha^j\lambda^j}{j\,!}$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-\lambda\alpha}(\lambda\alpha)^j}{j\,!} \qquad \boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda\alpha)}$$

3- Si $i<j$, $P(X=i, Y=j)=0$, mais $P(X=i)P(Y=j) = \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\,!} \times \dfrac{e^{-\lambda\alpha}(\lambda\alpha)^j}{j\,!} \neq 0$

$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

4- $Z = X - Y$ . Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{Z}}$

Pour que $Z$ prenne une valeur négative, $-k \in \mathbb{Z}_-^*$, il faut que $X$ prenne une valeur $i \in \mathbb{N}$, et $Y$ une valeur $j \in \mathbb{N}$ telles que $-k = i - j < 0$, ce qui entraîne que $i<j$. Mais alors $P(X=i, Y=j) = 0$ par hypothèse.

Donc $\forall k' \in \mathbb{Z}_-^*, P(Z=k')=0$.

Etudions maintenant le cas où $k \in \mathbb{N}$.

$P(Z=k) = P(X=k, Y=0) + P(X=k+1, Y=1) + P(X=k+2, Y=2) + \cdots = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} P(X = j+k, Y=j)$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+j}e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j\,!\,k!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}(1-\alpha)^k}{k\,!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\alpha^j}{j\,!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}(1-\alpha)^k}{k\,!}e^{\lambda\alpha}$$

$$P(Z=k) = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k}{k\,!} \qquad \text{Donc } \boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda(1-\alpha))}$$

5- $N \in \mathbb{N}$. $P(Y=j|Z=n) = \dfrac{P((Y=j)\cap(Z=n))}{P(Z=n)}$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $(Y(\omega)=j)$ et $(Z(\omega)=n) \iff Y(\omega)=j$ et $X(\omega)=n+j$ (puisque $X = Y+Z$)

d'où : $P(Y=j, Z=n) = P(Y=j, X=n+j) = \dfrac{\lambda^{n+j}e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^n}{j\,!\,n!}$

et puisque $P(Z=n) = \dfrac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^n}{n\,!}$ (question 4)

$P(Y=j|Z=n) = \dfrac{P((Y=j)\cap(Z=n))}{P(Z=n)} = \dfrac{\lambda^{n+j}e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^n}{j\,!\,n!} \times \dfrac{n\,!}{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^n} = e^{-\lambda\alpha}\dfrac{(\lambda\alpha)^j}{j\,!}$

$\boxed{P(Y=j|Z=n) = P(Y=j)}$

6- $\boxed{\text{On en déduit que les variables } Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes.}}$

**Exercice 30 : Loi de Poisson**

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre $N$ variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson. La moyenne journalière des visiteurs est de 4000.

1- Quelle est la loi de Poisson suivie par la variable aléatoire $N$ ?

2- Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur choisit une entrée de manière aléatoire, et sans tenir compte du choix des autres visiteurs.

$X$ désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n°1.

2- a) Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?

2- b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $X$ sachant que $N=k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2- c) $n$ est un entier naturel. Montrer que $P(X=n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} P(X=n|N=k)P(N=k)$

En déduire que $X$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

3- Un jeu de lancer de balles consiste à lancer une balle dans un trou en s'éloignant de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :

- Le premier lancer est réussi de façon certaine,
- Le second lancer est réussi une fois sur deux,
- Lorsque les $n-1$ premier lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^e$ lancer est de $\frac{1}{n}$.
- Le jeu s'arrête au premier échec.

si $i$ est un entier naturel non nul, $S_i$ désigne l'évènement "le $i^e$ lancer est réussi".

$Z$ est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.

3- a) Quelles sont les valeurs prises par $Z$ ?

3- b) $n$ étant un entier naturel non nul donné, exprimer l'évènement $(Z=n)$ en fonction des évènements $S_i$ ou de leurs contraires.

En déduire que $P(Z=n)=\dfrac{n}{(n+1)!}$

3- c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(Z=n)=1$

3- d) Calculer l'espérance de $Z$.

3- e) Calculer la variance de $Z$.

***SOLUTION* :**

1- On sait que pour une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, alors $E(N)=\lambda$. Puisque $E(N)=4000$, alors $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{P}(4000)}$ $\quad(\lambda=4000)$

2- a) $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

2- b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Evaluons $P(X=j|N=k)$. On sait que $k$ visiteurs se sont présentés au parc d'attraction.

Numérotons les $v_1, v_2, \cdots, v_k$. Chaque visiteur suit une épreuve de Bernoulli, pour laquelle accéder au parc par la première entrée sera considéré comme un succès, et accéder par l'une des 3 autres entrées un échec. L'accès à l'une des portes étant aléatoire, $P(succes)=\frac{1}{4}$ et $P(echec)=\frac{3}{4}$. La variable $X$ sachant que $N=k$ compte le nombre de succès lors de la répétition $k$ fois de cette épreuve de Bernoulli, c'est à dire suit une loi binomiale de paramètres $(k,\frac{1}{4})$. $\boxed{(X|N=k)\hookrightarrow \mathscr{B}(k,\frac{1}{4})}$

$$\forall j\in[[0,k]], P(X=j|N=k)=\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{k-j}$$

2- c) Pour que $n$ visiteurs entrent par la première porte $(X=n)$, il faut déjà que $n$ visiteurs se présentent à l'entrée du parc, c'est à dire que $N\geqslant n$.

$$\begin{aligned}(X=n)&=[(N=n)\cap(X=n)]\cup[(N=n+1)\cap(X=n)]\cup[(N=n+2)\cap(X=n)]\cup\cdots\\&=\bigcup_{k\geqslant n}[(N=k)\cap(X=n)]\end{aligned}$$

Ces évènements étant deux à deux incompatibles, puisqu'on ne peut avoir simultanément $N=k$ et $N=k'$ lorsque $k\neq k'$,

Donc, $\boxed{P(X=n)=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}P[(N=k)\cap(X=n)]=\sum_{k=n}^{\infty}P(X=n|N=k)P(N=k)}$

On vient de voir à la question 2-b) que : $\forall n\in[[0,k]], P(X=n|N=k)=\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$

donc $P(X=n)=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}P(X=n|N=k)P(N=k)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}P(N=k)$

Puisque $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=4000$, $\quad P(N=k)=e^{-4000}\dfrac{(4000)^k}{k!}$

$$\begin{aligned}\text{donc } P(X=n)&=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}e^{-4000}\frac{(4000)^k}{k!}\\&=e^{-4000}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{n!\,(k-n)!}\times\frac{3^k}{3^n}\times\frac{(4000)^k}{4^k\times k!}\\&=\frac{e^{-4000}}{n!\,3^n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}\times 3000^k\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-4000}}{n!\,3^n}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\times 3000^{n+h} \qquad \text{(par le changement d'indice } h=k-n\text{)}$$
$$= \frac{e^{-4000}\,3000^n}{n!\,3^n}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\times 3000^{h} = \frac{e^{-4000}\,1000^n}{n!}e^{3000} = \frac{e^{-1000}\,1000^n}{n!}$$
$P(X=n) = \dfrac{e^{-1000}\,1000^n}{n!}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}(1000)}$

3- a) Le jeu comporte au minimum un lancer, le premier, qui est réussi, et n'importe quelle suite de $n$ lancers réussis suivie d'un écher au $(n+1)^e$ lancer est possible. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

3- b) L'évènement $(Z=n)$ signifie que les $n$ premiers lancers sont réussis, et que le $(n+1)^e$ lancer est un échec.

$\boxed{(Z=n) = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}}$

**Remarque :** Puisque $S_n \subset S_{n-1} \subset \cdots \subset S_1$ (le jeu s'arrête au premier échec), on peut aussi écrire :

$\boxed{(Z=n) = S_n \cap \overline{S_{n+1}}}$

$$P(Z=n) = P(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n)P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n)$$
$$= P(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n)P(S_n|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1})P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1})$$
$$= P(\overline{S_{n+1}}|\underbrace{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n}_{=S_n})P(S_n|\underbrace{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1}}_{=S_{n-1}})P(S_{n-1}|\underbrace{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-2}}_{=S_{n-2}})P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-2})$$

$P(Z=n) = P(\overline{S_{n+1}}|S_n)P(S_n|S_{n-1})P(S_{n-1}|S_{n-2})\cdots P(S_2|S_1)P(S_1)$ (formule des probabilités composées)

$$= \frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\cdots\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{n}{(n+1)!} \qquad \boxed{P(Z=n) = \frac{n}{(n+1)!}}$$

3- c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(Z=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = 1$

3- d) L'espérance de $Z$ est :

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty}nP(Z=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n-(n+1)+1}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-(e-1)+e-2 = e-1 \qquad \boxed{E(Z) = e-1}$$

3- e) La variance de $Z$ est :

$$E(Z^2) = \sum_{n=1}^{\infty}n^2P(Z=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n(n-1)+(n+1)-1}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = e+e-(e-1) = e+1$$
$$V(Z) = E(Z^2)-(E(Z))^2 = e+1-(e-1)^2 = -e^2+3e = e(3-e) \qquad \boxed{V(Z) = e(3-e)}$$

**Exercice 31: Loi de Poisson:**

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage $A$ et $B$ qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que $A$ produit 60% des objets et $B$ produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine $A$ soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine $B$ soit défectueux est $0,2$

1- On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine $A$" .

2- On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.

a) Rappeler la loi de $Y$ ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de $Y$.

b) Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$ (On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$).

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

**SOLUTION:** 1- Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$

Soit $D$ l'évènement "l'objet est défectueux"

$P(D|A) = 0,1$ et $P(D|B) = 0,2$, et comme $(A, B)$ est un système complet d'évènements,

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = 0,1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 = 0,14$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'évènement "l'objet provient de la chaîne $A$ est $P(A|D)$.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,1 \times 0,6}{0,14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

2-a) $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(20)$ $\quad Y(\Omega) = \mathbb{N},\quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\quad E(Y) = V(Y) = \lambda.$

2-b) La variable aléatoire $Y$ est le nombre d'objets produits en une heure par $A$, et la variable aléatoire $X$ représente le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Si $k > n,\ P(X = k|Y = n) = 0$ car le nombre d'objets défecteueux produits par $A$ ne peut excéder le nombre d'objets qu'elle produit.

Quand $Y = n$, la chaîne $A$ produit $n$ objets, qui sont défectueux indépendemment les uns des autres avec une probabilité égale à $0,1$. $X|Y = n$ compte le nombre de "succès" (objet défectueux dans une suite de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètre $0,1$)

Donc $X|Y = n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = 0,1$.

donc $\forall k \in [[0, n]],\ P(X = k|Y = n) = \dbinom{n}{k}(0,1)^k(0,9)^{n-k}$

2-c) Puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ ($Y$ suit une loi de Poisson), les évènements $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'évènements, donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = k|Y = n)P(Y = n)$$

On a vu que $P(X = k|Y = n) = 0$ si $k > n$, donc $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} P(X = k|Y = n)P(Y = n)$

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}(0,1)^k(0,9)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}(0,1)^k(0,9)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{(par le changement d'indice } m = n - k\text{)}\\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(m + k)!}{k!\, m!}(0,1)^k(0,9)^m e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m+k}}{(m + k)!}\\
&= \frac{(0,1)^k\ e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{m!}(0,9)^m\lambda^{m+k}\\
&= \frac{(0,1)^k\ e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(0,9 \times \lambda)^m}{m!}\\
&= \frac{(0,1)^k\ e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{0,9\times\lambda} = \frac{(0,1)^k\ e^{-20}20^k}{k!}e^{18} \qquad \text{(car } \lambda = 20\text{)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \dfrac{e^{-2}\, 2^k}{k!}}$, ce qui montre que $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}(2)}$

## IV - Inégalités (Markov, Bienaymé - Tchebychev)

### Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}$. On extrait $n$ fois avec remise une boule d'une urne qui contient 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit $X_n$ la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des $n$ tirages. On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

1- Donner la loi de $X$. En déduire l'espérance et la variance de $X_n$ puis de $F_n$.

2- On suppose dans cette question que $n = 10000$. Donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in ]0.22, 0.26[\}$ .

3- Donner une estimation du nombre minimal $n$ de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in ]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 99% .

***Solution*** **:** 1- Lors de l'extraction d'une boule de l'urne, si on appelle succès l'obtention d'une boule verte, la probabilité d'un succès lors d'un tirage est $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (deux possibiltés de tirer une boule verte parmi les 8 boules présentes).

Ici on procède à $n$ tirages, c'est à dire à $n$ épreuves de Bernoulli. La loi qui compte le nombre de succès lors de la répéttion $n$ fois d'un épreuve de Bernulli est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$

On sait qu'alors $\boxed{E(X_n) = np = \frac{n}{4}}$ et $\boxed{V(X_n) = np(1-p) = \frac{3n}{16}}$.

Par linéarité de l'espérance et quadraticité de la variance,

$\boxed{E(F_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{4} = 0.25}$ et $\boxed{V(F_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{3}{16n}}$.

2- $P(F_n \in ]0.22, 0.26[) = P(F_n - E(F_n) \in ]-0.03, 0.01[) > P(|F_n - E(F_n)| < 0.01)$.

Or d'après le théorème de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

En prenant $X = F_n$ et $\varepsilon = 0,01$, $P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0.01) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{(0,0.1)^2} = \dfrac{3 \times 10^4}{16n} = \dfrac{3}{16}$

(puisque $n = 10\,000 = 10^4$)

Donc, en prenant l'évènement contraire,

$$P(|F_n - E(F_n)| < 0.01) \geqslant 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Donc $P(F_n \in ]0.22, 0.26[) > P(|F_n - E(F_n)| < 0.01) \geqslant \frac{13}{16}$

3- Pour $n$ quelconque, le calcul précédent a montré que

$$P(F_n \in ]0.22, 0.26[) > P(|F_n - E(F_n)| < 0.01) \geqslant 1 - \frac{3 \times 10^4}{16n}$$

Pour avoir $P(F_n \in ]0.22, 0.26[) > 99\%$, il suffit que $1 - \frac{3\times 10^4}{16n} > \frac{99}{100}$, soit que $n > 187500$

### Exercice 33 : sondages :

Une société de sondages est chargée d'étudier les intentions de vote d'une population pour un referendum à venir.

Au moment de l'étude, une partie $p \in [0,1]$ de la population ayant l'intention d'aller voter déclare qu'elle votera "oui", la partie restante (proportion $(1-p)$ des votants) votera "non".

On enquète sur un échantillon de $n$ électeurs pris au hasard parmi les votants.

Chacun d'entre eux répondra par "oui" ou "non" sur son intention de vote, et on note $X_k$ la variable représentant la réponse du $k^e$ individu sondé à la question posée ($X_k = 1$ en cas de vote "oui", $X_k = 0$ en cas de vote "non", $k \in [[1,n]]$).

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, indépendantes les unes des autres. Le but est d'obtenir une approximation du paramètre $p$.

Cette approximation sera donnée par la moyenne des réponses, à savoir $Y = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^k$.

a) Calculer espérance et variance de chacune des variables $X_k$, et de $Y$ .

b) Combien de personnes faut il sonder pour être sûr à 95 % que $p$ est approchée par $Y$ à $k\%$ ?

Etudier les cas particuliers où $k = 5$ et $k = 1$.

**SOLUTION :** a) La loi de Bernoulli $X_k$ est rappelée par le tableau suivant :

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X_k = x)$ | $1-p$ | $p$ |

• $m = E(X_k) = 0 \times P(X_k = 0) + 1 \times P(X_k = 1) = 0 + p = p.$ $\boxed{\forall k,\ E(X_k) = p}$

• $E(X_k^2) = 0^2 \times P(X_k = 0) + 1^2 \times P(X_k = 1) = 0 + p = p$

$V(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$ $\boxed{\forall k,\ V(X_k) = p(1-p)}$

• $E(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X^k) = \dfrac{1}{n} \times n.p = p$ (linéarité de l'espérance)

• $V(Y) = V\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ (variance d'une fonction affine d'une variable aléatoire)

$= \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ (variance d'une somme de variables indépendantes)

$V(Y) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(1-p) = \dfrac{1}{n^2} \times n.p.(1-p) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $Y_n$ permet d'écrire :

$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y - E(Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(Y)}{\varepsilon^2} = \dfrac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2}$

Les variations de la fonction $h : t \mapsto t.(1-t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ montrent que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ :

| $t$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t) = 1 - 2t$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $h(t) = t - t^2$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | 0 |

donc $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{4\,n\,\varepsilon^2}}$

Pour que l'on soit sûr à 95 % que $Y = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^k$ soit une valeur approchée de $p$ à $k$ % près, il suffit que $P(|Y - p| < \frac{k}{100})$ soit supérieur à 95 %, c'est à dire que, en passant à l'évènement contraire, que $P(|Y - p| \geqslant \frac{k}{100}) \leqslant 5\%$.

Or $P(|Y - p| \geqslant \frac{1}{100}) \leqslant \dfrac{10\,000}{4\,n\,k^2} = \dfrac{2500}{n\,k^2}$ (en prenant $\varepsilon = \frac{k}{100}$)

donc il suffit que $\dfrac{2500}{n\,k^2} \leqslant \dfrac{5}{100}$, soit $n \geqslant \dfrac{50\,000}{k^2}$

Si on veut obtenir $p$ à 5 % près ($k = 5$), il suffit de prendre $n = 2000$

Si on veut obtenir $p$ à 1 % près ($k = 1$), il suffit de prendre $n = 50\,000$

**Exercice 34 : Acuité de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

Une observation sur plusieurs mois a montré que le nombre d'avions se posant en une heure dans un aéroport pouvait être modélisé par une variable aléatoire $X$ d'espérance $E(X) = 16$ et de variance $V(X) = 16$

1- A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de $P(10 < X < 22)$.

2- Comparer le résultat obtenu en supposant que $X$ suive une loi de Poisson.

**SOLUTION :** 1- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$,

Or, $P(10 < X < 22) = P(11 \leqslant X \leqslant 21) = P(|X - 16| \leqslant 5) = 1 - P(|X - 16| \geqslant 6)$

Pour $\alpha = 6$, $P(|X - 16| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{V(X)}{\alpha^2} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

donc $P(10 < X < 22) = 1 - P(|X - 16| \geqslant 6) \geqslant 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \simeq 0,5555555$

2- Si $X$ suit une loi de Poisson, c'est nécessairement $\mathscr{P}(16)$ puisque $E(X) = V(X) = 16$

L'évènement $(10 < X < 22)$ est $\bigcup_{10<k<22} (X = k)$, et ces évènements étant deux à deux incompatibles, $P(10 < X < 22) = \sum_{k=11}^{21} e^{-16} \frac{16^k}{k\,!} \simeq 0,833377$

On remarque que dans le cas d'une loi normale, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$P(10 < X < 22) \geqslant 0,5555555$, résultat qui est bien médiocre en comparaison avec l'égalité : $P(10 < X < 22) \simeq 0,833377$

$$FIN \qquad exos$$