Fonctions de plusieurs variables

1 Différentielles :

1.1 Différentielle de l'inversion d'une matrice:

$\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme uniforme, $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty = \max\limits_{i=1..n}(|x_i|)$, on définit une norme subordonnée dans $M_n(\mathbb{R})$ par : $\quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}), |||A||| = \sup\limits_{\substack{X\in\mathbb{R}^n \\ \|X\|\leq 1}} \|A.X\|$

On admet qu'on obtient bien ainsi une norme et que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ |||A.B||| \leq |||A|||.|||B|||$

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|||A||| < 1$. Montrer que la matrice $I_n + A$ est inversible et donner une expression de son inverse sous forme de série.

2- Montrer que la boule ouverte $B(I_n, 1)$ est incluse dans $GL_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ étant donnée, déterminer un réel $h > 0$ tel que la boule ouverte $B(A, h) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Qu'en déduit on pour le sous ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$?

Donner une autre méthode pour justifier ce résultat.

3- On considère l'application G, définie sur $GL_n(\mathbb{R})$, qui à une matrice A fait correspondre son inverse A^{-1}. Montrer que G est différentiable et calculer sa différentielle dG_A.

(On pourra commencer par faire l'étude en $A = I_n$.) (réponse $dG_A(H) = -A^{-1}.H.A^{-1}$)

SOLUTION :

1- En s'inspirant du résultat sur les séries entières $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$, on peut penser que la somme de la série matricielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k A^k$, si elle converge, serait une inverse de la matrice $I_n + A$.

• Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|||A||| < 1$. Puisque $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ |||A.B||| \leq |||A|||.|||B|||$, il s'ensuit par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ |||(-1)^k A^k||| = |||A^k||| \leq |||A|||^k$

Or la série géométrique $\sum |||A|||^k$ converge puisque $|||A||| < 1$. Par majoration, il en est de même de la série $\sum |||(-1)^k A^k|||$. La série matricielle $\sum(-1)^k A^k$ est alors absolument convergente dans l'espace vectoriel normé $(M_n(\mathbb{R}), |||\quad|||)$ puisque celui-ci est de dimension finie.

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(I_n + A).\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k\right) = (I_n + A)(I_n - A + A^2 - A^3 + ... + (-1)^p A^p) = I_n + (-1)^p A^{p+1}$

Or $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k A^k$ d'après l'étude de la convergence de la série

et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} A^{p+1} = 0$ puisque $|||A^{p+1}||| \leq \underbrace{|||A|||}_{<1}{}^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Par continuité du produit matriciel, en passant à la limite qd $p \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$(I_n + A).\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k A^k\right) = I_n \text{ , ce qui montre que :}$$

$$\boxed{I_n + A \text{ est inversible et que } (I_n + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k A^k}$$

2- Soit $M \in B(I_n, 1)$.

En posant $A = M - I_n$, on a $M = I_n + A$ avec $|||A||| = |||M - I_n||| < 1$ puisque $M \in B(I_n, 1)$.

Donc M est inversible d'après la question précédente, ce qui montre que $B(I_n, 1) \subset GL_n(\mathbb{R})$

• Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $h = \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$ et vérifions que $B(A, h) \subset GL_n(\mathbb{R})$:

$\forall M \in B(A, h),\ \exists H \in M_n(\mathbb{R}),\ M = A + H$ avec $|||H||| < h$

$M = A + H = A.(I_n + A^{-1}H)$

$$|||A^{-1}.H||| \leq |||A^{-1}|||.|||H||| < |||A^{-1}|||.h = |||A^{-1}|||.\frac{1}{|||A^{-1}|||} = 1$$

puisque $|||A^{-1}.H||| < 1$, la matrice $I_n + A^{-1}H$ est inversible et le produit $M = A.(I_n + A^{-1}H)$ l'est aussi ($A \in GL_n(\mathbb{R})$). Donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$

On a ainsi montré que $B(A, h) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

• Tout élément $A \in GL_n(\mathbb{R})$ est centre d'une boule ouverte $B(A, h)$ incluse dans $GL_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Donc } GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } M_n(\mathbb{R}).}$$

• **Autre argument :**

La fonction $M \mapsto \det(M)$ est une application continue (car s'exprime polynomialement en fonction des coefficients de la matrice M). $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par cette application : $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

$\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Or l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

3- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Pour tout H telle que $|||H||| < \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$, $G(A + H) = (A + H)^{-1} = (A(I_n + A^{-1}H))^{-1}$

$$G(A + H) = (I_n + A^{-1}H)^{-1}.A^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(A^{-1}.H)^k\right).A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(A^{-1}.H)^k.A^{-1}$$

$$G(A + H) = A^{-1} - A^{-1}.H.A^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k(A^{-1}.H)^k.A^{-1}$$

$$G(A + H) = G(A) + L(H) + \alpha(H)$$

en posant $L(H) = -A^{-1}.H.A^{-1}$ et $\alpha(H) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k(A^{-1}.H)^k.A^{-1}$

$$|||\alpha(H)||| = \left|\left|\left|\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k(A^{-1}.H)^k.A^{-1}\right|\right|\right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}|||(A^{-1}.H)^k.A^{-1}||| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}|||A^{-1}|||^{k+1}.|||H|||^k$$

$$|||\alpha(H)||| \leq |||H|||.|||A^{-1}|||^3.\underbrace{|||H|||\overbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(|||A^{-1}|||.|||H|||)^k}^{borne\ qd\ H\to 0}}_{\to 0\ qd\ H\to 0}$$

On a ainsi montré que sur un voisinage de 0, $G(A + H) = G(A) + L(H) + |||H|||\beta(H)$ avec $\lim\limits_{H\to 0}|||\beta(H)||| = 0$

L'application linéaire tangente à G en A est donc $L : H \mapsto -A^{-1}.H.A^{-1}$

$$\boxed{\forall H \in M_n(\mathbb{R}),\ dG_A(H) = -A^{-1}.H.A^{-1}}$$

2 Dérivation partielle de fonctions composées:

2.1 Dérivation de $x \longrightarrow \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt$:

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, α et β deux fonctions de I dans J , de classe C^1 et $g\ :\ I \times J\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$, de classe C^1.

On définit une fonction f par la relation : $\quad \forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt$

Montrer que f est de classe C^1 sut I et calculer $f'(x)$.

Solution :

Soit $F\ :\ \left\{ \begin{array}{ccc} J \times J \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b,x) & \mapsto & \displaystyle\int_a^b g(x,t)dt \end{array} \right.$

- $\forall (a,b,x) \in J \times J \times I,\ \dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b,x) = g(x,b)$ (intégrale fonction de la borne supérieure)
- $\forall (a,b,x) \in J \times J \times I,\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b,x) = -g(x,a)$ (intégrale fonction de la borne inférieure)
- Soit $(a,b) \in J \times J$.

- pour tout $t \in J$, la fonction $x\ \mapsto\ g(x,t)$ est de classe C^1 sur I,

- pour tout $x \in I$, la fonction $t\ \mapsto\ g(x,t)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[a,b]$,

(car g est de classe C^1 sur $I \times J$)

- pour tout $x \in I$, la fonction $t\ \mapsto\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[a,b]$,

(même raison)

- pour tout segment $J' \subset J$, la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est bornée sur $J' \times [a,b]$, comme fonction continue sur un compact :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,t) \in J' \times [a,b], \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq M \text{ où la constante } M \text{ est intégrable sur } [a,b]$$

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$, on en conclut que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^b g(x,t)dt$ est dérivable sur J' et a pour dérivée $x \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$. J' étant un segment quelconque de J, cette fonction est dérivable en tout point de J.

Finalement, la fonction F admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point et

$$\forall (a,b,x) \in J \times J \times I,\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$$

- $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt = F(\alpha(x),\beta(x),x)$

La fonction F admettant trois dérivées partielles continues, est de classe C^1 sur $J \times J \times I$. Les fonctions α, β et $x \mapsto x$ étant elles aussi de classe C^1, par application du téhorème de dérivation de fonctions composées, f est C^1 sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{\partial F}{\partial a}(\alpha(x),\beta(x),x)\ \alpha'(x) + \frac{\partial F}{\partial b}(\alpha(x),\beta(x),x)\ \beta'(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(x),\beta(x),x).1$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) = -g(x,\alpha(x))\ \alpha'(x) + g(x,\beta(x))\ \beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt}$$

2.2 Fonctions homogènes :

Une application $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ est dite homogène d'ordre $p \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p f(x,y,z)$$

a) montrer que si f est homogène de degré p, alors ses dérivées partielles sont également homogènes, d'un ordre qu'on précisera.

b) montrer qu'alors : $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = pf$

c) étudier la réciproque.

SOLUTION :

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, quelconque, fixé. Dérivons la fonction $(x,y,z) \mapsto f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$$

donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{p-1} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est homogène, de degré $p-1$.

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, quelconque, fixé. Dérivons la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = p\lambda^{p-1} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

En prenant ensuite $\lambda = 1$, on obtient :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = pf(x,y,z)$$

c) Réciproquement, supposons que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = pf(x,y,z)$$

alors pour tout $\lambda > 0$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\lambda x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda z\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = pf(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Fixons $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et considérons la fonction $g : \lambda \mapsto f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$$\forall \lambda > 0,\ g'(\lambda) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{p}{\lambda} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\forall \lambda > 0,\ g'(\lambda) = \frac{p}{\lambda} g(\lambda)$$

La fonction g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle : $\lambda y'(\lambda) - py(\lambda) = 0$

donc $g(\lambda) = Ae^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{p}{\lambda} d\lambda} = Ae^{p\ln(\lambda) - \ln(\lambda_0)} = B(x,y,z)\lambda^p$

(les constantes d'intégration A et B dépendent à priori de la valeur (x,y,z) fixée au départ)

Ainsi, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = B\lambda^p$

en prenant $\lambda = 1$, on obtient $B = f(x,y,z)$, et $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p f(x,y,z)$, ce qui montre que la fonction f est homogène de degré p.

2.3 Fonction harmonique :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & P(x+iy) \end{array} \right.$

Montrer que $\Delta(f) = 0$

SOLUTION :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = P(x+iy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P'(x+iy) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = P''(x+iy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\,P'(x+iy) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -P''(x+iy)$$

donc $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = P''(x+iy) - P''(x+iy) = 0$

2.4 Angles et inversion :

Le plan affine euclidien P_2 et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $C(O,R)$ un cercle de P_2. On appelle **inversion relative au cercle** C l'application φ qui, à tout point $M \in P_2^*$, plan privé du point O, associe l'unique point M_1 de la droite (OM) qui vérifie l'égalité : $\overline{OM}.\overline{OM_1} = R^2$, ce qui équivaut aussi à la relation :

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

1- Calculer les coordonnées x_1 et y_1 de M_1 en fonction de $M(x,y)$. Déterminer la matrice jacobienne de φ.

Montrer qu'elle est de la forme $J_{\varphi(x,y)} = \lambda Q$ où λ est un scalaire dépendant de x et y et Q une matrice orthogonale qu'on déterminera.

2- Soient C_1 et C_2 deux courbes paramétrées de classe C^1 se coupant en un point M, où elles ont pour vecteurs tangents respectifs τ_1 et τ_2 non nuls.

Déterminer l'angle des vecteurs τ_1' et τ_2' tangents aux images respectives C_1' et C_2' de C_1 et C_2 par l'inversion φ. Conclure.

SOLUTION :

1- $x_1 = \dfrac{R^2x}{x^2+y^2}$ et $y_1 = \dfrac{R^2y}{x^2+y^2}$. Cela résulte immédiatement de la relation : $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'inversion φ relative au cercle $C(O,R)$ transforme $M(x,y)$ en un point $M1(x1,y1)$ tel que : $x_1 = \varphi_1(x,y) = \dfrac{R^2x}{x^2+y^2}$ et $y_1 = \varphi_1(x,y) = \dfrac{R^2y}{x^2+y^2}$

La matrice jacobienne de φ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$J_{\varphi(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-2R^2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{-2R^2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{R^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{R^2}{x^2+y^2}Q$$

où Q est la matrice orthogonale $\begin{pmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ (on vérifie que ses colonnes forment un système orthonormal de $\mathbb{R}^2$)

De plus, $Q^{-1} = {}^tQ = Q$, Q est à la fois orthogonale et symétrique, c'est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Les vecteurs invariants de cette symétrie vérifient

$$(Q - I_2).\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{-2x^2}{x^2+y^2} & \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} & \dfrac{-2y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x^2X - 2xyY = 0 \\ -2xyX - 2y^2Y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad xX + yY = 0$$

Q est donc la matrice d'une réflexion, dont l'axe, ensemble des vecteurs invariants, a pour équation $xX + yY = 0$ ·

2- Soit C_1 une courbe de paramétrisation $t \mapsto M(t) = O + f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$;

Le vecteur tangent à C_1 en $M(t)$ est $\overrightarrow{\tau_1} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = f'(t)\overrightarrow{i} + g'(t)\overrightarrow{j}$.

L'image C_1' de C_1 par φ a pour paramétrisation :

$$t \mapsto M_1(t) = O + \varphi\left(f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}\right) = O + \varphi_1(f(t),g(t))\overrightarrow{i} + \varphi_2(f(t),g(t))\overrightarrow{j})$$

La tangente à C_1' en $M_1(t)$ est dirigée par $\overrightarrow{\tau_1'} = \dfrac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}(t)$

$$\overrightarrow{\tau_1'} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(f(t),g(t)).f'(t) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(f(t),g(t)).g'(t)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(f(t),g(t)).f'(t) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(f(t),g(t)).g'(t)\right)\overrightarrow{j}$$

$\overrightarrow{\tau_1'}$ a pour vecteur colonne dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $T_1 = J_{\varphi(x,y)}.\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = \lambda Q(x,y).\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\tau_1'}$ est donc colinéaire à $\sigma(\overrightarrow{\tau_1})$ où σ est la réflexion de matrice Q dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

• Si deux courbes C_1 et C_2 se coupent en un point M où elles ont pour vecteurs tangents respectifs $\overrightarrow{\tau_1}$ et $\overrightarrow{\tau_2}$, alors leurs images C_1' et C_2' par l'inversion φ se coupent au point $\varphi(M)$ en lequel elles ont pour vecteurs tangents respectifs $\overrightarrow{\tau_1'}$ et $\overrightarrow{\tau_2'}$ tels que :

$(\overrightarrow{\tau_1'}, \overrightarrow{\tau_2'}) = (\sigma(\overrightarrow{\tau_1}), \sigma(\overrightarrow{\tau_2})) = -(\overrightarrow{\tau_1}, \overrightarrow{\tau_2}) \quad [2\pi]$ (car σ est une réflexion)

Conclusion : L'inversion conserve les angles entre deux courbes sécantes. On dit que c'est une transformation conforme du plan.

3 Equation aux dérivées partielles :

3.1 E D P 1 :

On considère l'équation aux dérivées partielles (E_m) :

$$(m-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = (u,v) = (x+ay, x+by)$$

a) A quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, φ est-elle un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$?

b) Transformer (E) par le changement de variables φ, résoudre l'équation (F) obtenue puis (E).

SOLUTION :

a) La fonction φ est linéaire ; $\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$

Sa matrice dans la base cannonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

$\det(\varphi) = \det(A) = b - a$ donc φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même si et seulement si $a - b \neq 0$

φ et φ^{-1} sont alors de classe C^1 comme toute application linéaire.

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement si } a \neq b}$

b) Soit alors $g = f_o\varphi^{-1}$ de sorte que $f = g_o\varphi$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(\underbrace{x+ay}_{u}, \underbrace{x+by}_{v})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+ay,x+by).1 + \frac{\partial g}{\partial v}(x+ay,x+by).1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = a\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + (a+b)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + b\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+ay,x+by).a + \frac{\partial g}{\partial v}(x+ay,x+by).b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + 2ab\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + b^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by)$$

• La fonction f est solution de E_m si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (m-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\begin{aligned} \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (m-1)&\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by)\right) \\ -m&\left(a\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + (a+b)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + b\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by)\right) \\ +a^2&\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay,x+by) + 2ab\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+ay,x+by) + b^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay,x+by) = 0 \end{aligned}$$

$\iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$

$$(a^2 - am + m - 1)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + (2ab - m(a+b) + 2(m-1))\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + (b^2 - bm + m - 1)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = 0$$

(Equation (F_m), quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $(u,v) = \varphi(x,y) = (x+ay, x+by)$ décrit aussi $\mathbb{R}^2$)

or $t^2 - tm + m - 1 = (t-1)(t-m+1)$ s'annule pour $t = 1$ et $t = m-1$

<u>1^{er} **cas :**</u> Si $m - 1 \neq 1$, c'est à dire si $m \neq 2$, en prenant $a = 1$ et $b = m-1$, l'application φ est bien

un difféomorphisme qui valide les calculs précédents et les termes en $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ et en $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ disparaissent de l'équation F_m qui devient :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ (2ab - m(a+b) + 2(m-1))\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

soit $-(m-2)^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$ compte tenu des valeurs de a et b.

Fixons $u = u_0$ et posons $h(v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v)$:

alors $h'(v) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u_0, v) = 0$ donc h est une fonction constante, dont la valeur dépend à priori de u_0 fixé : $h(v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v) = k(u_0)$:

ainsi, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = k(u)$.

Fixons maintenant $v = v_0$ et posons $h(u) = g(u, v_0)$: alors $h'(u) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v_0) = k(u)$.

En intégrant, $h(u) = g(u, v_0) = \int k(u)du = K(u) + k_2(v_0)$ k_2 étant une constante d'intégration qui dépend à priori de v_0 fixé.

Finalement, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = k_1(u) + k_2(v)$ où k_1 et k_2 sont deux fonctions d'une variable de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Et $\boxed{f(x,y) = g(x+y, x+(m-1)y) = k_1(x+y) + k_2(x+(m-1)y)}$

<u>2^{me} **cas :**</u> Si $m-1 = 1$, c'est à dire si $m = 2$, on ne peut pas prendre deux valeurs distinctes de a et de b qui annulent à la fois $(a^2 - am + m - 1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$ et $(b^2 - bm + m - 1)$

Le coefficient de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ dans l'équation F_m est

$$2ab - m(a+b) + 2(m-1) = 2ab - 2(a+b) + 2 = 2(a-1)(b-1)$$

En prenant $a = 1$ et pour b n'importe quelle valeur différente de 1, l'application φ est bien un C^1-difféomorphisme qui rend valides les calculs de changement de variable effectués, et F_m devient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$

Fixons $u = u_0$ et posons $h(v) = g(u_0, v)$:

alors $h'(v) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0, v)$ et $h''(v) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u_0, v) = 0$ donc h' est une fonction constante, dont la valeur dépend à priori de u_0 fixé : $h'(v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v) = k(u_0)$

En intégrant une seconde fois, $h(v) = g(u_0, v) = \int k(u_0)dv = K(u_0)v + k_2(u_0)$ k_2 étant une constante d'intégration qui dépend à priori de u_0 fixé.

Finalement, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = k_1(u)v + k_2(v)$ où k_1 et k_2 sont deux fonctions d'une variable de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Et $\boxed{f(x,y) = g(x+y, x+by) = (x+by)k_1(x+y) + k_2(x+by)}$

3.2 E D P 2 :

1- Rechercher les ouverts $U \in \mathbb{R}^2$, les plus grands possibles, pour lesquels l'application

$\varphi : (x,y) \mapsto \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$

Dans chacun des cas, préciser ce qu'est l'ensemble image $\varphi(U)$.

2- Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

par le changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y)$

SOLUTION :

• Soit φ une application définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Il faut déjà que $\dfrac{y}{x}$ soit défini, c'est à dire que x soit non nul pour tout élément $(x,y) \in U$, c'est à dire que U soit inclus dans l'un des demi plans $H_1 = \{(x,y) \in R^2/x > 0\}$ ou $H_2 = \{(x,y) \in R^2/x < 0\}$

• Si U contient deux éléments $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$, alors $\varphi(x_1, 0) = (0,0) = \varphi(x_2, 0)$ et φ n'est pas injective. Il faut donc que l'ouvert U ne coupe pas l'axe des abscisses, c'est à diré soit inclus dans l'un des demi plans $H_3 = \{(x,y) \in R^2 / y > 0\}$ ou $H_4 = \{(x,y) \in R^2 / y < 0\}$

Tenant compte de ces deux conditions, il faut que U soit inclus dans l'un des quatre quadrants :

- $Q_1 = \{(x,y) \in R^2 / x > 0 \ \text{ et } \ y > 0\}$
- $Q_2 = \{(x,y) \in R^2 / x < 0 \ \text{ et } \ y > 0\}$
- $Q_3 = \{(x,y) \in R^2 / x < 0 \ \text{ et } \ y < 0\}$
- $Q_4 = \{(x,y) \in R^2 / x > 0 \ \text{ et } \ y < 0\}$

Réciproquement, soit U l'un de ces quatre quadrants. Montrons que φ est injective sur U :

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in U^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(x',y') \ \Rightarrow \ \left(xy, \frac{y}{x}\right) = \left(x'y', \frac{y'}{x'}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} xy = x'y' & (1) \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{y'}{x'} & (2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} y^2 = y'^2 & \text{(en multipliant (1)}\times\text{(2))} \\ x^2 = x'^2 & \text{(en divisant (1) par (2))} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \ y = y'$ et $x = x'$ car pour tous les couples (x,y) d'un même Q_i, les x d'une part, les y d'autre part, ont même signe.

L'application φ est donc injective sur chacun des quadrants $Q_i, i = 1...4$

• Recherchons l'image par φ de chacun des quadrants $Q_i, i = 1...4$.

Soit U l'un des ouverts $Q_i, i = 1...4$.

$$(u,v) \in \varphi(Q_i) \ \Leftrightarrow \ \exists (x,y) \in Q_i,\ (u,v) = \varphi(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \ \exists (x,y) \in U,\ (u,v) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ \exists (x,y) \in U,\ \begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \exists (x,y) \in U,\ \begin{cases} uv = y^2 \\ \dfrac{u}{v} = x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad uv > 0$$

$\Longrightarrow$ u et v ont même signe :

$u = xy > 0$ si $i = 1$ ou $i = 3$, $u = xy < 0$ si $i = 2$ ou $i = 4$

Donc $\varphi(Q_1) \subset Q_1,\ \varphi(Q_2) \subset Q_3,\ \varphi(Q_3) \subset Q_1,\ \varphi(Q_4) \subset Q_3$

- Réciproquement, dans le cas où $U = Q_1$,

soit $(u,v) \in Q_1$ et définissons alors $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ et $y = \sqrt{uv}$, de sorte que $(x,y) \in Q_1$.

$$\varphi(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right) = (\sqrt{u^2}, \sqrt{v^2}) = (u,v) \ \text{ donc } \ Q_1 \subset \varphi(Q_1)$$

- dans le cas où $U = Q_2$, soit $(u,v) \in Q_3$ et définissons alors $x = -\sqrt{\dfrac{u}{v}}$ et $y = \sqrt{uv}$, de sorte que $(x,y) \in Q_2$.

$$\varphi(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right) = (-\sqrt{u^2}, -\sqrt{v^2}) = (u,v) \ \text{ donc } \ Q_3 \subset \varphi(Q_2)$$

Mêmes raisonnements dans les deux autres cas, qui montrent finalement que :

$$\varphi(Q_1) = Q_1,\ \varphi(Q_2) = Q_3,\ \varphi(Q_3) = Q_1,\ \varphi(Q_4) = Q_3$$

2- Soit $g = f_o \varphi^{-1}$ de sorte que $f = g_o \varphi$.

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = g(u(x,y), v(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{y}{x}\right) . \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right) . \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= y \frac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\left(y \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)\right) - \frac{y}{x^2}\left(y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right)\right)$$
$$+ \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

$$= y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right) - 2\frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

de manière analogue,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{y}{x}\right).\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right).\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$= x\frac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right)\right) + \frac{1}{x}\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right)\right)$$
$$= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

d'où $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{2y}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$

Quand (x,y) décrit U, $(u,v) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ décrit $\varphi(U) = U'$

d'où $\forall (x,y) \in U,\ x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall (u,v) \in U',\ 2uv\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - v\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall (u,v) \in U',\ 2u\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$

Fixons v_0 et posons $h(u) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v_0)$.

alors $h'(u) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v_0)$ et h vérifie l'équation différentielle :

$2uh'(u) - h(u) = 0$ qui s'intègre en $h(u) = k(v_0)\sqrt{u}$

donc $\forall (u,v),\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = k(v)\sqrt{u}$.

Fixons maintenant $u = u_0$ et posons $t(v) = g(u_0, v)$. Alors $t'(v) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0, v) = k(v)\sqrt{u_0}$ et en intégrant, $t(v) = \sqrt{u_0}\int k(v)dv = \sqrt{u_0}K(v)$

Donc $g(u,v) = \sqrt{u}K(v)$ où K est une fonction quelconque de classe C^2.

et finalement, $f(x,y) = g\left(xy, \dfrac{y}{x}\right) = \sqrt{xy}K\left(\dfrac{y}{x}\right)$

4 Extrema :

4.1 Ajustement linéaire :

On considère p points $(x_i, y_i)_{i=1...p}$ du plan $\mathbb{R}^2$.

Rechercher une droite D d'équation $y = ax + b$ telle que la somme des carrés

$\gamma(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(y_i - ax_i - b)^2$ soit minimale.

SOLUTION :

La fonction γ est polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial \gamma(a,b)}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} -2x_i(y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^{p} 2(ax_i^2 + bx_i - x_iy_i)$

$\dfrac{\partial \gamma(a,b)}{\partial a} = 2\left(a\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p} x_i - \sum_{i=1}^{p} x_iy_i\right)$ s'annule si et seulement si :

$\mu(x_i^2)a + \mu(x_i)b - \mu(x_iy_i) = 0 \quad (1)$

de manière analogue, $\dfrac{\partial \gamma(a,b)}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} -2(y_i - ax_i - b) = 2\left(a\sum_{i=1}^{p} x_i + nb - \sum_{i=1}^{p} y_i\right)$ s'annule si et seulement si : $\mu(x_i)a + nb - \mu(y_i) = 0 \quad (2)$

Le système d'équations $\begin{cases} \mu(x_i^2)a + \mu(x_i)b = \mu(x_iy_i) & (1) \\ \mu(x_i)a + nb = \mu(y_i) & (2) \end{cases}$

a pour déterminant :

$$\Delta = p\mu(x_i^2) - \mu(x_i)^2 = p.\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire:

$$\langle X, U\rangle^2 \leq \|U\|^2.\|X\|^2 \text{ soit } \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 \leq p.\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right).$$

Il y a égalité si et seulement si le système (U, X) est lié, si et seulement si $x_1 = x_2 = ... = x_p$. Cela signifie que tous les points (x_i, y_i) sont alignés sur la droite verticale d'équation $x = x_1$.

Dans les autres cas, $\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 < p.\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)$ et donc $\Delta \neq 0$

Le système est alors de Cramer, il admet une solution (a_0, b_0) unique, donnée par :

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \mu(xy) & \mu(x) \\ \mu(y) & p \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{p.\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)}{p.\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2}$$

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \mu(x^2) & \mu(xy) \\ \mu(x) & \mu(y) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i y_i\right)}{p.\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2}$$

La fonction γ possède donc un seul point critique (a_0, b_0) (point en lequel les déivées partielles sont toutes nulles).

4.2 Paramètres liés :

F est une application de classe C^1 définie sur un ouvert $I \times J \times K$ de $\mathbb{R}^3$ où I , J et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$. (par exemple $F(p, v, t) = p.v - n.R.t$)

On suppose que $X = \{(p, v, t) \in I \times J \times K / F(p, v, t) = 0\}$ n'est pas vide.

Sous certaines hypothèses, l'égalité $F(p, v, t) = 0$ équivaut $p = P(v, t)$ où P est une fonction implicite définie sur un sous ensemble de $J \times K$, à valeurs dans I.

De même, $F(p, v, t) = 0$ permet de définir

a) v comme fonction implicite $v = V(p, t)$ de p et de t,

b) t comme fonction implicite $t = T(p, v)$ de p et de v.

On notera $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t$ la dérivée partielle de p par rapport à v à t constant, c'est à dire la dérivée partielle de la fonction implicite P par rapport à v : $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t = \dfrac{\partial P}{\partial v}$

1- Calculer $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t$ en fonction des dérivées partielles de la fonction F.

2- Montrer que $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_p \left(\dfrac{\partial t}{\partial p}\right)_v = -1$

3- Un gaz suivant l'équation d'état $F(p, v, t) = 0$ subit une transformation au cours de laquelle l'entropie $S = S(v, t)$ reste constante.

Calculer $\left(\dfrac{\partial v}{\partial p}\right)_{S=cte}$ à l'aide des dérivées partielles des fonctions F et S

Solution :

1- Par le théorème des fonctions implicites, si $\dfrac{\partial F}{\partial p}(p_0, v_0, t_0) \neq 0$, il existe un voisinage $I' \times J' \times K'$ de (p_0, v_0, t_0) et une application P de $J' \times K'$ dans I' telle que :

$$\forall (p, v, t) \in I' \times J' \times K', F(p, v, t) = 0 \Leftrightarrow p = P(v, t)$$

donc $\forall (p, v, t) \in I' \times J' \times K'$, $F(P(v, t), v, t) = 0$

En dérivant cette égalité par rapport à v, on obtient :

$$\forall (p,v,t) \in I' \times J' \times K',\ \frac{\partial F}{\partial p}(P(v,t),v,t)\frac{\partial P}{\partial v}(v,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(P(v,t),v,t).1 + \frac{\partial F}{\partial t}(P(v,t),v,t).0 = 0$$

d'où $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t = \frac{\partial P}{\partial v}(v,t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}(P(v,t),v,t)}{\frac{\partial F}{\partial p}(P(v,t),v,t)}$

$$\boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t (p,v,t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial p}(p,v,t)}}$$

2 - De manière analogue, $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p (p,v,t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial v}(p,v,t)}$ et $\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_v (p,v,t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial t}(p,v,t)}$

alors $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p \left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_v = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial v}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial p}(p,v,t)}\right).\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial v}(p,v,t)}\right).\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial p}(p,v,t)}{\frac{\partial F}{\partial t}(p,v,t)}\right) = -1$

3- $\begin{cases} F(p,v,t) = 0 & (1) \\ S(v,t) = S_0 = cte & (2) \end{cases}$

(1) permet de déterminer t comme fonction implicite de (p,v) : $\quad t = T(p,v)$

alors (2) $\implies S(v, T(p,v)) = S_0$

Cette dernière relation est du type $G(v,p) = 0$ et permet de définir v comme fonction implicite de p :

$v = W(p)$

alors $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{S=cte} = \frac{dW}{dp}(p) = W'(p)$

(2) $\implies$ (3) : $S(W(p), T(p, W(p))) = S_0$

Dérivons par rapport à p : $\frac{\partial S}{\partial v}.W'(p) + \frac{\partial S}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}.W'(p)\right) = 0$

d'où l'on déduit : $\quad W'(p) = \frac{-\frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial v} + \frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial v}} \quad (4)$

Il reste à calculer $\frac{\partial T}{\partial p}$ et $\frac{\partial T}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de F.

(1) $\implies F(p,v,T(p,v)) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$

de même, en dérivant par rapport à v, $\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial v} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$

En reportant dans (4) :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{S=cte} = W'(p) = -\frac{\frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial v} + \frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial T}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial t}}}{\frac{\partial S}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial t}}} = \frac{\frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial v}}$$

Finalement, $\boxed{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{S=cte} = \frac{\frac{\partial S}{\partial t}.\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial v}}}$

5 Fonctions harmoniques

Une fonction f, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite **harmonique** si son Laplacien est nul sur U.

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$, on rappelle que
$$\begin{aligned} \overline{B}(A,R) &= \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| \leq R\} \\ \overset{o}{B}(A,R) &= \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| < R\} \\ C(A,R) &= \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| = R\} \end{aligned}$$

1. **Formule de la moyenne :**

   On considère une fonction f à valeurs réelles définie et de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et dont le Laplacien est nul sur U.

   Soit $A = (a,b) \in U$. Soit $\alpha > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(A,\alpha)$ soit incluse dans U.

   Pour $r \in [0,\alpha]$, on pose $g(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$

   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $r.g''(r) + g'(r) = 0$

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)d\theta$ ne dépend pas de r, pour $0 \leq r \leq \alpha$, et la calculer en fonction de $f(a,b)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\iint_{\overline{B}(0,R}} f(x,y)dxdy = \pi R^2 f(0,0)$

SOLUTION : Soit g la fonction définie par : $\quad g(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$

• $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\Big) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$

pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, la fonction $r \mapsto f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est C^1 sur $[0,\alpha]$,

pour tout $r \in [0,\alpha]$, les fonctions $\theta \mapsto f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ et $\theta \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial r}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ sont continues et intégrables sur le segment $[0,2\pi]$

enfin, la fonction $(r,\theta) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial r}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est continue, donc bornée sur le compact $[0,\alpha] \times [0,2\pi]$:

$\forall (r,\theta) \in [0,\alpha] \times [0,2\pi]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial r}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right| \leq M$ et la fonction constante M est intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$, qui nous permet d'affirmer que g est C^1 sur $[0,\alpha]$ et que :

$$g'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right) d\theta$$

• Intégrons par parties en intégrant les fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et en dérivant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+ r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$, ce qui est possible car ces fonctions sont de classe C^1 sur $[0,2\pi]$:

$$\begin{aligned} g'(r) &= \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right) \\ &= \left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \left(-r\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\right) d\theta \end{aligned}$$

$$+\left[-\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(-r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)+r\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\right)d\theta$$

Abrégeons les notations en notant $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$

$$g'(r)=\int_0^{2\pi}\left(rs^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+rc,b+rs)-2rsc\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+rc,b+rs)+rc^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+rc,b+rs)\right)d\theta \quad (1)$$

or $g'(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(c\frac{\partial f}{\partial x}(a+rc,b+rs))+s\frac{\partial f}{\partial y}(a+rc,b+rs)\right)d\theta$ et en dérivant à nouveau :

$$g''(r)=\int_0^{2\pi}c\left(c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+rc,b+rs)+s\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+rc,b+rs)\right)+s\left(c\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+rc,b+rs)+s\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}('','')\right)d\theta$$

$$g''(r)=\int_0^{2\pi}\left(c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+rc,b+rs)+2sc\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+rc,b+rs)+s^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+rc,b+rs)\right)d\theta \quad (2)$$

En tenat compte de (1) et (2),

$$rg''(r)+g'(r)=\int_0^{2\pi}\left((rs^2+rc^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+rc,b+rs)+(rc^2+rs^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+rc,b+rs)\right)d\theta$$

$$=r\int_0^{2\pi}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+rc,b+rs)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+rc,b+rs)\right)}_{=\Delta f=0}d\theta \quad \text{(puisque } c^2+s^2=1)$$

$$rg''(r)+g'(r)=0$$

$$r.g''(r)+g'(r)=\left(r.g'(r)\right)'=0$$

La fonction $r\longrightarrow r.g'(r)$ est donc constante sur $[0,\alpha]$.

Etant nulle en 0, elle l'est partout et $\forall r\in[0,\alpha], g'(r)=0$

Donc g est constante sur $[0,\alpha]$. Or $g(0)=\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a,b)d\theta=2\pi f(a,b)$ et donc :

$$\boxed{\forall r\in[0,\alpha],\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)d\theta=2\pi f(a,b)}$$

• Pour tout $R>0$, en passant en coordonnées polaires,

$$\iint_{\Delta_R}f(x,y)dxdy=\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]}f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,rdrd\theta$$

$$=\int_0^R\left(r\int_0^{2\pi}f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,d\theta\right)dr$$

$$=\int_0^R 2\pi f(0,0)rdr=2\pi f(0,0)\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R=\pi f(0,0)R^2$$

$$\boxed{\iint_{\Delta_R}f(x,y)dxdy=\pi f(0,0)R^2}$$

Remarquons que si f est une fonction constante, par exemple 1, on retrouve l'aire du disque Δ_R

2. **Principe du maximum :**

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue sur la boule fermée $\overline{B}(A,R)$ ($A\in\mathbb{R}^2,\ R>0$), et harmonique sur la boule ouverte $\overset{o}{B}(A,R)$

(a) Justifier que $|f|$ est bornée sur $\overline{B}(A,R)$ et qu'il existe $z_0\in\overline{B}(A,R)$ tel que

$$M=\sup_{z\in\overline{B}(A,R)}|f(z)|=|f(z_0)|$$

(b) $C(A,R)=\{z\in\mathbb{R}^2,\ |z-A|=R\}=\overline{B}(A,R)-\overset{o}{B}(A,R)$

On suppose que $N=\sup\limits_{z\in C(A,R)}|f(z)|<M$

Soit $X=\{z\in\overset{o}{B}(A,R),|f(z)|=M\}$. Montrer que X est un compact. En déduire qu'il existe $z_1\in X$ tel que $|z_1|$ soit maximal.

(c) Justifier l'existence de $r>$ tel que la boule $\overline{B}(z_1,r)$ soit incluse dans $\overset{o}{B}(A,R)$

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi}(|f(z_1+re^{i\theta}|-|f(z_1)|)d\theta=0$

En déduire que $\forall\theta\in[0,2\pi],|f(z_1+re^{i\theta})|=M$ et montrer que cela est contraire à la définition de z_1.

(d) Montrer que, si $|f|$ admet un maximum sur $\overline{B}(A,R)$ en un point intérieur au disque, alors f est contante sur $\overline{B}(A,R)$.

SOLUTION :

• $\overline{B}(A,R)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (fermé-borné). La fonction $|f|$ est continue sur $\overline{B}(A,R)$. L'image d'un compact par une application continue étant un compact, $|f|$ est bornée sur $\overline{B}(A,R)$ et atteint ses bornes.

Donc il existe $z_0\in\overline{B}(A,R),\ M=\sup\limits_{z\in\overline{B}(A,R)}|f(z)|=|f(z_0)|$

$X=\{z\in\overset{o}{B}(A,R),|f(z)|=M\}$ est borné puisque inclus dans la boule $\overline{B}(A,R)$.

• Montrons que X est fermé.

Soit (z_n) une suite d'éléments de X, qui converge dans $\mathbb{R}^2$ vers une limite L.

$\forall n\in\mathbb{N},\ |f(z_n)|=M$ puisque $z_n\in X$.

$|f|$ étant continue, $\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{|f(z_n)|}_{=M}=|f(\lim z_n)|=|f(L)|$ donc $|f(L)|=M$

Pour tout n, $z_n\in\overline{B}(A,R)$, la boule $\overline{B}(A,R)$ étant fermée, la limite L est aussi dans cette boule $\overline{B}(A,R)$.

Si L était sur la frontière $C(A,R)$, on aurait $M=|f(L)|\le\sup\limits_{z\in C(A,R)}|f(z)|=N<M$, ce qui est absurde.

Donc $L\notin C(A,R)$

Ainsi $L\in\overset{o}{B}(A,R)$ et $|f(L)|=M$ donc $L\in X$.

Par la caractérisation séquentielle d'un fermé, on en déduit que X est fermé. Finalement, X, fermé et borné, est un compact de $\mathbb{R}^2$.

• L'application $z\mapsto|A-z|$ étant continue, elle est bornée sur le compact X et sa borne supérieure est atteinte : il existe $z_1\in X$ tel que $|A-z_1|$ soit maximal.

• Puisque $z_1\in X\subset\overset{o}{B}(A,R)$, $|z_1-A|<R$.

En prenant $r<\frac{R-|z_1-A|}{2}$, on a $\overline{B}(z_1,r)\subset\overset{o}{B}(A,R)$

D'après la formule de la moyenne démontrée à la question précédente,

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))d\theta$$

donc $\displaystyle|f(z_1)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))|d\theta$

$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}|f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))|d\theta-2\pi|f(z_1)|\ge0$$

$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}(|f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))|-|f(z_1)|)\,d\theta\ge0$$

Mais, puisque $C(z_1,r)\subset\overset{o}{B}(A,R)$, $|f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))|\le|f(z_1)|=M$

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi}\underbrace{(|f(z_1+(r\cos\theta,r\sin\theta))|-|f(z_1)|)}_{\le0}d\theta\le0$

en fin de compte, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(|f(z_1+(r\cos\theta, r\sin\theta))| - |f(z_1)|\right) d\theta = 0$

La fonction $\theta \mapsto |f(z_1+(r\cos\theta, r\sin\theta))| - |f(z_1)|$ est négative ou nulle, continue sur $[0, 2\pi]$ et d'intégrale nulle. C'est donc la fonction nulle,

d'où $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, $|f(z_1+(r\cos\theta, r\sin\theta))| = |f(z_1)|$. La fonction $|f|$ vaut M sur tout le cercle $C(z_1, R)$. Or il existe un point z_2 de ce cercle tel que $|A - z_2| > |A - z_1|$.

(faire un dessin)

$z_2 \in X$ puisque $|f(z_2)| = M$ et $\overline{B}(z_1, r) \subset \overset{o}{B}(A, R)$. Ceci contredit la définition de z_1 qui était un élément de X pour lequel $|A - z_1|$ était maximal.

L'hypothèse $N = \sup\limits_{z\in C(A,R)} |f(z)| < M = \sup\limits_{z\in\overline{B}(A,R)} |f(z)|$ est donc absurde.

Il s'ensuit que le maximum de $|f|$ sur le disque $\overline{B}(A, R)$ est atteint sur sa frontière $C(A, R)$.

• Supposons que ce maximum soit atteint aussi en un point z_0 intérieur au disque

$(z_0 \in \overset{o}{B}(A, R))$

alors pour tout r tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset \overset{o}{B}(A, R)$, un calcul analogue à celui ci-dessus montre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0+(r\cos\theta, r\sin\theta))| - |f(z_0)|\right) d\theta = 0$ d'où il s'ensuit que $|f|$ est constante sur le cercle $C(z_0, r)$ et a pour valeur $|f(z_0)|$. En faisant varier r, $|f|$ est constante et vaut $M = |f(z_0)|$ sur le plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans $\overline{B}(A, R)$.

En répétant le même raisonnement à partir d'un point z_1 appartenant à ce disque, mais plus proche de A que z_0, on peut se ramener en un nombre fini d'étapes à prendre pour centre A. Ce qui montre que $|f|$ est constante sur $\overset{o}{B}(A, R)$ et sur $\overline{B}(A, R)$ par continuité.

En conclusion, si une fonction f continue sur le disque fermé $\overline{B}(A, R)$ et harmonique sur l'ouvert $\overset{o}{B}(A, R)$ admet un maximum en module en un point intérieur au disque, alors son module est constant sur le disque fermé $\overline{B}(A, R)$

• Montrons que la fonction f elle même est constante (et pas seulement son module).

Si f est harmonique sur un ouvert U, alors sa partie réelle $\Re(f)$ et sa partie imaginaire $\Im(f)$ le sont aussi. (car $\triangle(f) = \triangle(\Re(f)) + i\triangle(\Im(f))$)

on peut se ramener ainsi au cas où f est une fonction à valeurs réelles.

Le cas $M = 0$ est immédiat. Supposons $M \neq 0$.

$M = \sup\limits_{z\in\overline{B}}(A, R) = |f(z_0)|$, $z_0 \in \overset{o}{B}(A, R)$

Considérons la fonction g telle que $g(z) = \Re\left(\frac{f(z)}{f(z_0)}\right) = \Re\left(\frac{f(z)}{M}\right)$

$\forall z \in \overline{B}(A, R)$, $|g(z)| = \left|\Re\left(\dfrac{f(z)}{M}\right)\right| \leq \left|\dfrac{f(z)}{M}\right| = \dfrac{|f(z)|}{M} \leq \dfrac{M}{M} = 1 = |g(z_0)|$

Donc la fonction g atteint le maximum de son module en z_0, intérieur à $\overline{B}(A, R)$.

Elle est harmonique elle aussi. Donc son module est constant. Mais puisqu'elle est réelle et continue, elle est constante. En effet, si elle prenait la valeur M en z_1 et $-M$ en z_2, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait quelque part sur le segment joignant z_1 et z_2, ce qui est exclu puisque $|g|$ est constante.

Donc la fonction g est constante, la fonction $\Re(f) = Mg$ l'est aussi, la fonction $\Im(f)$ également par un raisonnement analogue et la fonction $f = \Re(f) + i\Im(f)$ aussi.

3. **Problème de Dirichlet :**

   (a) **Calcul de laplacien en coordonnées polaires :**

   Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que l'application $\psi :\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de V sur U.

   soit u une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $v = u_o\psi$

   Montrer que si $(x, y) = \psi(r, \theta)$, alors

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

SOLUTION :

L'application $\psi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de U sur V.

La matrice jacobienne de ψ est : $J_\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

son inverse est :

$$J_{\psi^{-1}}(x,y) = (J_\psi(r,\theta))^{-1} = \tfrac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

d'où les relations : $\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) = \cos\theta & \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \\ \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r} \end{cases}$

$u(x,y) = v(r(x,y),\theta(x,y))$

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial r}(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)$

  (r et θ fonctions de (x,y))

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\sin\theta}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)\right)\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)$$
$$-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)\right)\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}r - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \cos^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta) - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta) + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta}$$

- $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial r}(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\cos\theta}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta)\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}(r,\theta)\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta)\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta)\frac{-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y) - \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y}}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta) + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta}$$

En additionnant ces deux calculs, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)}$$

(b) **Solution à variables séparées en coordonnées polaires :**

On recherche des fonctions harmoniques sur le disque $\overset{o}{B}(0,R)$. On passe en coordonnées polaires en recherchant les fonctions $(r,\theta) \mapsto v(r,\theta)$ de la forme $v(r,\theta) = g(r).h(\theta)$ où

- g est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,R[$
- h est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,2\pi]$ avec ses ses dérivées d'ordre 0,1, et 2 se recollant en 0 et en 2π
  (c'est à dire $h(0) = h(2\pi)$, $h'(0) = h'(2\pi)$ et $h''(0) = h''(2\pi)$)

et vérifiant :

$$\forall (r,\theta) \in [0,R[\times[,2\pi],\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

i. Montrer qu'il existe une constante k, indépendante de r et de θ telle que g et h sont respectivement solutions des équations différentielles :

$$r^2 g'' + rg' + kg = 0 \qquad (E_1)$$
$$h'' - kh = 0 \qquad (E_2)$$

ii. Résoudre (E_2) . A quelle condition sur k, les solutions sont elles 2π-périodiques ?
Résoudre (E_1) .
(On se ramènera à une équation à coefficients constants, suivant une méthode vue en cours)

iii. Montrer que $v(r,\theta) = r^k(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta))$

SOLUTION :

Lorsque $v(r,\theta) = g(r).h(\theta)$, il s'ensuit que :

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = g'(r).h(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) = g''(r).h(\theta)$$
$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = g(r).h'(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = g(r).h''(\theta)$$

u est harmonique sur $\overset{o}{B}(A,R)$ si et seulement si

$$\forall (r,\theta) \in [0,R[\times[0,2\pi],\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = 0$$
$$\iff \forall (r,\theta) \in [0,R[\times[0,2\pi], g''(r)h(\theta) + \frac{1}{r^2}g(r)h''(\theta) + \frac{1}{r}g'(r)h(\theta) = 0$$
$$\iff \forall (r,\theta) \in [0,R[\times[0,2\pi],\ r^2 g''(r)h(\theta) + g(r)h''(\theta) + rg'(r)h(\theta) = 0$$
$$\iff \forall (r,\theta) \in [0,R[\times[0,2\pi],\ (r^2 g''(r) + rg'(r))\ h(\theta) = -g(r)h''(\theta) \qquad (1)$$

Si v n'est pas la fonction nulle, $\exists (r_0,\theta_0),\ v(r_0,\theta_0) = g(r_0)h(\theta_0) \neq 0$
donc $g(r_0) \neq 0$ et $h(\theta_0) \neq 0$

$$(1) \implies \begin{cases} \forall r \in [0,R[,\ r^2 g''(r) + rg'(r) = -g(r)\dfrac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)} \\ \text{et } \forall \theta \in [0,2\pi],\ \dfrac{r_0^2 g''(r_0) + r_0 g'(r_0)}{g(r_0)}\ h(\theta) = -h''(\theta) \end{cases}$$

Remarquons aussi que $(1) \implies \dfrac{r_0^2 g''(r_0) + r_0 g'(r_0)}{g(r_0)} = -\dfrac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)}$

en notant $k = \dfrac{r_0^2 g''(r_0) + r_0 g'(r_0)}{g(r_0)} = -\dfrac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)}$,

$$(1) \implies \begin{cases} \forall r \in [0,R[,\ r^2 g''(r) + rg'(r) + kg(r) = 0 \qquad (E_1) \\ \text{et } \ \forall \theta \in [0,2\pi],\ h''(\theta) - k\ h(\theta) = 0 \qquad (E_2) \end{cases}$$

Etude de l'équation (E_2) :

La solution générale de l'équation (E_2) est : $\begin{cases} h(\theta) = \lambda e^{\sqrt{k}\theta} + \mu e^{-\sqrt{k}\theta} & \text{si } k > 0 \\ h(\theta) = \lambda\theta + \mu & \text{si } k = 0 \\ h(\theta) = \lambda\cos(\sqrt{-k}\ \theta) + \mu\sin(\sqrt{-k}\ \theta) & \text{si } k < 0 \end{cases}$

- dans le premier cas, $h(0) = h(2\pi) \implies \lambda + \mu = \lambda e^{\sqrt{k}2\pi} + \mu e^{-\sqrt{k}2\pi}$
  $h'(0) = h'(2\pi) \implies \lambda\sqrt{k} - \mu\sqrt{k} = \lambda\sqrt{k}e^{\sqrt{k}2\pi} - \mu\sqrt{k}e^{-\sqrt{k}2\pi}$

  d'où $\begin{cases} \lambda(1 - e^{\sqrt{k}2\pi}) + \mu(1 - e^{-\sqrt{k}2\pi}) = 0 \\ \lambda(1 - e^{\sqrt{k}2\pi}) - \mu(1 - e^{-\sqrt{k}2\pi}) = 0 \end{cases} \implies \lambda = \mu = 0$

  La fonction h et la fonction v sont alors nulles.
- dans le deuxième cas, $h(0) = h(2\pi) \implies \lambda = 0$
  la fonction h est alors constante .
- dans le troisième cas, $h(0) = h(2\pi) \implies \lambda = \lambda\cos(2\pi\sqrt{-k}) + \mu\sin(2\pi\sqrt{-k})$
  $h'(0) = h'(2\pi) \implies \mu\sqrt{-k} = -\lambda\sqrt{-k}\sin(2\pi\sqrt{-k}) + \sqrt{-k}\mu\cos(2\pi\sqrt{-k})$

  $\implies \begin{cases} (1 - \cos(2\pi\sqrt{-k}))\lambda - \mu\sin(2\pi\sqrt{-k}) = 0 \\ \sin(2\pi\sqrt{-k})\lambda + \mu(1 - \cos(2\pi\sqrt{-k})) = 0 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est :

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos(2\pi\sqrt{-k})) & -\sin(2\pi\sqrt{-k}) \\ \sin(2\pi\sqrt{-k}) & (1 - \cos(2\pi\sqrt{-k})) \end{vmatrix} = (1 - \cos(2\pi\sqrt{-k}))^2 + \sin^2(2\pi\sqrt{-k})$$

$= 2 - 2\cos(2\pi\sqrt{-k})) = 4\sin^2(\pi\sqrt{-k}))$

Si ce déterminant est non nul, la système est de Cramer, il admet une solution unique et qui est $\lambda = \mu = 0$. La fonction h et par conséquent la fonction v sont nulles.
Pour obtenir une solution non nulle, il faut donc que le système ne soit pas de Cramer, c'est à dire que $\sin(\pi\sqrt{-k})) = 0$, ou encore que $\sqrt{-k}$ soit un entier.
(E_2) admet une solution non nulle qui se recolle en 0 et 2π si et seulement si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \sqrt{-k} = n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ k = -n^2$$

les solutions de (3) : $h''(\theta) + n^2 h(\theta) = 0$ sont alors :

$$\boxed{h(\theta) = \lambda\cos(n\,\theta) + \mu\sin(n\,\theta)}$$

Etude de l'équation (E_1) **:** $r^2 g''(r) + rg'(r) + kg(r) = 0$

- Le cas $k > 0$ n'a pas besoin d'être étudié puisque (E_2) n'a alors que la solution nulle.
- Si $k = 0$, alors (E_1) s'écrit : $rg''(r) + g'(r) = 0$

  soit $(rg'(r))' = 0$ qui donne $g'(r) = \dfrac{\lambda}{r}$ et $g(r) = \lambda\ln(r) + \mu$

La continuité de g en 0 impose alors $\lambda = 0$.
Donc la fonction g est constante, et v aussi. (puisque h l'est déjà)

- Si $k < 0$, on a vu qu'il faut que $k = -n^2$ pour que (E_2) ait une solution non nulle qui se recolle en 0 et 2π.

L'équation (E_1) s'écrit alors : $r^2 g''(r) + rg'(r) - n^2 g(r) = 0$
On reconnait une équation d'Euler, qu'on étudie sur $]0, +\infty[$ par le changement de variable $t = \ln(r)$
Quand r décrit $]0, +\infty[$, $t = \ln(r)$ décrit $\mathbb{R}$.
Posons $g(r) = \varphi(\ln(r))$

$$\forall r > 0,\ g'(r) = \frac{1}{r}\varphi'(\ln(r)) \text{ et } g''(r) = \frac{1}{r^2}\varphi''(\ln(r)) - \frac{1}{r^2}\varphi'(\ln(r))$$

g est solution de (E_1) sur $]0, +\infty[\iff \forall r \in]0, +\infty[,\ r^2 g''(r) + rg'(r) - n^2 g(r) = 0$

$$\iff \forall r \in]0, +\infty[,\ \varphi''(\ln(r)) - \varphi'(\ln(r)) + \varphi'(\ln(r)) - n^2\varphi(\ln(r)) = 0$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi''(t) - n^2\varphi(t) = 0$$
$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \alpha e^{nt} + \beta e^{nt}$$
$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall r \in]0, +\infty[,\ g(r) = \alpha e^{n\ln r} + \beta e^{n\ln r} = \alpha r^n + \beta r^{-n}$$

La continuité de g en 0 impose que $\beta = 0$
Donc $\boxed{g(r) = \alpha r^n \text{ où } \alpha \text{ est une constante réelle.}}$

Calcul de la solution v **:**
Finalement, $v(r, \theta) = g(r)h(\theta) = \alpha r^n(\lambda\cos(n\,\theta) + \mu\sin(n\,\theta))$
On peut intégrer la constante α dans les deux autres.
La forme générale de la solution est alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} v(r, \theta) = r^n(\lambda\cos(n\,\theta) + \mu\sin(n\,\theta)) \\ \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles ou complexes.} \end{array}}$$

(c) **Problème de Dirichlet :**
Soit f une fonction définie sur le cercle $C(0, R)$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. (la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).
Le problème de Dirichlet consiste à rechercher une fonction u ,

$\star$ définie et continue sur le disque $\overline{B}(0, R)$,

$\star$ harmonique sur l'intérieur $\overset{o}{B}(A, R)$,

$\star$ et qui coïncide avec f sur la frontière $C(0, R)$.

i. Montrer que le problème de Dirichlet admet au plus une solution.

ii. Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que les suites $\sum \lambda_n R^n$ et $\sum \mu_n R^n$ soient absolument convergentes.

Montrer que la série définie par $v(r, \theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\lambda_n\cos(n\,\theta) + \mu_n\sin(n\,\theta))$ est définie pour tout $r \in [0, R]$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et que $u = v_o\psi^{-1}$ est harmonique sur $\overset{o}{B}(0, R)$

iii. En considérant le développement en série de Fourier de la fonction $\theta \mapsto f(R\cos\theta, R\sin\theta)$, dont on notera respectivement (a_n) et (b_n) les suites de coefficients de Fourier, montrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet.

SOLUTION :

• Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de Dirichlet sur le disque $\overline{B}(0,R)$:

u_1 et u_2 sont harmoniques sur le disque ouvert $\overset{o}{B}(A,R)$, continues sur le disque fermé $\overline{B}(0,R)$ et coïncident avec f sur la frontière $C(0,R)$.
donc , $\forall z \in C(0,R), u_1(z) - u_2(z) = f(z) - f(z) = 0$
Or , $u_1 - u_2$ étant continue sur $\overline{B}(0,R)$ et harmonique sur $\overset{o}{B}(A,R)$, d'après le principe du maximum, le maximum de $|u_1 - u_2|$ sur $\overline{B}(0,R)$ est atteint sur sa frontière $C(0,R)$.
Donc $\sup\limits_{z\in\overline{B}(0,R)} |u_1(z) - u_2(z)| = \sup\limits_{z\in C(0,R)} |u_1(z) - u_2(z)| = 0$ et la fonction $u_1 - u_2$ est nulle sur $\overline{B}(0,R)$, ce qui montre que $u_1 = u_2$.

• Par hypothèse les suites $\sum \lambda_n R^n$ et $\sum \mu_n R^n$ sont absolument convergentes.
donc $\forall r \in [0,R], \forall\theta \in \mathbb{R}$,

la série $v(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta))}_{w_n(r,\theta)}$ est absolument convergente.

• Pour tout θ fixé, la fonction $r \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta))$ est une série entière de la variable r, de rayon de convergence supérieur ou égal à R.

(puisque la série est absolument convergente pour tout $r \in [0,R]$
d'après la majoration $|r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta))| \leq |\lambda_n|R^n + \mu_n R^n$).

Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$, et elle peut être dérivée terme à terme :

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \sum_{n=0,1}^{\infty} nr^{n-1}(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial r}(r,\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)r^{n-2}(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2}(r,\theta)$$

• Pour tout $r \in [0,R[$ fixé, étudions la fonction

$$\theta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r,\theta)$$

- pour tout n la fonction $\theta \mapsto w_n(r,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée

$$\theta \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial\theta}(r,\theta) = nr^n(-\lambda_n \sin(n\ \theta) + \mu_n \cos(n\ \theta))$$

- la série $\sum w_n(\ )$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
- pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial w_n}{\partial\theta}(r,\theta)\right| = |nr^n(-\lambda_n \sin(n\ \theta) + \mu_n \cos(n\ \theta))| \leq nr^n|\lambda_n| + nr^n|\mu_n|$$

cette dernière série est convergente car la série entière $\sum|\lambda_n|r^n$ converge pour tout $r \in [0,R[$ et sa série dérivée aussi.

En passant à la borne supérieure suivant θ, $\left\|\frac{\partial w_n}{\partial\theta}(r,\theta)\right\|_{\theta\in\mathbb{R}}^{\infty} \leq nr^n|\lambda_n| + nr^n|\mu_n|$

ce qui montre que la série dérivée $\theta \mapsto \sum \frac{\partial w_n}{\partial\theta}(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions et en conclure que la fonction

$\theta \mapsto v(r,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(r,\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée

$$\theta \mapsto \frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial\theta}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n(-\lambda_n \sin(n\ \theta) + \mu_n \cos(n\ \theta))$$

On montre de même que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}$ est définie sur $[0,R[\times\mathbb{R}$ et que :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 r^n (\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta))$$

Alors $\forall (r,\theta) \in [0, R[\times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial w_n}{\partial r}(r,\theta)\right)}_{=0}$$

$$= 0 \quad \text{d'après la question (b)}$$

La convergence normale de $\sum w_n(r,\theta)$ assure la continuité de la somme sur $[0, R[\times \mathbb{R}$

• La fonction $\theta \mapsto f(R\cos\theta, R\sin\theta)$ est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux puisque f l'est. Appelons (a_n) et (b_n) ses suites de coefficients de Fourier sinus-cosinus. D'après les hypothèses sur f (fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux), la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction $f(R\cos\theta, R\sin\theta)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

Or pour tout θ,

$$\lim_{r \to R} v(r,\theta) = v(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta)) = u(R\cos\theta, R\sin\theta)$$

$$= f(R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

Par unicité des coefficients de deux séries trigonométriques absolument convergentes,

$$\lambda_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \lambda_n = \frac{a_n}{R^n} \quad \text{et} \quad \mu_n = \frac{b_n}{R^n}$$

finalement, $\boxed{v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\frac{a_n}{R^n}\cos(n\theta) + \frac{b_n}{R^n}\sin(n\theta)\right)}$

$$\boxed{\forall r \in]-1,1[, \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta = 2\pi f(0,0)}$$

$$A \overset{n\to\infty}{\sim} B$$

$x \xrightarrow[n\to+\infty]{b} y$

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le p\\ i+j>p}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Différentielle :

Ex. 1 : Différentielle de l'inversion d'une matrice:

$\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme uniforme, $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty = \max\limits_{i=1..n}(|x_i|)$, on définit une norme subordonnée dans $M_n(\mathbb{R})$ par : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |||A||| = \sup\limits_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\| \leq 1}} \|A.X\|$

On admet qu'on obtient bien ainsi une norme et que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $|||A.B||| \leq |||A|||.|||B|||$

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|||A||| < 1$. Montrer que la matrice $I_n + A$ est inversible et donner une expression de son inverse sous forme de série.

2- Montrer que la boule ouverte $B(I_n, 1)$ est incluse dans $GL_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ étant donnée, déterminer un réel $h > 0$ tel que la boule ouverte $B(A, h) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Qu'en déduit on pour le sous ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$?

Donner une autre méthode pour justifier ce résultat.

3- On considère l'application G, définie sur $GL_n(\mathbb{R})$, qui à une matrice A fait correspondre son inverse A^{-1}. Montrer que G est différentiable et calculer sa différentielle dG_A. (Sol: $dG_A(H) = -A^{-1}.H.A^{-1}$)

Dérivation partielle de fonctions composées:

Ex. 2 : Dérivation de $x \longrightarrow \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt$:

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, α et β deux fonctions de I dans J , de classe C^1 et $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1.

On définit une fonction f par la relation : $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt$

Montrer que f est de classe C^1 sut I et calculer $f'(x)$.

Ex. 3 : Fonctions homogènes :

Une application $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est dite homogène d'ordre $p \in \mathbb{R}$ si :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p f(x,y,z)$

a) montrer que si f est homogène de degré p, alors ses dérivées partielles sont également homogènes, d'un ordre qu'on précisera.

b) montrer qu'alors : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = pf$

c) étudier la réciproque.

Ex. 4 : Angles et inversion :

Le plan affine euclidien P_2 et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $C(O,R)$ un cercle de P_2. On appelle **inversion relative au cercle** C l'application φ qui, à tout point $M \in P_2^*$, plan privé du point O, associe l'unique point M_1 de la droite (OM) qui vérifie l'égalité : $\overline{OM}.\overline{OM_1} = R^2$, ce qui équivaut aussi à la relation :

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$$

1- Calculer les coordonnées x_1 et y_1 de M_1 en fonction de $M(x,y)$. Déterminer la matrice jacobienne de φ.

Montrer qu'elle est de la forme $J_{\varphi(x,y)} = \lambda Q$ où λ est un scalaire dépendant de x et y et Q une matrice orthogonale qu'on déterminera.

2- Soient C_1 et C_2 deux courbes paramétrées de classe C^1 se coupant en un point M, où elles ont pour vecteurs tangents respectifs τ_1 et τ_2 non nuls.

Déterminer l'angle des vecteurs τ_1' et τ_2' tangents aux images respectives C_1' et C_2' de C_1 et C_2 par l'inversion φ. Conclure.

Equation aux dérivées partielles :

Ex. 5 : E D P 1 :

On considère l'équation aux dérivées partielles (E_m) :

$$(m-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = (u,v) = (x+ay, x+by)$

a) A quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, φ est-elle un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$?

b) Transformer (E) par le changement de variables φ, résoudre l'équation (F) obtenue puis (E).

Ex. 6 : E D P 2 :

1- Rechercher les ouverts $U \in \mathbb{R}^2$, les plus grands possibles, pour lesquels l'application

$\varphi : (x,y) \mapsto \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$

Dans chacun des cas, préciser ce qu'est l'ensemble image $\varphi(U)$.

2- Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

par le changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y)$

Extrema :

Ex. 7 : Ajustement linéaire :

On considère p points $(x_i, y_i)_{i=1\dots p}$ du plan $\mathbb{R}^2$.

Rechercher une droite D d'équation $y = ax+b$ telle que la somme des carrés

$\gamma(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(y_i - ax_i - b)^2$ soit minimale.

Ex. 8 : Paramètres liés** :

F est une application de classe C^1 définie sur un ouvert $I \times J \times K$ de $\mathbb{R}^3$ où I , J et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$. (par exemple $F(p,v,t) = p.v - n.R.t$)

On suppose que $X = \{(p,v,t) \in I \times J \times K / F(p,v,t) = 0\}$ n'est pas vide.

Sous certaines hypothèses, l'égalité $F(p,v,t) = 0$ équivaut $p = P(v,t)$ où P est une fonction implicite définie sur un sous ensemble de $J \times K$, à valeurs dans I.

De même, $F(p,v,t) = 0$ permet de définir

a) v comme fonction implicite $v = V(p,t)$ de p et de t,

b) t comme fonction implicite $t = T(p,v)$ de p et de v.

On notera $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t$ la dérivée partielle de p par rapport à v à t constant, c'est à dire la dérivée partielle de la fonction implicite P par rapport à v : $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t = \dfrac{\partial P}{\partial v}$

1- Calculer $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t$ en fonction des dérivées partielles de la fonction F.

2- Montrer que $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_t \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_p \left(\dfrac{\partial t}{\partial p}\right)_v = -1$

3- Un gaz suivant l'équation d'état $F(p,v,t) = 0$ subit une transformation au cours de laquelle l'entropie $S = S(v,t)$ reste constante.

Calculer $\left(\dfrac{\partial v}{\partial p}\right)_{S=cte}$ à l'aide des dérivées partielles des fonctions F et S

Fonctions harmoniques

Une fonction f, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite **harmonique** si son Laplacien est nul sur U.

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$, on rappelle que
$$\overline{B}(A,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| \leq R\}$$
$$\overset{o}{B}(A,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| < R\}$$
$$C(A,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |A-z| = R\}$$

1. **Formule de la moyenne :**

   On considère une fonction f à valeurs réelles définie et de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et dont le Laplacien est nul sur U.

   Soit $A = (a,b) \in U$. Soit $\alpha > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(A,\alpha)$ soit incluse dans U.

   Pour $r \in [0,\alpha]$, on pose $g(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$

   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $r.g''(r) + g'(r) = 0$

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)d\theta$ ne dépend pas de r, pour $0 \leq r \leq \alpha$, et la calculer en fonction de $f(a,b)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\iint_{\overline{B}(0,R} f(x,y)dxdy = \pi R^2 f(0,0)$

2. **Principe du maximum :**

   Soit f une fonction réelle ou complexe, continue sur la boule fermée $\overline{B}(A,R)$ ($A \in \mathbb{R}^2,\ R > 0$), et harmonique sur la boule ouverte $\overset{o}{B}(A,R)$

   (a) Justifier que $|f|$ est bornée sur $\overline{B}(A,R)$ et qu'il existe $z_0 \in \overline{B}(A,R)$ tel que
   $$M = \sup_{z \in \overline{B}(A,R)} |f(z)| = |f(z_0)|$$

   (b) $C(A,R) = \{z \in \mathbb{R}^2,\ |z-A| = R\} = \overline{B}(A,R) - \overset{o}{B}(A,R)$
   On suppose que $N = \displaystyle\sup_{z \in C(A,R)} |f(z)| < M$

   Soit $X = \{z \in \overset{o}{B}(A,R), |f(z)| = M\}$. Montrer que X est un compact. En déduire qu'il existe $z_1 \in X$ tel que $|z_1|$ soit maximal.

   (c) Justifier l'existence de $r >$ tel que la boule $\overline{B}(z_1,r)$ soit incluse dans $\overset{o}{B}(A,R)$
   Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (|f(z_1 + re^{i\theta}| - |f(z_1)|)d\theta = 0$
   En déduire que $\forall\theta \in [0,2\pi], |f(z_1 + re^{i\theta}| = M$ et montrer que cela est contraire à la définition de z_1.

   (d) Montrer que, si $|f|$ admet un maximum sur $\overline{B}(A,R)$ en un point intérieur au disque, alors f est contante sur $\overline{B}(A,R)$.

3. **Problème de Dirichlet :**

   (a) **Calcul de laplacien en coordonnées polaires :**
   Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que l'application $\psi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de V sur U.
   soit u une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $v = u_o\psi$
   Montrer que si $(x,y) = \psi(r,\theta)$, alors
   $$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

(b) **Solution à variables séparées en coordonnées polaires :**

On recherche des fonctions harmoniques sur le disque $\overset{o}{B}(0,R)$. On passe en coordonnées polaires en recherchant les fonctions $(r,\theta) \mapsto v(r,\theta)$ de la forme $v(r,\theta) = g(r).h(\theta)$ où

- g est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,R[$
- h est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,2\pi]$ avec ses ses dérivées d'ordre 0,1, et 2 se recollant en 0 et en 2π
  (c'est à dire $h(0) = h(2\pi)$, $h'(0) = h'(2\pi)$ et $h''(0) = h''(2\pi)$)

et vérifiant :

$$\forall (r,\theta) \in [0,R[\times[,2\pi],\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

i. Montrer qu'il existe une constante k, indépendante de r et de θ telle que g et h sont respectivement solutions des équations différentielles :

$$r^2 g'' + r g' + k g = 0 \qquad (E_1)$$
$$h'' - k h = 0 \qquad (E_2)$$

ii. Résoudre (E_2) . A quelle condition sur k, les solutions sont elles 2π-périodiques ?
Résoudre (E_1) .
(On se ramènera à une équation à coefficients constants, suivant une méthode vue en cours)

iii. Montrer que $v(r,\theta) = r^k(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta))$

(c) **Problème de Dirichlet :**

Soit f une fonction définie sur le cercle $C(0,R)$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. (la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

Le problème de Dirichlet consiste à rechercher une fonction u ,

⋆ définie en continue sur le disque $\overline{B}(0,R)$,
⋆ harmonique sur l'intérieur $\overset{o}{B}(A,R)$,
⋆ et qui coïncide avec f sur la frontière $C(0,R)$.

i. Montrer que le problème de Dirichlet admet au plus une solution.

ii. Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que les suites $\sum \lambda_n R^n$ et $\sum \mu_n R^n$ soient absolument convergentes.

Montrer que la série définie par $v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(\lambda_n \cos(n\ \theta) + \mu_n \sin(n\ \theta))$ est définie pour tout $r \in [0,R]$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et que $u = v_o\psi$ est harmonique sur $\overset{o}{B}(0,R)$

iii. En considérant le développement en série de Fourier de la fonction $\theta \ \mapsto\ f(R\cos\theta, R\sin\theta)$, dont on notera respectivement (a_n) et (b_n) les suites de coefficients de Fourier, montrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet.