Intégrales

1 Intégrales simples (fonctions continues sur un segment) :

1.1 Primitive de fonction périodique :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T.

On note $\mu_f = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$ sa valeur moyenne.

a) A quelle condition f admet elle des primitives périodiques ?

b) Dans le cas contraire, soit F une primitive de f. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$

c) Que dire de la dérivée d'une fonction périodique ?

SOLUTION :

a) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ étant égales à une constante additive près, il suffit d'étudier le comportement de l'une d'enter elles.

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt$$
$$= \int_0^T f(t)dt + \int_0^x \underbrace{f(u+T)}_{=f(u)}du \quad \text{(par le changement de variable } t = u+T\text{)}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) = \displaystyle\int_0^T f(t)dt + F(x)$

et finalement, $\boxed{\text{les primitives de } f \text{ sont périodiques } \iff \mu_f = 0}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit $n = E\left(\dfrac{x}{T}\right)$, de sorte que $nT \leq x < nT+T$ ou encore $x = nT + y$ avec $0 \leq y < T$.

D'après la question précédente, $F(x) = F(y+nT) = n\displaystyle\int_0^T f(t)dt + F(y)$

$$F(x) = \frac{x-y}{T}\int_0^T f(t)dt + F(y) = x\mu_f - y\mu_f + F(y)$$

F est continue comme primitive d'une fonction continue par morceaux, donc est bornée sur le segment $[0,T]$:

$$|F(y)| \leq M = \sup_{u\in[0,T]} |\ F(u)\ | \qquad \text{donc} \qquad |-y\mu_f + F(y)| \leq T|\mu_f| + M$$

l'égalité $F(x) = x\mu_f - y\mu_f + F(y)$ montre alors que $\boxed{F(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} x\ .\ \mu_f}$

c) La dérivée d'une fonction périodique est toujours périodique.

(immédiat en dérivant l'égalité $f(x) = f(x+T)$)

1.2 Module d'une intégrale et intégrale du module :

Soit f une fonction complexe continue sur le segment $[a,b]$

A quelle condition a-t-on $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$?

SOLUTION :

Soit $\alpha = \text{Arg}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right)\ [2\pi]$ et pour tout $t \in [a,b]$, $\theta(t) = \text{Arg}(f(t))\ [2\pi]$

de sorte que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| e^{i\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b |f(t)|e^{i\theta(t)}dt$

On suppose que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$

alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt - \left|\int_a^b f(t)dt\right| = 0 = \int_a^b f(t)e^{-i\theta(t)}dt - e^{-i\alpha}\int_a^b f(t)dt$

$\displaystyle\implies \int_a^b (e^{-i\theta(t)} - e^{-i\alpha})f(t)dt = 0$

$\displaystyle\implies \int_a^b (1 - e^{i\theta(t)-i\alpha})|f(t)|dt = 0$

en prenant la partie réelle, $\displaystyle\int_a^b \underbrace{(1-\cos(\theta(t)-\alpha))}_{\geq 0}\underbrace{|f(t)|}_{\geq 0}dt = 0$

La fonction intégrée étant continue, positive et son intégrale nulle, alors

$\forall t \in [a,b],\ (1-\cos(\theta(t)-\alpha))|f(t)| = 0$

donc pour tout $t \in [a,b]$ tel que $f(t) \neq 0$, $\cos(\theta(t)-\alpha) = 1$ et donc $\theta(t) - \alpha = 0\ [2\pi]$

pour les t éventuels tels que $f(t) = 0$, l'argument $\theta(t)$ n'est pas défini on peut là encore le prendre égal à α

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \text{ si et seulement si l'argument de } f(t) \text{ est constant.}}$

(réciproque immédiate)

1.3 Equivalent d'intégrale (ENSI)

Trouver une relation de récurrence concernant $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ et montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$

SOLUTION :

$\displaystyle I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x).\tan^n x\, dx =$

$\displaystyle = \left[\ \frac{1}{n+1}.\tan^{n+1} x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, (\underbrace{\tan x - 1}_{\leq 0})\, dx \leq 0$

La suite (I_n) est décroissante.

donc $\quad I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

et l'encadrement $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$ entraine que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$ quand $n \to +\infty$

1.4 intégrales de Wallis

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

Etablir une relation de récurrence sur les termes de la suite (u_n), étudier les variations de (u_n) et la suite $(n.u_n.u_{n-1})$

En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

- $\displaystyle u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \sin^n x\, dx = \big[\ -\cos x\ \sin^n x\ \big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2 x\ \sin^{n-1} x\, dx.$

  $\displaystyle = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\ \sin^{n-1} x\, dx = n(u_{n-1} - u_{n+1})$

  d'où $\boxed{(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}}$

- $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\underbrace{\sin x - 1}_{\leq 0})\, dx \leq 0$

  La suite (u_n) est décroissante :

  $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} = \dfrac{n+1}{n-1}u_{n+1}$ $\quad$ donc $\quad 1 \leq \dfrac{u_n}{u_{n+1}} \leq \dfrac{u_{n-1}}{u_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n-1}$

  on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ c'est à dire que $u_{n+1} \sim u_n$ $\quad$ quand $\quad n \to +\infty$

  L'égalité $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ entraine que $\quad (n+1)u_{n+1}u_n = nu_nu_{n-1}$ $\quad$ c'est à dire que la suite $(\underbrace{nu_nu_{n-1}}_{v_n})$ est constante.

  $v_1 = u_1.u_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $\forall n \geq 1, \quad nu_nu_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

- Puisque $u_n \sim u_{n-1}$, il s'ensuit que $n.u_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$

et finalement $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \text{ quand } \quad n \to +\infty}$

1.5 Intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a,b]$.

On suppose que $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$.

Montrer que f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

SOLUTION :

Supposons que f admette moins de n zeros sur $]a,b[$, qu'on notera $x_1, x_2, ..., x_p$, $\ p < n$, rangés par ordre croissant.

f garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (sinon, étant continue, elle s'annulerait entre x_i et x_{i+1} en vertu du théorème des valeurs intermédiaires)

De ses racines, ne retenons que celles où f s'annule en changeant de signe, que nous renumérotons en $x_1, x_2, ..., x_q$, $\ q \leq p < n$

alors la fonction produit $x \longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, puisque les changements de signe en traversant x_i de la fonction f sont compensés par ceux du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)$

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$, alors $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_a^b t^k f(t)dt = 0$

donc $\displaystyle\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)dx = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction intégrande est continue, non identiquement nulle et de signe constant sur le segment $[a,b]$.

Donc f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

1.6 Intégrale d'une fonction positive :

Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b f^3(t)dt = \int_a^b f^4(t)dt$.

Déterminer la fonction f.

SOLUTION :

Notons $J = \displaystyle\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b f^3(t)dt = \int_a^b f^4(t)dt$.

alors $\displaystyle\int_a^b (f^2(t) - 2f^3(t) + f^4(t))dt = J - 2J + J = 0$, c'est à dire $\displaystyle\int_a^b (f(t) - f^2(t))^2 dt = 0$

la fonction $(f - f^2)^2$ étant positive et continue, elle est donc identiquement nulle.

ainsi, $\forall x \in [a,b],\ f(x)(1 - f(x)) = 0$

$\implies \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1$.

Or si f prend la valeur 0 en certain(s) point(s) et la valeur 1 en d'autre(s), par contnuité, elle prend toute valeur comprise entre 0 et 1 en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, contrairement à ce qui vient d'être prouvé.

Donc soit $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$, soit $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 1$

1.7 Intégrale fonction des bornes (Centrale)

Montrer que pour tout $x > 1$, il existe $y \in]1, +\infty[$, unique, tel que $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)} dt = 1$ (Centrale)

On note $f(x)$ cet unique y.

Etudier la continuité, les variations et limites aux bornes de la fonction f. Montrer que f est C^1 sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de $f'(x)$.

SOLUTION :

Pour $x \in]1, +\infty[$, fixé, soit h_x la fonction $y \longrightarrow \displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)} dt$

La fonction $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$ étant continue et strictement positive sur $]1, +\infty[$, sa primitive h_x est C^1 sur $]1, +\infty[$ et strictement croissante.

- Quand $t \to +\infty$, $\ \dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$ (car $\ln(t) = o(t)$)

et par minoration l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} h_x(y) = +\infty$

• Quand $t \to 0$, $\displaystyle\frac{1}{\ln(t)} \sim \frac{1}{t-1}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge donc $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} h_x(y) = -\infty$

y	1		x		$+\infty$
$h_x(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

h_x, continue et strictement croissante, réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Donc il existe un unique $y \in]1,+\infty[$ tel que $h_x(y) = 1$, c'est à dire tel que $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)}dt = 1$.

La fonction h_x dépendant de x, prenons plutôt $H(y) = h_2(y) = \displaystyle\int_2^y \frac{1}{\ln(t)}dt$.

H est encore une bijection strictement croissante de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$:

y	1		2		$+\infty$
$H(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout x de $]1,+\infty[$, $y = f(x)$ est défini par l'égalité : $\displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{1}{\ln(t)}dt = 1$.

Or $\displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{1}{\ln(t)}dt = H(f(x)) - H(x)$ car H est une primitive de $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$.

Donc $H(f(x)) - H(x) = 1$, $H(f(x)) = H(x) + 1$, et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1)$

• Quand $x \to +\infty$, $H(x) \to +\infty$ et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1) \to +\infty$ (voir les tableaux de variation)

• Quand $x \to 1^+$, $H(x) \to -\infty$ et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1) \to 1$ (voir les tableaux de variation)

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{1^+} f = 1}$

• H, primitive de $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et sa dérivée ne s'annule pas.

H^{-1} est donc de classe C^1 sur $]-\infty,+\infty[$, et $\forall x \in]-\infty,+\infty[$, $(H^{-1})'(x) = \dfrac{1}{H'(H^{-1}(x))}$

$$(H^{-1})'(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln(H^{-1}(x))}} = \ln(H^{-1}(x))$$

Par composition, $f(x) = H^{-1}(H(x)+1)$ est C^1 sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = (H^{-1})'(H(x)+1).H'(x)$

$$f'(x) = \ln(\underbrace{H^{-1}(H(x)+1)}_{f(x)}).\frac{1}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}}$

2 Sommes de Riemann

2.1 Sommes de Riemann :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

SOLUTION :

$u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1-0}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f : t \longrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Puisque f est continue sur ce segment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

2.2 Fausse intégrale de Riemann :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

SOLUTION :

$\ln(u_n) = \displaystyle\frac{1}{n}(\ln(n!) - n\ln(n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\Big(ln(k) - \ln(n)\Big) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f : t \longrightarrow \ln(t)$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Mais la fonction ln n'est pas continue sur $[0,1]$ et on ne peut pas conclure par le théorème sur les sommes de Riemann.

La fonction ln est continue et croissante sur $]0,1]$, donc, pour tout $k \in [[1,n]]$,

$\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}], \quad \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln t \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

et en intégrant, $\quad \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \overset{(1)}{\leq} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln t\, dt \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

En sommant pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\, dt \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\, dt + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\, dt$

Or $\int_{\alpha}^{1} \ln t\, dt = \Big[\, t\, \ln t\Big]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} dt = -\alpha\ln\alpha - 1 + \alpha \quad \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \quad -1$

En passant à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = -1$$

et par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$

Remarque : On aurait pu aussi employer la formule de Stirling

2.3 Vraie et fausse intégrale de Riemann :

1-a) Soit f une fonction continue positive décroissante et intégrable sur $]0,1]$

a) Montrer que $\lim_{0} x.f(x) = 0$

b) Soit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

2- Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

a) en utilisant la question précédente

b) à l'aide de la formule de Stirling

3- Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$ est convergente et la calculer en appliquant 1-b)

(on rappelle que $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$)

SOLUTION :

1- Puisque f est continue positive décroissante et intégrable sur $]0,1]$, la fonction $x \longrightarrow \int_x^1 f(t)dt$ est décroissante sur $]0,1]$ et majorée et la fonction reste $r:\ x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ a pour limite 0 quand $x \to 0^+$

$\forall x \in]0,1],\ (x - \frac{x}{2})f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^{x} \underbrace{f(t)}_{\geq f(x)}\, dt \leq r(x)$ donc $0 \leq xf(x) \leq 2r(x)$ et par encadrement,

$\lim_{x\to 0^+} x.f(x) = 0$

2-a) Soit $v_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

$\ln(v_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1.2.3.....(n-1).n}{n.n.n.\ \dots\ .n.\ n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(t)dt = -1$

(voir justification à l'exercice précédent)

par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^{-1}$

2.4 Vraie et fausse intégrale de Riemann :

Etudier les limites de $\quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \quad$ et $\quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

SOLUTION :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}$ est une somme de Riemann pour la fonction $f\ :\ x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur le segment $[0,1]$ subdivisionné en n intervalles égaux.

La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, on sait qu'alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \Big[\ \mathrm{Argsh}(x)\Big]_0^1 = \Big[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(1+\sqrt{2})}$$

b) $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}}$ est aussi une somme de Riemann pour la fonction

$g\ :\ x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur le même segment, mais la fonction g n'est pas définie au point 1 ni prolongeable en une fonction continue puisque $\displaystyle\lim_{1^-} g = +\infty$.

On ne peut pas dans ce cas appliquer le théorème ci-dessus.

On procédera alors par encadrement en utilisant la **monotonie** de g :

Remarquons d'abord que $\forall x \in [0,1[,\ \displaystyle\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[\ \mathrm{Arcsin}(t)\Big]_0^x = \mathrm{Arcsin}(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \frac{\pi}{2}$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$

g est croissante sur $[0,1[$. Soit $k \in \{0,1,...,n-1\}$

$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[,\ g(\frac{k}{n}) \le g(t) \le g(\frac{k+1}{n})$ et en intégrant, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right)dt \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)dt \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k+1}{n}\right)dt$

$$\frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \overset{(1)}{\le} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)dt \overset{(2)}{\le} \frac{1}{n}g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n^2-(k+1)^2}}$$

d'où $\quad \forall k \in \{1,2,...,n-1\},\ \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(t)dt \overset{(2)}{\le} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \overset{(1)}{\le} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)dt$

En sommant pour $k=1,2,...,n-1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} g(t)dt \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \le \int_{\frac{1}{n}}^1 g(t)dt$

et en ajoutant $\dfrac{1}{n}$ à chaque membre : $\displaystyle\frac{1}{n} + \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(t)dt \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = v_n \le \int_{\frac{1}{n}}^1 g(t)dt + \frac{1}{n}$

Puisqu'on a vu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, chaque terme qui encadre v_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}}$

3 Intégrales impropres

3.1 Convergence et calcul d'intégrale :

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

SOLUTION :

- La fonction $f:\ t \longrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
  - $|f(x)| \overset{x\to 0^+}{\sim} \left|\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right| = |-2\ln x| = \underbrace{o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{integrable\ sur\ ]0,1]}$

  donc par majoration, f est intégrable sur $]0,1]$.
  - $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \overset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{integrable\ sur\ [1,+\infty[}$

  donc par équivalence, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

  Par additivité, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ est absolument convergente.
- Soient a et b tels que $0<a<b$ et intégrons par parties sur $[a,b]$:

$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b t\frac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}dt$$
$$= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt$$

et en passant à la limite quand $a\to 0^+$ et $b\to+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = 0-0+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = [2\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \pi$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \pi}$$

3.2 Convergence et calcul d'intégrale :

Justifier la convergence et calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt$

SOLUTION :

- La fonction $h:\ t\mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

  Quand $x\to 0^+$, $|h(t)| \sim |\ln(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc h est intégrable sur $]0,1]$.

  Quand $x\to+\infty$, $|h(t)| \sim |\frac{\ln(t)}{t^2}| = o\left(\frac{\sqrt{t}}{t^2}\right) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ donc h est intégrable sur $[1,+\infty[$.

  Le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\, du$

  donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = 0}$
- Raisonnement du même type pour la convergence de l'intégrale.

  Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $0<a<b$.

$$\int_a^b \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = \int_a^b \frac{(1+t^2-t^2)\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = \int_a^b \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt - \int_a^b \frac{t^2\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt$$
$$-\int_a^b \frac{t^2\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\ t\ \ln(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1+t^2}\ t\ \ln(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1+\ln(t)}{1+t^2}dt\right)$$

En passant à la limite quand $a\to 0^+$ et $b\to+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = 0+\frac{1}{2}\left(0-0-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\, dt - 0\right) = -\frac{1}{2}\,[\text{Arctan}t]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = -\frac{\pi}{4}}$$

3.3 Convergence et calcul d'intégrale :

Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

où E désigne la fonction "partie entière"

SOLUTION :

Pour tout segment $[a,b] \subset]0,1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - E\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est continue en tout point de $[a,b]$, sauf en un nombre fini, à savoir aus points de la forme $\dfrac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ qui sont dans $[a,b]$, et en ces points, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite.

f est donc continue par morceaux sur tout segement inclus dans $]0,1]$. Elle est donc continue par morceaux sur l'intervalle semi-ouvert $]0,1]$.

• Par ailleurs, $\forall t \in]0,1], 0 \leq f(t) \leq 1$

(car $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x - E(x) \leq 1$ puisque $E(x) \leq x < E(x) + 1$ par définition)

La fonction constante 1 étant intégrable sur le semi-ouvert $]0,1]$, par majoration, f l'est aussi.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est définie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t)dt$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \ \frac{1}{k+1} < t \leq \frac{1}{k} \implies k \leq \frac{1}{t} < k+1 \implies E\left(\frac{1}{t}\right) = k$$

donc $$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t)dt = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{t} - k\right) dt = [\ln t]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t)dt = \ln\frac{k+1}{k} - k\frac{k+1-k}{k(k+1)} = \ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1}$$

d'où $$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1}\right) = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) - (\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n - 1) \text{ avec } \lim \varepsilon_n = 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt = 1 - \gamma - \varepsilon_n$$

• En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) dt = 1 - \gamma}$

3.4 Convergence et calcul d'intégrale : (ENSI)

On considère les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n dt}{(1+t^2)(1+t^n)} dt$

Pour quels entiers n sont elles définies ?

Montrer que $I_n = J_n$ et calculer leur valeur.

Faire directement le calcul de I_1 et I_2.

SOLUTION :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \longrightarrow \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)}$ et $t \longrightarrow \dfrac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et les majorations $\dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$ et $\dfrac{t^n}{1+t^n} \leq 1$ entraînent

$\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\dfrac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ qui montrent que les intégrales I_n et J_n cvgent.

• Pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ ($0 < a < b$)

$$\int_a^b \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} dt = \int_{1/a}^{1/b} \frac{1}{(1+\frac{1}{u^2})(1+\frac{1}{u^n})} \frac{-1}{u^2} du = \int_{1/b}^{1/a} \frac{u^n}{(u^2+1)(u^n+1)} du \quad (\text{par le chgmt } u = \tfrac{1}{t})$$

Passons à la limite quand $a \to 0^+$ et $b \to +\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(u^2+1)(u^n+1)} du$

Donc $I = J$.

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} + \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(t^2+1)(t^n+1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement, $\boxed{I = J = \dfrac{\pi}{4}}$

• Pour $n=1$, $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1+t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\arctan t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\ln(1+t)\right]_0^{+\infty}$

$I_1=\displaystyle\frac{1}{2}\left[\arctan t+\ln\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$

• Pour $n=2$, $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2(u)}{(1+\tan^2(u))^2}du=\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2u)}{2}du=\frac{\pi}{4}$

3.5 Convergence et calcul d'intégrale : (ENSI)

Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

SOLUTION :

• Sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, la fonction $f\ :\ x\ \mapsto\ xe^{-[x]}$ est continue, sauf aux points entiers du segment.
En ces points elle admet une limite fionie à gauche et à droite.
f est donc continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, c'est à dire continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R},\ [x]\le x\le[x]+1$, donc $-[x]\le -x+1$ et $0\le xe^{-[x]}\le xe^{-x+1}\overset{x\to+\infty}{=}o\,(e^{-\frac{x}{2}})$
Puisque la fonction $x\ \mapsto\ e^{-\frac{x}{2}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, par domination, f l'est aussi.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx$ est donc convergente.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}xe^{-[x]}dx\right)$

or $\displaystyle\int_n^{n+1}xe^{-[x]}dx=\int_n^{n+1}xe^{-n}dx=e^{-n}\int_n^{n+1}xdx=e^{-n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1}=e^{-n}\frac{2n+1}{2}=(n+\tfrac{1}{2})e^{-n}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{e}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$

Or on sait que $\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, et par le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

et donc $\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$

Dès lors, $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx=\frac{\frac{1}{e}}{(1-\frac{1}{e})^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{(e-1)^2}+\frac{e}{2(e-1)}=\frac{e^2+e}{2(e-1)^2}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx=\frac{e^2+e}{2(e-1)^2}}$$

• **Vérification MAPLE :**

```
>int(x*exp(-trunc(x)),x=0..infinity);evalf(");
e:=exp(1); (e*e+e)/2/(e-1)^2;evalf(");
```

3.6 Convergence et calcul d'intégrale :

Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}|\sin t|\,dt$

***SOLUTION* :**

• La fonction $f:t\mapsto e^{-t}\sin t$ est continue sur $[0,+\infty[$.
De plus $\forall t\in[0,+\infty[,|f(t)|=|e^{-t}\sin t|\le e^{-t}$, fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par majoration, on en conclut que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin tdt=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{it}dt\right)$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(-1+i)t}dt=\left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{+\infty}=0-\frac{1}{-1+i}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}$

(car $|e^{(-1+i)t}|=|e^{-t}e^{it}|=e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$)

En prenant la partie imaginaire, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\, dt = \frac{1}{2}}$$

• Par le changement de variable $t = n\pi + u$, on obtient :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt = \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+u)}|\sin(n\pi+u)|du = e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-u}\sin u du = e^{-n\pi}u_0$$

$$u_0 = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{(-1+i)t}dt\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{\pi}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\pi}e^{i\pi}-1}{-1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{1-i}\right) = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(t)|dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}u_n = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}u_0 = u_0\frac{1}{1-e^{-\pi}}$

(somme d'une série géométrique de raison $e^{-\pi}$)

$$\int_0^{+\infty}|f(t)|dt = \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt = \frac{1}{2}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

3.7 Convergence et calcul d'intégrale :

On considère une fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt$ est absolument convergente et la calculer en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$

SOLUTION :

Posons $\forall t\in\mathbb{R}^*,\ g(t) = f\left(t-\frac{1}{t}\right)$. Ainsi, g est une fonction continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

Soit φ la fonction définie par : $\forall t\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \varphi(t) = t-\frac{1}{t}$

$\forall t\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \varphi'(t) = 1+\frac{1}{t^2} > 0$.

La fonction φ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

t	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
			$\nearrow +\infty$	$\Vert$			$\nearrow +\infty$	
$\varphi(t)$		0		$\Vert$		0		
	$-\infty \nearrow$			$\Vert$	$-\infty \nearrow$			

• Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$

La fonction g est continue sur le segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$

$$\int_a^b \left|f\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|dt = \int_a^b\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left|f\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|dt - \int_a^b\frac{1}{t^2}\left|f\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|dt$$

Par le changement de variable $u = t-\frac{1}{t}$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\int_a^b \left|f\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|dt = \int_{a-\frac{1}{a}}^{b-\frac{1}{b}}|f(u)|du - \underbrace{\int_a^b\frac{1}{t^2}\left|f\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|dt}_{\geq 0} \leq \int_{a-\frac{1}{a}}^{b-\frac{1}{b}}|f(u)|du \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$$

donc, pour tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$, $\int_a^b|g(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$, la fonction $|g|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Raisonnement analogue pour l'intégrabilité sur $]-\infty,0[$

• Soient a, b des réels tels que $0 < a < b$, et reprenons le calcul comme précédemment :

$$\int_a^b f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt = \int_{a-\frac{1}{a}}^{b-\frac{1}{b}} f(u)du - \int_a^b\frac{1}{t^2}f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt$$

et faisons le changement de variable $v = -\frac{1}{t}$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_a^b f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt = \int_{a-\frac{1}{a}}^{b-\frac{1}{b}} f(u)du - \int_{-\frac{1}{a}}^{-\frac{1}{b}} f\left(v-\frac{1}{v}\right)dv$$

Quand $a\to 0^+$, $a-\frac{1}{a} = \varphi(a)\to-\infty$, $-\frac{1}{a^2}\to-\infty$

Quand $b\to+\infty$, $b-\frac{1}{b} = \varphi(b)\to+\infty$, $-\frac{1}{b^2}\to 0$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du - \int_{-\infty}^{0} f\left(v-\frac{1}{v}\right)dv$$

soit finalement : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = \int_0^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)dt + \int_{-\infty}^{0} f\left(v-\frac{1}{v}\right)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$

3.8 Intégrale semi-convergente :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge, et calculer un équivalent de $\displaystyle\int_0^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ lorsque $x\to+\infty$.

SOLUTION :

Soit $x\in\mathbb{R}^+$ et $m\in\mathbb{N}$ tel que $m\pi\le x\le(m+1)\pi \qquad (\ m=E\left(\frac{x}{\pi}\right))$

$$\int_0^x\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\int_0^{m\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt+\int_{m\pi}^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt+\int_{m\pi}^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$$

Par le changement de variable $t=k\pi+u$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(k\pi+u)}{k\pi+u}\right|du$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{k\pi+u}du \qquad \text{or } \forall u\in[0,\pi],\ \frac{\sin(u)}{(k+1)\pi}\le\frac{\sin(u)}{k\pi+u}\le\frac{\sin(u)}{k\pi}$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{(k+1)\pi}du\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{k\pi}du=\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)du=\frac{2}{k\pi}$

ainsi, $\displaystyle\frac{2}{(k+1)\pi}\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\frac{2}{k\pi}$, et, en sommant pour k variant de 0 à $m-1$,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}\le\int_0^{m\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}$$

et , $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k}+\int_{m\pi}^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\int_0^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}+\int_{m\pi}^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$

Par ailleurs, $\displaystyle 0\le\int_{m\pi}^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\le\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}\frac{1}{t}\,dt=\ln\left(\frac{m+1}{m}\right)\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$

On sait que $\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(m)$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(m-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(m)$

L'encadrement $m\pi\le x\le(m+1)\pi$ entraîne que $m\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{\pi}$ et que

$$\ln(m)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{x}{\pi}\right)=\ln(x)-\ln(\pi)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x)$$

On en déduit alors que $\boxed{\displaystyle\int_0^{x}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\ln(x)}$

3.9 Intégrale et série :

Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(t-E(t)-\frac12)^2}{t^2}dt$ (où $E(t)$ désigne la partie entière de t)

SOLUTION :

$$J_n=\int_n^{n+1}\frac{(t-E(t)-\frac12)^2}{t^2}\,dt=\int_n^{n+1}\frac{(t-n-\frac12)^2}{t^2}\,dt=\int_n^{n+1}\frac{t^2-2(n+\frac12)t+(n+\frac12)^2}{t^2}\,dt$$

$$J_n=\int_n^{n+1}\left(1-\frac{2(n+\frac12)}{t}+\frac{(n+\frac12)^2}{t^2}\right)dt=1-2(n+\tfrac12)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+(n+\tfrac12)^2\left(\frac{-1}{n+1}-\frac{-1}{n}\right)$$

$$J_n=1-(2n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{n^2+n+\frac14}{n(n+1)}=2-(2n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac14\frac{1}{n(n+1)}$$

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{(t-E(t)-\frac12)^2}{t^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-(2n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac14\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=1$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2-(2k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)=2n-2\sum_{k=1}^{n}k(\ln(k+1)-\ln(k))-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))}_{=\ln(n+1)\ (\textit{somme telescopique})}$

$$=2n-\ln(n+1)-2\sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln(k+1)-k\ln(k)-\ln(k+1)]$$

$$=2n-\ln(n+1)-2(n+1)\ln(n+1)+2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$$

Redescendons l'indice d'une unité pour faciliter le calcul :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(2-(2k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)=2(n-1)-\ln(n)-2n\ln(n)+2\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)$$

$= 2(n-1) - \ln(n) - 2n\ln(n) + 2\ln(n!)$

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

donc $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

$\Longrightarrow \ln(n!) = n(\ln(n)-1) + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \ln(1+\varepsilon_n)$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(2-(2k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = 2(n-1) - \ln(n) - 2n\ln(n) + 2n(\ln(n)-1) + \ln(n) + \ln(2\pi) + 2\ln(1+\varepsilon_n)$

$= -2 + \ln(2\pi) + 2\ln(1+\varepsilon_n)$

en passant à la limite quand $n\to+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(2-(2k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = -2+\ln(2\pi)$

et finalement, $\boxed{J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t-E(t)-\frac{1}{2})^2}{t^2}dt} = \dfrac{1}{4} - 2 + \ln(2\pi) \boxed{= -\dfrac{7}{4} + \ln(2\pi)}$

3.10 Calcul d'équivalents :

Déterminer des équivalents en 0^+ et en $+\infty$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

et de $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$

SOLUTION :

a) Etude en en $+\infty$

- $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-t}dt = \left[\frac{-1}{t}e^{-t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x} - \underbrace{\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t}dt}_{h(x)}$

$$0 \le h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t}dt \le \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \overset{x\to\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \overset{x\to\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}du$ (par le changement de variable $x+t=u$)

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = e^x\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du \overset{x\to\infty}{\sim} e^x\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

b) Etude en 0^+

- $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-t}dt = \Big[\ln(t)e^{-t}\Big]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt = -\ln x e^{-x} + \int_x^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$

la fonction $t \longrightarrow ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+,\infty[$ et intégrable sur cet intervalle

(intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\overset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et intégrable sur $]0,1]$ car $\ln(t)e^{-t} \overset{0^+}{\sim} \ln(t) = \overset{0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$)

donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$ a une limite finie quand $x\to0^+$, qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$

Quant à $-\ln xe^{-x}$, c'est un infiniment grand quand $x\to0^+$, équivalent à $-\ln x$.

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \overset{x\to0^+}{\sim} -\ln x}$

- En reprenant l'égalitè $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$, on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \overset{x\to0^+}{\sim} e^x(-\ln x) \overset{x\to0^+}{\sim} (-\ln x)$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \overset{x\to0^+}{\sim} -\ln x}$

3.11 *Intégrale de reste d'intégrale impropre :

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

Calculer un équivalent de $f(x)$ quand $x\to+\infty$ et quand $x\to0$

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)dx$

SOLUTION :

• Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$

$\forall t\geq 1,\ 0\leq\dfrac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $[1,+\infty[$, par majoration la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est définie pour tout $x>0$.

• Pour $x=0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Mais $\dfrac{e^{-t}}{t}\sim\dfrac{1}{t}$ quand $t\to 0^+$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{t}dt$ est divergente et $f(x)$ n'est pas défini.

Finalement, $\boxed{D_f=]0,+\infty[}$

• **Equivalent en $+\infty$:**

• $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-t}dt=\left[\frac{-1}{t}e^{-t}\right]_x^{t\to+\infty}-\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t}dt=\frac{e^{-x}}{x}-\underbrace{\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t}dt}_{h(x)}$

$0\leq h(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t}dt\leq\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t}dt=\frac{e^{-x}}{x^2}\overset{x\to\infty}{=}o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$

donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\overset{x\to\infty}{=}\frac{e^{-x}}{x}+o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\overset{x\to\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}$ $\boxed{f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\overset{x\to\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}}$

• **Equivalent en 0^+ :**

• $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-t}dt=\Big[\ln(t)e^{-t}\Big]_x^{t\to+\infty}+\int_x^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt=-\ln xe^{-x}+\int_x^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$

la fonction $t\longrightarrow ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+,\infty[$ et intégrable sur cet intervalle

(intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\overset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et intégrable sur $]0,1]$ car $\ln(t)e^{-t}\overset{0^+}{\sim}\ln(t)\overset{0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$)

donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$ a une limite finie quand $x\to 0^+$, qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$

Quant à $-\ln xe^{-x}$, c'est un infiniment grand quand $x\to 0^+$, équivalent à $-\ln x$.

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\overset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$

Intégrabilité de f :

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme intégrale fonction de la borne inférieure.

$f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\overset{x\to\infty}{\sim}\frac{e^{-x}}{x}=o\left(e^{-x}\right)$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$

$f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\overset{x\to0^+}{\sim}-\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0,1]$

Par additivité, f est intégrable sur $]0,+\infty[$

• Soient a et b réels tels que $0<a<b$

Comme intégrale fonction de la borne inférieure, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}$

Les fonctions intervenant étant C^1 sur $[a,b]$, intégrons par parties comme suit :

$\displaystyle\int_a^b f(t)dt=[tf(t)]_a^b-\int_a^b tf'(t)dt=bf(b)-af(a)+\int_a^b e^{-t}dt$

$\displaystyle\int_a^b f(t)dt=bf(b)-af(a)-e^{-b}+e^{-a}$

Quand $b\to+\infty$, $bf(b)\sim b\dfrac{e^{-b}}{b}=e^{-b}\to 0$

Quand $a\to 0^+$, $af(a)\sim -a\ln a\to 0$

En passant à la limite quand $a\to 0^+$ et quand $b\to+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt=1$

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)dx=1}$

3.12 Intégrale du reste de Gauss :

a) Domaine de définition de la fonction $g\ :\ x\ \longrightarrow \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand $x \to +\infty$

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)dx$ existe et la calculer.

SOLUTION :

a) La fonction $t \xrightarrow{f} e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \geq 1,\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et sur $[x,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $g\ :\ x\ \longrightarrow \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$ comme intégrale d'une fonction continue fonction de la borne inférieure .

De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -e^{-x^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ g(x) = \int_x^{+\infty}\frac{-1}{2t}(-2te^{-t^2})dt = \left[\frac{-1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^{\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt$$

$$g(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \underbrace{\int_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt}_{h(x)}$$

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2x^2}g(x) \overset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$$

donc $\quad g(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2x} - o(g(x)) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$ $\qquad \boxed{g(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}}$

b) g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^b g(x)dx = \Big[xg(x)\Big]_0^b - \int_0^b xg'(x)dx = -bg(b) + \int_0^b xe^{-x^2}dx$$

$$\int_0^b g(x)dx = -bg(b) - \left[\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^b = -bg(b) - \frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

or $\quad bg(b) \overset{b\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-b^2}}{2}$ $\quad$ (question précédente) $\quad$ donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b g(x)dx = \frac{1}{2}$

et finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)dx = \frac{1}{2}}$

3.13 *Intégrale de reste d'intégrale impropre :

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt$ pour tout $a > 0$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ convergent.

Qu'en est il de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$?

Calculer un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ quand $x \longrightarrow 0^+$

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx$ converge et la calculer.

SOLUTION :

a) • Soit $a > 0$. $\ \forall x > 0, \displaystyle\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt$ est définie car $t \longrightarrow \frac{e^{it}}{t}$ est continue sur le segment $[a,x]$.

$$\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_a^x + \int_a^x \frac{e^{it}}{it^2}dt = i\frac{e^{ia}}{a} - i\frac{e^{ix}}{x} - i\int_a^x \frac{e^{it}}{t^2}dt$$

puisque $\left|\dfrac{e^{it}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt$ converge absolument, de plus $\dfrac{e^{ix}}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt\right) = i\frac{e^{ia}}{a} - i\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt$ converge.

• La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,a]$.

Donc $\int_0^a \frac{\sin t}{t}dt$ est définie et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ aussi par additivité.

- $\frac{\cos t}{t} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc l'intégrale $\int_0^a \frac{\cos t}{t}dt$ est divergente.

Fixons $a > 0$. $\forall x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt = \int_x^a \frac{\cos t}{t}dt + \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt}_{A\ fixe} = A + \int_x^a \frac{1-2\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$

$$= A + \ln a - \ln x - 2\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$$

or $t \longrightarrow \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t}{4}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$ a une limite finie quand $x \to 0^+$

L'égalité $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt = A + \ln a - \ln x - 2\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$ montre alors que $\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x}$

b) $\int_a^b \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = \left[x\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right]_a^b - \int_a^b x\frac{-e^{ix}}{x}dx$

$$= b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt - a\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt + \int_a^b e^{ix}dx$$

quand $a \longrightarrow 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt \sim -\ln a$ (voir question a)) donc $\lim_{a\to 0^+}\left(a\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right) = 0$

Mais quand $b \longrightarrow +\infty$, $\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt \longrightarrow 0$ (reste d'une intégrale convergente)

et $b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt$ présente la forme indéterminée $\infty \times 0$

Passons à la limite quand $a \longrightarrow 0$:

$$\int_0^b \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt + \int_0^b e^{ix}dx$$

$$= b\int_b^{+\infty} \underset{\to}{\frac{1}{t}}\overrightarrow{e^{it}}\,dt + \frac{e^{ib}-1}{i} = b\left[\frac{e^{it}}{it}\right]_{t=b}^{t\to+\infty} + b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{it^2}dt + i - ie^{ib}$$

$$= 0 - b\frac{e^{ib}}{ib} + b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{it^2}dt + i - ie^{ib} = i - ib\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}dt$$

Reste à étudier $\lim_{b\to+\infty}\left(b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}dt\right)$:

$$b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}dt = b\left(\left[\frac{e^{it}}{it^2}\right]_{t=b}^{t\to+\infty} + 2\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{it^3}dt\right) = b\left(0 - \frac{e^{ib}}{ib^2} + 2\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{it^3}dt\right)$$

$$= i\frac{e^{ib}}{b} - 2ib\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^3}dt$$

or $b\left|\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^3}\right| \leq b\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt = b\frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$

donc $\lim_{b\to+\infty}\left(b\int_b^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}dt\right) = 0$

et $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = i$

Ceci montre que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right)dx \text{ converge}}$ et que $\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = i}$

- En considérant les parties réelle et imaginaire, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt\right)dx = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt\right)dx = 1}$$

3.14 ** Fonctions de carré intégrables :

Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, telle que f^2 et $f"^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $f.f"$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $f.f'$ admet une limite finie en $+\infty$ et que f'^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$

c) Montrer que $\lim_{+\infty} f.f' = 0$ et que $\lim_{+\infty} f = 0$

SOLUTION :

a) $\forall x \in [0,+\infty[, \quad (|f(x)|-|f"(x)|)^2 = f(x)^2 + f"(x)^2 - 2|f(x)|.|f"(x)| \geq 0$

et donc $|f(x).f"(x)| \leq \dfrac{1}{2}(f(x)^2 + f"(x)^2)$, ce qui montre par majoration que $|f.f"|$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) $\forall x \in [0,+\infty[, \quad \displaystyle\int_0^x f'^2(t)dt = \Big[f(t)f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x f(t)f"(t)dt$

donc $\quad f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \displaystyle\int_0^x f'^2(t)dt + \int_0^x f(t)f"(t)dt \qquad (1)$

d'après a), $f.f"$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)f"(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)f"(t)dt$

La fonction $x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x f'^2(t)dt$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie quand $x \to +\infty$ si elle est bornée, a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ si elle n'est pas bornée.

Donc, d'après (1), $f(x)f'(x)$ admet une limite, finie ou infinie, quand $x \to +\infty$

Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$, l'égalité $\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\Big[f^2(t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0))$ montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'intégrabilité de f^2 sur $[0,+\infty[$.

Donc $f(x)f'(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

L'égalité (1) entraîne alors que $\displaystyle\int_0^x f'^2(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, c'est à dire que f'^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

c) f^2 et f'^2 étant intégrable sur $[0,+\infty[$, comme en a), on en déduit que $f.f'$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$f.f'$ ayant une limite finie en $+\infty$, (question b) celle-ci ne peut être que 0.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = 0$

L'égalité $f^2(x) - f^2(0) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)dt$ et l'intégrabilité de $f.f'$ sur $[0,+\infty[$. montrent que f^2 admet une limite finie en $+\infty$, et celle-ci ne peut être que 0 puisque f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3.15 **Convergence d'intégrales : intégrales de Fresnel et généralisation :

1- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ converge.

2- Soit P un polynôme réel de dégré supérieur ou égal à 2.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(P(t))dt$ converge.

SOLUTION :

1- $\displaystyle\int_a^x \cos(t^2)dt = \int_{a^2}^{x^2}\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}du \quad$ (par le changement $t^2 = u, \ \ t = \sqrt{u}$

$\displaystyle = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_{a^2}^{x^2} + \int_{a^2}^{x^2}\frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$

$\dfrac{\sin(u)}{u\sqrt{u}} \overset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc on peut passer à la limite quand $a \to 0^+$:

$\displaystyle\int_a^x \cos(t^2)dt = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \int_0^{x^2}\frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$ et $\left|\dfrac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}\right| \leq \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ donc $u \to \dfrac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

par ailleurs, $\left|\dfrac{\sin(x^2)}{2x}\right| \leq \dfrac{1}{2x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \cos(t^2)dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ converge.

2- Soit P un polynôme réel de dégré n supérieur ou égal à 2 : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

La fonction cosinus étant paire, quitte à changer P en $-P$, on peut supposer $a_n > 0$.

Le polynôme $P(X)$ possède au plus n racines réelles. Soit A un réel plus grand que la plus grande racine réelle de $P(X)$ (ou A quelconque si P n'a pas de racine réelle)

Puisque la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est continue et ne s'annnule pas sur $[A,+\infty[$, elle garde un signe constant sur l'intervalle $[A,+\infty[$, et ce signe est celui de a_n c'est à dire positif.

Même raisonnement pour le polynôme $P'(x)$ qui va garder un signe positif sur un intervalle de la forme $[A', +\infty[$, en choisissant $A' > A$.

La fonction $x \mapsto P(x)$ est strictement croissante dont injective sur $[A', +\infty[$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et qu'elle est continue, c'est une bijection de $[A', +\infty[$ sur $[P(A'), +\infty[$.

On notera P^{-1} sa bijection réciproque, de $[P(A'), +\infty[$ sur $[A', +\infty[$.

P étant un C^1 difféomorphisme de $[A', +\infty[$ sur $[P(A'), +\infty[$, on peut faire le changement de variable : $u = P(t)$, $du = P'(t)dt$:

$$\forall x > A',\ \int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt = \int_{A'}^{x} \frac{\cos(P(t))}{P'(t)} P'(t)dt \qquad (P' \text{ ne s'annule pas sur } [A', +\infty[\ )$$

$$\int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt = \int_{P(A')}^{P(x)} \frac{\cos u}{P'(P^{-1}(u))} du$$

intégrons par parties :

$$\int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt = \int_{P(A')}^{P(x)} \cos u \frac{1}{P'(P^{-1}(u))} du = \left[\sin u \frac{1}{P'(P^{-1}(u))}\right]_{P(A')}^{P(x)} + \int_{P(A')}^{P(x)} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))(P^{-1})'(u)}{P'^2(P^{-1}(u))} du$$

$$\int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt = \frac{\sin P(x)}{P'(x)} - \frac{\sin P(A')}{P'(A')} + \int_{P(A')}^{P(x)} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))} du$$

$P'(X)$ est un polynôme de dégré $n - 1 \geq 1$, de coefficient dominant positif, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$

et puisque le sinus est borné, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin P(x)}{P'(x)} = 0$

Etudions l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{P(A')}^{+\infty} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))} du$

$$\forall y > P(A'),\ \int_{P(A')}^{y} \left|\sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))}\right| du = \int_{A'}^{P^{-1}(y)} \left|\sin P(t) \frac{P''(t)}{P'^3(t)}\right| P'(t)dt = \int_{A'}^{P^{-1}(y)} |\sin P(t)| \frac{|P''(t)|}{P'^2(t)} dt$$

(par le changement de variable $u = P(t)$ dans l'autre sens)

$$\text{or} \quad |\sin P(t)| \frac{|P''(t)|}{P'^2(t)} \leq \frac{|P''(t)|}{P'^2(t)} \sim \frac{n(n-1)a_n t^{n-2}}{(n a_n t^{n-1})^2} = \frac{n-1}{n\, a_n} \frac{1}{t^n} \quad \text{quand } t \to +\infty$$

donc $t \mapsto |\sin P(t)| \frac{|P''(t)|}{P'^2(t)}$ est intégrable sur $[A', +\infty[$, et par les égalités ci-dessus,

l'intégrale $\displaystyle\int_{P(A')}^{y} \left|\sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))}\right| du$ admet une limite finie lorsque $y \to +\infty$

et l'intégrale $\displaystyle\int_{P(A')}^{+\infty} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))} du$ est absolument convergente.

L'égalité $\displaystyle\int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt = \frac{\sin P(x)}{P'(x)} - \frac{\sin P(A')}{P'(A')} + \int_{P(A')}^{P(x)} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))} du$ montre alors que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_{A'}^{x} \cos(P(t))dt\right) = -\frac{\sin P(A')}{P'(A')} + \int_{P(A')}^{+\infty} \sin u \frac{P''(P^{-1}(u))}{P'^3(P^{-1}(u))} du$$

cette limite étant finie, l'intégrale $\displaystyle\int_{A'}^{+\infty} \cos(P(t))dt$ est convergente.

La fonction $t \mapsto \cos(P(t))$ étant continue donc intégrable sur la segment $[0, A']$, par additivité, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(P(t))dt$ est convergente.

4 Limites et séries d'intégrales :

4.1 Limite d'intégrales :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\, x)}{1 + x^n} dx$ est définie pour tout $n \geq 1$

et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\, x)}{1 + x^n} dx$

SOLUTION :

• Pour tout n, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi\, x)}{1 + x^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Pour tout $n \geq 2$, $\left|\dfrac{\sin(\pi\, x)}{1 + x^n}\right| \leq \dfrac{1}{1 + x^n}$ et cette dernière fonction de x est intégrable sur $[1, +\infty[$

Par majoration, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi\, x)}{1 + x^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

• Pour $n = 1$, $\dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x(1 + x)}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi\, x)}{x} dx$ converge (exemple classique) et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi\, x)}{x(x+1)} dx$ converge absolument (fonction continue sur $[0,+\infty[$ et majoration $\left|\dfrac{\sin(\pi\, x)}{x(x+1)}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$)

donc, par addition l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi\, x)}{x+1} dx$ converge aussi.

• Rappelons que

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq x < 1, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = 0 \\ \text{si } x = 1, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = 1 \\ \text{si } 1 < x, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \end{cases}$$

Notons f_n la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi\, x)}{1+x^n}$

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq x < 1, \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \sin(\pi\, x) \\ \text{si } x = 1, \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{2}\sin(\pi\, x) \\ \text{si } 1 < x, \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq x < 1, g(x) = \sin(\pi\, x) \\ \text{si } x = 1, g(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi\, x) = 0 \\ \text{si } 1 < x, g(x = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\forall n \geq 2, \forall x \in [0,+\infty[,\ |f_n(x)| = \left|\dfrac{\sin(\pi\, x)}{1+x^n}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, cette dernère fonction majorante est une fonction de x seul, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

d'après le théorème de convergence majorée, on peut affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx$

donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi\, x) = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}}$

4.2 Limite d'intégrale (Mines)

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}\, dx$

Existence et limite éventuelle de la suite (u_n)

SOLUTION :

Soit $\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+...+x^n}$, qui est bien défini car $1+x+x^2+...+x^n > 0$

$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$

$f_2(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, de même que $f_n(x)$ pour $n \geq 2$ car alors $f_n(x) \leq f_2(x)$.

La suite (u_n) est donc définie à partir du rang 2.

$\forall x \in [0,+\infty[-\{1\}, f_n(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$

- si $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1-x$
- si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$
- si $1 < x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers la fonction g.

- pour $n \geq 2$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g, qui est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car nulle sur intégrable sur $[1,+\infty[$).
- $\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{f_2(x)}_{\text{intégrable sur } [0,+\infty[}$.

Par application du théorème de convergence majorée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

4.3 Intégrale de Gauss (ENSI)

On rappelle que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ converge. On note α sa valeur.

b) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$.

Exprimer J_n en fonction de termes de la suite (w_n).

Étudier $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ et en déduire la valeur de α.

SOLUTION :

b) • le changement de variable $x = \sqrt{n}.\cos t$, $dx = -\sqrt{n}.\sin t\, dt$ donne :

$$J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)^n(-\sqrt{n}.\sin t)\, dt = \sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\, dt = \sqrt{n}.w_{2n+1}$$

Puisque $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$J_n \sim \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

• Soit $h_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$

h_n est continue sur $[0,+\infty[$, $(h_n(\sqrt{n}) = 0)$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \ge n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx$

Pour tout $x \ge 0$, pour tout $n > x$,

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})} \longrightarrow e^{-x^2} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$\text{car} \quad n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \sim n.\frac{-x^2}{n} \longrightarrow -x^2 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction H :

$x \longrightarrow e^{-x^2}$.

de plus l'inégalité $\forall u \in]-\infty,1[, 1-u \le e^{-u}$ entraîne

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \le \frac{-x^2}{n} \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le e^{-x^2}$$

Donc $\forall n \in N^*, \forall x \in [0,+\infty[, \quad h_n(x) \le e^{-x^2}$

Cette majoration permet d'appliquet le théorème de convergence dominée et de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} H(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

4.4 Limite d'intégrale (ENSI)

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin x\, dx$.

Étudier $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

SOLUTION :

Définissons $h_n : x \longrightarrow \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \sin x & \text{si } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$

h_n est continue sur $[0,+\infty[$, $(h_n(0) = 0)$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \ge n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx$

L'étude des variations de la fonction $(u \to \ln(1-u+u)$ montre que :

$\forall u \in]-\infty,1[, \quad \ln(1-u) + u \le 0$

donc $\ln(1-u) \le -u$, $1-u \le e^{-u}$

Donc $\forall x \in [0,n[, \quad 0 \le \frac{x}{n} < n$, on a $1 - \frac{x}{n} \le e^{-\frac{x}{n}}$

et donc $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \le e^{-x}$

Donc, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad |h_n(x)| \le e^{-x}$ (1)

- Soit $x \in [0,+\infty[$, pour n assez grand, $x < n$ et $x \in [0,n]$ et donc $h_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \sin(x)$

$$h_n(x) = e^{n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \sin(x) \longrightarrow e^{-x}\sin x \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction H :
$x \longrightarrow e^{-x}\sin x$.

La majoration (1) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et de conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} H(x)\,dx$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx = \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{ix}\,dx\right) = \Im m\left[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right]_{c=0}^{t\to+\infty} = \Im m\left[\frac{-1}{-1+i}\right]$$

$$= \Im m\left[\frac{1+i}{(1+i)(1-i)}\right] = \frac{1}{2}$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

4.5 Limite et équivalent :

Pour quels entiers n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}dx$ converge-t-elle ?

Calculer $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et calculer un équivalent de $I_n - L$ quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

a) -$\forall n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\dfrac{1}{1+x^n} \sim \dfrac{1}{x^n}$ quand $x \to +\infty$

donc $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $n \ge 2$

- si $x \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$
- si $x \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = 0$
- pour $x = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$

Donc la suite de fonctions $(f_n) = (x \longrightarrow \frac{1}{1+x^n})_{n\ge 2}$ converge simplement sur $[0,\infty[$

vers la fonction $g : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

Chaque fonction f_n est majorée sur $[0,+\infty[$ par la fonction $F : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$, qui est continue par morceaux et ontégrable sur $[0,+\infty[$

Par application du théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 1dx + \int_1^{\infty} 0dx = 1$

b) $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}dx - 1$

$$I_n - 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx - 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^n}dx$$

$$I_n - 1 = \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^n}}du$$

(par le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ dans la deuxième intégrale)

$$I_n - 1 = \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{u^n+1}du = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{x^n+1}dx$$

Faisons le changement de variable $v = x^n, x = \sqrt[n]{v} = v^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}dv$

$I_n - 1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{v^{1-\frac{2}{n}} - v}{v+1} v^{\frac{1}{n}-1} dv = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{v^{-\frac{1}{n}} - v^{\frac{1}{n}}}{v+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 v^{\frac{1}{n}} \dfrac{v^{-\frac{2}{n}} - 1}{v+1} dv$

or $v^{-\frac{2}{n}} - 1 = e^{-\frac{2}{n}\ln(v)} - 1 \sim -\dfrac{2}{n}\ln(v)$ quand $n \to +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(v^{-\frac{2}{n}} - 1) = -2\ln(v)$

par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} v^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(v)} = e^0 = 1$

Posons $h_n(v) = n.v^{\frac{1}{n}} \dfrac{v^{-\frac{2}{n}} - 1}{v+1}$ de sorte que $I_n - 1 = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 h_n(v)dv$

Ainsi la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction k :

$v \longrightarrow \dfrac{-2\ln(v)}{v+1}$

Soit, pour $v \in [0,1]$ fixé, et pour m entier ≥ 2, $\varphi(m) = m.(v^{-\frac{2}{m}} - 1) = m.(e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1 + m.\frac{2}{m^2}e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}.\ln(v)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}(1 + \frac{2}{m}\ln(v)) - 1$

Soit alors $\psi(z) = e^z(1-z) - 1$ (où $z = -\frac{2}{m}\ln(v) \in \mathbf{R}_+$)

$\psi'(z) = e^z(1-z) - e^z = -ze^z < 0$

ψ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$, $\psi(0) = 0$ donc $\psi(x) \leq 0$ sur $[0,+\infty[$.

Il s'ensuit que $\varphi'(m) \leq 0$ sur $[2,+\infty[$ et que

$\forall n \geq 2, h_n(v) \leq h_2(v) = 2.\sqrt{v}\dfrac{v^{-1} - 1}{v+1} \sim \dfrac{2}{\sqrt{v}}$ quand $v \longrightarrow 0^+$

h_2 est continue et intégrable sur $]0,1]$

Par application du théorème de convergence dominèe, on en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 h_n(x)dx = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{-2\ln(v)}{v+1}dx$

Donc $(I_n - 1) \sim \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{-2\ln(v)}{v+1}dv$ quand $n \to +\infty$

♣ Enfin calculons $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t+1}dt$:

$\forall t \in]0,1[, \dfrac{\ln(t)}{t+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k t^k \ln(t)}_{u_k(t)}$

$\displaystyle\int_0^1 |u_k(t)|dt = -\int_0^1 t^k \ln(t) dt = \underbrace{\left[-\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t) \right]_{t\to 0^+}^1}_{=0} + \int_0^1 \dfrac{t^k}{k+1}dt = \dfrac{1}{(k+1)^2}$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\int_0^1 |u_k(t)|dt$ est convergente, d'après le théorème de d'intégration des séries de fonctions, on peut alors affirmer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 u_k(t)dt \right)$

Donc $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t+1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$

Finalement, $(I_n - 1) \sim \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{-2\ln(v)}{v+1}dv \sim \dfrac{\pi^2}{6n^2}$ quand $n \to +\infty$

$\boxed{(I_n - 1) \sim \dfrac{\pi^2}{6n^2} \text{ quand } n \to +\infty}$

4.6 Intégrale et série 1 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x^x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^n}$

SOLUTION :

• La fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{x^x} = e^{-x\ln x}$ est continue sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$ donc $\lim_{0^+} f = 1$ et on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant $f(0) = 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x^x}dx$ est alors bien définie comme étant celle d'une fonction continue sur un segment.

• $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^n}$ est convergente par majoration par une série de Riemannn convergente.

• $\forall x \in]0,1],\ \dfrac{1}{x^x} = e^{-x\ln x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$

Définissons alors pour $n \geq 0$ et $x \in]0,1]$, $u_n(x) = \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$

- chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]0,1]$,
- la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme la fonction f
- Montrons enfin que la série numérique $\sum \int_0^1 |u_n(x)|dx$ converge.

$$\forall n,p \in \mathbb{N}^*,\ I_{n,p} = \int_0^1 x^p(\ln x)^n dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 n\frac{x^p}{p+1}(\ln x)^{n-1}dx$$

$$\Longrightarrow \quad I_{n,p} = -\frac{n}{p+1}I_{n-1,p}$$

d'où $I_{n,n} = -\dfrac{n}{n+1}I_{n-1,n} = \dfrac{n(n-1)}{(n+1)(n+1)}I_{n-2,n} = ... = (-1)^n\dfrac{n(n-1).....2.1}{(n+1)(n+1)...(n+1)}I_{0,n} = (-1)^n\dfrac{n!}{(n+1)^n}I_{0,n}$

avec $I_{0,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n,n} = \displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n dx = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 |u_n(x)|dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ et la série $\sum \int_0^1 |u_n(x)|dx$ est convergente.

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}dx\right)$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}$ (par le changement d'indice $m = n+1$)

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}}$

4.7 Intégrale et série 2 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3)$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

et $\zeta(s)$ est la série de Riemann $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$

SOLUTION :

• $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{n}$

$\forall x \in [0,1[,\ \ln^2(1-x) = -\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}c_nx^n$

avec $c_0 = a_0.a_0 = 0$

$c_1 = a_0.a_1 + a_1.a_0 = 0$

$\forall n \geq 2,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k.a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}$ (car $a_0 = 0$)

or $\dfrac{1}{x(n-x)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n-x}\right)$

donc $\forall n \geq 2,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{2} + 1\right)$

$\forall n \geq 2,\ c_n = \dfrac{2S_{n-1}}{n}$

$\forall x \in [0,1[,\ \ln^2(1-x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2S_{n-1}}{n}x^n$ et $\dfrac{\ln^2(1-x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2S_{n-1}}{n}x^{n-1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{S_n}{n+1}x^n}_{u_n(x)}$

$\forall n,\ \displaystyle\int_0^1 |u_n(x)|dx = \left[\frac{S_n}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{S_n}{(n+1)^2} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

Par le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, on peut alors écrire :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{(n+1)^2}}$

• Par le changement de variable $t = 1-x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t}dt$

$\forall t \in [0,1[,\ \displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ donc $\forall t \in]0,1[,\ \displaystyle\frac{\ln^2 t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln^2 t$

En intégrant par parties entre $\varepsilon > 0$ et 1, puis en passant à la limita quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient :

$$\int_0^1 t^n \ln^2 t dt = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2 t\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\ln t dt$$

$$= -2\underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\ln t\right]_0^1}_{=0} + 2\int_0^1 \frac{t^n}{(n+1)^2}dt = \frac{2}{(n+1)^3}$$

Puisque la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^1 |t^n \ln^2 t|dt\right) = \sum \frac{2}{(n+1)^3}$ converge (série de Riemann) , on peut à nouveau appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions et écrire :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t}dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln^2 t\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^n \ln^2 t dt\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = 2\,\zeta(3)$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t}dt = 2\zeta(3)}$

• Enfin, $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\frac{S_n}{(n+1)^2} = \frac{S_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{S_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{(n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{S_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$

$$= 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{S_n}{n^2} - 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \quad \text{(en ajoutant et retranchant 2)}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{n^2}}$$

4.8 Intégrale et série 3 :

Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{sh}(x)}dx$

SOLUTION :

• La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ puisque $\mathrm{sh}(x) \overset{x\to 0}{\sim} x$

Par ailleurs $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x} \overset{x\to+\infty}{=} o(e^{-\frac{1}{2}x})$

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, f l'est aussi par majoration.

• $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2xe^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2x})^n = 2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nx}$

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = xe^{-(2n+1)x}$

- chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

- La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ et a pour somme la fonction f,

- $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx=\int_0^{+\infty}xe^{-(2n+1)x}dx=\underbrace{\left[x\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}}_{=0}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}dx$

$$\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx=\left[\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx\right)$ converge

d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx\right)$ c'est à dire que :

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{\pi^2}{4}$ et par parité de la fonction f, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{sh}(x)}dx=\frac{\pi^2}{2}}$

4.9 Intégrale et série 4 :

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt$

SOLUTION :

- La fonction $f:t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

En 0, $|f(t)|\sim|\ln(t)|=o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,\frac12]}f$ est donc absolument convergente.

Au point 1, $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{1-t^2}=\dfrac{\ln(t)}{(1-t)(1+t)}\underset{t\to1}{\sim}=\dfrac{t-1}{2(1-t)}=-\dfrac{1}{2}$

On peut donc prolonger f par continuité au point 1 en posant $f(1)=-\frac12$. f est alors continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$

En $+\infty$, $|f(t)|\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{|\ln(t)|}{t^2}=o\left(\dfrac{\sqrt{t}}{t^2}\right)=\dfrac{1}{t^{3/2}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{[1,+\infty[}f$ est donc absolument convergente.

- Le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ montre que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(u)}{1-u^2}du$

donc, par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt=2\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt$

$\forall t\in]0,1[,\ f(t)=\dfrac{\ln(t)}{1-t^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\ln(t)$

en notant $u_n(t)=t^{2n}\ln(t)$, $\displaystyle\int_0^1u_n(t)dt=\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln(t)\right]_{t\to0}^1-\int_0^1\frac{t^{2n}}{2n+1}dt=\frac{1}{(2n+1)^2}$

donc la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^1|u_n(t)|dt\right)$ converge et, d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on en conclut que :

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt\right)\quad\text{c'est à dire que :}$$

$$\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{8}$$

d'où : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt=2\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}dt=\frac{\pi^2}{4}}$

5 Intégrales fonctions d'un paramètre :

5.1 Intégrale de Gauss :

a) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$, qu'on notera α .

b) Déterminer le domaine de définition de la fonction g telle que $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$

Etudier la continuité de g. Calculer $g(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} g$

c) Existence et calcul de $g'(x)$. Exprimer $g(x)$ sous forme d'intégrale et en déduire la valeur de α

***SOLUTION* :**

b) Pour tout $x \geq 0$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

et par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Pour $x<0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}=+\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ est divergente.

Donc le domaine de défintion de la fonction g est $[0,+\infty[$.

• Notons $F(x,t)=\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t)\in\underbrace{[0,+\infty[}_{J}\times\underbrace{[0,+\infty[}_{I}$

- pour tout $t\in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $x\in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $(x,t)\in J\times I$, $|F(x,t)|\leq h(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ avec h continue et intégrable sur I. (H_3)

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ et affirmer que

$\boxed{g \text{ est continue sur } J=[0,+\infty[}$

• $g(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=[\mathrm{Arctan}(x)]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$

• $\forall x>0,\ 0\leq g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}=e^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\leq e^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}=e^{-x}\frac{\pi}{2}$

donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

2- La fonction F admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ continue sur $J\times I$ et

$\forall(x,t)\in J\times I,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-e^{-x(1+t^2)}$

- pour tout $x\in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $t\in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J. (H_1')

Soit $a>0$ quelconque,

- pour tout $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2')
- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times I$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|=\left|-e^{-x(1+t^2)}\right|\leq e^{-a(1+t^2)}$ avec $t \mapsto e^{-a(1+t^2)}$ continue et intégrable sur I. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que :

$\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=\displaystyle\int_{]0,+\infty[}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{\infty}e^{-x(1+t^2)}dt$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=-e^{-x}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-xt^2}dt=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=-\alpha\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

(par le changement de variable $u=\sqrt{x}\,t,\ du=\sqrt{x}\,dt$)

• Soient a et x tels que $0<a<x$.

$g(x)-g(a)=\displaystyle\int_a^x g'(u)du=-\alpha\int_a^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=-2\alpha\int_a^x\frac{e^{-u^2}}{u}udu=-2\alpha\int_a^x e^{-u^2}du$

(par le changement de variable $t=u^2,\ dt=2udu$)

Compte tenu de la continuité de g en 0, et de la limite calculée en $+\infty$, en passant à la limite quand $a\to0$ et quand $x\to+\infty$, on obtient :

$0-\dfrac{\pi}{2}=-2\alpha\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=-2\alpha^2$

donc $\alpha^2=\dfrac{\pi}{4}$ et $\boxed{\alpha=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

5.2 Intégrale de Gauss (2) :

a) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$, qu'on notera α .

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

$$h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

Montrer que la fonction $g + h$ est constante.
En déduire la valeur de α

SOLUTION :

5.3 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$:

1- Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ convergent et sont égales.

2- Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} e^{-xt}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

3- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Calculer $g''(x)$.
Etudier les limites de g et g' en $+\infty$.
Calculer $g(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

SOLUTION :

1- Soient a, b tels que $0 < a < b$. En intégrant par parties sur le segment $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt \qquad (*)$$

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \sim \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et est intégrable sur tout segment $[0, a]$.

La majoration $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$ montre que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente.

On peut donc passer à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$ dans l'égalité (*) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2}\,dt$$

Le changement de variable $u = \frac{t}{2}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{(2u)^2}\,2du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$$

2- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (en lui donnant la valeur 1 en ce point)

La majoration $0 \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Etant par ailleurs intégrable sur $[0, a]$ puisque continue sur ce segment, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ par additivité.

Soit $x \in [0, +\infty[$. $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} e^{-xt} \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$

La fonction majorante étant intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie sur } [0, +\infty[.}$

- Posons, pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $G(x, t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} e^{-xt}$
  - $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \to G(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$,
  - $\forall x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \to G(x, t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$,

- $\forall(x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ |G(x,t)|=\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}e^{-xt}\leq\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ et on a vu que la fonction $t\mapsto\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Par application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on en conclut que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

3- Remarquons que les fonctions $h:t\mapsto\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ et $k:t\mapsto\dfrac{\sin^2(t)}{t}$ sont continues en 0 (par prolongement par continuité, en leur attribuant respectivement les valeurs 1 et 0 au point 0) et qu'elles sont de limite nulle en $+\infty$. Elles sont donc bornées sur $[0,+\infty[$:

$\exists M_h\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right|\leq M_h$

$\exists M_k\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ \left|\frac{\sin^2(t)}{t}\right|\leq M_k$

- Soit $a>0$ quelconque, fixé ;
  - pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto G(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$
  - pour tout $x\in[a,+\infty[$, les fonctions $t\mapsto G(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{\sin^2(t)}{t}e^{-xt}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et intégrables (car $|G(x,t)|\leq M_he^{-xt}$ et $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right|\leq M_ke^{-xt}$)
  - enfin, pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right|\leq M_ke^{-at}$

cette dernière fonction majorante est une fonction de t seul, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre et en conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et que

$$\boxed{\forall x\in[a,+\infty[,\ g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}e^{-xt}dt}$$

- On réapplique le même théoème à la fonction $\frac{\partial G}{\partial x}$ grâce à la majoration :

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2G}{\partial x^2}(x,t)\right|=\left|\sin^2(t)e^{-xt}\right|\leq e^{-at}$$

On en conclut que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,+\infty[$ et que

$$\boxed{\forall x\in[a,+\infty[,\ g''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2G}{\partial x^2}(x,t)dt=\int_0^{+\infty}\sin^2(t)e^{-xt}dt}$$

g étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$:

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g''(x)=\int_0^{+\infty}\sin^2(t)e^{-xt}dt}$$

- $g''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2t\,.\,e^{-xt}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,.\,e^{-xt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(2t)e^{-xt}dt$

$$=\left[\frac{-e^{-xt}}{2x}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-x+2i)t}dt\right)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{(-x+2i)t}}{-x+2i}\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-2i}\right)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{x+2i}{x^2+4}\right)=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+4)}$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g''(x)=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+4)}}$$

- En intégrant cette expression de $g''(x)$, on obtient :

$g'(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x)-\dfrac{1}{4}\ln(x^2+4)+c$ où c est une constante réelle.

On a vu que la fonction $k;t\mapsto\frac{\sin^2t}{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, donc bornée sur $[0,+\infty[$:

$\exists M_k\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ \left|\frac{\sin^2t}{t}\right|\leq M_k$

donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ |g'(x)|=\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2t}{t}e^{-xt}dt\right|\leq M_k\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{M_k}{x}$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g'(x)=0$

Or $g'(x)=\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right)+c\ \xrightarrow{x\to+\infty}\ 0+c$ donc $c=0$ et finalement,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(x^2+4)}$$

- g étant continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on peut écrire,

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=g(0)+\int_0^xg'(t)dt=g(0)+\int_0^x\left(\frac{1}{2}\ln(t)-\frac{1}{4}\ln(t^2+4)\right)dt$$

Or $\displaystyle\int_0^x \ln(t)dt = [t.\ln(t)]_0^x - \int_0^x 1.dt = x\ \ln(x) - x$

$$\int_0^x \ln(t^2+4)dt = [t.\ln(t^2+4)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{t^2+4}dt = x\ln(x^2+4) - 2\int_0^x \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt$$
$$= x\ln(x^2+4) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt$$
$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^x$$
$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\ \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'où $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = g(0) + \dfrac{1}{2}(x\ \ln(x) - x) - \dfrac{1}{4}\left(x\ln(x^2+4) - 2x + 4\ \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

$$g(x) = g(0) + \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Une majoration analogue à celle obtenue précédemment pour $g'(x)$ montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = g(0) - \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= g(0) - \frac{x}{4}\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{x}{4}\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{4}\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

En passant à la limite dans l'égalité $g(x) = g(0) - \dfrac{x}{4}\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient :

$0 = g(0) - \dfrac{\pi}{2}$, donc $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\ln\left(\dfrac{x^2+4}{x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

et $\boxed{g(0) = \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt}$

5.4 Utilisation d'équation différentielle (1) : (MINES-PONTS + CCP)

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est solution d'une équation différentielle sur un intervalle qu'on précisera.

En déduire la valeur de $f(x)$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

SOLUTION :

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[,\ |e^{-t^2}\cos(xt)| \leq e^{-t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Par majoration $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Notons $H(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

La fonction $f\ :\ x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$ est continue et et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|te^{-t^2}\sin(xt)\right| \leq te^{-t^2}$, fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)dt}$$

• En intégrant par parties sur $[0,A]$, puis en passant à la limite quand $A \to +\infty$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\frac{e^{-t^2}}{2}\cos(xt)dt$

$f'(x) = -\dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt = -\frac{x}{2}f(x)$

$\boxed{f \text{ est donc solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y' + \frac{x}{2}y = 0}$

La solution générale de cette équation est donnée par la formule $y(x) = \lambda\exp\left(-\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2}dt\right) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$

Donc $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$

Par ailleurs $f(0) = \lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}}$

5.5 Utilisation d'équation différentielle (2) : calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$:

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et solution d'une équation différentielle.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Calculer $g(x)$ pour tout x réel.

SOLUTION **:**

1- • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par majoration $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Notons $G(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de contnuité des intégrales dépendant d'un paramètre,

la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour étudier la dérivation :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

mais, pour obtenir une hypothèse de domination, on cherche à majorer

$\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right|$ par une fonction de t seul, continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Or, on ne peut faire mieux que la majoration

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

et la fonction majorante n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ sous la forme qui est donnée.

On va alors augmenter l'exposant de t au dénominateur en procédant à une intégration par parties dans laquelle on dérivera $\dfrac{1}{t^2+1}$ de façon a obtenir $\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$:

• Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$

Soit $x > 0$ et a et b deux réels tels que $0 < a < b$ les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\int_a^b \cos(xt)\frac{1}{1+t^2}dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\frac{1}{1+t^2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin(xt)}{x}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

Passons à la limite quad $a \to 0$ et $b \to +\infty$:

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt}$$

• Posons alors $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ et $H(x,t) = \dfrac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ de sorte que $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}h(x)$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t) = \dfrac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

De plus :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue et et intégrable sur $[0,+\infty[$,

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \le \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} \le \dfrac{t^2+1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt}$$

• Cherchons à simplifier cette formule en intégrant par parties cette fois $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ de façon à diminuer l'exposant de t au dénominateur :

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\int_a^b \frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2t}{(1+t^2)^2}.(t\cos(xt))dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+t^2}.(t\cos(xt))\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1+t^2}(\cos(xt) - tx\sin(xt))dt$$

Passons à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$$

(on montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$ est semi-convergente comme l'est $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt}$$

Remarquons que $\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t(1+t^2)}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$

Le changement de variable $u = xt$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = C_1 = cste$

• Posons $k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = c_1 - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$

la majoration $\left|\dfrac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \le \dfrac{1}{1+t^2}$ permet à nouveau d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ et de montrer que

$$\forall x > 0,\ k'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt = -g(x)$$

• $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}h(x) \implies g'(x) = \dfrac{2}{x}h'(x) - \dfrac{2}{x^2}h(x)$

$$\implies g'(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}g(x) - \frac{x}{2}k(x)\right) - \frac{1}{x}g(x) = -k(x)$$

$$\implies g''(x) = -k'(x) = g(x)$$

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle } (E) :\ y'' - y = 0}$$

• Donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = A.e^x + B.e^{-x}$

On a vu que $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$

donc $\forall x > 0,\ |g(x)| \le \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,|\sin(xt)|}{(1+t^2)^2}dt \le \frac{2}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt}_{constante}$

cette majoration entraîne que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, nécessairement, $A = 0$

donc $\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = B.e^{-x}$

g étant continue en 0, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = B = g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Donc, $\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ et , par parité de la fonction g,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}}$$

5.6 Utilisation d'équation différentielle (3) : (CENTRALE + CCP)

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente, et on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$

a) Déterminer le domaine de définition Δ de f et montrer que $\forall x > 0, |f(x)| \le \dfrac{1}{x}$

b) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ puis $f(x)$

c) Montrer que f est continue sur Δ (on pourra exprimer f comme somme d'une série de fonctions) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

Solution :

a) $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est défini.

$\forall x > 0, |\sin(t)| \le t$ donc $|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}| \le \underbrace{e^{-xt}}$

(intégrable sur $[0, +\infty[$ car $x > 0$)

donc $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\Delta = [0, +\infty[}$$

$$|f(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt \right| \le \int_0^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{\sin(t)}{t} \right|}_{\le 1} e^{-xt}dt \le \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

b) ♣ Notons $g(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ et soit $a > 0$ et prolongeons $\dfrac{\sin(t)}{t}$ en 0 par la valeur 1.

$\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in [0, +\infty[, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$

- $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \to g(x,t)$ est continue sur $[a, +\infty[$,

de même que la fonction $x \to \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$

- $\forall x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \to g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$,

de même que la fonction $t \to \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ (voir (3))

- $\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in [0, +\infty[, \left| \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \le e^{-xt} \le \underbrace{e^{-at}}$ (3)

(intégrable sur $[0, +\infty[$ car $a > 0$)

Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ nous permet alors d'affirmer que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que $\forall x \in [a, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt$

♣ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt}dt \right) = \Im m\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \Im m\left[\frac{-1}{i-x} \right]$

$\displaystyle = \Im m\left[\frac{x+i}{(x-i)(x+i)} \right] = \frac{1}{x^2+1}$

donc, $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$

d'où $\exists k \in \mathbf{R},\ \forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = -\text{Arctan}(x) + k$

et, puisque $\lim_{\infty} f = 0,\ k = \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = -\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} = \text{Arctan}(\frac{1}{x})}$

c) Pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est convergente ,

$$\text{donc } f(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

Posons $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$

Sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin t$ a même signe que $(-1)^n$, la série $\sum u_n(x)$ est donc alternée.

$$|u_n(x)| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} e^{-xt} dt \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{t}$$

$$|u_n(x)| \le \ln\left(\frac{n+1}{n} \right) \longrightarrow +0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0$

Par le changement de variable $t = n\pi + u$, on obtient :

$$u_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi + u)}{n\pi + u} e^{-x(n\pi+u)} du = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{n\pi + u} e^{-x(n\pi+u)} du$$

$$\text{d'où } |u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}}{(n+1)\pi + u} - \frac{e^{-x(n\pi+u)}}{n\pi + u} \right)}_{\le 0} \sin(u) du \le 0$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées.

$$\text{donc } \forall x \in [0, +\infty[, |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le |u_{n+1}(x)| \le \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

$$\| r_n \|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |r_n(x)| \le \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Chaque fonction $u_n()$ étant continue, la somme f l'est aussi.

Ainsi, f est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors, $f(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (\tfrac{\pi}{2}$ - $\text{Arctan}(x)) = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

5.7 *Utilisation d'équation différentielle (4) :

En utilisant une équation différentielle, calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}} dt$$

SOLUTION :

Soit $h(x) = f(x) + ig(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} dt$

Notons $H(x,t) = \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$

- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, , la fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue et et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}\right| \le \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, fonction de t continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction h : $x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus :

- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = it\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, , la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = it\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue et et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\sqrt{t}e^{-t+ixt}\right| \le \sqrt{t}e^{-t}$, fonction continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt$

• Intégrons par partie entre a et b $(0 < a < b)$: $\displaystyle\int_a^b i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt = \left[\frac{i\sqrt{t}\ e^{-t+ixt}}{-1+ix}\right]_a^b - \int_a^b \frac{ie^{-t+ixt}}{(-1+ix)2\sqrt{t}}dt$,
puis passons à la limite quand $b \to +\infty$ et quand $a \to 0$; :

$h'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt = 0 + \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}dt = \frac{i}{2(1-ix)}h(x)$

h est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = \frac{i}{2(1-ix)}y$$

• Notons $a(x) = \dfrac{i}{2(1-ix)}y$.

(E) est une équation linéaire dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $x \to a(x)$ et λ une constante complexe quelconque.

$A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{i}{2(1-iu)}du = \int_0^x \frac{i(1+iu)}{2(1+u^2)}du = -\int_0^x \frac{u}{2(1+u^2)}du + i\int_0^x \frac{1}{2(1+u^2)}du$

$A(x) = -\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{i}{2}\arctan x$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$h(x) = \lambda e^{A(x)} = \lambda e^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{i}{2}\arctan x} = \dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}}\left(\cos\left(\dfrac{1}{2}\arctan x\right) + i\sin\left(\dfrac{1}{2}\arctan x\right)\right)$

Notons $\theta = \arctan x$ de sorte que $\tan\theta = x$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et donc $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{1+x^2}}$

$h(x) = \lambda\left(\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + i\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ (en intégrant $\sqrt{2}$ dans la constante)

$h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu$ par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $dt = 2udu$

$h(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} = \lambda\sqrt{2}$ et donc $\lambda = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

D'où $h(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + i\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

• En prenant les parties réelle et imaginaire,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{et } g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}}$$

5.8 * Intégrales de Fresnel :

1- Montrer que les intégrales $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$ convergent.

2- Montrer que la fonction $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}e^{it^2}dt$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre linéaire sur $]0, +\infty[$.

Résoudre cette équation et calculer les deux intégrales α et β

(on admettra que g est continue en 0 et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - intégrale de Gauss)

SOLUTION :

a) • $\displaystyle\int_a^x \cos(t^2)dt = \int_{a^2}^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}du$ (par le changement $t^2 = u$, $t = \sqrt{u}$

$= \left[\dfrac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_{a^2}^{x^2} + \displaystyle\int_{a^2}^{x^2} \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$

$\dfrac{\sin(u)}{u\sqrt{u}} \overset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc on peut passer à la limite quand $a \to 0^+$:

$\displaystyle\int_a^x \cos(t^2)dt = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$ et $\left|\dfrac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}\right| \leq \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ donc $u \to \dfrac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

par ailleurs, $\left|\dfrac{\sin(x^2)}{2x}\right| \leq \dfrac{1}{2x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \cos(t^2)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}du$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ converge.

• Raisonnement analogue pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$

b) • Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}e^{it^2}dt$

Pour $x > 0$, $|e^{-x^2t^2}e^{it^2}| = e^{-x^2t^2}$, fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour $x = 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$ converge d'après la question précédente qui montre la convergence des parties réelle et imaginaire.

La fonction g est donc définie sur $[0,+\infty[$.

Notons $G(x,t) = e^{-x^2t^2}e^{it^2}$ de sorte que $\forall x \geq 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G(x,t)dt$

- pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \to G(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable car $|e^{-x^2t^2it^2}| = e^{-x^2t^2}$
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \to G(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \to \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -2xt^2e^{-x^2t^2+it^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \to\to \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -2xt^2e^{-x^2t^2+it^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = 2xt^2e^{-x^2t^2} \leq 2bt^2e^{-a^2t^2}$, fonction de t intégrable sur $[0,+\infty[$. ($t^2e^{-a^2t^2} \overset{t\to\pm\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$)

On en déduit par le théorème de dérivation "sous le signe $\int$" que g est C^1 sur $[a,b]$ pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$, donc est C^1 sur $]0,+\infty[$, et que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\boxed{g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt = -2x\int_0^{+\infty} t^2e^{-x^2t^2+it^2}dt}$

Intégrons par parties : $\forall x > 0$, $g'(x) = -2x\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-x^2t^2+it^2}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} (-2x^2te^{-x^2t^2})(te^{it^2})dt$

$$g'(x) = \frac{1}{x}\left(\underbrace{\left[e^{-x^2t^2}(te^{it^2})\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}(2it^2e^{it^2} + e^{it^2})dt\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}e^{it^2} - 2i\int_0^{+\infty} t^2e^{-x^2t^2}e^{it^2}dt\right) = \frac{1}{x}\left(-g(x) + i\frac{g'(x)}{x}\right)$$

donc $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad (x^2 - i)g'(x) = -xg(x)}$

La fonction g est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $g'(x) = -\underbrace{\dfrac{x}{x^2-i}}_{a(x)}g(x)$

La solution générale de (E) est : $g'(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où λ est une constante complexe et A une primitive de la fonction a.

$a(x) = \dfrac{x}{x^2-i} = \dfrac{x(x^2+i)}{x^4+1} = \dfrac{x^3}{x^4+1} + i\dfrac{x}{x^4+1}$

$A(x) = \displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}dx + i\int \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{i}{2}\arctan(x^2) + cte$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $g(x) = \lambda e^{-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)-\frac{i}{2}\arctan(x^2)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{x^4+1}}e^{-\frac{i}{2}\arctan(x^2)}$

• Par le changement de variable $u = xt$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}e^{it^2}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}e^{i\frac{u^2}{x^2}}du$

donc $xg(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}e^{i\frac{u^2}{x^2}}du \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(th. de convergence dominée appliqué à toute suite (x_n) de limite $+\infty$)

or $\quad xg(x) = \dfrac{\lambda x}{\sqrt[4]{x^4+1}} e^{-\frac{i}{2}\arctan(x^2)} \underset{}{\overset{x\to+\infty}{\sim}} \lambda e^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc $\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)$

et $\quad g(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{x^4+1}} e^{-\frac{i}{2}\arctan(x^2)} = \dfrac{\sqrt{\pi}(1+i)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^4+1}}\left(\cos\left(\dfrac{\arctan(x^2)}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{\arctan(x^2)}{2}\right)\right) \qquad (*)$

- $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt = \int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt + i\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$
  $= \displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}(1+i)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^4+1}} e^{-\frac{i}{2}\arctan(x^2)}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}(1+i)}{2\sqrt{2}}$

et, par identification des parties réelle et imaginaire, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos t^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\sin t^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

Remarque : on peut poursuivre plus loin le calcul de $g(x)$ exprimé en (*) :

Notons $\theta = \arctan x^2$ de sorte que $\tan\theta = x^2$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \text{ et donc } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^4}+1}{2\sqrt{1+x^4}}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et donc } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{2\sqrt{1+x^4}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^4}-1}}{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{1+x^4}}$$

$$g(x) = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{x^4+1}} e^{-\frac{i}{2}\arctan(x^2)} = \frac{\sqrt{\pi}(1+i)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^4+1}}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{2\sqrt{1+x^4}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{2\sqrt{1+x^4}}}\right)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^4}+1} - \sqrt{\sqrt{1+x^4}-1}}{\sqrt{1+x^4}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^4}+1} + \sqrt{\sqrt{1+x^4}-1}}{\sqrt{1+x^4}}\right)}$$

5.9 *Intégrales de Poisson :

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$

1- a) Déterminer son domaine de définition et réduire son domaine d'étude.

b) Etudier la continuité de f.

2 - **Première méthode de calcul :**

Calculer $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de x.

3 - **Deuxième méthode de calcul :**

Etudier la dérivabilité de f.

Calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.

4 - **Troisième méthode de calcul :**

Calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$ en utilisant les sommes de Riemann.

SOLUTION :

1 - a) • $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,\pi],\ x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t$

$$x^2 - 2x\cos t + 1 = 0 \iff (x = \cos t \quad \text{et} \quad \sin t = 0)$$
$$\iff \begin{cases} t = 0 \quad \text{et} \quad x = 1 \\ \text{ou} \\ t = \pi \quad \text{et} \quad x = -1 \end{cases}$$

Donc si $x \neq -1$ et $x \neq 1$, la fonction $(t \to x^2 - 2x\cos t + 1)$ est continue et strictement positive sur $[0,\pi]$.
La fonction $(t \to \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$) est alors **continue** et donc intégrable sur le **segment** $[0,\pi]$.

• Pour $x = 1$, la fonction $(t \to \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$) est continue sur $]0,\pi]$, mais a une limite infinie quand $t \to 0^+$

alors $\quad \ln(x^2 - 2x\cos t + 1) = \ln(2 - 2\cos t) = \ln\left(4\sin^2\dfrac{t}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left(\sin\dfrac{t}{2}\right) \overset{t\to 0^+}{\sim} 2\ln t = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

La fonction $(t \to \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$) est donc intégrable sur $]0,\pi]$ et $f(1)$ est défini.

• Raisonnement analogue pour $x = -1$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 + 2x\cos t + 1)dt = \int_\pi^0 \ln(x^2 - 2x\cos u + 1)(-du) = f(x)$

(par le changement de variable $u = \pi - t$)

$\boxed{f \text{ est une fonction paire}}$ On peut réduire son étude à $\mathbb{R}_+$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\cos t + 1\right)dt = \int_0^\pi \ln\left(\frac{x^2 - 2x\cos t + 1}{x^2}\right)dt = f(x) - 2\pi\ln x$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) - 2\pi\ln x}$, on peut réduire son étude à $[0,1]$

b) Soit $a \in]0,1[$.

On a vu que $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \text{ et } x = 1 \\ \text{ou} \\ t = \pi \text{ et } x = -1 \end{cases}$

Donc la fonction $(x,t) \xrightarrow{G} x^2 - 2x\cos t + 1$ est positive et continue sur $[0,a] \times [0,\pi]$, qui est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux compacts. Elle est bornée sur ce compact et atteint ses bornes. En particulier, la borne inférieure, valeur prise par F, est > 0.

Il en résulte que la fonction $F : (x,t) \xrightarrow{F} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est continue sur $[0,a] \times [0,\pi]$ donc bornée :

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall (x,t) \in [0,a] \times [0,\pi],\ |F(x,t)| \leq M.$

Par ailleurs,

- pour tout $x \in [0,a]$, la fonction $t \longrightarrow F(x,t)$ est **continue** et donc intégrable sur le **segment** $[0,\pi]$
- pour tout $t \in [0,\pi]$, la fonction $x \longrightarrow F(x,t)$ est continue sur le segment $[0,a]$

Par application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on peut affirmer que l'application $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = \int_0^\pi F(x,t)dt$ est continue sur le segment $[0,a]$, pour tout $a \in]0,1[$.

f est donc continue sur $[0,1[$.

La dernière relation de 1-a), à savoir $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) - 2\pi\ln x$ permet de conclure à la continuité sur $]1,+\infty[$.

2 - **Première méthode de calcul :**

- $f(x^2) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^4 - 2x^2\cos t + 1)dt$

Dans le polynôme bicarré $x^4 - 2x^2\cos t + 1$, qui n'a pas de racine réelle, écrivons $x^4 + 1$ comme début d'un carré :

$$x^4 - 2x^2\cos t + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2(1+\cos t) = (x^2+1)^2 - 4x^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$= (x^2 - 2x\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + 1)(x^2 + 2x\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + 1)$$

d'où $f(x^2) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^4 - 2x^2\cos t + 1)dt = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\tfrac{t}{2}) + 1)(x^2 + 2x\cos(\tfrac{t}{2}) + 1\right)dt =$

$$= \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos(\tfrac{t}{2}) + 1)dt + \int_0^\pi \ln(x^2 + 2x\cos(\tfrac{t}{2}) + 1)dt$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - 2x\cos(u) + 1)du + 2\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 + 2x\cos(u) + 1)du \quad \text{(par le changement } u = \tfrac{t}{2})$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - 2x\cos(u) + 1)du + 2\int_\pi^{\pi/2} \ln(x^2 - 2x\cos(v) + 1)(-dv) \quad \text{(par le changement } v = \pi - u)$$
$$= 2\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos(u) + 1)du = 2f(x)$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^2) = 2f(x)}$

- Par récurrence immédiate, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^{2^n}) = 2^n f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) - 2\pi\ln x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x^{2^n}}\right) = f(x^{2^n}) - 2\pi\ln(x^{2^n}) = 2^n f(x) - 2^{n+1}\pi\ln(x)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{x^{2^n}}\right) = f(x) - 2\pi\ln(x)$$

En passant à la limite pour $x > 1$ fixé lorsque $n \to +\infty$, compte tenu de la contnuité de f en 0 et de l'égalité $f(0) = 0$, on obtient : $\forall x > 1,\ 0 = f(x) - 2\pi\ln(x)$

Donc $\boxed{\forall x > 1,\ f(x) = 2\pi\ln(x)}$

$\forall x \in]0,1[,\ \underbrace{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{=2\pi\ln(1/x)} = f(x) - 2\pi\ln x$ donc $f(x) = 0$. $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ f(x) = 0}$

3- **Deuxième méthode de calcul : calcul de la dérivée :**

• $F(x,t)=\ln(x^2-2x\cos t+1)=\ln((x-\cos t)^2+\sin^2 t)$

$\forall (x,t)\in[0,1[\times[0,\pi],\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=\dfrac{2(x-\cos t)}{x^2-2x\cos t+1}$

Soit $a\in[0,1[$.

- pour tout $x\in[0,a]$, la fonction $t\to F(x,t)$ est continue sur $[0,\pi]$ et intégrable car continue.
- pour tout $t\in[0,\pi]$, la fonction $x\to F(x,t)$ est continue sur $[0,a]$
- pour tout $x\in[0,a]$, la fonction $t\to\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=\dfrac{2(x-\cos t)}{x^2-2x\cos t+1}$ est continue sur $[0,\pi]$
- pour tout $t\in[0,\pi]$, la fonction $x\to\to\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=\dfrac{2(x-\cos t)}{x^2-2x\cos t+1}$ est continue sur $[0,a]$

Pour tout $x\in[0,a]$, fixé, la fonction $t\longrightarrow x^2-2x\cos t+1$ atteint son maximum lorsque $\cos t=1$, c'est à dire pour $t=\pi$.

donc $\forall x\in[0,a],\forall t\in[0,\pi],\ x^2-2x\cos t+1\geq x^2-2x+1=(1-x)^2\geq(1-a)^2$

$\mapsto\ \forall x\in[0,a],\forall t\in[0,\pi],\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\dfrac{2(x-\cos t)}{x^2-2x\cos t+1}\right|\leq\dfrac{2x+2}{(1-a)^2}\leq\dfrac{4}{(1-a)^2}=\text{cte}$

d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on en déduit que f est de classe C^1 sur $[0,a]$ et que :

$\forall x\in[0,a],\ f'(x)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^\pi\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^\pi\frac{2(x-\cos t)}{x^2-2x\cos t+1}dt$

• Procédons au changement de variable $u=\tan(\frac{t}{2})\quad t=2\text{Arctan}(u)\quad dt=\dfrac{2du}{1+u^2}\quad\cos t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

$$f'(x)=4\int_0^{+\infty}\frac{x-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{x^2-2x\frac{1-u^2}{1+u^2}+1}.\frac{du}{1+u^2}=4\int_0^{+\infty}\frac{x(1+u^2)-(1-u^2)}{x^2(1+u^2)-2x(1-u^2)+(1+u^2)}.\frac{du}{1+u^2}$$

$$f'(x)=4\int_0^{+\infty}\frac{u^2(x+1)+(x-1)}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2}\frac{du}{1+u^2}$$

Pour décomposer en éléments simples, notons $A=x+1,\ B=x-1,\ v=u^2$

$$\frac{u^2(x+1)+(x-1)}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2}\frac{1}{1+u^2}=\frac{Av+B}{(A^2v+B^2)(1+v)}=\frac{\alpha}{A^2v+B^2}+\frac{\beta}{1+v}$$

En multipliant par $1+v$ puis en prenant $v=-1$, on obtient $\beta=\dfrac{-A+B}{-A^2+B^2}=\dfrac{1}{A+B}=\dfrac{1}{2x}$

En multipliant par A^2v+B^2 puis en prenant $v=-\dfrac{B^2}{A^2}$, on obtient :

$$\alpha=\frac{-A\frac{B^2}{A^2}+B}{1-\frac{B^2}{A^2}}=\frac{-AB^2+BA^2}{A^2-B^2}=\frac{AB(A-B)}{(A-B)(A+B)}=\frac{AB}{A+B}=\frac{x^2-1}{2x}$$

donc $\dfrac{u^2(x+1)+(x-1)}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2}\dfrac{1}{1+u^2}=\dfrac{\frac{x^2-1}{2x}}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2x}}{u^2(x+1)+(x-1)}$

d'où $f'(x)=4\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{2x}}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2x}}{u^2+1}dt$

$$f'(x)=2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x-1}{x(x+1)}\frac{1}{u^2+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}+\frac{1}{x}\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$f'(x)=2\left(\left[\frac{1}{x}\text{Arctan}\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)\right]_{u=0}^{u\to+\infty}+\left[\frac{1}{x}\text{Arctan}\,u\right]_0^{+\infty}\right)$$

Si $0<x<1$, alors $\dfrac{x+1}{x-1}<0$ et $f'(x)=2\left(-\dfrac{\pi}{2x}+\dfrac{\pi}{2x}\right)=0$

Donc f est constante sur $]0,1[$ et sur $[0,1[$ par continuité en 0.

d'où $\boxed{\forall x\in[0,1[,\ f(x)=f(0)=0}$

La relation $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)-2\pi\ln x$ montre alors que :

$\boxed{\forall x\in]1,+\infty[,\ f(x)=2\pi\ln x}$

Remarquons que si $x>1$, alors $\dfrac{x+1}{x-1}>0$ et la formule

$f'(x)=2\left(\left[\dfrac{1}{x}\text{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x-1}u\right)\right]_{u=0}^{u\to+\infty}+\left[\dfrac{1}{x}\text{Arctan}\,u\right]_0^{+\infty}\right)$ donne :

$f'(x)=2\left(\dfrac{\pi}{2x}+\dfrac{\pi}{2x}\right)=\dfrac{2\pi}{x}$ et par intégration, $f(x)=2\pi\ln x+\text{cte}$

4- **Troisième méthode de calcul : sommes de Riemann :**

Considérons la subdivision $0=x_0<x_1=\dfrac{\pi}{n}<x_2=\dfrac{2\pi}{n}<x_3=\dfrac{3\pi}{n}....<x_{n-1}=\dfrac{(n-1)\pi}{n}$ et la somme de Riemann correspondant à cette subdivision :

$$S_n = \frac{\pi - 0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

or $x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1 = (x - \cos\frac{k\pi}{n})^2 - \cos^2\frac{k\pi}{n} + 1 = (x - \cos\frac{k\pi}{n})^2 - \sin^2\frac{k\pi}{n}$

$x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1 = (x - e^{i\frac{k\pi}{n}})(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}})$

donc $S_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\Big((x - e^{i\frac{k\pi}{n}})(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}})\Big) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{i\frac{k\pi}{n}})(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}})\right)$

Or les $e^{i\frac{k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, ..., 2n-1$ ou $k = -n, -n-1, ..., -1, 0, 1, ..., n-1$ sont les $2n$ racines $2n^e$ de l'unité, c'est à dire les racines du polynôme $X^{2n} - 1$

Dans le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{i\frac{k\pi}{n}})(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}})$ figurent toutes ces racines une fois, sauf -1 qui est omise, et 1 qui figure deux fois (pour $k = 0$)

donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{i\frac{k\pi}{n}})(x - e^{-i\frac{k\pi}{n}}) = (x^{2n} - 1)\frac{x-1}{x+1}$

- Si $x > 1$, $S_n = \dfrac{\pi}{n}\left(\ln(x^{2n} - 1) + \ln(x-1) - \ln(x+1)\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}\ln(x^{2n}) = 2\pi\ln(x)$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\pi\ln(x)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = 2\pi\ln(x)$

- Si $x < 1$, $S_n = \dfrac{\pi}{n}\left(\ln(1 - x^{2n}) + \ln(1-x) - \ln(x+1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } x < 1,\ \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = 2\pi\ln(x) \\ \text{Si } 0 \le x < 1,\ \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = 0\end{array}}$$

Remarquons que ce calcul n'est pas valable pour $x = 1$ car pour $k = 0$, $\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) =$ " $\ln 0$" n'est pas défini.

On peut alors prendre la formule $S_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{\underline{\mathbf{k=1}}}^{n-1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$

$S_n = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{(x^{2n} - 1)}{(x-1)(x+1)}\right) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2n-1})}{x+1}\right)$, qui donne pour $x = 1$:

$S_n = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{2n}{2}\right) = \dfrac{\pi}{n}\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Donc $f(1) = 0$

5.10 * Comportement de f en $+\infty$

1- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

a-t-on nécessairement $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 0$?

Même question si on suppose que $f \ge 0$

2- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et admettant une limite L en $+\infty$. Montrer que $L = 0$.

3- Soit f une fonction continue par morceaux, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$.

On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) \overset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

4- Soit f une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.

SOLUTION :

1- NON : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ converge mais $\cos(t^2)$ ne tend pas vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$

2- Si $L \neq 0$, $f(x)$ a même signe que L quand $x \to +\infty$ et $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} L$

Or $\int_0^{+\infty} Ldt$ diverge, donc par équivalence $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge aussi, ce qui montre par contraposée que si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $L = 0$.

3- Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, le reste de cette intégrale, $r(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 qd $x \to +\infty$

Soit $x > 0$. $\forall t \in [\frac{x}{2}, x]$, $0 \le f(x) \le f(t)$ car f est décroissante.

$$\implies \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)dt \le \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \le \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t)dt = r\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\implies 0 \le \frac{x}{2} f(x) \le r\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\implies \lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 0 \quad \text{et donc} \quad f(x) \overset{x\to+\infty}{=} o\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Remarque : ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose plus que f est décroissante, comme le montre la question 1.

4 - On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. On sait qu'alors le reste $r(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $x \to +\infty$:

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A > A,\ |f(x_A)| > \varepsilon_0$

f est uniformément continue que $[0, +\infty[$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Appliquons cette propriété à $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$:

$\exists \eta_1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ |x - y| < \eta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

donc $\forall x \in [x_A, x_A + \eta_1],\ |f(x) - f(x_A)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (puisqu'alors $|x - x_A| < \eta_1$)

alors $$\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x)dx = \underbrace{\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x_A)dx}_{=\eta_1 f(x_A)} + \int_{x_A}^{x_A+\eta_1} (f(x) - f(x_A))dx$$

or $|\eta_1 f(x_A)| \ge \eta_1 \varepsilon_0$ (car $|f(x_A)| > \varepsilon_0$)

et $$\left|\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} (f(x) - f(x_A))dx\right| \le \int_{x_A}^{x_A+\eta_1} \underbrace{|f(x) - f(x_A)|}_{<\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}} dx < \eta_1 \epsilon = \eta_1 \frac{\varepsilon_0}{2}$$

donc $$\left|\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x)dx\right| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

soit aussi $|r(x_A) - r(x_A + \eta_1)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$

On a ainsi montré que $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A > A, |r(x_A) - r(x_A + \eta_1)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, ce qui est contradictoire avec la propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = 0$.

L'hypothèse faite a abouti à une contradiction et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

5.11 * Intégrales de Fresnel (2)

a) Soit $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \ne 0$.

Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right]$, $\quad (1+i)\displaystyle\int_0^x S((1+i)t)dt = \int_0^x S(t)dt + i\int_0^x S(x+it)dt \quad (1)$

b) En utilisant la fonction $f \ : \ z \longrightarrow e^{-z^2}$ montrer la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos u^2 du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin u^2 du$ et calculer leurs valeurs.

SOLUTION :

a) • Soit, pour n entier naturel quelconque, P_n le polynôme t^n.

$$(1+i)\int_0^x P_n((1+i)t)dt = (1+i)\int_0^x ((1+i)t)^n dt = (1+i)^{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = (1+i)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^x P_n(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et

$$i\int_0^x P_n(x+it)dt = i\int_0^x (x+it)^n dt = \left[\frac{(x+it)^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^x = \frac{(1+i)^{n+1}x^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$$

ce qui montre que $\quad (1+i)\displaystyle\int_0^x P_n((1+i)t)dt = \int_0^x P_n(t)dt + i\int_0^x P_n(x+it)dt$

• Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, la relation (1) est encore vérifiée.

Et par convergence uniforme sur le segment $[0,x]$, (lorsque $t \in [0,x] \subset \left[0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right[$, $(1+i)x \in [0, x\sqrt{2}] \subset [0, R[$ puisque $|1+i| = \sqrt{2}$) la relation (1) est vérifiée pour toute série entière.

• La fonction $f\ :\ z \longrightarrow e^{-z^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. ($e^{-z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$)

On peut lui appliquer la relation (1) pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+i)\int_0^x e^{-((1+i)t)^2}dt = \int_0^x e^{-t^2}dt + i\int_0^x e^{-(x+it)^2}dt$$

$$(1+i)\int_0^x e^{-2it^2}dt = \int_0^x e^{-t^2}dt + i\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt \qquad (2)$$

• Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt = 0$:

$$\left|\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt\right| \leq \int_0^x |e^{-x^2+t^2-2ixt}|dt = \int_0^x e^{-x^2+t^2}dt = \int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}} e^{-x^2+t^2}dt + \int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x e^{-x^2+t^2}dt$$

$$\forall t \in \left[0, x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right],\ \ 0 \leq t^2 \leq \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

donc $\displaystyle\int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}} e^{-x^2+t^2}dt \leq \int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}} e^{-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}}dt \leq xe^{-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall t \in \left[x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, 0\right]$, $\ 0 \leq e^{-x^2+t^2} \leq e^0 = 1\ $ et donc $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x e^{-x^2+t^2}dt \leq \int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt = 0$

• Reprenons (2) : $\quad (1+i)\displaystyle\int_0^x e^{-2it^2}dt = \int_0^x e^{-t^2}dt + i\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\quad$ (intégrale de Gauss)

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+i)\int_0^x e^{-2it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0$ $\ $ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+i)}$

et par le changement $u = \sqrt{2}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2it^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-iu^2}du = \frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{4}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-iu^2}du$ converge et vaut $\dfrac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos u^2 du = \int_0^{+\infty}\sin u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

6 Inégalité de Cauchy Schwarz

6.1 Intégrale de l'inverse

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive en tout point.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2\frac{1}{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}$. $\quad$ Peut il y avoir égalité ?

SOLUTION :

Puisque f ne s'annule pas sur $[a,b]$, la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable.
Etant continue, positive et non identiquement nulle, son intégrale est > 0.

L'application $\quad (f,g) \quad \longrightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ $\ $ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{R})$

Par application de la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2 \leq \int_a^b \sqrt{f(t)}^2 \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt$$

donc $\left(\int_a^b dt\right)^2 = (b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$

soit, finalement, $\boxed{\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{(b-a)^2}{\int_a^b f(t)dt}}$

Il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont liées, c'est à dire si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \sqrt{f} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f}} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda$ c'est à dire si et seulement si f est une fonction constante.

6.2 Intégrale de l'inverse

Soit $\Phi \ : \ E = C^0([a,b], \mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Montrer que Φ est minoré sur E et calculer $\inf_{f \in E} \Phi(f)$

Φ est elle majorée ?

SOLUTION :

L'application $\Psi \ : \ (f,g) \longrightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

D'après la formule de Cauchy-Schwarz, $\forall f \in E$, $\left|\int_a^b \left(\sqrt{f(t)}.\sqrt{\frac{1}{f(t)}}\right) dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}^2\right)\left(\int_a^b \sqrt{\frac{1}{f(t)}}^2 dt\right)$

Donc $\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \overset{(1)}{\geq} \left|\int_a^b dt\right|^2 = (b-a)^2$ et $(b-a)^2$ est un minorant de Φ.

Il y a égalité dans (1) si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{\frac{1}{f}}$ sont liées,

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \sqrt{f} = \lambda \sqrt{\frac{1}{f}}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ f = \lambda$

Donc $\boxed{\inf_E \Phi = (b-a)^2}$

• Soit M un réel positif (aussi grand qu'on veut)

Soit f la fonction affine par morceaux et continue, qui vaut M sur $\left[a\ ,\ a + \frac{b-a}{3}\right]$ et qui vaut $\frac{1}{M}$ sur $\left[b - \frac{b-a}{3}\ ,\ b\right]$.

Alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^{a+\frac{b-a}{3}} Mdt = \frac{b-a}{3}M$ et $\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq \int_{b-\frac{b-a}{3}}^b Mdt = \frac{b-a}{3}M$, donc

$\Phi(f) \geq \frac{(b-a)^2}{9}M^2$ et $\boxed{\text{la fonction } \Phi \text{ n'est pas majorée.}}$

7 Exercices divers :

7.1 * Développement asymptotique d'une somme de Riemann :

Soit f une fonction réelle ou complexe de classe C^3 sur $[0,1]$.

Montrer que : $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où a et b sont des constantes à déterminer en fonction de f.

SOLUTION :

Soit $F \ : \ x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$

F, primitive de f, est de classe C^4 sur $[0,1]$ car f est de classe C^3.

Pour $k=0,1,2,3$, notons $M_k = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$

Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégrale sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ à l'ordre 2 :

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + \frac{x_{k+1}-x_k}{1!}F'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)}{1!}F\text{"}(t)dt, \quad \text{qui s'écrit aussi :}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}f'(t)dt$$

avec $\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}f'(t)dt\right| \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M_1\frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}dt = M_1\left[-\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{M_1}{2n^2}$

En sommant pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + R_1 \quad \text{avec} \quad |R_1| \le n.\frac{M_1}{2n^2} \le \frac{M_1}{2n}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou aussi $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + o(1)}$ (1)

(o(1) est une suite de limite nulle)

• Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 3 :

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + \frac{x_{k+1}-x_k}{1!}F'(x_k) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2!}F\text{"}(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2!}F^{(3)}(t)dt, \text{ soit :}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2}f\text{"}(t)dt, \quad \text{qui donne par sommation :}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + R_2 \quad (2), \quad \text{avec :}$$

$$|R_2| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2!}f\text{"}(t)dt\right)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M_2\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2!}dt\right) = \sum_{k=0}^{n-1} M_2\left[-\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{M_2}{6n^2}$$

La relation (1), appliquée à la fonction f' donne : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f'(t)dt + o(1)$

Reportons-la dans (2) :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(\int_0^1 f'(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3)}$$

• Un calcul analogue à partir de la formule de Taylor à l'ordre 4 :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}f\text{"}\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}f^{(3)}(t)dt \quad \text{donne par sommation}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f\text{"}\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}f^{(3)}(t)dt\right)}_{R_3} \quad (4)$$

Reportons les relations : - (1) pour f" : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\text{"}\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f\text{"}(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = f'(1)-f'(0)+O\left(\frac{1}{n}\right)$

- (3) pour f' : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f'(t)dt - \frac{f'(1)-f'(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = f(1)-f(0)-\frac{f'(1)-f'(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et la majoration $|R_3| \le \dfrac{M_3}{24n^3}$ dans (4) :

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}\left(f(1)-f(0)-\frac{f'(1)-f'(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{6n^2}\left(f'(1)-f'(0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + R_3$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} - \frac{f'(1)-f'(0)}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

7.2 * Equivalent (Mines)

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbf{K}$, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^x t.f(t)dt = o(x)$ quand $x \to +\infty$

Peut on généraliser ce résultat ?

SOLUTION :

Notons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Puisque f est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = L \in \mathbf{K}$

Soit $r(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} f(t)dt = L - F(x)$, de sorte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r(x) = L - L = 0$

f étant continue, $F = L - r$ est une primitve de f.

Intégrons par parties $\displaystyle\int_0^x t.f(t)dt$ en prenant $-r(x)$ comme primitive de $f(x)$:

$$\int_0^x t.f(t)dt = [-t.r(t)]_0^x + \int_0^x r(t)dt = -xr(x) + \int_0^x r(t)dt$$

Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0 \implies \int_0^x r(t)dt = o(x)$:

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists x_0, \forall t > x_0$, $|r(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall x > x_0,\ \int_0^x r(t)dt = \int_0^{x_0} r(t)dt + \int_{x_0}^x r(t)dt$$

$$\text{donc } \left|\int_0^x r(t)dt\right| \le \left|\int_0^{x_0} r(t)dt\right| + \left|\int_{x_0}^x r(t)dt\right|$$

$$\forall x > x_0,\ \left|\int_{x_0}^x r(t)dt\right| \le \int_{x_0}^x \underbrace{|r(t)|}_{\le\varepsilon} dt \le (x - x_0)\frac{\varepsilon}{2} \le x.\frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \left|\displaystyle\int_0^{x_0} r(t)dt\right|$ est une constante, et pour $x > \dfrac{2M}{\varepsilon}$, $\quad \dfrac{\left|\int_0^{x_0} r(t)dt\right|}{x} < \dfrac{M}{\frac{2M}{\varepsilon}} = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Pour $x > \max(x_0, \frac{2M}{\varepsilon})$, $\quad \left|\displaystyle\int_0^x r(t)dt\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}x + \dfrac{\varepsilon}{2}x = \varepsilon.x$

On a ainsi montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_0^x r(t)dt\right|}{x} = 0$, c'est à dire que $\displaystyle\int_0^x r(t)dt = o(x)$ quand $x \to +\infty$

Reprenant l'égalité $\displaystyle\int_0^x t.f(t)dt = -xr(x) + \int_0^x r(t)dt$ et compte tenu des résultats $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$ et $\displaystyle\int_0^x r(t)dt = o(x)$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^x t.f(t)dt = o(x) \text{ quand } x \to +\infty}$$

♣ b) Par intégrons par parties,

$$\int_0^x t^m.f(t)dt = [-t^m.r(t)]_0^x + m\int_0^x t^{m-1}r(t)dt = -x^m r(x) + m\int_0^x t^{m-1}r(t)dt$$

En reprenant les notations de la partie précédente,

$$\left|\int_0^x t^{m-1}r(t)dt\right| \le \underbrace{\left|\int_0^{x_0} t^{m-1}r(t)dt\right|}_{M'} + \left|\int_{x_0}^x t^{m-1}r(t)dt\right| \le M' + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x t^{m-1}dt$$

$$\left|\int_0^x t^{m-1}r(t)dt\right| \le M' + \frac{\varepsilon(x-x_0)^m}{2m} \le M' + \frac{\varepsilon}{2m}x^m \le M' + \frac{\varepsilon}{2}x^m$$

et pour $x \ge \sqrt[m]{\dfrac{2M'}{\varepsilon}}$, $\quad \dfrac{M'}{x^m} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$

Pour $x \ge \max\left(\sqrt[m]{\dfrac{2M'}{\varepsilon}}, x_0\right)$, $\quad \dfrac{\left|\int_0^x r(t)dt\right|}{x^m} \le \varepsilon$,

On a ainsi montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_0^x t^m f(t)dt\right|}{x} = 0$, c'est à dire que

$$\boxed{\int_0^x t^m f(t)dt = o(x^m) \quad \text{quand } x \to +\infty}$$

7.3 * Calcul d'équivalent :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) \neq 0$

a) Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n f(x)dx$ quand $n \to +\infty$

b) Même question pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx$

SOLUTION :

a) Effectuons le changement de variable $u = (1-x)^n$, $x = 1 - u^{\frac{1}{n}}$, $dx = -\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$

$$a_n = \int_0^1 (1-x)^n f(x)dx = -\frac{1}{n}\int_1^0 uf(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}-1}du = \frac{1}{n}\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}du$$

f est bornée sur la segment $[0,1]$ car est continue et $\forall u \in [0,1], |f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}| \leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty}$

Par ailleurs, $\forall u \in]0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n}} = 1$, donc la suite de fonctions $(u \longrightarrow f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}})$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante $f(0)$.

La majoration obtenue nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}du \right) = \int_0^1 f(0)du = f(0) \neq 0$$

donc $\boxed{a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}du \sim \frac{f(0)}{n} \quad \text{quand} \quad n \to \infty}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx = \frac{1}{n}\, b_n$

Notons $\varepsilon(x) = f(x) - f(0)$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0 par contnuité de la fonction f en 0.

Soit $\alpha(n) \in]0,1]$ une fonction de l'entier n que nous choisirons par la suite.

$$b_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx = \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx + \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(x)-f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx + \int_{\alpha(n)}^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx$$

- $\displaystyle\int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx = f(0)\left[\ \ln(x+\tfrac{1}{n})\ \right]_0^{\alpha(n)} = f(0).\ln(1+n\alpha(n))$

- $\displaystyle\left| \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(x)-f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx \right| \leq \int_0^{\alpha(n)} \frac{|\varepsilon(x)|}{x+\frac{1}{n}}dx \leq \sup_{x\in[0,\alpha(n)]}|\varepsilon(x)|.\int_0^{\alpha(n)} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx$

  $\displaystyle\leq \sup_{x\in[0,\alpha(n)]}|\varepsilon(x)|.\ln(1+n\alpha(n))$

- $\displaystyle\left| \int_{\alpha(n)}^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx \right| \leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty} . \int_{\alpha(n)}^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx = \| f \|_{[0,1]}^{\infty}\left[\ \ln(x+\tfrac{1}{n})\ \right]_{\alpha(n)}^1$

  $\displaystyle\leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty} . \ln\left(\frac{n+1}{n\alpha(n)+1} \right)$

Choisissons alors $\alpha(n) = \dfrac{1}{\ln n}$

Quand $n \to +\infty$:

- $\displaystyle\int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx = f(0).\ln(1+\tfrac{n}{\ln n}) \sim f(0).\ln(\tfrac{n}{\ln n}) = f(0).(\ln n - \ln(\ln n)) \sim f(0).\ln n$

- $\displaystyle\sup_{x\in[0,\alpha(n)]}|\varepsilon(x)|.\int_0^{\alpha(n)} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx = \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} . \ln(1+\tfrac{n}{\ln n}) \sim \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} . \ln n$

  $= o(\ln n)$

  car $\lim\limits_{n\to+\infty} \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} = 0$ puisque $\lim\limits_{0} \epsilon = 0$

- $\displaystyle\| f \|_{[0,1]}^{\infty} . \ln\left(\frac{n+1}{n\alpha(n)+1} \right) = \| f \|_{[0,1]}^{\infty} . \ln\left(\frac{n+1}{\frac{n}{\ln n}+1} \right) \sim \| f \| . \ln(\ln n) = o(\ln n)$

Quand $n \to +\infty$, de ces trois intégrales, la première est équivalente à $f(0).\ln n$ et les deux dernières sont négligeables devant $\ln n$.

Leur somme est donc équivalente à $f(0).\ln n$, et

$$\boxed{\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx = \frac{b_n}{n} \sim \frac{f(0).\ln n}{n} \text{ quand } n \to +\infty}$$

****

7.4 Convergence et calcul d'intégrale :

f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ admettant une limite finie L en $+\infty$

Soient p et q tels que $0 < p < q$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(px)-f(qx)}{x}dx$ converge et la calculer.

SOLUTION :

- Soient a et b tels que $0 < a < b$.

  Les fonctions $\left(x \longrightarrow \frac{f(px)}{x}\right)$ et $\left(x \longrightarrow \frac{f(qx)}{x}\right)$ sont continues sur le segment $[a, b]$.

  $$\int_a^b \frac{f(px) - f(qx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(px)}{x} dx - \int_a^b \frac{f(qx)}{x} dx = \int_{pa}^{pb} \frac{f(u)}{u} du - \int_{qa}^{qb} \frac{f(v)}{v} dv$$

  (par les changements de variables $u = px$ dans la première intégrale et $v = qx$ dans la seconde).

  $$\int_a^b \frac{f(px) - f(qx)}{x} dx = \int_{pa}^{qa} \frac{f(u)}{u} du + \int_{qa}^{pb} \frac{f(u)}{u} du - \int_{qa}^{pb} \frac{f(u)}{u} du - \int_{pb}^{qb} \frac{f(u)}{u} du$$

  $$\int_a^b \frac{f(px) - f(qx)}{x} dx = \int_{pa}^{qa} \frac{f(u)}{u} du - \int_{pb}^{qb} \frac{f(u)}{u} du \qquad (1)$$

- f étant continue en 0, $f(u) = f(0) + \alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u \to 0^+} \alpha(u) = 0$

  $$\int_{pa}^{qa} \frac{f(u)}{u} du = \int_{pa}^{qa} \frac{f(0) + \alpha(u)}{u} du = f(0) \Big(\ln(qa) - \ln(pa) \Big) + \int_{pa}^{qa} \frac{\alpha(u)}{u} du$$

  $$\left| \int_{pa}^{qa} \frac{\alpha(u)}{u} du \right| \leq \int_{pa}^{qa} \frac{\left(\sup_{[pa,qa]} |\alpha(u)| \right)}{u} du = \sup_{[pa,qa]} |\alpha(u)| \ . \ \ln\left(\frac{q}{p}\right) \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

  $$\left(\text{ car } \lim_{u \to 0^+} \alpha(u) = 0 \implies \lim_{a \to 0^+} \sup_{[pa,qa]} |\alpha(u)| = 0 \right)$$

  donc $\displaystyle \lim_{a \to 0^+} \int_{pa}^{qa} \frac{f(u)}{u} du = f(0) \ln\left(\frac{q}{p}\right)$

- De manière analogue, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, on peut écrire $f(u) = L + \beta(u)$ avec $\lim\limits_{u \to +\infty} \beta(u) = 0$

  $$\int_{pb}^{qb} \frac{f(u)}{u} du = \int_{pb}^{qb} \frac{L + \beta(u)}{u} du = L.\ln\left(\frac{q}{p}\right) + \int_{pb}^{qb} \frac{\beta(u)}{u} du$$

  $$\left| \int_{pb}^{qb} \frac{\beta(u)}{u} du \right| \leq \int_{pb}^{qb} \frac{\left(\sup_{[pb,qb]} |\beta(u)| \right)}{u} du = \sup_{[pb,qb]} |\beta(u)| \ . \ \ln\left(\frac{q}{p}\right) \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0$$

  $$\left(\text{ car } \lim_{u \to +\infty} \beta(u) = 0 \implies \lim_{b \to +\infty} \sup_{[pb,qb]} |\beta(u)| = 0 \right)$$

  donc $\displaystyle \lim_{b \to +\infty} \int_{pb}^{qb} \frac{f(u)}{u} du = L.\ln\left(\frac{q}{p}\right)$

- Alors, d'après (1), $\boxed{\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{f(px) - f(qx)}{x} dx = (f(0) - L).\ln\left(\frac{q}{p}\right)}$

7.5 Convergence et calcul :

Convergence et calcul des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} dx$

b) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(x) e^{-3x}}{x} dx$

c) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$

Solution :

Même méthode que dans l'exercice précédent ;

a) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$ $\qquad \left(f(0) = 0 \text{ et } L = \frac{\pi}{2} \right)$

b) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(x) e^{-3x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-4x}}{2x} dx = \ln 2$ $\qquad (f(0) = 1 \text{ et } L = 0)$

c) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $\qquad$ (adapter la méthode, $f(0) = 1$ et L n'existe pas)

7.6 Fonction périodique :

Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, périodique de période $T > 0$ et a un réel > 0.

L'intégrale $\displaystyle \int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge-t-elle ?

SOLUTION :

Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$

Si la valeur moyenne $\mu_f = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$ est nulle, alors F est périodique (voir ex ?????)

Si $\mu_f \neq 0$, alors $F(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \mu_f.x$

• Supposons que $\mu_f \neq 0$.

$\forall x > a,\ \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2}dt$ (en intégrant par parties)

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{\overbrace{F(a)}^{=0}}{a} + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

or $\dfrac{F(x)}{x} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mu_f.x}{x} = \mu_f$ et $\dfrac{F(t)}{t^2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mu_f}{t}$ donc $\dfrac{F(x)}{x}$ a une limite finie quand $x \to +\infty$, mais l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ est divergente.

Dans ce cas, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ est donc divergente.

• Supposons que $\mu_f \neq 0$.

La fonction F est alors périodique et continue, donc est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt = \frac{F(x)}{x} + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

$\dfrac{F(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car F est bornée et $\left|\dfrac{F(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{M}{t^2}$ où $M = \sup\limits_{[0,T]} |F|$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ est donc convergente et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ aussi par conséquent.

Dans ce cas, o, a l'égalité : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$

• En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \text{ converge} \iff \mu_f = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0}$

7.7 Fonction périodique :

Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, périodique de période $T > 0$.

On définit alors $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$

Montrer que $g(x)$ est défini si $x > 0$ et calculer un équivalent de $g(x)$ quand $x \to 0$.

SOLUTION :

f étant continue par morceaux est bornée sur $[0, T]$ et aussi sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

pour tout $x > 0$, la fonction $t \longrightarrow f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

Si $M = \sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$ et $t \to Me^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc, par majoration, $t \to f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $g(x)$ est défini.

Pour $x = 0$, l'intégrale d'une fonction cpmx périodique n'est convergente que si $f = 0$.

Donc g est définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{nT} f(t)e^{-xt}dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-xt}dt$ et en pasant à la limite quand $n \to +\infty$,

$g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-xt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T f(u+kT)e^{-x(u+kT)}du$ (par le chgment de variable $t = u + kT$)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT}\int_0^T f(u)e^{-xu}du = \left(\int_0^T f(u)e^{-xu}du\right)\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT} = \frac{1}{1-e^{-xT}}\int_0^T f(u)e^{-xu}du$$

- Pour tout $u \in [0, T]$, la fonction $x \to f(u)e^{-xu}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ la fonction $u \to f(u)e^{-xu}$ est continue pmx et donc intégrable sur $[0, T]$.
- $\forall (x, u) \in [0, +\infty[\times[0, T], |f(u)e^{-xu}| \leq M$, fonction constante intégrable sur $[0, T]$

On en déduit que la fonction $h :\ x \to \displaystyle\int_0^T f(u)e^{-xu}du$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc que

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = \int_0^T f(u)du.$

Par ailleurs, $1 - e^{-xT} \overset{x\to 0}{\sim} xT$ et donc $g(x) = \dfrac{1}{1-e^{-xT}} \displaystyle\int_0^T f(u)e^{-xu}du \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{xT}\int_0^T f(u)du = \dfrac{1}{x}\mu_f$ où μ_f est la valeur moyenne de la fonction f, l'équivalent étant valable si $\mu_f \neq 0$.

$$\boxed{\text{si } \mu_f \neq 0, \quad g(x) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{xT}\int_0^T f(u)du = \frac{1}{x}\mu_f}$$

* *

7.8 Intégrale et période :

Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, continue, décroisante, de limite nulle en $+\infty$ et $a > 0$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(at)dt$ converge et donner son signe.

SOLUTION :

Soit, pour tout entier naturel k, $u_k = \displaystyle\int_{\frac{k\pi}{a}}^{\frac{(k+1)\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt$

$\forall t \in [\frac{k\pi}{a}, \frac{(k+1)\pi}{a}], k\pi \leq at \leq (k+1)\pi$ et $\sin(at)$ a même signe que $(-1)^k$

f étant une fonction positive, u_k a même signe que $(-1)^k$ et la suite (u_k) est alternée.

Par le changement de variable $t = \frac{k\pi}{a} + u$,

$$u_k = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(k\pi + au)du = (-1)^k \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(au)du}_{>0}$$

$$|u_{k+1}| - |u_k| = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\underbrace{f(\frac{(k+1)\pi}{a} + u) - f(\frac{k\pi}{a} + u)}_{\leq 0 \text{ car } f \text{ est decroissante}} \right) \sin(au)du \leq 0$$

$$|u_k| = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(au)du \leq \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)du \leq \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a})du = \frac{\pi}{a} f(\frac{k\pi}{a})$$

$|u_k| \leq \dfrac{\pi}{a} f(\dfrac{k\pi}{a}) \longrightarrow 0$ quand $k \to 0$ car $\lim\limits_{\infty} f = 0$

Ainsi, $\{u_k\}$ est une série alternée, décroissante en valeur absolue et de limite nulle.

Elle est donc convergente.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{n\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt$ a une limite finie L quand $n \to +\infty$

Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et n le plus grand entier tel que $\dfrac{n\pi}{a} \leq x < \dfrac{(n+1)\pi}{a}$

$$\int_0^x f(t)\sin(at)dt = \int_0^{\frac{n\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt + \int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt$$

or $\left| \displaystyle\int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt \right| \leq \displaystyle\int_{\frac{n\pi}{a}}^{\frac{(n+1)\pi}{a}} f(t)dt \leq \dfrac{\pi}{a} f(\frac{n\pi}{a}) \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x f(t)\sin(at)dt = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = L$

b) la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = L$ a même signe que son premier terme $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt > 0$

donc $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(at)dt > 0$

7.9 Comportement de f en $+\infty$:

Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, uniformément continue et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f^2(t)dt$ converge.

SOLUTION :

a) Supposons que $f(x)$ n'ait pas pour limite 0 quand $x \to +\infty$.
Alors $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon_0$
Par ailleurs, f est uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$ donc :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$
Appliquons ceci à $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$: $\exists \alpha_0 > 0, |x - x'| < \alpha_0 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$
Alors, $\forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon_0$
$\forall x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0], |f(x) - f(x_A)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ donc $-\frac{\varepsilon_0}{2} < f(x) - f(x_A) < \frac{\varepsilon_0}{2}$
et donc $\forall x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0], f(x) > f(x_A) - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}$
d'où $\displaystyle\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0} f(t)dt \geq \alpha_0.\varepsilon_0$
Ainsi, $\forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $\displaystyle\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0} f(t)dt \geq \alpha_0.\varepsilon_0$ (*)
Mais si l'intédrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge, le reste $\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt$ a pour limite 0 quand $x \to 0$
On devrait donc avoir :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x-\alpha_0}^{x+\alpha_0} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_{x_A-\alpha_0}^{\infty} f(t)dt - \int_{x_A+\alpha_0}^{\infty} f(t) \right) = 0 - 0 = 0$, ce qui est contraire à (*)
L'hypothèse de départ est donc absurde et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
b) d'après a), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
donc $\exists B > 0, \forall x > B, 0 \leq f(x) < 1$
donc $\forall x > B, 0 \leq f^2(x) \leq f(x) < 1$ et par majoration $\displaystyle\int_B^\infty f^2(t)dt$ converge aussi.

****

7.10 * Limite d'intégrales :

Soient $0 \leq a < b$ et f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, de période $T > 0$.

a) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nt)dt$
b) Soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, continue.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(t)f(nt)dt$

SOLUTION :

a) Par le changement de variable $u = nt$,
$\displaystyle\int_a^b f(nt)dt = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(u)du$
$\displaystyle\int_{na}^{nb} f(u)du = \int_{na}^{na+T} f(u)du + \int_{na+T}^{na+2T} f(u)du + ... + \int_{na+(m-1)T}^{na+mT} f(u)du + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du$
avec $na + mT \leq nb < na + (m+1)T$ (*)
c'est à dire $m \leq \frac{n(b-a)}{T} < m + 1$
ou encore, $m = E(\frac{n(b-a)}{T})$
or $\displaystyle\int_{na+kT}^{na+(k+1)T} f(u)du = \int_{na}^{na+T} f(v + kT)dv = \int_{na}^{na+T} f(v)dv = \int_a^{a+T} f(x)dx$
(par le changement $u = v + kT$ et par périodicité)
donc, $\displaystyle\int_{na}^{nb} f(u)du = m\int_a^{a+T} f(v)dv + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du$
f est continue donc bornée sur $[a, a+T]$ et aussi sur $[a, +\infty[$ par périodicité.
Soit $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
alors $\displaystyle\left| \int_{na+mT}^{nb} f(u)du \right| \leq \int_{na+mT}^{nb} |f(u)|du \leq (nb - na - mT)M \leq MT$, d'après (*)
or $\displaystyle\frac{m}{n} \leq \frac{b-a}{T} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$
donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{b-a}{T}$
et puisque $\displaystyle\int_a^b f(nt)dt = \frac{1}{n}\left(m\int_a^{a+T} f(v)dv + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du \right)$
on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nt)dt = \frac{b-a}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$

b) Soit $\epsilon > 0$

g étant continue, il existe une fonction φ, en escalier sur $[a,b]$,

telle que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)-\varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M(b-a)}$

Il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_p = b$ telle que la restriction de φ à chaque intervalle $]a_i, a_i+1[$ est une constante réelle λ_k.

alors, $\displaystyle\int_a^b g(t)f(nt)dt = \int_a^b (g(t)-\varphi(t))f(nt)dt + \int_a^b \varphi(t)f(nt)dt$

d'une part,

$\displaystyle\left| \int_a^b (g(t)-\varphi(t))f(nt)dt \right| \leq \int_a^b |g(t)-\varphi(t)|.|f(nt)|dt \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.Mdt \leq \frac{\varepsilon}{3}$

d'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(t)f(nt)dt = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t)f(nt)dt \right)$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(nt)dt \right) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\lambda_k \lim_{n\to\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(nt)dt \right)$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\lambda_k \frac{a_{k+1}-a_k}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt \right)$, d'après la question a)

$\displaystyle= \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \frac{a_{k+1}-a_k}{T} \right). \int_a^{a+T} f(t)dt$

$\displaystyle= \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt$

donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que

$\displaystyle\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b \varphi(t)f(nt)dt - \frac{1}{T}\int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}$

Enfin, $\displaystyle\frac{1}{T}\int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt = \left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt \right). \left(\int_a^b g(t)dt + \int_a^b (\varphi(t)-g(t))dt \right)$

$\displaystyle= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b g(t)dt + \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b (\varphi(t)-g(t))dt$

avec $\displaystyle\left| \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b (\varphi(t)-g(t))dt \right| \leq \tfrac{1}{T}MT(b-a)\tfrac{\varepsilon}{3M(b-a)} = \tfrac{\varepsilon}{3}$

Finalement, pour $n \geq n_0$

$\displaystyle\left| \int_a^b g(t)f(nt)dt - \frac{1}{T}\int_a^b g(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b (g(t)-\varphi(t))f(nt)dt \right|$

$\displaystyle+ \left| \int_a^b \varphi(t))f(nt)dt - \frac{1}{T}\int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| + \left| \frac{1}{T}\int_a^b (\varphi(t)-g(t))dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right|$

$\displaystyle\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(t)f(nt)dt = \frac{1}{T}\int_a^b g(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt$

7.11 Intégrale fonction des bornes (ENSI)

On définit $\displaystyle f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$

a) Etude complète de la fonction f.

b) Etudier le signe de f en les points où elle atteint un extremum local.

Solution :

La fonction $g : t \longrightarrow \dfrac{\cos t}{t}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}^*$.

- si $x > 0$, alors $0 < x < 3x$ et g est continue sur $[x, 3x]$ donc $f(x)$ est défini.
- si $x < 0$, alors $3x < x < 0$ et g est continue sur $[x, 3x]$ donc $f(x)$ est défini.

Donc f est définie sur $\mathbf{R}^*$.

- $\displaystyle\forall x \in \mathbf{R}^*, f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}\, d(-u) = f(x)$ (par le chgmt $u = -t$)

f est paire, on peut restreindre son étude à $]0, +\infty[$.

g étant continue, par dérivation d'une intégrale fonction de la borne supérieure, on obtient :

$\displaystyle g'(x) = 3\frac{\cos(3x)}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos(3x) - \cos x}{x} = \frac{-2\sin(2x).\sin x}{x}$

7.12 Etude d'une fonction et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$

1- Montrer que g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2- Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $g''(x)$ à l'aide des fonctions classiques.
En déduire $g'(x)$ et $g(x)$.

3- Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

SOLUTION :

1- Soit h la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$

Elle est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

La fonction ainsi prolongée, que nous appellerons encore h , est continue sur $[0, +\infty[$, dominée par $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ est donc convergente et $g(0)$ est défini.

Pour tout $x > 0$, $\forall t \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \dfrac{2}{t^2} e^{-xt} \leq 2e^{-xt}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ est convergente par majoration et $g(x)$ est défini.

Donc g est définie sur $[0, +\infty[$.

• Notons $F(x,t) = h(t)e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \underbrace{[0, +\infty[}_{J} \times \underbrace{[0, +\infty[}_{I}$

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)
- pour tout $(x,t) \in J \times I$, $|F(x,t)| \leq h(t)$ avec h continue et intégrable sur I, comme montré ci-dessus. (H_3)

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ et affirmer que
$\boxed{g \text{ est continue sur } J = [0, +\infty[}$

2- La fonction F admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ continue sur $[0, +\infty[\times \underbrace{]0, +\infty[}_{I'}$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I',\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$$

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2)
- pour tout $t \in I'$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J. (H_1')
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2')

Soir $a > 0$ quelconque,

- pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times I'$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\right| \leq t.h(t)e^{-at}$ avec $t \mapsto t.h(t)e^{-at}$ continue et intégrable sur I'. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) dt = -\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} dt$$

• F admet une dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I',\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$$

- pour tout $t \in I'$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur J. (H_1'')
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue et intégrable sur I'. (H_2'')

Soir $a > 0$ quelconque,

- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times I'$, $\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|(1-\cos t)e^{-xt}\right| \leq 2e^{-at}$ avec $t \mapsto 2e^{-at}$ continue et intégrable sur I'. (H_3'')

Par application à nouveau du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que g est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^\infty (1-\cos t)e^{-xt}dt$$

$$\forall x>0,\ g''(x) = \int_0^\infty e^{-xt}dt - \int_0^\infty \cos t\, e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^\infty - \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{(i-x)t}\right)dt$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^\infty\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}$

- Par intégration, $\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \ln\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}} + \lambda$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (après prolongement par continuité en 0) , de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée sur $[0,+\infty[$.

Donc pour tout $x>0$, $|g'(x)| = \left|\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}dt\right| \leq \int_0^\infty Me^{-xt}dt = \frac{M}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

d'où il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ et donc $\lambda = 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}}$

- Par intégration, $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \displaystyle\int \ln(x)dx - \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)dx + \mu$

$$g(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}\left(x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx\right) + \mu \quad \text{(en intégrant par parties)}$$

$$g(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx + \mu$$

$$g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \mu$$

Par une majoration analogue à celle de $g'(x)$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et donc $\mu = \frac{\pi}{2}$

$$\left(\text{car } x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \sim -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right)$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}}$

g étant **continue en 0**, $g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2} = g(0)$

(puisque $\lim\limits_0 (x\ln x) = 0$)

Donc $g(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

3- Par intégration par parties sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, puis par passage à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient :

$$\int_a^b (1-\cos t)\frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin t}{t}dt$$

et donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

7.13 Sujet 4 :

Donner le domaine définition de la fonction : $x \to g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} dt$.

Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)$

Calculer $g'(x)$, puis $g(x)$.

$x \sim [x \to +\infty] by$

$x \xrightarrow[x\to+\infty]{b} y$

$F(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} x$

$\boxed{\forall r \in]-1,1[, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta = 2\pi f(0,0)}$

$$A \overset{n\to\infty}{\sim} B$$

$$A \overset{x\to b}{\sim} B$$

- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. $\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = 2xt^2e^{-x^2t^2} \leq 2bt^2e^{-a^2t^2}$, fonction de t intégrable sur $[0,+\infty[$. ($t^2e^{-a^2t^2} \overset{t\to\pm\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$)

On en déduit par le théorème de dérivation "sous le signe $\int$" que g est C^1 sur $[a,b]$ pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$, donc est C^1 sur $]0,+\infty[$, et que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\boxed{g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt = -2x \int_0^{+\infty} t^2 e^{-x^2t^2+it^2} dt}$