Oraux 2015

PSI* ORAUX 2015 -

Note : la section 1 contient des sujets CCP et ENSAM.
la section 2 contient des sujets Centrale - Supelec, dont 6 sujets 2015 issus du site (voir **https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/MultiY/C2015**)
L'épreuve maths 1 dure 30mn sans préparation, l'épreuve maths 2 dure 30mn avec préparation de 30 mn. L'une et l'autre ont pour coefficient 12/100.
la section 3 contient des sujets Mines-Ponts et écoles du même groupe .
la section 4 contient des sujets X-ENS
la section 5 contient des sujets faisant intervenir les probabilités .

Les exercices plus difficiles sont indiquées par une ou deux **

0.1 CCP - ENSAM : -

0.1.1 CCP :

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1/a & 1 & a & a^2 \\ 1/a^2 & 1/a & 1 & a \\ 1/a^3 & 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$

Sans calcul, déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
A est elle diagonalisable ?

Exercice 2 : Trouver les fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$$

SOLUTION : **Exercice 1 :** Si on note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A, on a les relations :
$C_2 = aC_1,\ C_3 = a^2C_1,\ C_4 = a^3C_1$

La matrice A est donc de rang 1. 0 est valeur propre, et le sous-espace propre associé est de dimension $4-3=1$. Ce sous espace est l'hyperplan d'équation $x + ay + a^2z + a^3t = 0$

Les valeurs propres , $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et λ_4 ont pour somme $\mathrm{tr}(A) = 4$. Donc $\lambda_4 = 4$

Le sous espace associé est la droite $\mathrm{Im}(A)$ engendrée par le vecteur C_1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égal à 4, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

Exercice 2 : • **Analyse :** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$

alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x\displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ étant continues, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est également de classe $\mathcal{C}^1$.

En dérivant cette égalité, on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -xf(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt + xf(x)$ (par dérivation d'intégrales fonctions de la borne supérieure)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

Par le même raisonnement, cette égalité montre que la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^1$ (et f de classe $\mathcal{C}^2$)

En dérivant à nouveau, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$

f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation diffétentielle : $y'' + y = 0$

Donc il existe deux constantes réelles A et B telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos x + B\sin x$

En reportant dans l'égalité de départ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x + \int_0^x (x-t)(A\cos t + B\sin t)dt = 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x + x\int_0^x (A\cos t + B\sin t)dt - \int_0^x t(A\cos t + B\sin t)dt = 1$$

En intégrant par parties la dernière intégrale,

$\forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x + x(A\sin x - B\cos x + B) - [t(A\sin t - B\cos t)]_0^x + \int_0^x (A\sin t - B\cos t)dt = 1$

$\Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x + Bx - (Ax\sin x - Bx\cos x) + [-A\cos t + B\sin t]_0^x = 1$

$\Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x + Bx + (-A\cos x + A - B\sin x) = 1$

$\Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ Bx + A = 1$

Cette égalité étant vraie pour tout x, nécessairement, $A = 1$ et $B = 0$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)}$

Réciproquement, les derniers calculs peuvent être "remontés", et la condition $A = 1$ et $B = 0$ (c'est à dire $f = \cos$) est suffisante pour que l'équation fonctionnelle étudiée soit satisfaite.

Commentaire : Dans cet exercice, la différence entre les candidats se fera :

- sur la justification que f, supposée seulement continue au départ, et vérifiant l'équation étudiée, est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$,

- sur l'exactitude des calculs qui doivent être menés à terme sans erreur.

0.1.2 CCP

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer qu'il existe une matrice R tel que $R^2 = A$ (on ne demande pas de calculer R)

3) Montrer que toute matrice R appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ est diagonalisable

Exercice 2 : On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \qquad (\mathscr{R})$$

1- Soit f une fonction vérifiant la relation $(\mathscr{R})$, et les conditions : $f(0) = f(1) = 0$

a) Montrer que f est impaire

b) Montrer que f est 2-périodique et en déduire que f est bornée

c) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$

d) Qu'en déduire sur f ?

2) Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété $(\mathscr{R})$

SOLUTION **: Exercice 1 :** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -3 & 2 \\ -1 & 5-x & -2 \\ -1 & 3 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 2 \\ 2-x & 5-x & -2 \\ 2-x & 3 & -x \end{vmatrix}$ (en ajoutant toutes les colonnes à la première)

$\chi_A(x) = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5-x & -2 \\ 1 & 3 & -x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8-x & -4 \\ 0 & 6 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)[(x-8)(x+2)+24]$

$\chi_A(x) = (2-x)(x^2 - 6x + 8) = (2-x)(x-2)(x-4)$

$\boxed{\chi_A(X) = -(X-2)^2(X-4)}$

4 est valeur propre simple, le sous espace propre associé, $E_4(A)$ est de dimension 1.

2 est valeur propre double. On sait que $\dim(E_2(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I_3)$

Or $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1, puisque toutes ses colonnes sont colinéaires à la première colonne. Donc $\dim(E_2(A)) = 3 - 1 = 2 = \mathrm{ordre}(2)$.

Le polynôme $\chi_A(X) = -(X-2)^2(X-4)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et pour chacune des valeurs propres, la dimension du sous espace propre est égale à l'ordre de multiplicité.

Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

2) Il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.P^{-1}$

En considérant la matrice $R = P.\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1}$, on a bien $R^2 = P.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.P^{-1} = A$

3) Puisque A est diagonalisable, on sait que le polynôme $Q(X) = \prod\limits_{\lambda \in\ Sp(A)} (X - \lambda) = (X-2)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

Soit $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$

Alors $Q(A) = (A - 2I_3)(A - 4I_3) = 0 = (R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3)$

Le polynôme $T(X) = (X^2 - 2)(X^2 - 4) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - 2)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de la matrice R, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et à racines simples, ce qui prouve que $\boxed{R \text{ est diagonalisable}}$.

SOLUTION **: Exercice 2 :** 1- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(\mathscr{R})$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \qquad \text{et telle que } f(0) = f(1) = 0.$$

a) En prenant x quelconque et $y = -x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x-x}{2}\right) = f(0) = 0 = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$, et la fonction f est impaire.

b) En prenant x quelconque et $y = 2 + x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) - f(x) = f(x+2) + f(-x) = 2f\left(\frac{(x+2) + (-x)}{2}\right) = 2f(1) = 0$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = f(x) \text{ et } f \text{ est 2- périodique}}$

- f est bornée sur le segment $[0, 2]$ comme fonction continue sur un segment :

  Il existe $M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$

f étant 2-périodique, $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$. Donc $\boxed{f \text{ est une fonction bornée.}}$

c) En prenant x quelconque et $y = 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + \underbrace{f(0)}_{=0}), \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

x étant quelconque, on a bien montré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)}$

c) Il s'ensuit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(4x) = 2f(2x) = 4f(x)$, et par une récurrence immédiate que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ f(2^k x) = 2^k f(x)$$

Si la fonction f n'est pas nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ f(2^k x_0) = 2^k f(x_0) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

Ce résultat est contradictoire avec le caractère borné de la fonction f. Donc pour aucun réel x_0, $f(x_0)$ est non nul.

Donc $\boxed{f \text{ est la fonction nulle.}}$

2- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $(\mathscr{R})$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

ATTENTION, on ne suppose plus que $f(0) = f(1) = 0$

Toute fonction affine $x \mapsto ax + b$ est solution de $(\mathscr{R})$ (vérification immédiate)

En posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - (ax + b)$, la fonction g est aussi solution de $\mathbb{R}$.

Cherchons à déterminer les coefficients a et b de telle sorte que g vérifie aussi les conditions $g(0) = g(1) = 0$:

$g(0) = 0 \iff f(0) - b = 0 \iff b = f(0)$

$g(1) = 0 \iff f(1) - a - b = 0 \iff a = f(1) - b = f(1) - f(0)$

La fonction $g : x \mapsto f(x) - \underbrace{(f(1) - f(0))}_{a}x - \underbrace{f(0)}_{b}$ est une solution de $(\mathscr{R})$, et qui verifie les deux conditions:

$g(0) = g(1) = 0$. D'après la partie I, c'est donc la fonction nulle.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. f est une fonction affine.

En conclusion, $\boxed{\text{les solutions de } (\mathscr{R}) \text{ sont les fonctions affines}}$.

0.1.3 CCP :

Exercice 1 : Définition de $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} dt$.

Etudier la limite de la suite (a_n) et en calculer un équivalent.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M) = \tfrac{1}{3}(2M - {}^tM)$$

Rechercher les éléments propres de u. u est il diagonalisable ?

Calculer $\operatorname{tr}(u)$ et $\det(u)$.

SOLUTION : **Exercice 1 :**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$

$$\frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\frac{t}{n}}{t(1+t^2)} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{n} \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} = \frac{1}{n}$$

On peut prolonger la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ en lui donnant en 0 la valeur $\frac{1}{n}$. Elle est alors intégrable sur tout segment de la forme $[0,a], a>0$.

On rappelle que $\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin u| \leqslant |u|$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R},\ \left|\dfrac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{t/n}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{n(1+t^2)}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{n(1+t^2)}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (et même sur $[0,+\infty[$)

Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le réel $\boxed{a_n \text{ est donc défini pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

• La majoration précédente montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\right| dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(1+t^2)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n}\ .$$

Cette majoration montre que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \times \frac{1}{1+t^2}dt$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ g_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \times \dfrac{1}{1+t^2}$

puisque $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

par ailleurs, la majoration $|\sin u| \leqslant |u|$, donne la domination :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ |g_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, où la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (et même sur $[0,+\infty[$)

Par application du théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

L'égalité $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \times \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$

permet alors de conclure que : $\boxed{a_n \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}}$

Exercice 2 : • Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}$;

$$\begin{aligned} u(M) = \lambda.M &\iff 2M - {}^tM = 3\lambda M \\ &\iff -{}^tM = (3\lambda - 2)M \\ &\iff M = (2-3\lambda)\,{}^tM \\ &\implies M = (2-3\lambda)(2-3\lambda)M \\ &\implies (2-3\lambda)^2 = 1 \qquad (\text{car } M \neq 0) \\ &\implies 2-3\lambda = 1 \text{ ou } 2-3\lambda = -1 \\ &\implies \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Sp}(u) \subset \left\{1, \frac{1}{3}\right\}}$

• $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M) = M \iff 2M - {}^tM = 3M \iff {}^tM = -M$

Donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } u}$, et le sous espace propre associé est formé des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{E_1(u) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$ Ce sous espace propre a pour dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

• $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M) = \frac{1}{3}M \iff 2M - {}^tM = M \iff {}^tM = M$

Donc $\boxed{\frac{1}{3} \text{ est valeur propre de } u}$, et le sous espace propre associé est formé des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{E_{\frac{1}{3}}(u) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$ Ce sous espace propre a pour dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

• On sait que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous espaces supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La somme des sous espaces propres de u est égale à l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$

• Dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formée de l'union d'une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et d'une $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, la matrice de u est diagonale. Elle comprend $\frac{n(n-1)}{2} = \dim(E_1(u))$ fois le nombre 1, et $\frac{n(n+1)}{2} = \dim(E_{\frac{1}{3}}(u))$ fois le nombre $\frac{1}{3}$.

Donc $\boxed{\text{tr}(u) = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{3n^2 - 3n + n^2 + n}{6} = \dfrac{n^2 - n}{3}}$

et $\boxed{\det(u) = 1^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{1}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}}$

0.1.4 CCP

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}t + \text{ch}a}$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt$

indication (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$)

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$

Justifier les propositions suivantes :

a) A est inversible.

b) A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c) $\det(A) > 0$

Exercice 3 : On considère le disque $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et la fonction f définie par :

$\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$

f admet-elle sur $\mathcal{D}$ des extrema globaux ou des extrema locaux ?

SOLUTION **: Exercice 1 :** La fonction $t \mapsto \text{ch}t + \text{ch}a$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annule pas. ($\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}x \geqslant 1$)

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}t + \text{ch}a}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Elle est intégrable sur tout segment de la forme $[0, b]$, comme fonction continue sur un segment. (Il n'y a pas d'étude à faire pour la borne 0)

$f(t) = \dfrac{1}{\text{ch}t + \text{ch}a} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t} + e^a + e^{-a}} \leqslant \dfrac{2}{e^t} = 2e^{-t}$

La fonction $t \mapsto 2e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par majoration, f l'est aussi.

• $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}t + \text{ch}a} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t\ dt}{e^{2t} + 2\text{ch}a\ e^t + 1}$

Par le changement de variable $u = e^t$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2du}{u^2 + 2u\text{ch}a + 1}$

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(u + \text{ch}a)^2 - \text{ch}^2 a + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(u + \text{ch}a)^2 - \text{sh}^2 a} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(u + \text{ch}a + \text{sh}a)(u + \text{ch}a - \text{sh}a)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(u + e^a)(u + e^{-a})}$$

or $\dfrac{2}{(u + e^a)(u + e^{-a})} = \dfrac{(u + e^a) - (u + e^{-a})}{(u + e^a)(u + e^{-a})} \times \dfrac{2}{e^a - e^{-a}} = \dfrac{1}{\text{sh}a}\left(\dfrac{1}{u + e^{-a}} - \dfrac{1}{u + e^a}\right)$

Les intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u + e^{\pm a}} du$ étant divergentes, on ne peut pas séparer directement J en deux intégrales. Nous passerons par les intégrales $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{u + e^{\pm a}} du$.

Pour tout $x > 0$, $J_x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\text{ch}t + \text{ch}a} = \frac{1}{\text{sh}a}\left(\int_0^x \frac{1}{u + e^{-a}} du - \int_0^x \frac{1}{u + e^a} du\right)$

$$J_x = \frac{1}{\text{sh}a}\left[\ln\left(\frac{u + e^{-a}}{u + e^a}\right)\right]_0^x = \frac{1}{\text{sh}a}\left[\ln\left(\frac{x + e^{-a}}{x + e^a}\right) - \ln\left(e^{-2a}\right)\right]$$

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{x + e^{-a}}{x + e^a} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{x + e^{-a}}{x + e^a}\right) \to 0$

Donc $\boxed{J = \lim\limits_{x \to +\infty} J_x = -\dfrac{\ln(e^{-2a})}{\text{sh}a} = \dfrac{2a}{\text{sh}a}}$

Exercice 2 : a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$

alors $A(2A^2 + 3A + 6I_n) = I_n$, ce qui montre que $\boxed{A \text{ est inversible, et que } A^{-1} = 2A^2 + 3A + 6I_n}$

b) Le polynôme $P(X) = 2X^3 + 3X^2 + 6X - 1$ est un polynôme annulateur de A. (à ne pas confondre avec le polynôme caractéristique, qui est de degré n, alors que P est de degré 3).

$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = 6(x^2 + x + 1) > 0$

La fonction polynôme P est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue, varie de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une et une seule racine réelle, qu'on notera α. Or $P(0) = -1$, et puisque P est croissante, $\alpha > 0$.

$P(X)$ étant de degré 3, il admet deux autres racines complexes non réelles, qui sont conjuguées l'une de l'autre, puisque $P(X)$ est à coefficients réels. Notons les β et $\overline{\beta}$.

α, β et $\overline{\beta}$ sont les racines du polynôme annulateur $P(X)$.

Le polynôme annulateur $P(X)$ est donc scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples. On peut alors affirmer que $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

c) Il en résulte aussi que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$.

A étant diagonalisable, elle est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale de la forme :

$\Delta = \text{diag}(\underbrace{\alpha,\cdots,\alpha}_{p\ fois},\underbrace{\beta,\cdots\beta}_{q\ fois},\underbrace{\overline{\beta},\cdots,\overline{\beta}}_{q\ fois})$

A et Δ étant semblables, elles ont même déterminant :

$$\det(A) = \det(\Delta) = \alpha^p.\beta^q\overline{\beta}^q = \alpha^p.(\beta\overline{\beta})^q = \underbrace{\alpha^p}_{>0}.\underbrace{|\beta|^{2q}}_{>0} > 0$$

Exercice 3 : Recherchons les extrema locaux intérieurs à $\mathcal{D}$: ce sont nécessairement des points critiques, en lesquels le gradient de f est nul.

$$\nabla f(x,y) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3(1+y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xy \end{array} \right.$$

(x,y) est un point critique de f si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ xy = 0 \end{array} \right.$

Le cas $x = 0$ entraînerait que $-y^2 - 1 = 0$, ce qui est impossible.

Le cas $y = 0$ entraîne que $x^2 - 1 = 0$, soit $x = \pm 1$. Mais les points $M_1 = (1,0)$ et $M_2 = (-1,0)$ sont sur la frontière du disque $\mathcal{D}$; ce ne sont pas des points intérieurs à $\mathcal{D}$.

Donc aucun point intérieur à $\mathcal{D}$ n'est un point critique. f n'admet pas d'extremum local (et à fortiori d'esxtremum global) dans l'intérieur du disque $\mathcal{D}$.

• Le domaine $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$: il est fermé et borné.

L'image du compact $\mathcal{D}$ par la fonction continue f est un compact de $\mathbb{R}$. Cet ensemble est borné, et ses bornes sont atteintes, puisqu'il est fermé.

f admet donc (au moins) un maximum global et (au moins) un minimum global, qui seront néccssairement sur la frontière du domaine, c'est à dire sur le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Soit (x,y) un point de ce cercle : $\exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right.$

$f(x,y) = \cos^3 t - 3\cos t(1+\sin^2 t) = \cos^3 t - 3\cos t(2-\cos^2 t) = 4\cos^3 t - 6\cos t$

Notons $g(c) = 4c^3 - 6c$. Alors $g'(c) = 12c^2 - 6 = 6(2c^2 - 1)$

$g'(c) = 0 \iff c^2 = \frac{1}{2} \iff c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

c	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$g'(c)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(c)$			$2\sqrt{2}$				-2
	2	$\nearrow$		$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Finalement, f admet un maximum global sur $\mathcal{D}$, aux points $M = (x,y)$ pour lesquels $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit les points $M_1(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $M_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, et qui vaut $2\sqrt{2}$,

et un minimum global aux points $M = (x,y)$ pour lesquels $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit les points $M_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $M_2(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ et qui vaut $-2\sqrt{2}$.

0.1.5 CCP :

Exercice 1 : Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche à montrer que M est semblable à A.

a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et donner son spectre. L'est elle dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

b) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$

Montrer que j et j^2 ont même ordre de multiplicité.

(indication donnée en cours d'épreuve : on pourra s'intéresser à la trace de M)

En déduire les valeurs propres de M.

c) Montrer que M est semblable à A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Soient $x \in [0,1], p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{pk} = \frac{1 + (-1)^n x^{p(n+1)}}{1 + x^p}$

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p} dx$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}$

Faire l'application pour $p = 1, 2, 3$

SOLUTION **: Exercice 1 :** a) $\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 1$ (règle de Sarrus)

Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, j, j^2\}$.

A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Elle est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(1, j, j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$

A n'est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_A(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

b) La matrice M admet pour polynôme annulateur $Q(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$

Ce polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples. M est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Par ailleurs, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur :

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$

Soient m, p, q les ordres de multiplicité respectifs des complexes $1, j, j^2$.

alors $\mathrm{tr}(M) = m + pj + qj^2 = m + p\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\mathrm{tr}(M) = \underbrace{m - \frac{p+q}{2}}_{reel} + i\underbrace{(p-q)\frac{\sqrt{3}}{2}}_{reel}$$

Or $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$ puisque M est une matrice réelle. Donc $p - q = 0$ et $p = q$.

Dès lors, • si $p = q = 0$, alors seule 1 est valeur propre de M, M est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,1,1) = I_3$, et est égale à I_3, ce qui est exclu par hypothèse.

• si $p = q = 1$, alors 1 est aussi valeur propre simple de M, M est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à la matrice $\mathrm{diag}(1, j, j^2)$.

• Les cas $p = q \geqslant 2$ sont impossibles car la somme des ordres de multiplicité dépasserait la dimension de la matrice, qui est 3.

Donc $\boxed{p = q = 1 \text{ et } M \text{ est semblable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \text{ à la matrice } \mathrm{diag}(1, j, j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}}$

c) A et M sont semblables l'une et l'autre, dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, à la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$.

Par transitivité, $\boxed{\text{elles sont donc semblables entre elles } \textbf{dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{C})}$.

Reste à montrer que si deux matrices **réelles** A et M sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Il existe $Q \in GL_3(\mathbb{C}), M = Q^{-1}.A.Q$. Décomposons la matrice complexe Q en partie réelle et partie imaginaire : il existe $P_1, P_2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ Q = P_1 + iP_2$

$M = Q^{-1}.A.Q \implies Q.M = A.Q \implies (P_1 + iP_2).M = A.(P_1 + iP_2)$

$$\implies \begin{cases} P_1 M = AP_1 \\ \quad et \\ P_2 M = AP_2 \end{cases} \quad \text{(identification des parties réelles et imaginaires)}$$

$\implies \forall t \in \mathbb{C},\ (P_1 + tP_2)M = A(P_1 + tP_2)$

L'application $\varphi : t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$ est une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas le polynôme nul puisque $\varphi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(Q) \neq 0$ (car $Q \in GL_3(\mathbb{C})$

Donc elle admet un nombre fini de racines, et il existe $t_0\mathbb{R},\ \varphi(t_0) = \det(P_1 + t_0P_2) \neq 0$

En posant $P = P_1 + t_0P_2$, P est une matrice réelle inversible.

Par ailleurs, $(P_1 + t_0P_2)M = A(P_1 + t_0P_2) \implies PM = AP \implies M = P^{-1}.A.P$, ce qui montre que M est A sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc $\boxed{M \text{ est semblable, dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{, à la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice 2 : a) Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} - \{1\},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

donc $\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{pk} = \sum_{k=0}^{n}(-x^p)^k = \frac{1 - (-x^p)^{n+1}}{1 - (-x^p)} = \frac{1 + (-1)^n x^{p(n+1)}}{1 + x^p}$

b) En intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{pk}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^p} + (-1)^n \frac{x^{p(n+1)}}{1 + x^p}\right) dx$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underbrace{\int_0^1 x^{pk}\,dx}_{=\frac{1}{1+pk}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}dx$$

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}dx}$

c) $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}dx \leqslant \int_0^1 x^{p(n+1)}dx = \frac{1}{p(n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

En passant à la limite dans l'égalité b), on obtient : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}}$

• Pour $p=1$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ce qui donne, par le changement d'indice $k' = k+1$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2}$$

• Pour $p=2$: $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctan}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}}$

• Pour $p=3$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1/2)^2-3/4} \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}[\ln(x^2-x+1)]_0^1 + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$$

0.1.6 CCP

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$

Que peut on dire du rang de A ?

Exercice 2 : Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt$

***SOLUTION** :* **Exercice 1 :**

Si A est de rang 3, alors elle est inversible, et en multipliant par A^{-1}, on obtient : $A^2 + I_3 = 0$
d'où $\det(A^2) = \underbrace{(\det(A))^2}_{\geqslant 0} = \det(-I_3) = -1$, ce qui est impossible.

Donc $\text{rg}(A) \leqslant 2$. A n'est pas inverseible. 0 est valeur propre de A.

Le polynôme X^3+X est un polynôme annulateur de A. Donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, i, -i\}$.

$X^3+X = X(X+i)(X-i)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (mais pas forcément dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, sa trace est réelle. Donc si i est valeur propre $-i$ l'est aussi (et réciproquement).

Les deux seules possiblités sont : $\text{Sp}(A) = \{0, i, -i\}$ (auquel cas A est de rang 2), et $\text{Sp}(A) = \{0\}$ (auquel cas A est nulle)

Ces deux cas sont possibles comme le montrent la matrice nulle (rang = 0) et la matrice de rotation $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (rang = 2)

Exercice 2 : La fonction $t \mapsto e^{-t}\left(\ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}}\right)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$

• Quand $t \to +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{1-e^{-t}} = 1$, donc $e^{-t}\left(\ln t - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-e^{-t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}\ln t = o(e^{-t/2})$
et la fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$

• Quand $t \to 0$, $t \mapsto e^{-t}\left(\ln t - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-e^{-t}}\right) = e^{-t}\left(\ln t + \dfrac{-(1-e^{-t})+t}{t(1-e^{-t})}\right)$

Utilisons le développement limité de la fonction exponentielle en 0 : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$t - (1-e^{-t}) = t - (1 - 1 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) = \frac{t^2}{2} + o(t^2) \underset{t\to0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

et $t(1-e^{-t}) \underset{t\to0}{\sim} t^2$

donc $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{-(1-e^{-t})+t}{t(1-e^{-t})} = \dfrac{1}{2}$ et $\left|e^{-t}\left(\ln t - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-e^{-t}}\right)\right| \underset{t\to0}{\sim} |\ln t| \underset{t\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ étant intégrable sur $]0, 1]$, par domination, la fonction $t \mapsto |\ln t|$ l'est aussi, et par équivalence, la fonction $t \mapsto e^{-t}\left(\ln t - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-e^{-t}}\right)$ l'est aussi.

• Par additivité, $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto e^{-t}\left(\ln t - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-e^{-t}}\right) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$

• Soient a et b deux réels quelconques tels que $0 < a < b$;

Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \left[\ln(1-e^{-t})\right]_a^b = \underbrace{\ln(1-e^{-b})}_{\to 0 \text{ quand } b\to+\infty} - \underbrace{\ln(1-e^{-a})}_{\to-\infty \text{ quand } a\to0^+}$

$$\int_a^b e^{-t}\left(\ln t - \frac{1}{t}\right)dt = \int_a^b \overbrace{e^{-t}}^{\uparrow} \underbrace{\ln t}_{\downarrow} - \int_a^b \frac{1}{t}e^{-t}dt$$

$$= [-e^{-t}\ln t]_a^b + \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_a^b \frac{1}{t}e^{-t}dt \quad \text{(en intégrant par parties)}$$

$$= \underbrace{(-e^{-b}\ln b)}_{\to 0 \text{ quand } b\to+\infty} + \underbrace{e^{-a}\ln a}_{\to-\infty \text{ quand } a\to0^+}$$

Les deux intégrales ont une limita finie quand $b \to +\infty$. On peut déja additionner les deux intégrales et passer à la limite quand $b \to +\infty$:

$$\forall a > 0, \int_a^{+\infty} e^{-t}\left(\ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt = -\ln(1-e^{-a}) + e^{-a}\ln a$$

La somme de ces deux fonctions présente la forme indéterminée $\infty - \infty$ quand $a \to 0$.
Comme calculé plus haut avec le DL de la fonction exponentielle, $1 - e^{-a} = a - \frac{1}{2}a^2 + o(a^2)$
d'où : $e^{-a}\ln a - \ln(1-e^{-a}) = e^{-a}\ln a - \ln\left(a - \frac{1}{2}a^2 + o(a^2)\right)$

$$= (1 - a + o(a))\ln a - \ln(a) - \ln\left(1 - \tfrac{1}{2}a + o(a)\right)$$

$$= -a\ln a + \tfrac{1}{2}a + o(a\ln a) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt = 0}$

0.1.7 CCP

Exercice 1 : On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n dt$

a) Pour quels entiers n, u_n est il défini ? Étudier la limite de la suite (u_n).
b) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$.

Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$

En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de trace égale à 7 et vérifiant la relation : $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$

SOLUTION **:** a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto (\ln(t))^n$ est continue sur le segment $[1, e]$, et l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n dt$ est donc définie.

Pour tout $x \in [1, e[$, $0 \leqslant \ln t < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\ln t)^n = 0$

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\ln e)^n = 1$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1, e]$ vers la fonction g définie par : $\begin{cases} \forall t \in [1, e[, \ g(t) = 0 \\ g(e) = 1 \end{cases}$

La domination $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, e]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$, où la fonction constante 1 est intégrable sur $[1, e]$ permet d'utiliser le théorème de convergence simple, et de conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^e f_n(t) dt = \int_1^e g(t) dt = \int_1^e 0 dt = 0$$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left[t\ (\ln(t))^n\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e tn(\ln(t))^{n-1} \frac{1}{t} dt = e - n \int_1^e (\ln(t))^{n-1} dt = e - nu_{n-1}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = e - (n+1)u_n}$

alors $\boxed{u_n = \dfrac{e - u_{n+1}}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}}$

Cette équivalence montre que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}, |u_n x^n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}|x^n|$, ce qui montre que la série $\sum |u_n x^n|$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc égal à 1.

• $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_1^e (\ln t)^n dt\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_1^e \underbrace{x^n (\ln t)^n}_{w_n(t)} dt\right)$

$\displaystyle\int_1^e |w_n(t)| dt = |x^n| \int_1^e (\ln t)^n dt = u_n |x^n| \underset{n \to +\infty}{\sim} e\frac{|x|^n}{n}$ cette séroe converge puisque $|x| < 1$

Par application du théorème d'inégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on peut écrire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_1^e w_n(t) dt\right) = \int_1^e \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)\right) dt$

soit : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_1^e (\ln t)^n dt\right) x^n = \int_1^e \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)\right) dt$

$$= \int_1^e \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln t)^n x^n}{n!} w_n(t)\right) dt = \int_1^e e^{x \ln t} dt = \int_1^e t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_1^e = \frac{e^{x+1} - 1}{x+1}$$

$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ S(x) = \dfrac{e^{x+1} - 1}{x+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ S(x) = e^{x+1} - 1 = e.e^x - 1 = e \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = (e-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\forall x \in]-1, 1[, \ \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Notons (c_n) le produit de Cauchy des suites (a_n) et (b_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = (e-1)(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{k!}(-1)^{n-k}$

$$c_n = (-1)^n \left((e-1) + e\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergent absolument. La série produit converge alors et : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$, c'est à dire :

$$S(x) = (e^{x+1}-1).\frac{1}{x+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{n!} = c_n$, donc $u_n = n! c_n$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = n!(-1)^n \left((e-1) + e\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)}$$

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de trace égale à 7 et vérifiant la relation : $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$

Le polynôme $Q(X) = X^3 - 5X^2 + 6X = X(X^2 - 5X + 6) = X(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines de $Q(X)$: $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,2,3\}$

A est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux appartiennent à l'ensemble $\{0,2,3\}$: ce peut être par exemple $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$, . . . , $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$. . . . etc.

Cette matrice diagonale a même trace que A, c'est à dire 7. Parmi la liste évoquée ci-dessus, les seules matrices qui ont pour trace 7, sont celles qui ont deux fois le nombre 2, et une fois le nombre 3 sur la diagonale.

Les matrices solutions du problème étudié sont donc celles qui sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$

0.1.8 CCP

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle (E) : $\quad x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$

Exercice 2 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1&0\\0&2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}$ $\qquad ((a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4)$

1) Calculer $AM - MA$.

2) L'endomorphisme $f : M \mapsto AM - MA$ est il diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

SOLUTION : **Exercice 1 :** • Recherchons les séries entières solutions : soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on sait que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que :

$$\forall x \in]-R,R[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

S est solution de (E_0) sur l'intervalle $]-R,R[$ si et seulement si

$\forall x \in]-R,R[,\ x(x+1)S''(x) + (x+2)S'(x) - S(x) = 0$

$\iff \forall x \in]-R,R[,\ x(x+1) \displaystyle\sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x+2)\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0,1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

(en faisant le changement d'indice $n' = n-1$ dans les 2^e et 4^e sommes)

$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [(n^2-1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+1}]x^n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n^2-1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+1} = 0 \quad$ (par unicité des coefficients d'une SE de rayon non nul)

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n-1)a_n + (n+2)a_{n+1} = 0 \quad$ (en simplifaint par $n+1$ qui n'est jamais nul pour $n \in \mathbb{N}$)

$$\iff \begin{cases} -a_0 + 2a_1 = 0 \quad \text{(pour } n=0) \\ 3a_2 = 0 \quad \text{(pour } n=1) \\ \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+2} a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} a_0 \\ a_2 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = 0 \end{cases}$$

les séries entières solutions sont les fonctions de la forme : $S(x) = a_0 + \frac{1}{2} a_0 x = \frac{a_0}{2}(x+2)$

Ce sont des fonctions polynômes. Elles sont édfinies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Conclusion : $\boxed{\text{Les séries entières solutions de } (E_0) \text{ sont les fonctions polynomiales de la forme } S(x) = \lambda(x+2)}$

• Notons $S_0 : x \mapsto x+2$ la solutionn trouvée de (E_0), et recherchons la solution gébérale de (E_0) sous la forme :

$y(x) = z(x) S_0(x)$ où z est une fonction inconnue.

$\forall x \in \mathbb{R}, y'x) = z'(x)S_0(x) + z(x)S_0'(x)$ et $y''(x) = z''(x)S_0(x) + 2z'(x)S_0'(x) + z(x)S_0''(x)$

y est solution de (E_0) sur l'intervalle $\mathbb{R}$ si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x+1)y''(x) + (x+2)y'(x) - y(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ x(x+1)[z''(x)S_0(x) + 2z'(x)S_0'(x) + z(x)S_0''(x)] + (x+2)[z'(x)S_0(x) + z(x)S_0'(x)] - z(x)S_0(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ x(x+1)[z''(x)S_0(x) + 2z'(x)S_0'(x)] + (x+2)z'(x)S_0(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ x(x+1)S_0(x)z''(x) + [2x(x+1)S_0'(x) + (x+2)S_0(x)]z'(x) = 0$

On obtient une équation différentielle linéaire de la fonction z' de la forme :

$$\underbrace{x(x+1)S_0(x)}_{A(x)} z''(x) + \underbrace{[2x(x+1)S_0'(x) + (x+2)S_0(x)]}_{B(x)} z'(x) = 0 \qquad (F)$$

La solution générale de cette équation est de la forme : $z'(x) = \lambda \exp(-\int^x \frac{B(t)}{A(t)} dt)$

$$\int^x \frac{B(t)}{A(t)} dt = \int^x \frac{2t(t+1)S_0'(t) + (t+2)S_0(t)}{t(t+1)S_0(t)} dt = \int^x \frac{2S_0'(t)}{S_0(t)} + \int^x \frac{t+2}{t(t+1)} dt$$

$$= 2\ln|S_0(x)| + \int^x \frac{(2t+2) - t}{t(t+1)} dt = 2\ln|S_0(x)| + \int^x \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 2\ln|S_0(x)| + 2\ln|x| - \ln|x+1| + cste$$

d'où $z'(x) = \lambda \exp\left(-2\ln|S_0(x)| - 2\ln|x| + \ln|x+1|\right) = \lambda \frac{x+1}{x^2 S_0^2(x)}$

$$\boxed{\text{Sur chacun des intervalles }]-\infty, 0[,]0, 2[,]2, +\infty[,\ z'(x) = \lambda \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}}$$

• Pour intégrer la fraction rationnelle $\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2}$, il faut la décomposer en éléments simples :

Elle admet une décomposition de la forme : $\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{(x+2)^2}$

réduisons au même dénominateur :

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + cx^2(x+2) + dx^2}{x^2(x+2)^2}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{a(x^3+4x^2+4x) + b(x^2+4x+4) + c(x^3+2x^2) + dx^2}{x^2(x+2)^2}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{(a+c)x^3 + (4a+b+2c+d)x^2 + (4a+4b)x + 4b}{x^2(x+2)^2}$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+2c+d \\ 4a+4b=1 \\ 4b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=0 \\ d=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc $\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$

Dès lors, $z'(x) = \lambda \dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} \implies z(x) = \dfrac{\lambda}{4} \displaystyle\int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right) dx = \dfrac{\lambda}{4}\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}\right)$

Donc $z(x)$ est de la forme $\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) + \nu$ où μ et ν sont deux constantes réelles.

D'où : $y(x) = z(x)S_0(x) = \left[\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) + \nu\right](x+2) = \dfrac{2\mu}{x} + \nu(x+2) \quad (\nu \in \mathbb{R})$

En conclusion : Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la solution générale de (E_0) est :

$x \mapsto y(x) = \dfrac{a}{x} + b(x+2)$

• Reste à trouver une solution particulière de l'équation complète (E) : $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$

La fonction constante $x \mapsto -2$ est clairement solution.

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la solution générale de (E_0) est :

$$\boxed{x \mapsto y(x) = \frac{a}{x} + b(x+2) - 2}$$

Exercice 2 : 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad A.M - M.A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

2) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(M) = \lambda.M \iff \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = \lambda a \\ -b = \lambda b \\ c = \lambda c \\ 0 = \lambda d \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda a = 0 \\ (\lambda+1)b = 0 \\ (\lambda-1)c = 0 \\ \lambda d = 0 \end{cases}$$

• Si $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, alors ce système entraîne que $a = b = c = d = 0$, et λ n'est pas valeur propre de f. Donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$

• Si $\lambda = 0$, le système équivaut à $b = c = 0$.

Donc 0 est valeur propre de f, et le sous espace propre associé à la valeur propre 0 (c'est à dire le noyau de f) est l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = aE_{1,1} + dE_{2,2}$.

C'est un plan engendré par les matrices élémentaires $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$

• Si $\lambda = -1$, le système équivaut à $a = c = d = 0$.

Donc -1 est valeur propre de f, et le sous espace propre associé à la valeur propre -1 est l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,2}$.

C'est la droite vectorielle engendrée par la matrice élémentaire $E_{1,2}$

• Si $\lambda = 1$, le système équivaut à $a = b = d = 0$.

Donc 1 est valeur propre de f, et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = cE_{2,1}$.

C'est la droite vectorielle engendrée par la matrice élémentaire $E_{2,1}$

• Au bilan final, f possède 3 valeurs propres : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0, 1\}}$

Les sous espaces propres associés aux valeurs propres -1 et 1 sont de dimension 1, le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2. La somme des dimension des sous espaces propres est 4. Or $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4. $\boxed{f \text{ est donc diagonalisable}}$.

• Dans une base formée de vecteurs propres de f, f a une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est $\boxed{\chi_f(X) = X^2(X+1)(X-1) = X^4 - X^2}$

0.1.9 CCP :

Exercice 1 : α est un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on défnit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln n$

a) Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ quand $n \to +\infty$

b) Déterminer α pour que la suite converge, et calculer alors sa limite.

Exercice 2 : Montrer qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a un indice de nilpotence inférieur ou égal à n .

En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUTION : **Exercice 1 :** a) $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \alpha \ln n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+3} - \alpha \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+3} - \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n - \alpha(2n+3)}{n(2n+3)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1-2\alpha}{2n+3} - \frac{3\alpha}{n(2n+3)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où, $\boxed{\text{si } \alpha \neq \tfrac{1}{2},\ u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-2\alpha}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-2\alpha}{2n}}$

$$\text{si } \alpha = \tfrac{1}{2},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{4n-3}{4n^2(2n+3)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4n}{8n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$$

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n - \alpha(2n+3)}{n(2n+3)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1-2\alpha}{2n+3} - \underbrace{\dfrac{3\alpha}{n(2n+3)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{series\ convergentes}$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum(u_{n+1}-u_n) \text{ converge, si et seulement si } \alpha = \tfrac{1}{2}}$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu aussi en examinant les équivalents de $u_{n+1}-u_n$ trouvés dans la question précédente .

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha \ln n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\ln n$$

$$u_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln n$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\ln n$$

Utilisons la relation bien connue : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

$$u_n = \ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + \varepsilon_n) - \frac{1}{2}\ln n = \ln(2n+1) - \ln n + \frac{1}{2}\gamma + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

$$u_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{2}\gamma + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

d'où l'on déduit que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma}$

Exercice 2 : • Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et m son ordre de nilpotence :

$M^m = 0$ et $M^{m-1} \neq 0$

Le polynôme X^m est un polynôme annulateur de M. Donc $\mathrm{SP}(M) \subset \{0\}$

Le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ n'admet dans $\mathbb{C}$ que la racine 0. Donc $\chi_M(X) = X^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = M^n = 0$.

La relation $M^n = 0$ entraîne alors que $m \leqslant n$.

• Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

alors $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est nilpotente. Son ordre de nilpotence est $\leqslant 3$. Or $A^4 \neq 0$. Cette incompatibilité montre qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0.1.10 ENSAM

Exercice 1 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et D l'application de dérivation : $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

a) montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

b) Montrer que D est nilpotent et calculer son iondice de nilpotence.

c) On note I l'endomorphisme identité : $I : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P \end{array} \right.$

Montrer que $I - D$ est inversible, et déterminer son inverse.

d) Résoudre dans E, puis dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle (*) : $y' - y = \frac{x^n}{n!}$

Exercice 2 : Déterminer les fonctions $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que le champ de vecteur $V(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix}$ soit le gradient d'une fonction f.

Calculer alors cette (ces) fonction(s) f.

SOLUTION **: Exercice 1 :** a) Si P est un polynôme de $E = \mathbb{R}_n[X]$, son polynôme dérivé appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$. Donc D est une application de E dans E.

Par ailleurs, on sait que la dérivation est linéaire, donc D est un endomorphisme de E : $D \in \mathscr{L}(E)$.

Les polynôme de dérivés nuls sont les polynômes de degré 0 (polynômes constants): $\boxed{\ker D = \mathbb{R}_0[X]}$.

On a rappelé que $D(E) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puisque si P est un polynôme non nul, $d^\circ(P') = d^\circ(P) - 1$

D'après le théorème du rang qui donne l'égalité des dimensions, $\dim(\mathrm{Im}D) = (n+1) - \dim(\ker(D)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, et par l'inclusion $\mathrm{Im}(D) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on obtient : $\boxed{\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

b) Puisque pour tout polynôme non nul, $d^\circ(P') = d^\circ(P) - 1$, si P est de degré $m \leqslant n$, P' et de degré $m-1$, P'' et de degré $m-2$, $\cdots$, $P^{(k)}$ est et de degré $m-k$, $P^{(m)}$ est et de degré 0, et $P^{(m+1)}$ est le polynôme nul.

Donc $\forall P \in E, D^{n+1}(P) = 0$: $D^{n+1} = \omega$ (endomorphisme nul).

Mais $D^n(X^n) = n! \neq 0$: $D^n \neq \omega$ $\boxed{D \text{ est nilpotent d'ordre } n+1}$

c) On vient de voir que $D^{n+1} = \omega$ et $D^n \neq \omega$.

Alors $(I-D)_o(I + D + D^2 + \cdots + D^n) = (I + D + D^2 + \cdots + D^n) - (D + D^2 + \cdots + D^n + \underbrace{D_{n+1}}_{=\omega}) = I$

Cette égalité montre que $\boxed{I - D \text{ est inversible, et que } (I-D)^{-1} = I + D + D^2 + \cdots + D^n}$.

d) Soit $P \in E$. $\quad P'(X) - P(X) = \dfrac{X^n}{n!} \iff (D-I)(P) = \dfrac{X^n}{n!}$

$\iff (I-D)(P) = -\dfrac{X^n}{n!} \iff P = (I-D)^{-1}\left(-\dfrac{X^n}{n!}\right)$ (puisque $I-D$ est inversible)

$\iff P = -(I + D + D^2 + \cdots + D^n)\left(\frac{X^n}{n!}\right)$ (d'après la question c))

$\iff P = -\left(\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{X^2}{2} + X + 1\right)$

En conclusion, $\boxed{\text{l'équation différentielle (*) admet dans } E \text{ une unique solution :}}$

$\boxed{\text{c'est le polynôme } P = -\left(\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{X^2}{2} + X + 1\right)}$

• On connait une solution particulière de l'équation différentielle (*), à savoir le polynôme

$$P = -\left(\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{X^2}{2} + X + 1\right)$$

L'équation homogène associée, (**) : $y' - y = 0$ a pour solution générale : $x \mapsto \lambda e^x$ où λ est une constante réelle quelconque.

La solution générale de (*) dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est donc :

$$\boxed{x \mapsto \lambda e^x - \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x^2}{2} + x + 1\right)}$$

Exercice 2 : Déterminer les fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que le champ de vecteur $V(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2-1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix}$ soit le gradient d'une fonction f.

Calculer alors cette (ces) fonction(s) f.

Analyse : Si le champ de vecteurs $V(x,y)$ est le gradient d'une fonction f, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2-1)g(x) \\ -2yg(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

d'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y\, g(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y\, g'(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) + g(x) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda e^{-x}$.

Synthèse : Prenons $g(x) = \lambda e^{-x}$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda(x^2+y^2-1)e^{-x} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\lambda y e^{-x} & (2) \end{cases}$

En intégrant (2) par rapport à y, pour tout x fixé, on obtient : $f(x,y) = -\lambda y^2 e^{-x} + \varphi(x)$

où φ est une fonction inconnue de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

On redérive par rapport à x et on injecte dans l'équation (1) :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda y^2 e^{-x} + \varphi'(x) = \lambda(x^2+y^2-1)e^{-x}$

$\implies \varphi'(x) = \lambda(x^2-1)e^{-x}$

$\implies \varphi(x) = \lambda \int (x^2-1)e^{-x}dx + cste$

$\implies \varphi(x) = \lambda(-x^2-2x-1)e^{-x} + cste$ (par deux intégrations par parties)

Finalement, $\boxed{f(x,y) = \lambda(-x^2-2x-1)e^{-x} - \lambda y^2 e^{-x} + cste}$

0.1.11 CCP

Exercice 1 : n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $P_n(X) = X^n - nX + 1$

Montrer que P_n admet deux racines positives, a_n et b_n.

Etudier les suites (a_n) et (b_n) et leur rapidité de convergence.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A + I_n$

Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \dim(E_A(1))$

SOLUTION **: Exercice 1 :** $\forall x \in [0, +\infty[,\ P_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

Dressons le tableau de variations de la fonction polynomiale P_n :

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

• La fonction P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc injective (elle ne peut s'annuler au plus qu'une fois) . C'est une fonction continue, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend sur le segment $[0,1]$ toute valeur entre $P_n(0)=1$ et $P_n(1)=2-n<0$, et en particulier la valeur 0.

Finalement, P_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,1[$ (puisque ni 0 ni ne sont racines).

On notera a_n cette racine.

• P_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, donc injective.

Etant continue, elle prend sur l'in tervalle segment $[1,+\infty[$ toute valeur entre $P_n(1)=2-n<0$ et $\lim\limits_{+\infty} P_n=+\infty$, et en particulier la valeur 0. P_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

On notera b_n cette racine.

Plus précisément, on peut remarquer que $P_n(2)=2^n-2n+1=2(2^{n-1}-n)+1>0$ dès que $n\geqslant 3$. Ainsi $P_n(1)<0$ et $P_n(2)>0$, donc $b_n\in]1,2[$.

• Recherchons les variations de la suite (a_n) en comparant a_n et a_{n+1}.

$P_n(a_n)=0=a_n^n-na_n+1$

$P_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}-(n+1)a_n+1$

et par différence, $P_{n+1}(a_n)=P_{n+1}(a_n)-P_n(a_n)=(a_n^{n+1}-(n+1)a_n+1)-(a_n^n-na_n+1)$

$$P_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}-a_n^n-a_n=a_n^n\underbrace{(a_n-1)}_{<0}\underbrace{-a_n}_{<0}<0$$

La fonction P_{n+1} est décroissante, nulle en a_{n+1}, et $P_{n+1}(a_n)<0$. ceci entraine que $a_{n+1}<a_n$.

La suite (a_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle converge, vers une limite L.

L'égalité $P_n(a_n)=0=a_n^n-na_n+1$ entraîne que $na_n=a_n^n+1$.

L'encadrement $0<a_n<a_3<1$ entraîne $0<a_n^n<a_3^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n=0$ puisque la suite géometrique (a_3^n), de raison <1 est de limite nulle.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=1$, ce qui montre que $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \text{ et que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0}$

• Remarquons que $P_n(2)=2^n-2n+1>0$ pour n assez grand car la suite puissance (n) est négligeable devant la suite géométrique (exponentielle) (2^n) quand $n\to+\infty$. Donc $1<b_n<2$.

$\forall n\geq 3,\ b_n^n=n\underbrace{b_n}_{>1}-1>n-1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n=+\infty$ et en prenant des équivalents quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$b_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (nb_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} nb_n$$

Ces suites tendent vers $+\infty$, on peut prendre leurs logarithmes :

$$\ln(b_n^n)=n\ln(b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(nb_n)=\underbrace{\ln(n)}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln(b_n)}_{borne} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

donc $\ln(b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(b_n)=0$ d'où il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$

Enfin $\ln(b_n)=\ln(1+\underbrace{(b_n-1)}_{\to 0}) \underset{n\to+\infty}{\sim} (b_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$

Ainsi, $\boxed{\lim b_n=1}$ et $\boxed{b_n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}}$

Exercice 2 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=A^2-A+I_n$

Le polynôme $P(X)=X^3-X^2+X-1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

$P(X)=X^2(X-1)+X-1=(X-1)(X^2+1)=(X-1)(X-i)(X+i)$

ce polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (mais pas dans $\mathbb{R}[X]$), donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et son spectre est inclus dans $\{1,i,-i\}$.

A est semblable à une matrice diagonale Δ du type $\mathrm{diag}(\underbrace{1,...,1}_{m\ fois},\underbrace{i,...,i}_{p\ fois},\underbrace{-i,...,-i}_{q\ fois})$

Sa trace est $\mathrm{tr}(\Delta)=\mathrm{tr}(A)=m+pi-qi=m+i(p-q)$ (deux matrices semblables ont même trace)

Cette trace est réelle puisque $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $p=q$, et $\mathrm{tr}(A)=m$.

Par ailleurs, on sait que $\dim(E_A(1))=n-\mathrm{rg}(A-I_n)$

Or $\mathrm{rg}(A-I_n)=\mathrm{rg}(\Delta-I_n)$ (les matrices sont semblables)

et $\mathrm{rg}(\Delta-I_n)=\mathrm{rg}(\mathrm{diag}(\underbrace{0,...,0}_{m\ fois},\underbrace{i-1,...,i-1}_{p\ fois},\underbrace{-i-1,...,-i-1}_{p\ fois}))=n-m$

donc $\dim(E_A(1)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - (n-m) = m$
et puisque $\mathrm{tr}(A) = m$, on a bien montré que $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \dim(E_A(1))}$

0.1.12 CCP

Exercice 1 : DSE de $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$

Exercice 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$

SOLUTION **: Exercice 1 :** La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction composée f est donc définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}, f'(x) = \frac{\sqrt{2}(1-x^2) - x\sqrt{2}(-2x)}{(1-x^2)^2}\,\frac{1}{1 + \dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x^2}{x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2} = \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}$$

On sair que pour tout complexe u, de module strictement inférieur à 1, $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u^k$

Donc $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sqrt{2}(1+x^2)\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-x^4)^k = \sqrt{2}(1+x^2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{4k}$

$$f'(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k x^{4k} + (-1)^k x^{4k+2}\right] = \sqrt{2}(1 + x^2 - x^4 - x^6 + x^8 + x^{10} - x^{12} - x^{14} + x^{16} + ...)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sqrt{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{E(m/2)}x^{2m}}$$

La fonction f' est développable en série entière sur l'ouvert $]-1,1[$ (son rayon de convergence est égal à 1).
Par le théorème d'intégration des séries entières, on peut intégrer cette relation terme à terme sur l'intervalle $[0, x]$ pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)dt = \sqrt{2}\int_0^x\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{E(m/2)}t^{2m}\right)dt = \sqrt{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{E(m/2)}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

En conclusion, f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sqrt{2}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{E(m/2)}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}}$

Exercice 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur l'ouvert $]0, 1[$.

$$\left|\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\right| \underset{t\to 0^+}{\sim} |\ln t| \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

La fonction de référence $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et par domination, f l'est aussi.
On rappelle que $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t - 1$

donc $f(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$

On peut prolonger f par continuité au point 1, en posant $f(1) = 0$. La fonction f est alors intégrable sur le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, comme fonction continue sur un **segment** .

Par additivité, f est intégrable sur $]0, 1]$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ est bien définie.

• Par le changement de variable $u = 1 - t$, $dt = -du$, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt = \int_1^0 \frac{\ln(1-u)}{\sqrt{u}}(-du)$

On rappelle que $\forall u \in [-1, 1[,\ \ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k}$

donc $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{\sqrt{u}}du = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k} = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{k-\frac{1}{2}}}{k}$

Posons : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0, 1[, g_k(u) = \dfrac{u^{k-\frac{1}{2}}}{k}$
- chaque fonction g_k est continue et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$
- la série de fonctions $\sum g_k(\ )$ converge simplement sur l'intervalle $[0, 1[$. (mais ne converge pas au point 1)

- $\displaystyle\int_0^1 |g_k(u)|du = \int_0^1 \frac{u^{k-\frac{1}{2}}}{k}du = \left[\frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{k(k+\frac{1}{2})}\right]_0^1 = \frac{1}{k(k+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{k^2}$

La série numérique $\sum \int_0^1 |g_k(u)|du$ est donc convergente.

Par application du théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque, on peut affirmer que :

$$J = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(u)\right) du = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 g_k(u)du\right)$$

donc $J = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\frac{1}{2})}$

• Pour calculer cette somme de série, passons aux sommes partielles, et décomposons en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{k(k+\frac{1}{2})} = 2\dfrac{1}{k(2k+1)} = 2\dfrac{(2k+1)-2k}{k(2k+1)} = \dfrac{2}{k} - \dfrac{4}{2k+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, -J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+\frac{1}{2})} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$

$$-J_n = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) - 4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$-J_n = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) - 4\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right) - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

En utilisant la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, on obtient :

$$-J_n = 2(\ln n + \gamma + \varepsilon_n) - 4\left(\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - 1 - \tfrac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n\right)\right)$$

$$-J_n = 2\ln n - 4\ln(2n+1) + 2\ln(n) + 4 + \varepsilon'_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$$

$$-J_n = 4\ln n - 4\ln(2n+1) + 4 + \varepsilon'_n = 4\ln\left(\tfrac{n}{2n+1}\right) + 4 + \varepsilon'_n$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient finalement : $-J = 4\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 4$

$$\boxed{J = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt = 4\ln 2 - 4}$$

0.1.13 CCP :

Exercice 1 : Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet une unique solution appartenant au segment $[0,1]$.

On note a_n cette solution.

Etudier la limite de la suite (a_n) et la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 2 : On considère l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

f est il diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

SOLUTION : **Exercice 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$

f est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in [0,1], f'(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n} > 0$

f est donc strictement croissante sur $[0,1]$. Elle est donc injective et prend au plus une fois la valeur 0. L'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet donc au plus une solution sur $[0,1]$.

Par ailleurs, $f(0) = -1$ et $f(1) = \sqrt{n} > 0$. f étant une fonction continue, elle prend toute valeur entre $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

Donc il existe un réel $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = 0$.

En conclusion, l'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet une unique solution appartenant au segment $[0,1]$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0,1],\ a_n^n + a_n\sqrt{n} - 1 = 0$

La suite (a_n) est bornée : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant a_n \leqslant 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| = \left|\dfrac{1-a_n^n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1+|a_n^n|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Cette majoration montre que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$

L'encadrement $0 \leqslant a_n^n \leqslant a_n$ montre alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^n = 0$, et l'égalité $a_n = \dfrac{1-a_n^n}{\sqrt{n}}$ entraîne que :

$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. $\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ est donc divergente}}$.

Exercice 2 : f est l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

Il est clair que f est linéaire (immédiat).

$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f^2(M) = f(f(M)) = f\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Donc $f^2 = Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. f est une symétrie ; elle est inversible, diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$

- $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = 1.M \iff \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = a \\ d = b \\ a = c \\ b = d \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ d = b \end{cases}$

Donc $\boxed{E_1(f) \text{ est le plan des matrices de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2}$

- $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = -1.M \iff \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = -a \\ d = -b \\ a = -c \\ b = -d \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases}$

Donc $\boxed{E_{-1}(f) \text{ est le plan des matrices de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2}$

0.1.14 CCP :

Exercice 1 : Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ est prolongeable en une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n

Exercice 2 : On considère l'application f qui, à tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ fait correspondre le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$.

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Est-il diagonalisable ? injectif ?

SOLUTION : **Exercice 1 :** On sait que la fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n} \quad \text{(par le changement d'indice } n' = n - 1\text{)}$$

En posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$ (série entière de rayon de convergence infini) on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On sait que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on en déduit que : $\boxed{\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{cases}}$

Exercice 2 : L'application f fait correspondre à tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$.

- si $P(X) = 1$, la division de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$ s'écrit : $X^2P(X) = X^2 = (X^4 - 1).0 + X^2$, donc $f(1) = X^2$
- si $P(X) = X$, la division de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$ s'écrit : $X^2P(X) = X^3 = (X^4 - 1).0 + X^3$, donc $f(X) = X^3$
- si $P(X) = X^2$, la division de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$ s'écrit : $X^2P(X) = X^4 = (X^4 - 1).1 + 1$, donc $f(X^2) = 1$
- si $P(X) = X^3$, la division de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$ s'écrit : $X^2P(X) = X^5 = (X^4 - 1).X + X$, donc $f(X^2) = X$

La matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On peut déja remarquer que c'esst une matrice symétrique rélle, donc diagonalisable.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ qu'elle représente dans la base } \mathscr{B}_0 \text{ est donc diagonalisable}}$.

$$\begin{cases} f^2(1) = f(X^2) = 1 \\ f^2(X) = f(X^3) = X \\ f^2(X^2) = f(1) = X^2 \\ f^2(X^3) = f(X) = X^3 \end{cases}$$

f^2 laisse chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_0$ inchangé, donc $f^2 = Id_E$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est inversible, et que } f^{-1} = f}$. Et que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$

Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$f(P) = P \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = a \\ d = b \\ a = c \\ b = d \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ d = b \end{cases}$$

$$\iff P(X) = a + bX + aX^2 + bX^3 = a(X^2+1) + b(X^3+X)$$

$\boxed{E_1(F) = \ker(f - Id_E) \text{ est le plan engendré par les polynômes } X^2+1 \text{ et } X^3+X}$.

$$f(P) = -P \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = -a \\ d = -b \\ a = -c \\ b = -d \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases}$$

$$\iff P(X) = a + bX - aX^2 - bX^3 = a(X^2-1) + b(X^3-X)$$

$\boxed{E_{-1}(F) = \ker(f + Id_E) \text{ est le plan engendré par les polynômes } X^2-1 \text{ et } X^3-X}$.

Finalement, f est la symétrie par rapport au plan $E_1(F) = \mathrm{Vect}(X^2+1, X^3+X)$, parallèlement au plan $E_{-1}(F) = \mathrm{Vect}(X^2-1, X^3-X)$

0.1.15 Ecole de l'air :

Exercice 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2a-1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer en fonction de a le rang et le noyau de A.

b) On pose $a = 1$, diagonaliser A.

c) Interprétation géométrique ?

Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

SOLUTION **: Exercice 1 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2a-1 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = a^2(2a-1) + a^2 + 1 - a^2 - a - a(2a-1) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)(2a^2 - a - 1) = (a-1)(a-1)(2a+1)$

$\det(A) = (a-1)^2(2a+1)$

- si $a = 1$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\ker(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$

- si $a = -\frac{1}{2}$, alors $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(A) = 2$

($\mathrm{rg}(A) \neq 3$ puisque $\det(A) = 0$, $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$ puisque les colonnes 1 et 2 ne sont pas colinéaires)

$$(x, y, z) \in \ker A \iff A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

$\boxed{\ker A \text{ est la droite engendrée par le vecteur } (0, 2, 1)}$

- si $a \notin \{-\frac{1}{2}, 1\}$, alors $\det(A) \neq 0$, $\mathrm{rg}(A) = 3$ et $\ker A = \{0\}$

b) si $a=1$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, A est de rang 1, donc 0 est valeur propre de A, et le sous espace propre associé est $\ker A$, qui est le plan d'équation $x+y+z=0$.

La somme des valeurs propres est égale à la trace de A, donc $0+0+\lambda_3=3$. La troisième valeur propre est $\lambda_3=3$. c'est nécessairement une valeur propre simple, et le sous espace propre correspondant est une droite. La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $2+1=3$, ce qui assure que la matrice $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Remarque : il est tout à fait inutile de calculer le polynôme caractéristique de A.

c) A est la matrice de la composée de l'homothétie de rapport 3 et de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$. (puisque A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{3}A\right)=\{0,0,1\}$)

Exercice 2 : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{e^t-1}dt=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ par un calcul classique d'intervertion série - intégrale

0.1.16 ENSAM avec Python adapté de MAPLE :

Exercice 1 : On définie deux suites (a_n) et (b_n) par les conditions :

$$a_0=0,\ b_0=1,\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=2a_n+3b_n,\ b_{n+1}=4a_n+b_n$$

a) Calculer avec Python les 10 premiers termes des deux suites.

b) Calculer avec a_n et b_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n \text{ et } T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$$

SOLUTION : **Exercice 1 :** a)

```
a=[0 for i in range(11)]
b=[0 for i in range(11)]
b[0]=1
print(b)
for k in range(10):
    a[k+1]=2*a[k]+3*b[k]
    b[k+1]=4*a[k]+b[k]
print('a10=',a[10], 'b10=',b[10])
```

On trouve en particulier : $\boxed{a_{10}=4184829 \text{ et } b_{10}=4185853}$

b) La relation de récurrence s'écrit : $\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$

le calcul de A^n donne : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}a_n=-\frac{3}{7}(-2)^n+\frac{3}{7}5^n\\ b_n=\frac{4}{7}(-2)^n+\frac{3}{7}5^n\end{cases}}$

c) $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\frac{(-2)^n}{n!}+\frac{3}{7}\frac{5^n}{n!}\right)x^n$

Les deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^nx^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^nx^n}{n!}$ sont deux séries exponentielles, de rayons de convergences infinis, et de sommes respectives e^{-2x} et e^{5x} .

On en déduit que les deux séries étudiées ont un rayon de convergence infini, et pour sommes respectives ;

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ S(x)=\frac{-3}{7}e^{-2x}+\frac{3}{7}e^{5x} \text{ et } T(x)=\frac{4}{7}e^{-2x}+\frac{3}{7}e^{5x}}$$

0.1.17 ENSAM avec Python :

Montrer que la série de terme général $u_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

Majorer le reste $\displaystyle r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$. Déterminer n tel que $|r_n|<10^{-3}$.

Donner une valeur approchée de $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ à 10^{-3} près avec Python

SOLUTION : **Exercice 1 :** $u_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}=e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$u_n = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)} = \sqrt{e}\ \ e^{-n}e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{e}\ \ e^{-n}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} o(1)=0$)

La série géométrique $\sum e^{-n}$, de raison $e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ converge, donc, par équivalence, la série $\sum u_n$ converge aussi.

• Cherchons à majorer $u_n = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ par une expression plus simple . Pour cela, il faut minorer $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

La relation $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-.....$ fait penser que $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}>0$ si $u>0$.

Posons alors $\forall u\geqslant 0, \varphi(u)=\ln(1+u)-u+\frac{u^2}{2}$

$$\forall u\geqslant 0, \varphi'(u)=\frac{1}{1+u}-1+u=\frac{1+(u-1)(u+1)}{u+1}=\frac{u^2}{u+1}>0$$

La fonction φ est croissante sur $[0,+\infty[$, donc $\forall u\geqslant 0, \varphi(u)\geqslant\varphi(0)=0$

$\Longrightarrow\ \forall u\geqslant 0, \ln(1+u)\geqslant u-\frac{u^2}{2}$

$\Longrightarrow\ \forall n\geqslant \mathbb{N}^*, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$

$\Longrightarrow\ \forall n\geqslant \mathbb{N}^*, -n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant -n+\frac{1}{2}$

et, par croissance de la fonction l'exponentielle, $\boxed{\forall n\geqslant\mathbb{N}^*, u_n\leqslant e^{-n}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\ \ e^{-n}}$

Dès lors, en sommant cette inégalité pour k variant de $n+1$ à $n+p$, puis en passant à la limite quand $p\to+\infty$,

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{e}\ \ e^{-k}=\sqrt{e}\ \ e^{-n-1}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\sqrt{e}\ \ e^{-n-1}\frac{1}{1-e^{-1}}=\sqrt{e}\ \ e^{-n}\frac{1}{e-1}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant r_n\leqslant\frac{\sqrt{e}}{e-1}e^{-n}}.$$

• Pour que $r_n<10^{-3}$, il <u>**suffit**</u> que $\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}e^{-n}<10^{-3}$

$$\frac{\sqrt{e}}{e-1}e^{-n}<10^{-3}\iff e^{-n}<\frac{e-1}{\sqrt{e}}10^{-3}\iff -n<\ln(e-1)-\frac{1}{2}-3\ln 10$$

$$\iff n>3\ln 10+\frac{1}{2}+\ln(e-1)$$

```
3*np.log(10) + 1/2 + np.log(np.exp(1)-1)
```

$\boxed{7.9490801335950554}$

Donc, pour que $r_n<10^{-3}$, il suffit que $n\geqslant 8$.

$$\boxed{\text{Une valeur approchée à } 10^{-3} \text{ près de la somme } S=\sum_{k=1}^{\infty}u_k \text{ est } VS=\sum_{k=1}^{7}u_k}$$

```
s=sum([(k/(k+1))**(k**2) for k in range(8)])
print(s)
```

On trouve $\boxed{s\simeq 1.81657544584}$

0.1.18 ENSAM :

EXERCICE 1 * * :

Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U})\subset\mathbb{U}$ où $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$.

Indication fournie en cours de planche si le candidat n'avance pas : on pourra s'interesser à des polynômes ou séries trigonométriques.

EXERCICE 2 : Prouver l'existence de $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}dx$

Etudier les limites des suites (J_n) et (nJ_n).

***SOLUTION* :**

Soit P un polynôme solution, non nul, et n son degré :$\exists(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}, P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

$\forall t\in\mathbb{R}, |e^{it}|=1,\ e^{it}\in\mathbb{U}$, donc $|P(e^{it})|=1$.

$$|P(e^{it})|^2=P(e^{it})\overline{P(e^{it})}=\left(\sum_{k=0}^{n}a_ke^{ikt}\right).\left(\sum_{h=0}^{n}\overline{a_h}e^{-iht}\right)=1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}a_k\overline{a_h}e^{i(k-h)t}$$

$$|P(e^{it})|^2=\underbrace{a_0\overline{a_n}}_{k-h=-n}\ e^{-int}+\underbrace{(a_0\overline{a_{n-1}}+a_1\overline{a_n})}_{k-h=-n+1}e^{-i(n-1)t}+\underbrace{(a_0\overline{a_{n-2}}+a_1\overline{a_{n-1}}+a_2\overline{a_n})}_{k-h=-n+1}e^{-i(n-2)t}+....$$

$$+\underbrace{(a_0\overline{a_0}+a_1\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}+...+a_{n-1}\overline{a_{n-1}}+a_n\overline{a_n})}_{k-h=0}+.....$$

$$....+\underbrace{(a_{n-1}\overline{a_0}+a_n\overline{a_1})}_{k-h=n-1}e^{i(n-1)t}+\underbrace{a_n\overline{a_0}}_{k-h=n}\ e^{int}$$

• Si $Q(t)=b_{-n}e^{-int}+b_{-n+1}e^{-i(n-1)t}+...+b_{-1}e^{-it}+b_0+b_1e^{it}+...+b_ne^{int}=0\ \forall t\in\mathbb{R}$, alors,
en posant $z=e^{it}$,
$\forall z\in\mathbb{U}, b_{-n}z^{-n}+b_{-n+1}z^{-n+1}+...+b_{-1}z^{-1}+b_0+b_1z+...+b_nz^n=0$
$\Longrightarrow\ \forall z\in\mathbb{U}, b_{-n}+b_{-n+1}z+...+b_{-1}z^{n-1}+b_0z^n+b_1zn+1+...+b_nz^{2n}=0$ (en multipliant par z^n)
$\Longrightarrow\ b_{-n}=b_{-n+1}=...=b_{-1}=b_0=b_1=...=b_n=0$
(car le polynôme $R(X)=b_{-n}+b_{-n+1}X+...+b_{-1}X^{n-1}+b_0X^n+b_1X^{n+1}+...+b_nX^{2n}$ admet une infinité de racines, à savoir tous les complexes de $\mathbb{U}$)

• Si P est solution du problème, tous les coefficients du polynôme trigonométrique $|P(e^{it})|^2-1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}a_k\overline{a_h}e^{i(k-h)t}-1$ sont nuls

et, d'après le calcul précédent, $\begin{cases} a_0\overline{a_n}=0\\ a_0\overline{a_{n-1}}+a_1\overline{a_n}=0\\ a_0\overline{a_{n-2}}+a_1\overline{a_{n-1}}+a_2\overline{a_n}=0\\ \vdots\\ a_0\overline{a_0}+a_1\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}+...+a_{n-1}\overline{a_{n-1}}+a_n\overline{a_n}=1\\ \text{(les équations suivantes vont s'avérer inutiles)}\end{cases}$

Puisque $a_n\neq 0$, ces équations entraînent successivement que : $\begin{cases} a_0=0\\ a_1=0\\ a_2=0\\ \vdots\\ a_{n-1}=0\\ a_n\overline{a_n}=1\end{cases}$

soit : $a_0=a_1=...=a_{n-1}=0$ et $|a_n|=1$
Donc $\boxed{P(X)=a_nX^n \text{ où } a_n \text{ est un complexe de module 1}}$.

• Réciproquement, on vérifie aisément que tout polynôme de ce type est solution.

EXERCICE 2 : Prouver l'existence de $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}dx$

On montre que $\forall u\geqslant 0, \text{Arctan}(u)\leqslant u$ (immédiat par l'étude de la fonction $x\mapsto \text{Arctan}(x)-x$, ou par concavité de la fonction Arctan))

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, La fonction $x\mapsto\dfrac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}$ est continue sur $]0,+\infty[$,
et $,\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant\dfrac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}\leqslant\dfrac{\frac{x}{n}}{x+x^3}=\dfrac{1}{n(1+x^2)}$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et donc sur $]0,+\infty[$, et par majoration, la fonction $x\mapsto\dfrac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}$ l'est aussi.

Remarque : pour la borne 0, on peut aussi prolonger la fonction par continuité en lui donnant la valeur $\frac{1}{n}$.

• de plus, $0\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}dx\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{n(1+x^2)}=\frac{\pi}{2n}$

Cet encadrement montre que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}J_n=0}$

• $nJ_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}dx$

Sachant que $\text{Arctan}(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, $n\text{Arctan}(x/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n.\dfrac{x}{n}=x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}=\frac{x}{x+x^3}=\frac{1}{1+x^2}$

Par ailleurs, la domination $0\leqslant\dfrac{n\text{Arctan}(x/n)}{x+x^3}\leqslant\dfrac{n\frac{x}{n}}{x+x^3}=\dfrac{1}{1+x^2}$
(provenant de la majoration $0\leqslant\text{Arctan}(u)\leqslant u$)

permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, et d'affirmer que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n.J_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}}$

Ceci complète le résultat concernant la limite de (J_n) par l'équivalence : $\boxed{J_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n}}$

0.2 Centrale - Supelec : -

0.2.1 ENSEA - ENSIIE

Exercice 1 : Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{x+t}dt$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $f(1)$ (sous forme d'un somme de série)

Calculer $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2 : On définit $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, a_p$ est bien défini, et que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^{e^z} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \frac{z^p}{p!}$

(On admettra que si la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|a_{k,n}|\right)$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{k,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_{k,n}\right)$)

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, \dfrac{a_p}{e}$ est un entier.

SOLUTION **: Exercice 1 :** Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x+t}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$. De plus $\dfrac{|\ln(t)|}{x+t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}|\ln(t)| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. La fonction de référence $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant intégrable sur $]0,1]$, par domination, la fonction $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{x+t}$ l'est aussi.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur l'intervalle }]0,+\infty[}$.

• Pour tout $x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+\frac{t}{x}}dt$

Si $x \geqslant 1$, pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1+\frac{t}{x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{x^n}$ (car $0 \leqslant \frac{t}{x} < 1$)

donc $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n\ln(t)}{x^n}\right)dt = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n\ln t}{x^{n+1}}\right)dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n\ln t\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_{t\to 0}^{t=1} - \int_0^1\frac{t^n}{n+1}dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$

(on intègre sur tout segment de la forme $[a,1], a > 0$, et on passe à la limite quand $a \to 0$)

En posant $u_n(t) = (-1)^n\dfrac{t^n\ln t}{x^{n+1}}$, $\displaystyle\int_{]0,1]}|u_n(t)|dt = \frac{1}{x^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ (car $x \geqslant 1$)

La série numérique $\displaystyle\sum\int_{]0,1]}|u_n(t)|dt$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on peut écrire que : $\displaystyle\int_{]0,1]}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{]0,1]}u_n(t)dt\right)$

donc $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n\ln t}{x^{n+1}}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{]0,1]}(-1)^n\frac{t^n\ln t}{x^{n+1}}dt\right)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\int_{]0,1]}t^n\ln t\,dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n^2}$$

donc $\boxed{\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n^2}}$

En particulier, $f(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$\boxed{f(1) = -\dfrac{1}{2}\zeta(2) = -\dfrac{\pi^2}{12}}$

• Posons : $\forall(x,t) \in]0,+\infty[\times]0,1], F(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{x+t}$

-pour tout $t \in I =]0,1]$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J =]0,+\infty[$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln(t)}{(x+t)^2}$

-pour tout $x \in I =]0,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto F(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur I

-pour tout $a > 0$, $\forall(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1]$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{|\ln(t)|}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{|\ln(t)|}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}|\ln(t)|$

et la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|$ est intégrable sur $I =]0,1]$

Par application du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (théorème de dérivation sous le signe $\int$), on peut en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et que :

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[, \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt}$

- En intégrant par parties sur le segment $[a,1]$ où a est un réel strictement positif quelconque,

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{-1}{(x+t)^2}\ln(t)dt &= \left[\frac{\ln t}{x+t}\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{(x+t)t}dt = -\frac{\ln a}{x+a} - \frac{1}{x}\int_a^1 \frac{x+t-t}{(x+t)t}dt\\ &= -\frac{\ln a}{x+a} - \frac{1}{x}\int_a^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+t}\right)dt\\ &= -\frac{\ln a}{x+a} - \frac{1}{x}\left[\ln t - \ln(x+t)\right]_a^1\\ &= -\frac{\ln a}{x+a} + \frac{1}{x}\ln a + \frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{x}\ln(a+x)\\ &= \frac{a\ln a}{x(x+a)} + \frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{x}\ln(a+x)\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $a \to 0^+$,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

- $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Longrightarrow\ \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\,x\ln(1+x)$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{x}\ln x}$$

$\Longrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = -\frac{\ln^2 x}{2} + c$

Pour $x = 1$, cette formule donne : $g(1) = 2f'1) = -\frac{\pi^2}{6} = c$

donc $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = -\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{\pi^2}{6}}$

Exercice 2 :

Soit $p \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$ converge d'après le critère de d'Alembert. $\boxed{a_p \text{ est bien défini pour tout } p \in \mathbb{N}}$

Pour tout $z \in \mathbb{C}, e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{nz})}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(nz)^p}{p!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(nz)^p}{n!p!}\right)$

La série $\sum_{p=0}^{+\infty} \left|\frac{(nz)^p}{n!p!}\right|$ converge et a pour somme $\frac{1}{n!}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|nz|^p}{p!}\right) = \frac{1}{n!}e^{|nz|} = \frac{(e^{|z|})^n}{n!}$

donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left|\frac{(nz)^p}{n!p!}\right|\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!}$ converge (et a pour somme $e^{e^{|z|}}$)

On peut appliquer la théorème d'échange de l'ordre de sommation des deux séries, rappelé dans le texte :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(nz)^p}{n!p!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nz)^p}{n!p!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\frac{z^p}{p!}}$$

b) Posons $g(z) = e^{e^z}$

On a obtenu le développement en série entière : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = e^{e^z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_p}{p!}z^p$

On sait qu'une série entière de somme $g(z)$ est égale à la série de Taylor : $g(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}z^p$.

Par identification : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = g^{(p)}(0)$

Recherchons donc les nombres $g^{(p)}(0), p \in \mathbb{N}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{e^x}$. Remarquons que $g(0) = e^{e^0} = e^1 = e$.

$g'(x) = e^x.e^{e^x} = e^x g(x)$

$$\begin{aligned}
g''(x) &= e^x g(x) + e^x g'(x) = e^x g(x) + e^{2x} g(x) = (e^x + e^{2x}) g(x)\\
g'''(x) &= (e^x + 2e^{2x}) g(x) + (e^x + e^{2x}) g'(x) = (e^x + 2e^{2x}) g(x) + (e^x + e^{2x}) e^x g(x)\\
&= (e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) g(x)\\
g^{(iv)}(x) &= (e^x + 6e^{2x} + 3e^{3x}) g(x) + (e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) g'(x) = (e^x + 6e^{2x} + 3e^{3x}) g(x) + (e^x + 3e^{2x} + e^{3x}) e^x g(x)\\
&= (e^x + 7e^{2x} + 6e^{3x} + e^{4x}) g(x)
\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{P}_p$ la proposition : $\exists a_1, a_2, ..., a_p \in \mathbb{N}$ tels que $g^{(p)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^{kx}\right) g(x)$

On vient de vérifier cette proposition pour $p = 1, 2, 3, 4$.

Supposons cette proposition vraie au rang p : $g^{(p)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^{kx}\right) g(x)$

$$\begin{aligned}
\text{alors } g^{(p+1)}(x) &= \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k e^{kx}\right) g(x) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^{kx}\right) g'(x)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k e^{kx}\right) g(x) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^{kx}\right) e^x g(x)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k e^{kx} + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{(k+1)x}\right) g(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} k a_k e^{kx} + \sum_{k=2}^{p+1} a_{k-1} e^{kx}\right) g(x)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{p+1} b_k e^{kx}\right) g(x)
\end{aligned}$$

(en posant $b_1 = a_1$, $b_k = k a_k + a_{k-1}$ pour $k = 2, ..., p$ et $b_{p+1} = a_p$)
Puisque les a_k étaient tous des entiers naturels, les b_k en sont aussi.
On a ainsi prouvé par récurrence que la proposition $\mathscr{P}_p$ est vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.

de l'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(p)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^{kx}\right) g(x)$, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = g^{(p)}(0) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k e^0\right) \underbrace{g(0)}_{=e}, \text{ donc } \boxed{\frac{a_p}{e} = \sum_{k=1}^{p} a_k \text{ est un entier naturel puisque les } a_k \text{ en sont}}.$$

0.2.2 ENSIIE :

Exercice 1 : On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} dt}{\sqrt{1+t}}$

a) Déterminer son domaine de définition.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et est solution d'une équation différentielle linéaire qu'on précisera.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
Calculer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$

SOLUTION : **Exercice 1 :** a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$

Si $x \leqslant 0$, quand $t \to +\infty$, $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc, par minoration, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt} dt}{\sqrt{1+t}}$ diverge (car on sait que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est divergente)

Donc $f(x)$ n'est pas défini si $x \leqslant 0$.

Si $x > 0$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et, par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} dt}{\sqrt{1+t}}$ est convergente.

Finalement, $\boxed{\mathscr{D}_f =]0, +\infty[}$

b) Soit $a > 0$, et posons $\forall x > 0,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ F(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$

- pour tout $t \in [0 + \infty[$, la fonction $x \mapsto F(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{-t e^{-xt}}{\sqrt{1+t}},$$

- pour tout $x \geqslant a$, les fonctions $t \mapsto F(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ (l'intégrabilité de la première a été justifiée ci-dessus, l'intégrabilité de la seconde est une conséquence de la domination qui suit)

- pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \leqslant \sqrt{t} e^{-at}$

où la fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-at}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, et donc sur $]0, +\infty[$, et que :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt}\ .$$

• Pour tout $x > 0$, en intégrant par parties,

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+t}}e^{-xt}dt = 2\left[\sqrt{1+t}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + 2x\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}e^{-xt}dt$$

$$f(x) = -2 + 2x\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, e^{-xt}dt$$

Par ailleurs, $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{(t+1)-1}{\sqrt{1+t}}e^{-xt}dt$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}e^{-xt}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}e^{-xt}dt - f(x)$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}e^{-xt}dt = f(x) + f'(x)$

En reportant dans la première égalité, on obtient : $f(x) = -2 + 2x(f(x) + f'(x))$,

ce qui montre que $\boxed{f \text{ est solution sur }]0, +\infty[\text{ de l'équation différentielle } (E) :\ 2xy' + (2x-1)y = 2}$

c) • $\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}dt}{\sqrt{1+t}} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}$

L'encadrement $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ montre alors que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

• Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$:

Soit $M > 0$. Soit $a = M^2 + M$.

$\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}dt}{\sqrt{1+t}} \geqslant \int_0^{a} \frac{e^{-xt}dt}{\sqrt{1+t}} \geqslant e^{-xa}\int_0^{a} \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2e^{-xa}[\sqrt{1+t}]_0^a$

$$f(x) \geqslant 2e^{-xa}(\sqrt{1+a}-1) = 2e^{-xa}(\sqrt{1+M^2+M}-1) = 2e^{-xa}M$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-xa} = e^0 = 1$, donc $\exists \eta > 0$ tel que : $0 < x < \eta \implies \frac{1}{2} < e^{-xa}$

donc $\forall x \in]0, \eta[,\ f(x) \geqslant 2e^{-xa}M > M$

On a ainsi montré que : $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[,\ f(x) \geqslant 2e^{-xa}M > M$, c'est à dire que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

• $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}du}{\sqrt{1+\frac{u}{x}}}$ (par le changement de variable affine $u = xt,\ dt = \frac{1}{x}du$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}du}{\sqrt{x+u}}$$

Soit (x_n) une suite quelconque de réels positifs de limite nulle, alors

- $\forall u \in [0, +\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{x_n+u}} = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ (la suite de fonctions $g_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{x_n+u}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$)

- $\forall u \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ |g_n(u)| = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{x_n+u}} \leqslant \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} = g(u)$,
et la fonction g est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée, et en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$,

c'est à dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x_n+u}}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de réels positifs de limite nulle, on en conclut que :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x+u}}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$$

Par ailleurs le changement de variable $u = t^2,\ du = 2tdt$, va permettre de calculer cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}2t\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi} \quad \text{(intégrale de Gauss)}$$

L'égalité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}du}{\sqrt{x+u}}$ permet alors d'affirmer que $\boxed{f(x) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}}$

0.2.3 ENSIIE :

Exercice 1 : On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$\det(A) = 10, \quad \mathrm{tr}(A) = -6$ et $A - I_3$ n'est pas inversible.
Montrer que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et exprimer A^{-1} comme un polynôme de la matrice A.

Exercice 2 : A quelle(s) condition(s) sur les réels a, b, c, la série de terme général
$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ converge-t-elle ?
Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

SOLUTION : Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres (dont on connait l'existence dans $\mathbb{C}$) de la matrice A.
Puisque $A - I_3$ n'est pas inversible, $\det(A - I_3) = 0$ et 1 est valeur propre de A. Notons $\lambda_1 = 1$
Par ailleurs, $\begin{cases} \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 10 & \text{donc} \quad \lambda_2\lambda_3 = 10 \\ \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -6 & \text{donc} \quad \lambda_2 + \lambda_3 = -7 \end{cases}$
λ_2 et λ_3 sont donc les racines du polynôme $X^2 + 7X + 10$. On peut ainsi noter $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -5$
Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-5, -2, 1\}}$. 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
La matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres réelles distinctes.
$\boxed{\text{Elle est donc diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

$$\exists Q \in GL_3(\mathbb{R}),\ A = Q.\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.Q^{-1}\ . \text{ Donc } A^{-1} = Q.\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.Q^{-1}$$

Si $P(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors $P(A) = Q.\begin{pmatrix} P(-5) & 0 & 0 \\ 0 & P(-2) & 0 \\ 0 & 0 & P(1) \end{pmatrix}.Q^{-1}$

Pour que $P(A) = A^{-1}$, il suffit, par exemple, que $\begin{cases} P(-5) = -\frac{1}{5} \\ P(-2) = -\frac{1}{2} \\ P(1) = 1 \end{cases}$

(les valeurs de $P(-5), P(-2)$ et $P(1)$ peuvent être échangées)

$$P(X) = -\frac{1}{5}\frac{(X+2)(X-1)}{(-5+2)(-5-1)} - \frac{1}{2}\frac{(X+5)(X-1)}{(-2+5)(-2-1)} + \frac{(X+5)(X+2)}{(1+5)(1+2)} = \frac{X^2+6X+3}{10}$$

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 + 6A + 3I_3)}$

Exercice 2 : a, b, c étant des réels donnés, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$

$$u_n = a\ln(n) + b\ln\left(n\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right) + c\ln\left(n\left(1 + \tfrac{2}{n}\right)\right)$$
$$u_n = a\ln(n) + b\ln n + b\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) + c\ln n + c\ln\left(1 + \tfrac{2}{n}\right)$$
$$= (a+b+c)\ln(n) + +b\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) + c\ln\left(1 + \tfrac{2}{n}\right)$$

- si $a + b + c \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.
- Supposons désormais que $a + b + c = 0$;

$$u_n = b\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) + c\ln\left(1 + \tfrac{2}{n}\right) = b\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) + c\left(\tfrac{2}{n} - \tfrac{2}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= (b+2c)\tfrac{1}{n} - \underbrace{\left(2c + \frac{b}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{series\ \ convergentes}$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b + 2c = 0$
En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \iff c = a$ et $b = -2a$

• Dans ce cas, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = a\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)\right)$

$$U_n = a\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)\right)$$
$$U_n = a\left(\ln(1) + \ln(2) - 2\ln(2) - 2\ln(n+1) + \ln(n+1) + \ln(n+2)\right)$$

(les sommes $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\ln(k)$ s'éliminent)

$$U_n = a\left(-\ln(2) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2 \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\ln 2}$$

0.2.4 Centrale

Exercice 1 : F et G sont deux sous espaces supplémentaires d'un espace euclidien E.

Soient $f : F \to G$ et $g : G \to F$ linéaires telles que :

$\forall (x,y) \in F \times G, \ < f(x), y > = < x, g(y) >$

a) Montrer que $\ker f = (\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F$

b) Montrer que $F = \ker f \oplus^{\perp} \mathrm{Im} g$

c) Montrer que f est injective $\iff$ g est surjective.

d) Montrer que g est injective $\iff$ f est surjective.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Donner une condition simple pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

SOLUTION **: Exercice 1 :** Par hypothèse, F et G sont deux sous espaces supplémentaires d'un espace euclidien E, $f \in \mathscr{L}(F,G)$, $g \in \mathscr{L}(G,F)$ et $\forall (x,y) \in F \times G, \ < f(x), y > = < x, g(y) >$

a) Soit $x \in \ker f$. Puisque $f \in \mathscr{L}(F,G)$, on sait déjà que $x \in F$.

Pour tout $y \in \mathrm{Im} g, \exists t \in G, y = g(t)$. Alors, $< x, y > = < x, g(t) > = < \underbrace{f(x)}_{=0}, t > = 0$, ce qui montre que $x \in \mathrm{Im} g^{\perp}$.

On a ainsi établit l'inclusion : $\ker f \subset (\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F$

• Réciproquement, soit $x \in (\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F$

alors $\|f(x)\|^2 = < f(x), f(x) > = < x, g(f(x)) > = 0$ car $g(f(x)) \in \mathrm{Im} g$ et $x \in (\mathrm{Im} g)^{\perp}$

Donc $\|f(x)\| = 0$ et $x \in \ker f$

On a ainsi établit l'inclusion : $(\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F \subset \ker f$ et finalement l'égalité des deux ensembles.

b) Montrons d'abord que les deux sous espaces $\ker f$ et $\mathrm{Im} g$ sont orthogonaux :

Soient x et y des vecteurs quelconques respectivement de $\ker f$ et $\mathrm{Im} g$: $f(x) = 0$ et $\exists t \in G, y = g(t)$

alors $< x, y >) < x, g(t) > = < \underbrace{f(x)}_{=0}, t > = 0$, ce qui montre que $\boxed{\ker f \perp \mathrm{Im} g}$

Il en résulte que les deux sous espaces $\boxed{\ker f \text{ et } \mathrm{Im} g \text{ sont en somme directe.}}$

• Soit $x \in F$. Puisque $\mathrm{Im} g$ et $(\mathrm{Im} g)^{\perp}$ sont deux sous espaces suppémentaires de E, il existe $a \in \mathrm{Im} g$, il existe $b \in (\mathrm{Im} g)^{\perp}$ tels que $x = a + b$

$a \in F$ puisque $\mathrm{Im} g \subset F$, donc $b = x - a \in F$, comme différence de deux vecteurs de F.

donc $b \in (\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F = \ker f$ d'après la question a)

On a ainsi écrit la décomposition de tout vecteur x de F sous la forme $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im} g$ et $b \in \ker f$, ce qui montre que $F \subset \ker f \oplus^{\perp} \mathrm{Im} g$

$\ker f$ et $\mathrm{Im} g$ étant deux sous espaces de F, l'inclusion réciproque est évidente, ce qui montre finalement par double inclusion l'égalité $\boxed{F = \ker f \oplus^{\perp} \mathrm{Im} g}$

c) Si g est surjective, alors $\mathrm{Im} g = F$, et d'après la question a), $\ker f = (\mathrm{Im} g)^{\perp} \cap F = F^{\perp} \cap F = \{0\}$, ce qui montre que f est injective.

Si f est injective, alors $\ker f = \{0\}$, et d'après la question b), $F = \ker f \oplus^{\perp} \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} g$. L'égalité $\mathrm{Im} g = F$ montre que g est surjective.

On ainsi prouvé l'équivalence : $\boxed{f \text{ est injective} \iff g \text{ est surjective}}$.

d) f et g jouent des rôles symétriques, ce qui prouve d) à partir de c)

Exercice 2 : $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$. Etudions le comportement de $\dfrac{f(t)}{t}$ quand $t \to 0^+$.

Puisque $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$f(t) \underset{t \to 0^+}{=} f(0) + f'(0)t + o(t)$

d'où : $\dfrac{f(t)}{t} \underset{t \to 0^+}{=} \dfrac{f(0)}{t} + f'(0) + o(1)$

- si $f(0) \neq 0$, alors $\dfrac{f(t)}{t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{f(0)}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ est divergente, comme l'est l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$

- si $f(0) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ est alors convergente, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt \text{ est convergente si et seulement si } f(0) = 0}$.

0.2.5 Centrale :

Exercice 1 : Pour x réel, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt$.

a) Donner le domaine de définition de g, étudier la parité de g et calculer $g(0)$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(1)|x|$

c) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Calculer $g(x)$

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & A.M - M.A \end{array} \right.$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si A est nilpotente, f l'est aussi.

c) Montrer que si A est diagonalisable, f l'est aussi.

SOLUTION : Si $x = 0$, l'intégrale s'écrit $g(0) = \int_0^{+\infty} 0dt$, elle est définie et nulle.

Si $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$ est définie et continue sur $]0 + \infty[$.

• $\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2t^2}{2}}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{x^2}{2}$

La fonction la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$ est prolongeable par contnuité en 0, et est intégrable sur tout segment de la forme $[0,a], a > 0$

• $\forall t \in]0 + \infty[0 \leqslant \left|\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1+|\cos(xt)|}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ (fonction de référence intégrable sur $[a, +\infty[$)

Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Par additivité, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-xt)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt = g(x).$

La fonction g est paire.

b) Pour tout $x > 0$, par le changement de variable $u = xt$, $dt = \frac{1}{x}du$,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\frac{u^2}{x^2}} \frac{1}{x} du = x \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2} du = xg(1)$$

Si $x < 0$, $g(x) = g(\underbrace{-x}_{-x>0}) = -xg(1) = |x|g(1)$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(1)|x|}$

c) Pour l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, voir le cours.

$g(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$

Intégrons parties sur tout segment de la forme $[a,b], 0 < a < b$:

$$\int_a^b (1-\cos(t)) \frac{1}{t^2} dt = \left[(1-\cos(t)) \frac{-1}{t}\right]_a^b + \int_a^b \sin(t) \frac{1}{t} dt$$

$$\int_a^b (1-\cos(t)) \frac{1}{t^2} dt = \frac{\cos(b)-1}{b} - \frac{\cos(a)-1}{a} - + \int_a^b \sin(t) \frac{1}{t} dt$$

$$\left|\frac{\cos(b)-1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{b} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(a)}{a} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{a^2}{2}}{a} = \frac{a}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En passant à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, $\boxed{g(1) = \displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$

et finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(1)|x| = \frac{\pi}{2}|x|}$

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application f est définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = A.M - M.A$

a) On vérifie que f est linéaire (sans difficulté) . Donc $f \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

b) On suppose que A est nilpotente : $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = 0.$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(M) = A.M - M.A$

$f^2(M) = f(A.M - M.A) = A.(A.M - M.A) - (A.M - M.A).A = A^2M - 2A.M.A + M.A^2$
$f^3(M) = f[f^2(M)] = f(A^2M - 2A.M.A + M.A^2)$
$= A.(A^2M - 2A.M.A + M.A^2) - (A^2M - 2A.M.A + M.A^2).A$
$= A^3M - 3A^2.M.A + 3A.M.A^2 - M.A^3$

On voit apparaître les coeeficients du binôme $(1,2,1)$ et $(1,3,3,1)$.

On peut conjecturer que $f^m(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m-k}.M.A^k$

Cette propriété a été vérifiée pour $m = 1, 2, 3$.

Supposons la vérifiée au rang m : $f^m(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m-k}.M.A^k$

alors $f^{m+1}(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(A^{m-k}.M.A^k)$ (par linéarité)

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\left(A.(A^{m-k}.M.A^k) - (A^{m-k}.M.A^k).A\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\left(A^{m-k+1}.M.A^k - A^{m-k}.M.A^{k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m+1-k}.M.A^k - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m+1-(k+1)}.M.A^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m+1-k}.M.A^k - \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1}A^{m+1-k}.M.A^k$$

(par le changement d'indice $k' = k+1$ dans la deuxième somme)

$$f^{m+1}(M) = A^{m+1}.M + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)A^{m+1-k}.M.A^k + (-1)^{m+1}M.A^{m+1}$$

et puisque $\displaystyle\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$, $\quad 1 = \displaystyle\binom{m+1}{0} = \binom{m+1}{m+1}$,

$$f^{m+1}(M) = \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}A^{m+1-k}.M.A^k$$

On a ainsi montré par récurrence que : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ f^m(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{m-k}.M.A^k}$

• Dès lors, supposons que $A^p = 0$.

$\forall m \in \mathbb{N},\ f^{2p}(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{2p}{k}A^{2p-k}.M.A^k$

Puisque la somme des deux entiers nturels k et $2p-k$ vaut $2p$, l'un au moins de deux est $\geqslant p$. Donc pour tout $k \in \{0, 1, ..., 2p\}$, soit $A^{2p-k} = 0$ (si $2p - k \geqslant p$), soit $A^k = 0$ (si $k \geqslant p$), et dans les deux cas, $A^{2p-k}.M.A^k = 0$

Donc tous les termes de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{2p}{k}A^{2p-k}.M.A^k$ sont nuls, et $f^{2p}(M) = 0$

On a ainsi montré que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f^{2p}(M) = 0$. Donc $f^{2p} = \omega$ et f est nilpotente.

c) Supposons que A est diagonalisable : il existe une base $(U_1, U_2, .., U_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, ces vecteurs propres étant associés respetivement à des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$\forall i \in \{0, 1, ..., n\},\ A.U_i = \lambda_i U_i$.

La matrice ${}^tA$ possède les mêmes valeurs propres que A (car a le même polynôme caractéristique), et est diagonalisable si A l'est : $A = P.\Delta.P^{-1} \implies {}^tA = {}^tP^{-1}.\Delta.{}^tP$

donc il existe une base $(V_1, V_2, .., V_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de ${}^tA$: $\forall i \in \{0, 1, ..., n\},\ {}^tA.V_i = \lambda_i V_i$. donc, en transposant, $\forall i \in \{0, 1, ..., n\},\ {}^tV_i.A. = \lambda_i\,{}^tV_i$ Chaque matrice $M_{i,j} = U_i.{}^tV_j$ vérifie :

$$f(M_{i,j}) = A.M_{i,j} - M_{i,j}.A = \underbrace{A.U_i}_{=\lambda_i U_i}.{}^tV_j - U_i.\underbrace{{}^tV_j.A}_{=\lambda_j\,{}^tV_j} = \lambda_i U_i.{}^tV_j - \lambda_j U_i.{}^tV_j = (\lambda_i - \lambda_j)U_i.{}^tV_j$$

$f(M_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)U_i.{}^tV_j = (\lambda_i - \lambda_j)M_{i,j}$

$\boxed{\text{La famille } (M_{i,j})_{i=1..n,j=1..n} \text{ est formée de } n^2 \text{ vecteurs propres de } f.}$

Il reste à montrer que cette famille constitue une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

• Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$, alors $X.{}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & ... & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & ... & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & ... & x_ny_n \end{pmatrix} = (y_1X|y_2X|...|y_nX)$

(matrice écrite par blocs colonnes)

Soit $M = (C_1|C_2|...|C_n)$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, écrite colonne par colonne.

Chaque colonne est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui peut se décomposer sur la base de vecteurs propres $(U_1, U_2, ..., U_n)$ de A : $\begin{cases} C_1 = a_1U_1 + a_2U_2 + ... + a_nU_n \\ C_2 = b_1U_1 + b_2U_2 + ... + b_nU_n \\ \vdots \\ C_n = c_1U_1 + c_2U_2 + ... + c_nU_n \end{cases}$

donc $M = (C_1|C_2|...|C_n) = (a_1U_1 + a_2U_2 + ... + a_nU_n|b_1U_1 + b_2U_2 + ... + b_nU_n|...|c_1U_1 + c_2U_2 + ... + c_nU_n)$

$M = (a_1U_1|b_1U_1|...|c_1U_1) + (a_2U_2|b_2U_2|...|c_2U_2) + ... + (a_nU_n|b_nU_n|...|c_nU_n)$

et d'après le calcul général de $X.{}^tY$ effectué plus haut,

$M = U_1(a_1, b_1, ..., c_1) + U_2(a_2, b_2, ..., c_2) + ... + U_n(a_n, b_n, ..., c_n)$

$$M = U_1.{}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ ... \\ c_1 \end{pmatrix} + U_2.{}^t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ ... \\ c_2 \end{pmatrix} + ... + U_n.{}^t\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ ... \\ c_1 \end{pmatrix}$ peut se décomposer sur la base $(V_1, V_2, ..., V_n)$ formée de vecteurs propres ${}^tA$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ ... \\ c_1 \end{pmatrix} = \alpha_1V_1 + \alpha_2V_2 + ... + \alpha_nV_n$$

et de même, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ ... \\ c_2 \end{pmatrix} = \beta_1V_1 + \beta_2V_2 + ... + \beta_nV_n \quad . \ . \ . \ . \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} = \gamma_1V_1 + \gamma_2V_2 + ... + \gamma_nV_n$

d'où , $M = U_1.\left(\alpha_1\,{}^tV_1 + \alpha_2\,{}^tV_2 + ... + \alpha_n\,{}^tV_n\right) + U_2.\left(\beta_1\,{}^tV_1 + \beta_2\,{}^tV_2 + ... + \beta_n\,{}^tV_n\right) + ...$

$... + U_n.\left(\gamma_1\,{}^tV_1 + \gamma_2\,{}^tV_2 + ... + \gamma_n\,{}^tV_n\right)$

$$M = \sum_{i=1}^{n} U_i\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_{i,j}\,{}^tV_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i,j}U_i\,{}^tV_j = \sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i,j}M_{i,j}$$

Cette décomposition d'une matrice M quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme combonaison linéaire de la famille $(M_{i,j})_{i=1..n,j=1..n}$ montre que cette famille est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Elle comporte n^2 éléments dans un espace de dimension n^2. C'en est donc une base.

On a ainsi trouvé une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de f, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

0.2.6 Centrale :

Exercice 1 : Pour x réel, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t}dt$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g(x)$.

Exercice 2 : Trouver, sans calcul, les valeurs propres et sous espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$

où a et b sont des réels donnés.

SOLUTION : Si $x = 0$, l'intégrale s'écrit $g(0) = \int_0^{+\infty} 0dt$, elle est définie et nulle.

Si $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est définie et continue sur $]0 + \infty[$.

• $\dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2t^2}{2}}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{x^2}{2}$

La fonction la fonction $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est prolongeable par continuité en 0, et est intégrable sur tout segment de la forme $[0, a], a > 0$.

• $\forall t \in [1 + \infty[, \left|\dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t}\right| \leqslant \dfrac{1 + |\cos(xt)|}{t^2}e^{-t} \leqslant \dfrac{2}{t^2}e^{-t} \leqslant 2e^{-t}$

(fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$)

Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Par additivité, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0+\infty[$, $G(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$

- pour tout $t \in]0+\infty[$, la fonction $t \mapsto G(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est de class $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \frac{t\sin(xt)}{t^2}e^{-t} = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto G(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$ (l'intégrabilité de la première a été justifiée ci-dessus, l'intégrabilité des deux autres est une conséquence des deux dominations qui suivent)

- pour tout $b > 0$, pour tout $(x,t) \in [-b,b] \times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{|\sin(xt)|}{t}e^{-t} \leqslant \dfrac{|xt|}{t}e^{-t} \leqslant be^{-t}$

et $\left|\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\right| = |\cos(xt)e^{-t}| \leqslant e^{-t}$

les fonctions $t \mapsto be^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$.

En appliquant deux fois le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de dérivation sous le signe $\int$), on en conclut que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout intervalle de la forme $[-b,b]$, et donc sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt \ \text{ et } \ g''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt}\ .$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(e^{ixt})e^{-t}dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\right)dt$$

$$g''(x) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{ixt}e^{-t}}{ix-1}\right]_0^{t\to+\infty}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

• Alors, il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{Arctan}(x) + k$

Or l'expression intégrale de $g'(x)$ ci-dessus montre que $g'(0) = 0$, donc $k = 0$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathrm{Arctan}(x)}$$

• Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) + \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = 0 + \int_0^x \mathrm{Arctan}(t)dt$

on calcule cette dernière intégrale par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x \mathrm{Arctan}(t)dt = [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\mathrm{Arctan}(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}dt = x\mathrm{Arctan}(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a^2-x & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-x & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-x & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2ab+b^2-x & ab & ab & b^2 \\ a^2+2ab+b^2-x & a^2-x & b^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2-x & b^2 & a^2-x & ab \\ a^2+2ab+b^2-x & ab & ab & a^2-x \end{vmatrix}$

(par l'opération élémentaire $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$)

$\chi_A(X)$ contient donc le facteur $(X - a^2 - 2ab - b^2) = (X - (a+b)^2)$, et $\boxed{(a+b)^2 \text{ est une valeur propre de } A}$.

Profitons de la répétition des termes en a^2, ab ou b^2 pour faire apparître des 0 dans le calcul de $\chi_A(X)$:

Par l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 - C_3 + C_4$,

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2-x & ab & ab & b^2 \\ -a^2+2ab-b^2+x & a^2-x & b^2 & ab \\ -a^2+2ab-b^2+x & b^2 & a^2-x & ab \\ a^2-2ab+b^2-x & ab & ab & a^2-x \end{vmatrix}$, et en développant par rapport à la première colonne, on voit apparaître le facteur $X - a^2 + 2ab - b^2 = (X - (a-b)^2)$ dans le polynôme $\chi_A(x)$.

Par les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 - C_4$ et $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$,

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a^2-b^2-x & 0 & ab & b^2 \\ 0 & a^2-b^2-x & b^2 & ab \\ 0 & b^2-a^2+x & b^2 & ab \\ b^2-a^2+x & 0 & ab & a^2-x \end{vmatrix}$, et en factorisant dans les colonnes 1 et 2, on fait apparaitre le facteur $(X-a^2+b^2)^2$

Donc a^2-b^2 est valeur propre (au moins) double de A.

Ayant trouvé 3 valeurs propres de $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'une au moins double, on a obtenu toutes les valeurs propres de A (dans le cas où les trois réels $(a-b)^2, (a+b)^2, a^2-b^2$ sont distincts).

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{(a-b)^2, (a+b)^2, a^2-b^2\},\ a^2-b^2 \text{ étant valeur propre double}}$

• On remarque que $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^2+2ab+b^2).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{E_{(a+b)^2}(A) \text{ est la droite engendrée par le vecteur } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

• $A.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^2-2ab+b^2).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{E_{(a-b)^2}(A) \text{ est la droite engendrée par le vecteur } V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

• La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Donc $E_{a^2-b^2}(A)$ est le plan orthogonal aux droites $\mathrm{Vect}(U)$ et $\mathrm{Vect}(V)$.

Il suffit de trouver deux vecteurs W et T linéairement indépendants, chacun orthogonal à U et V, pour obtenir une base de ce plan. Ce sera le cas en prenant $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{E_{a^2-b^2}(A) \text{ est le plan engendré par les vecteurs } W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

0.2.7 Centrale

Exercice 1 : Résoudre l'équation : $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (*).

Exercice 2 : Montrer que l'application : $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Montrer qu'il existe une et une seule famille $(P_n(X))_n$ de polynômes deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire, et de monôme de plus haut degré X^n.

Calculer $P_1(X)$. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}(X),\ \Phi(Q, P_n) = 0$, puis que chaque polynôme P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

SOLUTION **: Exercice 1 :** Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$

Recherchons les sous espaces propres associés :

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$A.V = -1 \times V \iff (A+I_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0 \iff x + y = 0$$

Le sous espace propre $E_A(-1)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A.V = 3\times V \iff (A-3I_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x+2y=0 \iff -x+y=0$$

Le sous espace propre $E_A(3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable (on le savait dès le départ car elle est réelle symétrique), et précisément :

$$A = P.\Delta.P^{-1} \text{ où } \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} M^2+M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &\iff M^2+M = P.\Delta.P^{-1} \\ &\iff P^{-1}M^2.P + P^{-1}.M.P = \Delta \\ &\iff (P^{-1}M.P)^2 + P^{-1}.M.P = \Delta \end{aligned}$$

En notant $N = P^{-1}.M.P$, N est solution de l'équation : $N^2+N = \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

On remarque qu'alors : $N.\Delta = N.(N^2+N) = N^3+N^2 = (N^2+N).N = \Delta.N$

Donc N commute avec la matrice diagonale Δ, dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts. Il s'ensuit que N est une matrice diagonale (propriété à savoir redémonter au cas où l'examinateur le demanderait, voir cours) ;

Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} N^2+N = \Delta &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2+a=-1 \\ b^2+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+a+1=0 & (1) \\ b^2+b-3=0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation (1) a un discriminat négatif, elle n'a pas de racines réelles. Ses deux racines sont complexes, à savoir $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et son conjugué, $\overline{j} = j^2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.

$\boxed{\text{L'équation (*) n'a donc pas de racines dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

L'équation (2) a pour racines $b_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et $b_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

Les matrices N solutions sont donc :

$$N_1 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix},\quad N_2 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix},\quad N_3 = \begin{pmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix},\quad N_4 = \begin{pmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

L'équation (*) a quatre solutions, qui sont :

$$M_1 = P.N_1.P^{-1},\ M_2 = P.N_2.P^{-1},\ M_3 = P.N_3.P^{-1},\ M_4 = P.N_4.P^{-1}$$
$$\text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Pour tous polynômes $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur le fermé $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de la forme $[0,y], y>0$.

Par ailleurs, par croissance comparée exponentielles-puissances, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2P(t)Q(t)e^{-t^2} = 0$, ce qui montre que : $|P(t)Q(t)e^{-t^2}| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ est absolument convergente.

$\boxed{\text{L'application } \Phi : (P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt \text{ est donc bien définie sur } \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]}$.

• Il est clair que cette application est bilinéaire et symétrique (vérification immédiate)

Par ailleurs, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P,P) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt > 0$ car l'application $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est définie, continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{\Phi \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

• Il n'existe qu'un seul polynôme de degré 0 , dont le terme dominant est $X^0 = 1$: c'est le polynôme constant $P_0(X) = 1$.

Les polynômes de degré 1, dont le monôme dominant est $X^1 = X$, sont de la forme $X+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Un tel polynôme est orthogonal à P_0 si et seulement si $\Phi(P_0, X+c) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff \Phi(P_0,X) + c\Phi(P_0,1) = 0 \\ &\iff \Phi(P_0,X) + c\underbrace{\Phi(P_0,P_0)}_{\|P_0\|^2\neq 0} = 0 \\ &\iff c = -\frac{\Phi(P_0,X)}{\|P_0\|^2} \end{aligned}$$

Donc il existe un et un seul polynôme de terme dominant X, orthogonal à P_0 :

c'est le polynôme $P_1(X) = X - \frac{\Phi(P_0,X)}{\|P_0\|^2}$

Calcul pratique : $c = -\dfrac{\Phi(P_0, X)}{\|P_0\|^2} = -\dfrac{\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt}{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt} = \dfrac{\frac{1}{2}[e^{-t^2}]_0^{+\infty}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{\pi}}$

$\boxed{P_1(X) = X - \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$

• Supposons l'existence et l'unicité d'une suite finie $(P_k(X))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, formée de polynômes P_k de terme dominant X^k et deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire Φ.

Et soit P_n un polynôme de monôme de plus haut degré X^n.

Les polynomes $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ étant de degrés deux à deux distincts (P_k est de degré k), forment une famille libre. C'est une famille libre de n éléments dans l'espace $\mathbb{R}_{n-1}(X)$, qui est de dimension n, c'en est donc une base.

Puisque $P_n = X^n + T$, $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, T se décompose dans la base $(P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})$;
il existe $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que : $P_n = X^n + a_{n-1}P_{n-1} + \cdots + a_2P_2 + a_1P_1 + a_0P_0$
alors $\Phi(P_n, P_0) = 0 \iff \Phi(X^n + a_{n-1}P_{n-1} + \cdots + a_2P_2 + a_1P_1 + a_0P_0\ ,\ P_0) = 0$

$$\iff \Phi(X^n,\ P_0) + a_{n-1}\underbrace{\Phi(P_{n-1},\ P_0)}_{=0} + \cdots + a_2\underbrace{\Phi(P_2,\ P_0)}_{=0} + a_1\underbrace{\Phi(P_1,\ P_0)}_{=0} + a_0\Phi(P_0\ ,\ P_0) = 0$$

$$\iff a_0 = -\frac{\Phi(P_0, X^n)}{\|P_0\|^2}$$

De manière générale, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$,

$$\Phi(P_n, P_k) = 0 \iff \Phi(X^n + a_{n-1}P_{n-1} + \cdots + a_2P_2 + a_1P_1 + a_0P_0\ ,\ P_k) = 0$$

$$\iff \Phi(X^n,\ P_k) + a_{n-1}\underbrace{\Phi(P_{n-1},\ P_k)}_{=0} + \cdots + a_k\underbrace{\Phi(P_k,\ P_k)}_{=\|P_k\|^2\neq 0} + \cdots + a_1\underbrace{\Phi(P_1,\ P_k)}_{=0} + a_0\underbrace{\Phi(P_0\ ,\ P_k)}_{=0} = 0$$

$$\iff a_k = -\frac{\Phi(P_k, X^n)}{\|P_k\|^2}$$

Ces calculs par équivalence montrent qu'il existe un et un seul polynôme $P_n(X)$, de monôme dominant X^n, et qui soit orthogonal à chacun des polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ précédemment définis.

On a aninsi établi par récurrence qu'il existe une et une seule famille $(P_n(X))_n$ de polynômes deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire Φ, et de monôme de plus haut degré X^n.

• Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$. Q se décompose sur la base $(P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$;
il existe $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que : $P_n = X^n + a_{n-1}P_{n-1} + \cdots + a_2P_2 + a_1P_1 + a_0P_0$

Alors $\boxed{\Phi(Q, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\underbrace{\Phi(P_k, P_n)}_{=0} = 0}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $r_1, r_2, \cdots, r_p$ les racines de P_n appartenant à $]0, +\infty[$, et d'ordres de multiplicité impairs.

Alors le polynôme $P_n(X)$ change de signe en ces points $r_1, r_2, \cdots, r_p$, et eux seulement.

Le polynôme $Q(X) = P_n(X)(X - r_1)(X - r_2), \cdots, (X - r_p)$ garde un signe constant sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto P_n(t).(t - r_1)(t - r_2), \cdots, (t - r_p)e^{-t^2}$ est continue, de signe constant, non identiquement nulle.
On en déduit que $\int_0^{+\infty} P_n(t).(t - r_1)(t - r_2), \cdots, (t - r_p)e^{-t^2} \neq 0$, c'est à dire que :

$$\Phi(P_n, (X - r_1)(X - r_2), \cdots, (X - r_p)) \neq 0,$$

ce qui montre que $(X - r_1)(X - r_2), \cdots, (X - r_p) \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc P_n possède au moins n racines d'odre impair dans l'ibntervalle $]0, +\infty[$. Or il est de degré n. $\boxed{\text{Il est donc scindé dans } \mathbb{R}[X]}$

• Notons $a_1, a_2, \cdots, a_p$ les racines du polynôme P_n qui appartiennent à $]0, +\infty[$, et qui sont d'ordre impair : $P_n(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_p)Q(X)$ où $Q(X)$ peut s'écrire sous la forme
$(X - b_1)^{m_1}(X - b_2)^{m_2}\cdots(X - b_q)^{m_q}(X - c_1)\cdots(X - c_r)T(X)$ où les b_j sont les racines de $P_n(X)$ d'ordre pairs qui appartiennent à $]0, +\infty[$, les c_j sont les racines de $P_n(X)$ en dehors de $]0, +\infty[$, et $T(X)$ un polynôme sans racine réelle.

Si $p < n$, alors $(X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_p) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et d'après la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} P_n(x)(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_p)dx = 0$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(x)(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_p)dx =$

$$\int_0^{+\infty} (x - b_1)^{m_1+1}(x - b_2)^{m_2+1}\cdots(x - b_q)^{m_q+1}(x - c_1)\cdots(x - c_r)T(x)dx$$

où la fonction $(x \mapsto (x - b_1)^{m_1+1}(x - b_2)^{m_2+1}\cdots(x - b_q)^{m_q+1}(x - c_1)\cdots(x - c_r)T(x))$ est de signe constant (puisque les exposants $m_i + 1$ sont pairs), continue, et non indentiquement nulle. Donc cette intégrale ne peut pas être nulle.

L'hypothèse $p < n$ aboutit à une absurdité. Donc $p \geqslant n$. Mais $P_n(X)$ ne peut avoir plus de racines que son dégré n. Donc $p = n$, ce qui montre que $\boxed{P_n(X) \text{ est scindé dans } \mathbb{R}_n[X]}$, que toutes ses racines sont réelle et dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

0.2.8 Centrale (classique)

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Montrer que A est une matrice de rotation si et seulement si il existe $h \in \left]0, \frac{4}{27}\right[$ tel que a, b et c soient les racines du polynômes $X^3 - X^2 + h$.

Exercice 2 : On considère une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

a) Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

b) Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe sur $]0,1[$.

SOLUTION **: Exercice 1 :** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation si et seulement si c'est une matrice orthogonale directe, si et seulement si $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ \det(A) = +1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = +1 \end{cases}$$

Or $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$

et $(ab + ac + bc)(a + b + c) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$

d'où, par différence,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (ab + ac + bc)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

A est une matrice de rotation si et seulement si :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (ab + ac + bc)(a + b + c) = +1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \\ a + b + c = +1 \end{cases}$$

La relation : $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$ montre que la première égalité est une conséquence des deux dernières.

d'où : A est une matrice de rotation si et seulement si : $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + ac + bc = 0 \end{cases}$

Considérons le polynôme $P(X) = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ac)X - abc$, dont les racines sont a, b et c.

A est une matrice de rotation si et seulement si a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 - abc$.

• Examinons à quelle(s) condition(s) un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + h$ admet trois racines réelle. Pour cela étudions sa fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			h				$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$h - \frac{4}{27}$		

Le polynôme P possède trois racines réelles si et seulement si : $h - \frac{4}{27} < 0 < h$

$$\iff \quad 0 < h < \frac{4}{27}$$

Exercice 2 : On considère une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

a) On suppose que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Supposons que f ne s'annule pas sur $]0,1[$: $\forall x \in]0,1[,\ f(x) \neq 0$.

Si f changeait de signe sur $]0,1[$, étant continue, elle s'annulerait selon le théorème des valeurs intermédiaires. Donc f garde un signe constant sur $]0,1[$.

Supposons que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) > 0$

Alors f serait une fonction positive, continue et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Il s'ensuivrait que $\int_0^1 f(t)dt > 0$, contrairement à l'hypothèse. En supposant que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) < 0$, on aboutirait de même à la conclusion $\int_0^1 f(t)dt < 0$.

Ona ainsi prouvé par l'absurde que si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, la fonction f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

b) On suppose que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Posons : $g(t) = f(t) - t$.

Alors g est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 (f(t) - t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 0$

D'après a), on peut affirme que g s'annule sur $]0,1[$: $\exists x \in]0,1[,\ g(x) = 0 f(x) - x$

Donc $f(x) = x$ et $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe sur }]0,1[}$.

0.2.9 CENTRALE - maths 1

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 2 : $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs, de limite infinie.

On pose : $\forall t > 0, f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n t}$

a) Montrer que la fonction f est définie, continue, et intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ en fonction de la suite (a_n)

b) Calculer cette intégrale lorsque :

- $(a_n) = (n+1)$
- $(a_n) = (2n+1)$

SOLUTION (E) est une équation différentielle scalaire du second ordre, linéaire, à coefficients constants.

• L'équation homogène associée est (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Elle a pour polynôme caractérisque $Q(X) = X^2 + 4X + 4 = (X+2)^2$, qui a pour racine double $r_0 = -2$.

Une base de l'espace vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_0) est constitué des deux fonctions $y_1 : x \mapsto e^{-2x}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{-2x}$

La solution générale de (E_0) est $x \mapsto y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu x \mapsto xe^{-2x}$ où λ et μ sont deux constantes quelconques.

• Appliquons la méthode de variation des constantes (méthode de Lagrange) pour rechercher une solution particulière de l'équation complète (E) :

Recherchons cette solution sous la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ où λ et μ sont deux **fonctions** de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, inconnues.

On impose de plus la condition $\lambda' y_1 + \mu' y_2 = \omega$

(pour éviter que λ'' et μ'' n'apparaissent dans le calcul de y'')

alors, $y' = \underbrace{\lambda' y_1 + \mu' y_2}_{=\omega} + \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2'$

$y'' = \lambda y_1'' + \mu y_2'' + \lambda' y_1' + \mu' y_2'$

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x)y_1''(x) + \mu(x)y_2''(x) + \lambda'(x)y_1'(x) + \mu'(x)y_2'(x)$$
$$+4(\lambda(x)y_1'(x) + \mu(x)y_2'(x)) + 4(\lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x)) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Compte tenu des relations $y_1''(x) + 4y_1'(x) + 4y_1(x) = 0$

et $y_2''(x) + 4y_2'(x) + 4y_2(x) = 0$, il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)y_1'(x) + \mu'(x)y_2'(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Les fonction λ' et μ' sont solutions du système : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0 \\ \lambda'(x)y_1'(x) + \mu'(x)y_2'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

Remarque pratique : ce n'est qu'à ce stade que l'on va remplacer effectivement $y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x)$ par leurs valeurs explicites. Jusqu'ici on a intérêt à effectuer les calculs sous forme abstraite comme ci-dessus.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ y_1(x) = e^{-2x},\ y_1'(x) = -2e^{-2x},\ y_2(x) = xe^{-2x},\ y_2'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

Le système s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)(1-2x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

qui donne, après résolution : $\mu'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\lambda'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$

d'où $\mu(x) = \text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et $\lambda(x) = -\sqrt{1+x^2}$

Une solution particulière de (E) est donc :

$x \mapsto g(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x) = -\sqrt{1+x^2}e^{-2x} + xe^{-2x}\text{Argsh}(x)$

et la solution générale de (E) est :

$\boxed{x \mapsto y(x) = -\sqrt{1+x^2}e^{-2x} + xe^{-2x}\text{Argsh}(x) + Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}}$ où A et B sont deux constantes quelconques.

Exercice 2 : $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs, de limite infinie.

a) Soit $t > 0$.

La suite $(e^{-a_n t})_{n\geqslant 0}$ est positive, décroissante (car (a_n) étant croissante, $\forall n,\ a_{n+1} \geqslant a_n,\ -a_{n+1}t \leqslant -a_n t$, et $e^{-a_{n+1}t} \leqslant e^{-a_n t}$)

Elle est de limite nulle car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \implies \lim\limits_{n\to+\infty} (-a_n t) = -\infty \implies \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-a_n t} = 0$

La suite alternée $((-1)^n e^{-a_n t})_{n\geqslant 0}$ vérifie donc le critère de Leibniz des séries alternées.

On sait qu'alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n e^{-a_n t}$ est convergente.

$\boxed{\text{La fonction } f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n t} \text{ est donc définie sur l'intervalle ouvert }]0,+\infty[}$.

Remarque : $f(0)$ n'est pas défini, car pour $t = 0$, le terme général de la suite $((-1)^n e^{-a_n t})_{n\geqslant 0} = ((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0.

• Soit $t_0 > 0$.

Pour tout $t \geqslant t_0$, notons $r_n(t) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k e^{-a_k t}$ le reste d'ordre n de la série convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n t}$

D'après le théorème de majoration du reste d'une série alternée qui vérifie le critère sus-mentionné,

$\forall n \in \mathbb{N}, |r_n(t)| \leqslant e^{-a_{n+1}t} \leqslant e^{-a_{n+1}t_0}$ (car $t \geqslant t_0 \implies -a_{n+1}t \leqslant -a_{n+1}t_0$)

Ce majorant étant indépendant de $t \in [t_0,+\infty[$, on peut écrire :

$\|r_n(\ )\|^{\infty}_{[t_0,+\infty[} = \sup\limits_{t\in[t_0,+\infty[} |r_n(t)| \leqslant e^{-a_{n+1}t_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n(\ )\|^{\infty}_{[t_0,+\infty[} = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n t}$ converge uniformément sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

Chaque fonction $t \mapsto (-1)^n e^{-a_n t}$ étant continue sur $[t_0,+\infty[$, la fonction somme, f, est continue sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$. ceci étant vrai pour tout $t_0 > 0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$.

• Notons : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,+\infty[,\ u_n(t) = (-1)^n e^{-a_n t}$

Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (et même sur $[0,+\infty[$), et :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} e^{-a_n t} dt = \left[-\frac{e^{-a_n t}}{a_n}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{a_n}$$

Par majoration du reste, $\forall t > 0, |f(t)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n t}\right| \leqslant |u_0(t)| = e^{-a_0 t}$

Or la fonction $t \to e^{-a_0 t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et par majoration, f l'est aussi.

Donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur l'intervalle }]0,+\infty[}$

Remarque : par contre rien ne permet d'affirmer que la série de terme général $\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt = \dfrac{1}{a_n}$ converge. On ne pourra donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

Revenons à l'écriture de la fonction f comme somme d'une somme partiel et du reste d'ordre n :

$$\forall t > 0, S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-a_k t} \quad \text{et} \quad r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k e^{-a_k t}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} (S_n(t) + r_n(t))dt = \int_0^{+\infty} S_n(t)dt + \int_0^{+\infty} r_n(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(t)dt + \int_0^{+\infty} r_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k} + \int_0^{+\infty} r_n(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k} + \int_0^{+\infty} r_n(t)dt$$

Par ailleurs, $\left|\int_0^{+\infty} r_n(t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |r_n(t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} |u_{n+1}(t)|dt = \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1}t}dt = \dfrac{1}{a_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En passant à la limite dans l'égalité précédente quand $n \to +\infty$, on obtient : $\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a_k}}$

b) • Lorsque $(a_n) = (n+1)$, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

(on sait que $\forall x \in [-1,1[, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$)

dans ce cas, $\forall t > 0, f(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)t} = e^{-t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (e^{-t})^k = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$

• Lorsque $(a_n) = (2n+1)$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

(on sait que $\forall x \in [-1,1], \text{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$)

0.2.10 CENTRALE :

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$

a) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0,1[$ tel que $P_n'(u_n) = 0$

b) Montrer que $\forall n > 0, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k-u_n} = 0$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION : a) $P_n(0) = P_n(1) = ... = P_n(n) = 0$

La fonction polynomiale P_n est C^∞ , en lui appliquant le théorème de Rolle, on montre l'existence d'une racine de $P_n'(X)$ dans chacun des $n-1$ intervalles $]0,1[,]1,2[,...,]n-1,n[$. P_n' étant de degré $n-1$, on a là toutes les racines de P_n' qui est scindé dans $\mathbf{R}[X]$. En particulier, P_n' admet une unique racine u_n dans $]0,1[$.

b) $P_n'(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (X-j) \right)$

d'où $\dfrac{P_n'(X)}{P_n(X)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{X-j}$ et en remplaçant l'indéterminée par u_n , $\dfrac{\overbrace{P_n'(u_n)}^{=0}}{\underbrace{P_n(u_n)}_{\neq 0}} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{u_n - j} = 0$

$0 < u_n < 1$ donc pour tout $k \in \{0,1,...,n\}, k-1 < k-u_n < k$ et $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-u_n}$

$0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k-u_n} = -\frac{1}{u_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-u_n} > -\frac{1}{u_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

donc $\dfrac{1}{u_n} > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et puisque la série $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

• $\dfrac{1}{u_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-u_n}$ et l'encadrement $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-u_n}$ entraine :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-u_n} < \frac{1}{1-u_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

l'encadrement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{1-u_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ entraine alors que $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

et finalement , $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}}$

0.2.11 Centrale :

Exercice 1 : On cnsidère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m & -m+1 & m \\ -m-1 & -m & m+1 \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A est elle diagonalisable ?

Caractériser alors l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A_m

Exercice 2 : On note a_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $2^{(2^n)}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

SOLUTION : $\chi_A(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

Donc $\text{Sp}(A) = \{0,1\}$, 0 est valeur propre simple, 1 est valeur propre double.

La relation : $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant ordre(\lambda)$ entraîne que $\dim(E_0(A)) = 1$ et que $1 \leqslant \dim(E_1(A)) \leqslant ordre(1) = 2$.

A sera diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2$.

Or $\dim(E_1(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A - 1.I_3)$ où $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -m & -m & m \\ -m-1 & -m & m \end{pmatrix}$

- si $m = 0$, $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (la première colonne n'est pas nulle, les deux suivantes le sont)

Donc $\dim(E_1(A)) = 3 - 1 = 2$, la matrice A est diagonalisable, de valeurs propres 0 et 1.

L'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A_0 est la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}([0,1,0],[0,0,1])$ (d'équation $x = 0$), parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $[1,0,1]$.

- si $m \neq 0$, $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -m & -m & m \\ -m-1 & -m & m \end{pmatrix}$ est de rang 2 car les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. le sous espace propre $E_1(A)$ n'est que de dimension 1, et A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 : Si x est un nombre entier à 3 chiffres, alors $100 = 10^2 \leqslant x \leqslant 999 = 10^3 - 1$

Plus généralement, si x possède a chiffres, $10^{a-1} \leqslant x < 10^a$

Si on note a_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $2^{(2^n)}$, alors $10^{a_n - 1} \leqslant 2^{(2^n)} < 10^{a_n}$

En prenant le logarithme, $(a_n - 1)\ln(10) \leqslant 2^n \ln(2) < a_n \ln(10)$

$$\Longrightarrow a_n - 1 \leqslant \frac{2^n \ln(2)}{\ln(10)} < a_n$$

$$\Longrightarrow \frac{2^n \ln(2)}{\ln(10)} < a_n \leqslant \frac{2^n \ln(2)}{\ln(10)} + 1$$

La série entière $\sum \frac{2^n \ln(2)}{\ln(10)} x^n = \frac{\ln(2)}{\ln(10)} \sum (2x)^n$ est une série géométrique de raison $2x$, qui converge si et seulement $|2x| < 1$, $\Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$.

La série entière $\sum \left(\frac{2^n \ln(2)}{\ln(10)} + 1\right) x^n$ est la somme de la série entière précédente, de rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$, et de la série '$\sum x^n$ de rayon 1. Son rayon de convergence est donc lui aussi égal à $\frac{1}{2}$.

L'encadrement obtenu permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\text{la série entière } \sum a_n z^n \text{ a un rayon de convergence égal à } \tfrac{1}{2}}.$$

0.2.12 Centrale :

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n(u_n + u_{n-1}) \end{cases}$

a) Calculer u_2, u_3. Calculer u_{10} avec Python.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \frac{n!}{3} \leqslant u_n \leqslant n!$

En déduire le rayon de convergence de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$

c) Montrer que la fonction S est solution d'une équation linéaire du premier ordre sur un intervalle que l'on précisera.

d) Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. Calculer u_n en fonction de n.

Vérifier le résultat trouvé avec Python pour u_{10} .

SOLUTION : a)

```
u=[0 for i in range(11)]
u[0]=1
u[1]=0
for k in range(1,11):
    u[k+1]=k*(u[k]+u[k-1])
print(u[10])
```

$\boxed{u_{10} = 1334961}$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2,\ \frac{n!}{3} \leqslant u_n \leqslant n!$

On vérifie grâce au calcul des premiers termes de la suite que cet encadrement est vérifié pour $n = 2$ et $n = 3$.

Supposons qu'il soit vérifié jusqu'au rang n : $\forall k \leqslant n,\ \frac{k!}{3} \leqslant u_k \leqslant k!$:

alors $u_{n+1} = n(u_n + u_{n-1}) \leqslant n(n! + (n-1)!) = n(n.(n-1)! + (n-1)!) = n.(n-1)!\,.\,(n+1) = (n+1)!$

et $u_{n+1} = n(u_n + u_{n-1}) \geqslant n\left(\frac{n!}{3} + \frac{(n-1)!}{3}\right) = n(n-1)!\,.\,\frac{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3}$

L'encadrement est héréditaire.

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \frac{n!}{3} \leqslant u_n \leqslant n!}$

• alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{3}|x^n| \leqslant \frac{|u_n x^n|}{n!} \leqslant |x^n|$

La série $\sum |x^n|$ converge pour tout $|x| < 1$, par majoration, il en va de même pour la série $\sum |u_n x^n|$. Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1.

La série $\sum \frac{1}{3}|x^n|$ diverge pour tout $|x| > 1$, par minoration, il en va de même pour la série $\sum |u_n x^n|$. Son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1.

$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{u_n}{n!}x^n \text{ a pour rayon de convergence 1}}$

c) $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n = u_0 + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(u_n + u_{n-1})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

On sait qu'on peut déiver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(u_n + u_{n-1})}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + u_{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n \end{aligned}$$

$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = xS'(x) + xS(x)$

$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est solution sur }]-1,1[\text{ de l'équation } (E) :\ (1-x)y' - xy = 0}$

d) (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre liéaire, homogène .

La solution générale de (E) sur l'intervalle $]-1,1[$ est :

$$x \mapsto y(x) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} \tfrac{t}{1-t}dt\right) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} \tfrac{t-1+1}{1-t}dt\right) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} (-1 - \tfrac{1}{t-1})dt\right)$$

$$y(x) = \lambda \exp\left(-x - \ln|x-1|\right) = \lambda\frac{e^{-x}}{1-x}$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \lambda\frac{e^{-x}}{1-x}$

En pariculier, au point $x = 0$: $S(0) = \lambda = u_0 = 1$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$

• On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

et $\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série $\sum c_n x^n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Puisque les deux séries convergent absolument sur $]-1,1[$,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{e^{-x}}{1-x} = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n\ ,$$

et par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n!\ c_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)}$$

0.2.13 Centrale

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y'^{\,2} + y\ .\ y'^{\,3} = 0$$

a) Rechercher les solutions avec MAPLE.

Donner des solutions simples de (E)

b) Soit f une solution maximale de (E) définie sur un intervalle I, non constante.

Montrer que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

En déduire que f est un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de I sur un intervalle J, et que f^{-1} est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

SOLUTION a) **restart;**

dsolve(diff(y(x),x,x)-(diff(y(x),x))^2+y(x)*(diff(y(x),x))^3=0,y(x));

$\frac{1}{2}y(x)^2 - y(x) - \exp(-y(x))C_1 - x - C_2 = 0, \qquad y(x) = C_2$

• Les fonctions constantes sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ sont des solutions de (E) sur cet intervalle. (elles vérifient $y' = y'' = 0$ sur I)

b) Soit f une solution maximale **non constante** de (E) définie sur un intervalle I. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et f' n'est pas la fonction nulle (sinon f serait constante).

Il existe $c \in I$ tel que $f'(c) \neq 0$. Par continuité de f' au point c, il existe un intervalle $]c-\eta, c+\eta[$ de I sur lequel f' ne s'annule pas. (il suffit de revenir à la définition de la continuité de f' en prenant $\varepsilon = \frac{|f'(c)|}{2}$:

Supposons par exemple $f'(c) >$, et prenons $\varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$.

Pour cet ε, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-c| < \eta \implies |f'(x) - f'(c)| < \varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$

$\implies \forall x \in]c-\eta, c+\eta[,\ -\frac{f'(c)}{2} < f'(x) - f'(c) < \varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$

$\implies \forall x \in]c-\eta, c+\eta[,\ 0 < f'(c) - \frac{f'(c)}{2} = \frac{f'(c)}{2} < f'(x)$)

• Soit I' le plus grand intervalle contenant a et sur lequel la fonction f' ne s'annule pas. Un tel intervalle existe: il suffit de prendre l'union des intervalles contenant a et sur lesquels la fonction f' ne s'annule pas. (de tels intervalles existent, par exemple $]c-\eta, c+\eta[$).

I' est un sous intervalle de I sur lequel f est solution de (E):

$\forall x \in I', f''(x) - (f'(x))^2 + f(x).(f'(x))^3 = 0$

$\implies \forall x \in I', \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2} - 1 + f(x).(f'(x)) = 0$ (en divisant par $(f'(x))^2$ qui n'est jamais nul)

$\implies \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I', -\dfrac{1}{f'(x)} - x + \dfrac{1}{2}.f^2(x) = k$

• Montrons que $I' = I$.

Si $I' \subsetneq I$, l'une des bornes de I' (finie ou infinie) est différente de l'une des bornes de I. $I =][a,b][,\ I' =][a',b'][$

Supposons par exemple $b' < b$. Alors b est un réel (borne finie), et $\forall x \in I', \dfrac{1}{f'(x)} + x - \dfrac{1}{2}.f^2(x) = -k$

Puisque f est $\mathcal{C}^2$ sur I, elle est continue au point b' et $\lim\limits_{x \to b'^-} \dfrac{1}{f'(x)} = b' + \dfrac{1}{2}.f^2(b') - k$, ce qui montre que $f'(b') = \lim\limits_{x \to b'^-} f'(x) \neq 0$

Mais si $f'(b') \neq 0$, le raisonnement fait plus haut pour le point c montre que f' ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]b'-\mu, b'+\mu[$, ce qui est en contradiction avec la définition de $I' =][a',b'][$ comme étant le plus grand intervalle contenant c et sur lequel la fonction f' ne s'annule pas.

Donc $b' = b$. On démontre de même que $a' = a$. Donc $I' = I$. Autrement dit, si f est une solution maximale de (E) définie sur un intervalle I, f' ne s'annule pas sur cet intervalle I.

• La fonction f' est continue sur I, et ne s'annule pas. Elle garde donc un signe constant. f est donc strictmeent monotone, et injective sur l'intervalle I. Etant continue, l'image $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est donc une bijection de I sur J.

Puisque f est $\mathcal{C}^1$, et que f' ne s'annule pas, la fonction réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en tout point $t \in J$, et $\forall t \in J,\ g'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \dfrac{1}{f'(g(t))}$

Cette relation montre que g' est $\mathcal{C}^1$ sur J, et que g est de classe $\mathcal{C}^2$

Finalement, $\boxed{f \text{ est un est } \mathcal{C}^2 \text{ difféomorphisme de } I \text{ sur } J}$

• Soit (f, I) une solution maximale de (E) et $(g$ son application réciproque.

Soit t un élément quelconque de J et $x = g(t) = f^{-1}(t)$

On sait que $\dfrac{1}{f'(x)} + x - \dfrac{1}{2}.f^2(x) = k$ (k constante réelle)

donc $g'(t) + g(t) - \dfrac{1}{2}.t^2 = k$ (puisque $f(x) = t,\ x = g(t)$ et $g'(t) = \dfrac{1}{f'(x)}$)

$$\boxed{g \text{ est solution d'une équation différentielle de la forme } (F) : z' + z = \frac{t^2}{2} + k}$$

• La solution générale de l'équation homogène $(F_0) : z' + z = 0$ est : $t \mapsto \lambda e^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}$

On recherche une solution particulière de l'équation complète (E)

- soit de la forme $z(t) = at^2 + bt + c$ où a, b, c sont des coefficiants réels à déterminer :

$$z'(t)+z(t)=at^2+(2a+b)t+b+c=\frac{t^2}{2}+k$$
$$\iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ 2a+b=0 \\ b+c=k \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=k+1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est : } t\mapsto \lambda e^{-t}+\frac{t^2}{2}-t+k+1,\ \lambda\in\mathbb{R}}$

- on peut aussi appliquer la méthode de variation de la constante
- on peut aussi demander à MAPLE de résoudre cette équation très simple :

restart; dsolve({diff(z(t),t)+z(t) = t*t/2 +k},{z(t)});

$$z(t)=\frac{1}{2}t^2-t+1+k+C_1e^{-t}$$

0.2.14 CENTRALE :

On considère les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

$u^2=v^2=Id_{\mathbb{C}^n}$ et $u_ov=-v_ou$.

Montrer qu'il en existe une infinité si $n=4$, et aucun si $n=3$

SOLUTION Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

$u^2=v^2=Id_{\mathbb{C}^n}$ et $u_ov=-v_ou$

u et v sont des projecteurs de $\mathbb{C}_n$. Notons $E_1=\ker(u-Id_{\mathbb{C}^n})$ et $E_2=\ker(u+Id_{\mathbb{C}^n})$, de sorte que u est la symétrie par rapport au sous espace E_1, parallèlement au sous espace E_2.

$\forall x\in E_1, u(x)=x \implies u(v(x))=-v(u(x))=-v(x)$ (car $u_ov=-v_ou$)

$\implies v(x)\in\ker(u+Id_{\mathbb{C}^n})=E_2$

Ceci montre que $v(E_1)\subset E_2$, et puisque v est bijectif (toute symétrie est bijective, et est sa propre inverse), $\dim(v(E_1))=\dim(E_1)\leqslant\dim(E_2)$.

De manière analogue, $\forall x\in E_2, u(x)=-x \implies u(v(x))=-v(u(x))=v(x)$

$\implies v(x)\in\ker(u-Id_{\mathbb{C}^n})=E_1$

Ceci montre que $v(E_2)\subset E_1$, et puisque v est bijectif, $\dim(v(E_2))=\dim(E_2)\leqslant\dim(E_1)$.

Par double inégalité, on a donc $\dim(E_2)=\dim(E_1)$.

Mais par ailleurs, puisque $E_1\oplus E_2=\mathbb{C}^n$, $\dim(E_1)+\dim(E_2)=2\dim(E_1)=n$

- Si $n=3$, l'égalité $2\dim(E_1)=3$ est impossible car $2\dim(E_1)$ est un entier pair.

$\boxed{\text{Si } n=3, \text{ il n'existe pas de couple } (u,v) \text{ d'endomorphismes de } \mathbb{C}^n \text{ vérifiant les conditions étudiées}}$.

- Si $n=4$, poursuivons l'analyse : alors $\dim(E_2)=\dim(E_1)=\frac{4}{2}=2$

L'inclusion $v(E_1)\subset E_2$ et l'égalité des dimensions, $\dim(v(E_1))=\dim(E_1)=2=\dim(E_2)$ entraîne que $v(E_1)=E_2$.

Par unraisonnement analogue, $v(E_2)=E_1$.

Soient $\mathscr{B}_1=(e_1,e_2)$ une base de E_1 et $\mathscr{B}_2=(e_3,e_4)$ une base de E_2. $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ est alors une base de $\mathbb{C}^4$ puisque $E_1\oplus E_2=\mathbb{C}^4$.

Puisque u est la symétrie par rapport au sous espace E_1, parallèlement au sous espace E_2, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est $U=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right)$, et puisque $v(E_1)=E_2$ et $v(E_2)=E_1$, la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $V=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)$ où A et $B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Alors $U.V=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline -A & O_2 \end{array}\right)$

et $V.U=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & -B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)$

Cela n'apporte pas de condition supplémentaire puisque l'égalité $U.V=-V.U$ est vérifiée.

Par ailleurs, $V^2=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} O_2 & B \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B.A & 0 \\ \hline 0 & A.B \end{array}\right)=I_4 \implies A.B=B.A=I_2$

Donc A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre, et $V=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)$

- Réciproquement, si $U=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right)$ et $V=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)$ où $A\in GL_2(\mathbb{C})$, on vérifie immédiatement que:

$U^2=I_4,\quad V^2=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)=I_4,$

$U.V=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline -A & O_2 \end{array}\right)$

$U.V=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} O_2 & -A^{-1} \\ \hline A & O_2 \end{array}\right)=-V.U$

Les endomorphismes u et v qui ont pour matrices respectivement U et V dans une base de $\mathbb{C}^4$ vérifient donc les conditions étudiées.

A pouvant être n'importe quelle matrice inversible de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on obtient bien une infinité de couples (u, v) solutions.

0.2.15 Centrale avec Python (transposé de MAPLE)

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $\forall n \geq 3, \quad 2na_n = 2na_{n-1} - a_{n-3}$

a) Calculer les 10 premiers termes de la suite avec Python.

Etudier avec Python le comportement de la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ et conjecturer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

b) Soit $f(x)$ la somme de cette série. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$\forall x \in]-R, R[, \ (1-x)f'(x) = P(x)f(x)$ et calculer $f(x)$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ et calculer R.

SOLUTION a)

```
a=[0 for i in range(11)]
u[0],u[1],u[2]=1,1,1
for k in range(3,11):
    u[k]=u[k-1]-u[k-3]/(2*k)
print(u[10])
```

On trouve en particulier $\boxed{u_{10} \simeq 0.3959198633156967}$

```
for k in range(3,11):
    print(u[k]/u[k-1])
```

Ce calcul laisse présager que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et donc que le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1} = 1$

b) $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$

$$2f'(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \ = \ 2a_1 + 4a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty}(2na_{n-1} - a_{n-3})x^{n-1}$$

$$2f'(x) = 2 + 4x + 2x\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + 2\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-1}$$

$$2f'(x) = 2 + 4x + 2x(f'(x) - a_1) + 2(f(x) - a_0 - a_1 x) - x^2 f(x)$$

$$2f'(x) = 2 + 4x + 2xf'(x) - 2x + 2f(x) - 2 - 2x - x^2 f(x)$$

donc $(2-2x)f'(x) = (2-x^2)f(x)$

$\boxed{f \text{ est solution sur }]-R, R[\text{ de l'équation différentielle : } (2-2x)y' = (2-x^2)y}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2}{2(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)-1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\ln|f(x)| = \frac{x^2+2x}{4} - \frac{1}{2}\ln|x-1| + k$$

Finalement $f(x) = \lambda \dfrac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}$, $\quad \lambda$ constante réelle.

$f(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\boxed{\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \dfrac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}}$

c) Soit R_n la relation : $\forall k \in \{0, .., n\}, \ 0 \leq a_k$ et $1 - \frac{1}{k} \leq \frac{a_k}{a_{k-1}} \leq 1$

On vérifie facilement que pour $n = 1$ et $n = 2$, R_n est vraie.

Supposons R_n vraie : pour $k \in \{1, .., n\}, \ 0 \leq a_k$ et $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \leq \frac{a_k}{a_{k-1}} \leq 1$

pour $k \in \{1, .., n\}, \ 0 \leq a_k$ et $(k-1)a_{k-1} \leq ka_k$

alors $(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}na_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)} \geq \frac{1}{n}(n-2)a_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$$

(car $na_n \geq (n-1)a_{n-1} \geq (n-2)a_{n-2}$)

$a_{n+1} \geq \underbrace{\dfrac{2n^2-3n-4}{2n(n+1)}}_{\geq 0 \text{ si } n\geq 3} a_{n-2} \geq 0$

par ailleurs, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)} \leq a_n$ donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$,

enfin, $(n+1)a_{n+1} = na_n + a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2} \geq na_n + \dfrac{1}{n}(n-2)a_{n-2} - \dfrac{a_{n-2}}{2}$

$$(n+1)a_{n+1} \geq na_n + \frac{n-4}{2n}a_{n-2} \geq na_n \text{ si } n\geq 4$$

On a ainsi montré que $a_{n+1} \geq 0$ et $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ c'est à dire la propriété R_{n+1}

Ceci établit par récurrence que pour tout n , R_n est vraie.

L'encadrement $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et que le rayon de convergence de la série entière est bien $R = 1$

0.2.16 Centrale :

Exercice 1 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A^3 \\ \hline A^{-1} & A \end{array}\right)$ (définie par blocs)

A quelle condition sur A, B est elle diagonalisable ?

(On pourra commencer par étudier le cas $n = 1$)

Exercice 2 : On considère $n+1$ réels $x_0 < x_1 < ... < x_n$.

Montrer, après avoir justifié l'existence des intégrales considérées, qu'il exsite $n+1$ réels $a_0, a_1, ..;, a_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x_k)$$

SOLUTION : **Exercice 1 :** Lorsque $n = 1$, $B = \begin{pmatrix} a & a^3 \\ 1/a & a \end{pmatrix}$ où a est un réel non nul (inversible).

$\text{Sp}(B) = \{0, 2a\}$. (calcul sans difficulté)

$B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

$E_0(A) = Vect([-a^2, 1])$, $E_{2a}(A) = Vect([a^2, 1])$

Soient $P = \begin{pmatrix} -a^2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$

Alors $B = P.\Delta.P^{-1}$ où $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1/a^2 & 1 \\ 1/a^2 & 1 \end{pmatrix}$

L'égalité $B = \begin{pmatrix} a & a^3 \\ 1/a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1/a^2 & 1 \\ 1/a^2 & 1 \end{pmatrix}$ peut laisser espérer que par un calcul par blocs, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on aura :

$$\begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^2 & A^2 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \times \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -A^{-2} & I_n \\ A^{-2} & I_n \end{pmatrix}$$

On effectue le produit $\begin{pmatrix} -A^2 & A^2 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A^{-2} & I_n \\ A^{-2} & I_n \end{pmatrix}$ et on trouve effectivement $\begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix}$

Le calcul du produit $\begin{pmatrix} -A^2 & A^2 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A^{-2} & I_n \\ A^{-2} & I_n \end{pmatrix}$, qui donne $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$ montre que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

En notant $Q = \begin{pmatrix} -A^2 & A^2 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, l'égalité obtenue s'écrit : $B = \begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix} = Q.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}.Q^{-1}$

• Il s'en suit alors que $B^2 = Q.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (2A)^2 \end{pmatrix}.Q^{-1}$, plus généralement, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $B^k = Q.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (2A)^k \end{pmatrix}.Q^{-1}$, et par combinaison linéaire de ces égalités, que pour tout polynôme $\Pi(X) \in \mathbb{R}[X]$,

$$\Pi(B) = Q.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Pi(2A) \end{pmatrix}.Q^{-1}$$

• Dès lors, la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur $\Lambda(X)$, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et à racines simples. En posant $L(X) = \Lambda\left(\frac{1}{2}X\right)$, on obtient $L(2A) = \Lambda(A) = 0$,

et $L(B) = Q.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L(2A) \end{pmatrix}.Q^{-1} = 0$

Le polynôme $L(X)$ étant lui aussi comme $\Lambda(X)$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples, la matrice B est diagonalisable.

Calcul analogue dans le sens inverse en partant de l'hypothèse que B est diagonalisable.

On a finalement montré que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 2 :

Centrale 2015 - Sujets-0 PSI issus du site

https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/MultiY/C2015

0.2.17 Centrale 2015 sujet 1

$n \geqslant 3$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ A et B sont deux vecteurs colonnes non colinéaires dans E.

$M = A.B^T + B.A^T$

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(M)$ en fonction de A et B.
3. Déterminer le spectre de M et décrire les sous-espaces propres associés.

SOLUTION : 1- M est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2- $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$A.B^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_1A & b_2A & \cdots & b_nA \end{array} \right)$$

(écriture colonne par colonne)

Par un calcul analogue, $B.A^T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1B & a_2B & \cdots & a_nB \end{array} \right)$

et $M = A.B^T + B.A^T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_1A + a_1B & b_2A + a_2B & \cdots & b_nA + a_nB \end{array} \right)$

soit $M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} \right)$ (écriture colonne par colonne)

où chaque colonne $C_i = b_iA + a_iB$

Ceci montre que : $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \cdots, C_n) \subset \mathrm{Vect}(A, B)$, et $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \cdots, C_n) \leqslant 2$.

a) Si $\mathrm{rg}(A, B) = 2$ (c'est à dire si (A, B) est libre dans $\mathbb{R}^n$), alors

$$\mathrm{rg}(A, B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$ (une matrice a même rang que sa transposée)

$$\mathrm{rg}(A, B) = 2 = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \right)$$

Ce système de n vecteurs étant de rang 2, il existe deux vecteurs, $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$ qui forment un système libre.

Alors le système de vecteurs $(C_i, C_j) = (b_iA + a_iB \ , \ b_jA + a_jB)$ de $\mathbb{R}^n$ a pour déterminant :

$\delta = \begin{vmatrix} b_i & b_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix} = a_jb_i - a_ib_j$ dans la base (A, B) du plan $\mathrm{Vect}(A, B)$.

Or ce déterminant est celui du système $\left(\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right)$, qui est donc non nul.

Le système (C_i, C_j) est donc libre, et le rang du système $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, c'est à dire le rang de la matrice M est égal à 2.

b) Si $\mathrm{rg}(A, B) = 1$ (supposons par exemple que $A \neq 0$ et $B = \lambda.A$, $\lambda \in \mathbb{R}$),

alors $C_i = b_iA + a_iB = \lambda a_iA + a_i\lambda A = 2a_i\lambda A$

$(C_1, C_2, \cdots, C_n) = (2\lambda a_1A, 2\lambda a_2A, \cdots, 2\lambda a_nA)$

Si $\lambda = 0$, alors $B = 0$ et $M = 0$. Le rang de M est nul.

Si $\lambda \neq 0$, l'un des coefficients a_i est non nul puisque $A \neq 0$, et la liste $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ne contient que des vecteurs colinéaires à A, dont l'un au moins n'est pas nul. dans ce cas, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \cdots, C_n) = 1$.

3- On supose que A et B sont deux vecteurs colonnes non colinéaires dans $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in E$:

$M.V = \lambda.V \iff (A.B^T + B.A^T).V = \lambda.V \iff (A.B^T).V + (B.A^T).V = \lambda.V$

$\iff A.(B^T.V) + B.(A^T.V) = \lambda.V$ (par associativité du produit matriciel)

Or $B^T.V$ et $A^T.V$ sont deux matrices 1 - 1 qui se comportent comme des scalaires :

d'où : $M.V = \lambda.V \iff \underbrace{(B^T.V)}_{scalaire}.A + \underbrace{(A^T.V)}_{scalaire}.B = \lambda.V$

• Si $\lambda = 0$, $M.V = \lambda.V = 0 \iff (B^T.V).A + (A^T.V).B = 0$

$$\iff \begin{cases} B^T.V = 0 \\ A^T.V = 0 \end{cases}$$ (car (A, B) est supposé libre dans E)

$$\iff \begin{cases} b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \end{cases} \qquad (\mathscr{S})$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Le système $(\mathscr{S})$ est de rang 2, puisque les vecteurs A et B forment un système libre.

$\boxed{O \text{ est donc valeur propre de } M}$ et le sous espace propre associé est le sous espace $G = H_1 \cap H_2$ où H_1 et H_2 sont les hyperplans de E d'équations respectives : $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ et $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$

C'est un sous espace de dimension $n-2$ (dans le système $(\mathscr{S})$, $\dim(G) = n-$ rang$(\mathscr{S}) = n-2$

- Si $\lambda \neq 0$, $M.V = \lambda.V \iff (B^T.V).A + (A^T.V).B = \lambda.V$

puisque $\lambda \neq 0$, on peut diviser cette égalité par λ, et V est de la forme :

$V = \frac{B^T.V}{\lambda}.A + \frac{A^T.V}{\lambda}.B = \alpha.A + \beta.B$

En reportant dans l'égalité précédente,

$$M.V = \lambda.V \iff B^T.(\alpha.A+\beta.B).A + A^T.(\alpha.A+\beta.B).B = \lambda.(\alpha.A+\beta.B)$$
$$\iff \underbrace{(\alpha.B^T.A + \beta.B^T.B - \lambda.\alpha)}_{scalaire}.A + \underbrace{(\alpha.A^T.A + \beta.A^T.B - \lambda.\beta)}_{scalaire}.B = 0$$
$$\iff \begin{cases} \alpha.B^T.A + \beta.B^T.B - \lambda.\alpha = 0 \\ \alpha.A^T.A + \beta.A^T.B - \lambda.\beta = 0 \end{cases} \quad \text{(car } (A,B) \text{ est un système libre)}$$
$$\iff \begin{cases} (B^T.A - \lambda)\alpha + B^T.B.\beta = 0 \\ A^T.A.\alpha + (A^T.B - \lambda).\beta = 0 \end{cases} \quad (\mathscr{T})$$

On est en présence d'un système linéaire $(\mathscr{T})$ de deux équations aux deux inconnues, α et β .

Son déterminant est : $\delta = \begin{vmatrix} B^T.A - \lambda & B^T.B \\ A^T.A & A^T.B - \lambda \end{vmatrix}$

$$\delta = (B^T.A - \lambda)(A^T.B - \lambda) - B^T.B.A^T.A$$
$$= \lambda^2 - (A^T.B + B^T.A)\lambda - A^T.A.B^T.B + B^T.A.A^T.B$$

Le discriminant de δ est $\gamma = (A^T.B + B^T.A)^2 - 4(B^T.A.A^T.B - A^T.A.B^T.B)$

$$\gamma = A^T.B.A^T.B + B^T.A.B^T.A + \underbrace{2A^T.B.B^T.A - 4B^T.A.A^T.B}_{=-2A^T.B.B^T.A} + 4A^T.A.B^T.B$$
$$\gamma = A^T.B.A^T.B + B^T.A.B^T.A - 2A^T.B.B^T.A + 4A^T.A.B^T.B$$
$$= (A^T.B - B^T.A)^2 + 4A^T.A.B^T.B$$
$$= (A^T.B - B^T.A)^2 + 4\|A\|^2.\|B\|^2 > 0$$

Le trinôme $\delta = \lambda^2 - (A^T.B + B^T.A)\lambda - A^T.A.B^T.B + B^T.A.A^T.B$ a donc deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 (puisque son discrinant est > 0)

Si $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$, le système $(\mathscr{T})$ a un déterminant non nul. C'est un système de Cramer qui a par conséquent une solution unique. Or c'est un système homogène, sa solution unique est donc le couple $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Donc il n'existe pas de vecteur $V = \alpha.A + \beta.B$ non nul tel que $M.V = \lambda.V$. λ n'est donc pas valeur propre de M.

Si λ est l'une des deux racines λ_1 ou λ_2, $\delta = 0$, le système $(\mathscr{T})$ n'est pas de Cramer, il est de rang 1 seulement (les deux équations sont proportionnelles). Le système est compatible (puisqu'il est homogène).

Donc il existe un couple $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $V = \alpha.A + \beta.B$ soit solution de l'équation $M.V = \lambda.V$.

$\boxed{\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont valeurs propres de } M}$. Leurs sous espaces propres associés sont dans les deux cas des droites.

0.2.18 Centrale 2015 sujet 2

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynome non constant. On note Ω_P l'ensemble des complexes c tels que le polynome $P(X) + c$ est scindé a racines simples sur $\mathbb{C}$

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} - \Omega_P$ est fini.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note Θ_p l'ensemble des réels r tels que le polynome $P(X) + r$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que Θ_P est un intervalle non vide et ouvert dans $\mathbb{R}$.

b. Determiner les $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que Θ_P soit non borné.

SOLUTION : 1- Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Notons m son degré.

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, $P + c$ est toujours scindé dans $\mathbb{C}[X]$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'appartienne pas à Ω_P est qu'il possède une racine au moins double. Or une racine x_i de $P(X)$ est (au moins) double si et seulement si c'est une racine commune à $P(X)$ et à son polynôme dérivé $P'(X)$.

Notons $x_1, x_2, \cdots, x_q$, $1 \leqslant q \leqslant m-1$ les racines de $P'(X)$;

$$c \in \mathbb{C} - \Omega_P \iff \begin{cases} P(x_1) + c = 0 \\ \quad ou \\ P(x_2) + c = 0 \\ \quad \vdots \; ou \\ P(x_q) + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -P(x_1) \\ \quad ou \\ c = -P(x_2) \\ \quad \vdots \; ou \\ c = -P(x_q) \end{cases}$$

Donc $\boxed{\mathbb{C} - \Omega_P = \{-P(x_1), -P(x_2), \cdots, -P(x_q)\}}$. $\boxed{\text{C'est un ensemble fini}}$.

2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note $\Theta_p = \{r \in \mathbb{R}, \quad P(X) + r$ est scindé à racines simples sur$\mathbb{R}\}$.

• Montrons d'abord que si un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, $P'(X)$ l'est aussi.

En effet, si on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ les racines du polynôme scindé $P(X)$, $(m = d^\circ(P))$ d'après le théorème de Rolle, la fonction P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, elle sannule donc en un point $t_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

$P'(X)$ a donc un zero dans chacun des intervalles disjoints $]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, \cdots,]x_{m-1}, x_m[$. Cela fait $m-1$ récines réelles distinctes pour le polynôme $P'(X)$ qui est de degré $m-1$.

Il est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples.

Plaçons nous dans le cas où $P(X)$ est un polynôme de degré pair.

• Soient a et b deux éléments de Θ_P : Les polynômes $P(X) + a$ et $P(X) + b$ sont scindés à racines simples. Ils ont le même polynôme dérivé $P'(X)$, qui est donc scindé à racines simples d'après la remarque préliminaire qui vient d'être faite.

Notons $t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1}$ ses racines. Sur chacun des intervalles $]-\infty, t_1[,]t_1, t_2[, \cdots]t_{m-2}, t_{m-1}[,]t_{m-1}, +\infty[$, P' ne s'annule pas, donc garde un signe constant, et $x \mapsto P(x) + a$ est strictement monotone donc injective. Elle ne peut s'annuler plus d'une fois sur chacun de ces intervalles. Or il y a en tout m intervalles de ce type, et par hypothèse $P(X) + a$ possède m racines distinctes dans $\mathbb{R}$. C'est donc qu'elle s'annule exactement une fois sur chacun des intervalles. On notera x_1 la racine de $P(X) + a$ sur l'intervalle $]-\infty, t_1[$, x_2 la racine sur l'intervalle $]t_1, t_2[$, . . . , et x_m la racine sur l'intervalle $]t_{m-1}, +\infty[$.

Dressons le tableau de variation correspondant à ce cas où m est pair :

x	$-\infty$	x_1	t_1	x_2	t_2	x_3	t_3	$\cdots$	x_{m-1}	t_{m-1}	x_m	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$	$-$	0	$+$	
			$P(t_1)+a$				$P(t_3)+a$					$+\infty$
$P(x)+a$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\cdots$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$P(t_2)+a$					$P(t_{m-1})+a$		
			$P(t_1)+b$				$P(t_3)+b$					$+\infty$
$P(x)+b$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\cdots$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$P(t_2)+b$					$P(t_{m-1})+b$		

A la lecture de ce tableau et compte tenu de l'existence des racines $x_1 < x_2, \cdots < x_m$, on peut affirmer que :

$P(t_1) + a > 0,\ P(t_2) + a < 0,\ P(t_3) + a > 0,\ \cdots, P(t_{m-2}) + a > 0,\ P(t_{m-1}) + a < 0$

Le polynôme $P(X) + b$ a le même polynôme dérivé que $P(X) + b$, et a donc les mêmes variations. Puisqu'il est lui aussi scindé à racines simples, le même raisonnement conduit aux mêmes inégalités :

$P(t_1) + b > 0,\ P(t_2) + b < 0,\ P(t_3) + b > 0,\ \cdots, P(t_{m-2}) + b > 0,\ P(t_{m-1}) + b < 0$

Pour montrer que Θ_P est un intervalle de $\mathbb{R}$, il faut prouver que tout éléments de $[a, b]$ appartient à Θ_P.

Soit maintenant $c \in [a, b]$. Puisque $a < c < b$, $0 < P(t_1) + a < P(t_1) + c < P(t_1) + b$

de même, $0 < P(t_2) + a < P(t_2) + c < P(t_2) + b < 0$

On a boutit ainsi aux inégalités : $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty,\ P(t_1) + b > 0,\ P(t_2) + b < 0,\ P(t_3) + b > 0,\ \cdots$

$, P(t_{m-2}) + b > 0,\ P(t_{m-1}) + b < 0,\ \lim\limits_{+\infty} P = +\infty,$

ce qui prouve l'existence (au moins) d'un zero du polynôme $P(X) + c$ dans chacun des intervalles

$]-\infty, t_1[,]t_1, t_2[, \cdots]t_{m-2}, t_{m-1}[,]t_{m-1}, +\infty[$. Cela fournit m racines réelles pour ce polynôme, qui est de degré m. $P(X) + c$ est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples, et $c \in \Theta_P$.

on a ainsi montré que $\boxed{\Theta_P \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}}$.

0.2.19 Centrale 2015 sujet 3

Deux chaines de production A et B sont a l'oeuvre dans une usine : A produit 60% de la production, B le reste.

La probabilité qu'un objet provenant de A soit défectueux est de 0,1 et de 0,2 pour B.

1. On choisit au hasard un objet a la sortie de l'entreprise, on constate qu'il est defectueux. Calculer la probabilité de "l'objet vient de la chaine A".

2. Pourquoi peut-on interpréter la loi de Poisson comme "la loi des évènements rares" ?

3. On suppose de plus que A produit une quantité aléatoire notée Y_A d'objets par heure, suivant une loi de Poisson de parametre $\lambda = 20$. Déterminer la loi de X_A : nombre d'objets défectueux produits en une heure.

4. On prend maintenant en compte les deux chaines, donner la loi du nombre d'objets défectueux produits en une heure.

0.2.20 Centrale 2015 sujet 4

On pose : $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $u_n = \ln(e^{s_n} - 1)$

1. Enoncer le théoreme des séries spéciales alternées, en faire la preuve.
2. Prouver que les suites $(s_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent.
3. Etudier la nature de $\sum u_n$.

SOLUTION : 1. Voir le cours

2. $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ est une série alternée, de limite nulle, décroissante en valeur absolue. Elle est donc convergente. D'après le développement en série entière connu :

$\forall x \in [-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$, appliqué à $x=-1$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2}$

Alors, par continuité des fonctions exponentielle et logarihme,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{s_n} = e^{\ln 2} = 2 \text{ et } \boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(e^{s_n}-1) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2-1) = 0}$$

3. La suite (s_n) converge, et a pour limite $\ln 2$

Notons $r_n = s_n - \ln 2 = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, de sorte que $s_n = \ln 2 - r_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$

$u_n = \ln(e^{s_n}-1) = \ln(e^{\ln 2 - r_n} - 1) = \ln(e^{\ln 2}e^{-r_n} - 1) = \ln(2e^{-r_n} - 1)$

Or $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x)$

donc $u_n = \ln(2e^{-r_n}-1) = \ln\big(2 - 2r_n + r_n^2 + o(r_n^2) - 1\big) = \ln\big(1 - 2r_n + r_n^2 + o(r_n^2)\big)$

Or $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $u_n = \ln\big(1 - 2r_n + r_n^2 + o(r_n^2)\big) = -2r_n + r_n^2 - \frac{1}{2}(2r_n - r_n^2)^2 + o(2r_n - r_n^2)^2$

$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} -2r_n - r_n^2 + o(r_n)^2}$

- $r_n = s_n - \ln 2 = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

La suite (r_n) est alternée, car c'est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie le critère de Leibniz, et qui est du signe de son premier terme, $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

Elle est de limite nulle, comme l'est le reste d'ordre n de toute série convergente.

Il reste à prouver que la suite $(|r_n|)$ est décroissante :

$r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est du signe de son premier terme, $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, donc $|r_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots$

En regroupant les termes deux à deux,

$$|r_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+5)(n+6)} \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2k-1)(n+2k)}$$

$$|r_{n+1}| = \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)} + \frac{1}{(n+6)(n+7)} \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2k)(n+2k+1)}$$

Or $\dfrac{1}{(n+2k)(n+2k+1)} \leqslant \dfrac{1}{(n+2k-1)(n+2k)}$, et par sommation : $|r_{n+1}| \leqslant |r_n|$

La série $\sum r_n$ vérifie donc le critère des séries alternées.

On peut alors affirmer que $\forall n \geqslant 1$, $|r_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$

Cette majoration montre que $r_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $r_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. L'égalité $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -2r_n - r_n^2 + o(r_n)^2$, dans laquelle les série $\{r_n\}$ (série alternée), $\{r_n^2\} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\{o(r_n)^2\} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont convergentes, entraîne que la série $\sum u_n$ est convergente, comme somme de trois séries convergentes.

0.2.21 Centrale 2015 sujet 5

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on pose $P_n = \dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$

1. On pose $w_n = \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x)dx$. Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers relatifs.
3. On suppose que $e^{a/b}$ est un rationnel de dénominateur d. Montrer que $d.w_n$ est dans $\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Quels sont les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $e^r \in \mathbb{Q}$?

SOLUTION : 1. Le facteur X^n dans P_n montre que 0 est racine d'ordre n . 0 est donc racine des polynômes $P_n, P_n', P"_n, \cdots, P_n^{(n-1)}$. Par ailleurs, P_n est de degré $2n$, donc $\forall k \geqslant 2n+1, P_n^{(k)} = 0$.

De la même façon, $P_n(a/b) = 0$ pour $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et pour $k \geqslant 2n+1$

Notons $A_n = X^n$ et $B_n = (a - bX)^n$, de sorte que $P_n = \frac{1}{n!} A_n B_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On vient de voir que $P_n^{(k)}(0)$ si $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ou si $k \geqslant 2n+1$.
Supposons désormais que $n \leqslant k \leqslant 2n$:
D'après le formule de Leibniz de dérivation d'un produit,

$$P_n^{(k)}(X) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_n^{(j)}(X) B_n^{(k-j)}(X)$$

et donc, $P_n^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_n^{(j)}(0) B_n^{(k-j)}(0)$

Or $A_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ ou si } j \geqslant n+1 \\ n! \text{ si } j = n \end{cases}$

Donc dans la somme précédente, ne reste que le terme $\binom{k}{n} A_n^{(n)}(0) B_n^{(k-n)}(0)$, obtenu pour $j = n$.

$$P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} A_n^{(n)}(0) B_n^{(k-n)}(0) = \frac{k!}{n!(k-n)!} \times n! \times (-b)^{k-n} \times n.(n-1).(n-2).\cdots.(n-(k-n)+1).a^{2n-k}$$
$$= \frac{k!}{(k-n)!} \times (-b)^{k-n} \times \frac{n!}{(2n-k)!} a^{2n-k}.$$

Or $k - n \leqslant n$ puisque $n \geqslant 0$, et $n \leqslant 2n - k$ puisque $n \leqslant k$. Les quotients $\dfrac{k!}{(k-n)!}$ et $\dfrac{n!}{(2n-k)!}$ sont donc des entiers.

et $B_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \text{et} j \geqslant n+1 \\ n! \text{ si } j = n \end{cases}$

$P_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(k-n)!} \times (-b)^{k-n} \times \dfrac{n!}{(2n-k)!} a^{2n-k}$ est donc un entier relatif. $\boxed{P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}}$

- Calcul analogue pour $P_n^{(k)}(a/b)$

2. La fonction polynomiale $(x \mapsto x(a - bx))$ est continue et donc bornée sur le segment $[0, a/b]$.
Soit $M = \sup_{x \in [0, a/b]} |x(a - bx)| = \|x(a - bx)\|^\infty$

alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| = \left| \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x) dx \right| \leqslant \int_0^{a/b} \frac{e^x}{n!} \underbrace{|x(a - bx)|^n}_{\leqslant M^n} dx \leqslant \frac{M^n}{n!} \underbrace{\int_0^{a/b} e^x dx}_{independant\ de\ x}$

On sait que la série exponentielle $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge. la suite $\left(\frac{M^n}{n!}\right)_n$ est donc de limite nulle.

La majoration $|w_n| = \left| \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x) dx \right| \leqslant \frac{M^n}{n!} \int_0^{a/b} e^x dx$ montre alors que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 0}$

2. On suppose que $e^{a/b}$ est un rationnel de dénominateur d : $e^{a/b} = \dfrac{c}{d}$, avec $c, d \in \mathbb{N}$.

En intégrant par parties, $w_n = \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x) dx = [e^x P_n(x)]_0^{a/b} - \int_0^{a/b} e^x P_n'(x) dx$

$$w_n = e^{a/b} P_n(a/b) - P_n(0) - \int_0^{a/b} e^x P_n'(x) dx$$

en réintégrant par parties,

$$w_n = e^{a/b} P_n(a/b) - P_n(0) - [e^x P_n'(x)]_0^{a/b} + \int_0^{a/b} e^x P_n''(x) dx$$
$$= e^{a/b} P_n(a/b) - P_n(0) - e^{a/b} P_n'(a/b) + P_n'(0) + \int_0^{a/b} e^x P_n''(x) dx$$

et par récurrence immédiate,

$$w_n = e^{a/b} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(a/b) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(0) + (-1)^n \int_0^{a/b} e^x \underbrace{P_n^{(n)}(x)}_{=n!} dx$$

$$w_n = \frac{c}{d} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(a/b) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(0) + (-1)^n \underbrace{e^{a/b}}_{=c/d} n! - (-1)^n n!$$

d'où, en multipliant par d :

$$d.w_n = c \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(a/b) - d \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(0) + (-1)^n c n! - (-1)^n d n!$$

D'après la quesion 1., on peut affirmer que $\boxed{w_n \in \mathbb{Z}}$
Montrer que $d.w_n$ est dans $\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Par définition, $w_n = \int_0^{a/b} e^x P_n(x)dx$ où la fonction $(x \mapsto e^x P_n(x) = e^x \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!})$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur le segment $[0, a/b]$. On en déduit que $w_n > 0$

Donc $d.w_n$ est un entier positif, non nul : $d.w_n \in \mathbb{N}^*$. En particulier $d.w_n \geqslant 1$.

Ceci est incompatible avec la propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ qui a été montrée dans la question 2.

Le seul rationnel r tel que $e^r \in \mathbb{Q}$ est $r = 0$.

0.2.22 Centrale 2015 sujet 6

On considere une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On note : $J = \{x \in \mathbb{R}, \sum u_n^x \text{ converge}\}$

1. Montrer que J est vide ou alors un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ (illustrer par des exemples concrets).

2. On suppose que $J \neq \emptyset$, et on note $f : \begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^x \end{cases}$

Etudier la continuité de f et ses limites aux bornes.

SOLUTION : 1. Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{\ln n}$.

Elle est à termes > 0, et de limite nulle.

Pour tout $x < 0$, $u_n^x = (\ln n)^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $-x > 0$, et la série $\sum u_n^x$ diverge grossièrement.

Pour $x = 0$ la suite (u_n^0) est constante, de valeur 1, et la série $\sum u_n^x$ diverge encore grossièrement.

Pour tout $x > 0$, $u_n^x = \frac{1}{(\ln n)^x} \geqslant \frac{1}{n}$ pour n assez grand, par croissance comparée logarithme - puissance (puisque $(\ln n)^x = o(n)$). Par minoration par une série divergente, la série $\sum u_n^x$ diverge aussi.

Dans cet exemple, la série $\sum u_n^x$ ne converge pour aucune valeur du réel x. L'ensemble J est vide.

• Supposons maintenant que $j \neq \emptyset$: il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum u_n^x$ converge.

Nécessairement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^x = 0$

- Si $x > 0$, alors $u_n = (u_n^x)^{1/x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Pour tout $y \geqslant x, u_n^y = e^{y \ln u_n} \leqslant e^{x \ln u_n} = u_n^x$ $\quad (\ln u_n < 0 \implies y \ln u_n \leqslant x \ln u_n)$

Puisque la la série $\sum u_n^x$ est convergente, par majoration, la série à termes positifs $\sum u_n^y$ l'est aussi, et $y \in J$.

On a ainsi montré que si $x \in J$, tout réel $y \geqslant x$ appartient aussi à J. Donc J est un intervalle de la forme $][a, +\infty[$, où $a = \inf(J) \in \mathbb{R} \cup -\{\infty\}$. J est de l'une des trois formes suivantes ;

$]-\infty, +\infty[$, $\quad]a, +\infty[$, $\quad [a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$

- Si $x < 0$, alors $u_n = (u_n^x)^{1/x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- Si $x > 0$, alors $u_n = (u_n^x)^{1/x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Pour tout $y \geqslant x, u_n^y = e^{y \ln u_n} \leqslant e^{x \ln u_n} = u_n^x$ $\quad (\ln u_n < 0 \implies y \ln u_n \leqslant x \ln u_n)$

0.3 Concours - Mines - Ponts -

0.3.1 Petites Mines

Exercice 1 : On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$

Est-elle intégrable sur $]-1,1[$?

Développer en série entière la fonction $t \mapsto \ln(1-t) - \ln(1+t)$

Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ sachant que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2 : E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base orthonormale.

On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.

b) Déterminer la nature de f et ses caractéristiques géométriques.

SOLUTION *:* **Exercice 1 :** $\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1-t}{1+t} > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$ est définie et continue sur $]-1,1[$, et la fonction f est définie et continue sur $]-1,0[\cup]0,1[$.

Il y a **trois bornes** où il faut étudier l'intégrabilité : $-1, 0$ et 1 :

• Borne -1 : $\left|\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)\right| \underset{t\to -1^+}{\sim} \left|\ln\left(\dfrac{2}{1+t}\right)\right| = |\ln 2 - \ln(1+t)| \underset{t\to -1^+}{\sim} |\ln(1+t)| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t-(-1)}}\right)$

Or on sait que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. En appliquant ce résultat à $a = -1$ et $\alpha = 1/2$, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-(-1)}}dt$ converge, et par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ converge aussi (absolument).

• Etude analogue à la borne 1 .

• Borne 0 : $\left|\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{t}\left(\ln(1-t) - \ln(1+t)\right)\right| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\dfrac{1}{t}(-2t)\right| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2$

La fonction f est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,1[$, donc est intégrable sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Finalement, par additivité, $\boxed{f \text{ est intégrable sur l'intervalle }]-1,1[}$.

• On sait que $\forall t \in [-1,1[,\ -\ln(1-t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$, et $\forall t \in [-1,1[,\ \ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$

donc $\forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \dfrac{1}{t}\left(\ln(1-t) - \ln(1+t)\right) = \dfrac{1}{t}\left(-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n\right)$

$$f(t) = -\frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n\right) = -\frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} t^n\right)$$

Les termes de rangs pairs s'éliminent :

$$f(t) = -\frac{1}{t}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{2p+1} t^{2p+1}\right) = -2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} t^{2p} \qquad \boxed{\forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-2}{2p+1} t^{2p}}$$

• En notant $u_n(t) = \dfrac{-2}{2n+1} t^{2n}$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} |u_n(t)|dt = 2\int_0^1 |u_n(t)|dt = 2\left[\frac{2}{(2n+1)^2} t^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{4}{(2n+1)^2}$

La convergence de la série $\sum \int_{-1}^{1} |u_n(t)|dt$ permet alors d'appliquer le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque et d'écrire :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} u_n(t)dt\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2}$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{2}}$$

Exercice 2 : a) A est une matrice orthogonale (ses vecteurs colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^3$). Donc f est un automorphisme orthogonal (isométrie vectorielle)

$\det(A) = \det(f) = 1$ (après calculs sans difficulté) donc f est une isométrie directe. C'est donc une rotation vectorielle. (éventuellement réduite à Id_E)

b) L'ensemble des vecteurs invariants de f est la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(après calculs sans difficulté).

f est donc une rotation d'axe la droite D engendrée par $\overrightarrow{k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (une fois normé)

Dans une base orthonormée directe bien choisie, la matrice de f est de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(A) = -\dfrac{5}{9}$ et $\cos(\theta) = -\dfrac{7}{9}$

dans ce cas simple, on remarque que le vecteur $\overrightarrow{j} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. est orthogonal à $\overrightarrow{k_1}$

On peut compléter la base par le vecteur $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k_1})$ est alors une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de f est R.

On peut récupérer $\sin(\theta)$ en calculant le produit scalaire $< f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{j} >$:

La matrice colonne de $f(\overrightarrow{i})$ est :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/9\sqrt{2} \\ 8/9\sqrt{2} \\ 7/9\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sin(\theta) = < f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{j} > = \left\langle \begin{pmatrix} -7/9\sqrt{2} \\ 8/9\sqrt{2} \\ 7/9\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

donc $\begin{cases} \cos(\theta) = -\dfrac{7}{9} \\ \sin(\theta) = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} \end{cases}$ $\theta = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right) = \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

En conclusion, $\boxed{f \text{ est la rotation de l'espace d'axe } D \text{ dirigé par le vecteur } \overrightarrow{k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{et d'angle } \theta = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right) = \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)}$

0.3.2 Petites Mines

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = f(1)$

Montrer que $\exists c \in]0,1[, \ f'(c) = 0$

Exercice 2 : Calculer $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & \ldots & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_n$

SOLUTION : Supposons que f' ne s'annule pas sur $]0,1[$. Alors f' garde un signe constant (conséquence de la continuité de f', si f' changeait de signe, elle s'annulerait par le théorème des valeurs intermédiaires)

• Supposons que $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) < 0$.

Alors f est strictement décroissante sur $[0,1]$, et $\forall x \in [0,1], \ f(x) > f(1)$

La fonction $x \mapsto f(x) - f(1)$ est continue, positive sur $[0,1]$, et non identiquement nulle.

Donc $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))dx > 0$, qui entraîne que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > f(1)$ contrairement à l'hypothèse.

• En supposant que $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) > 0$, on parvient par un raisonnement analogue à l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < f(1)$, qui est aussi contraire à l'hypothèse.

• On a ainsi montré par l'absurde qu'il existe $c \in]0,1[,\ f'(c) = 0$

Exercice 2 : : Notons Δ_n ce déterminant ; en développant suivant la première colonne,

$$\Delta_n = 2\cos\theta\ \Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n-1}$$

puis en développant suivant la première ligne, $\boxed{\Delta_n = 2\cos\theta\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}}$

La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence linéaire $\mathscr{R}$: $u_{n+2} - 2\cos\theta\ u_{n+1} + u_n = 0$

Le trinôme associé, $X^2 - 2\cos\theta\ X + 1$ a pour racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

Dons il existe deux complexes λ et μ tels que : $\quad \forall n \geqslant 1,\ \Delta_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}$

Pour $n = 1,\ \Delta_1 = 2\cos\theta = \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}$

Pour $n = 2,\ \Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1 = \lambda e^{2i\theta} + \mu e^{-2i\theta}$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} & (1) \\ \lambda e^{2i\theta} + \mu e^{-2i\theta} = 4\cos^2\theta - 1 = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \times e^{-i\theta} - (2) \implies \lambda(1 - e^{2i\theta}) = -e^{2i\theta}$

$$\implies \lambda = -\frac{e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = -\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}$$

$(1) \times e^{i\theta} - (2) \implies \mu(1 - e^{-2i\theta}) = -e^{-2i\theta}$

$$\implies \mu = -\frac{e^{-2i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}$$

d'où, $\forall n \geqslant 1,\ \Delta_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)} e^{in\theta} - \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)} e^{-in\theta} = \dfrac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i\sin(\theta)}$

$$\boxed{\Delta_n = \frac{2i\sin((n+1)\theta)}{2i\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}$$

Ce calcul est valable si $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$, c'est à dire si $\theta \neq 0\ [\pi]$

0.3.3 TPE - EIVP

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$

Exercice 2 : On considère deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$A.B - B.A = \alpha B.$

On se propose de montrer que B est nilpotente.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A.B^k - B^k.A = k\alpha B^k$

b) Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme réel.

Montrer que : $A.P(B) - P(B).A = \alpha B.P'(B)$

c) En utilisant un polynôme annulateur de B, montrer que B est nilpotente.

SOLUTION **: Exercice 1 :** La fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1 + x^{n+2}}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de la forme $[0, a], a > 0$ (comme fonction continue sur un **segment**)

$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leqslant g(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{n+2}} \leqslant \dfrac{x^n}{x^{n+2}} = \dfrac{1}{x^2}$. Or on sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et par majoration, g l'est aussi.

Par additivité, g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$ est définie.

• Posons, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, g_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{n+2}}$

- Si $x \in [0, 1[$, quand $n \to +\infty$, $x^n \to 0$ et $1 + x^{n+2} \to 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$

- Si $x = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, g_n(1) = \frac{1}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \frac{1}{2}$

- Si $x \in]1, +\infty[$, quand $n \to +\infty$, $x^n \to +\infty$ et $1 + x^{n+2} \to +\infty$, $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{n+2}} = \dfrac{1}{x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{x^2}$

La suite de fonction $(g_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vers la fonction G définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1[, G(x) = 0 \\ G(1) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in]1,+\infty[, G(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], 0 \leqslant g_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{n+2}} \leqslant \dfrac{1}{1+x^{n+2}} \leqslant 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]1,+\infty[, 0 \leqslant g_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \leqslant \frac{x^n}{x^{n+2}} = \frac{1}{x^2}$$

En définissant la fonction H par : $\begin{cases} \forall x \in [0,1], H(x) = 1 \\ \forall x \in]1,+\infty[, G(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$, on a la domination :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in [0,+\infty[, \end{cases} |g_n(x)| \leqslant H(x)$$

Or la fonction H est continue sur $[0,+\infty[$ (y compris au point 1) , intégrable sur $[0,1]$ (fonction constante sur un segment), intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de référence), donc intégrable sur $[0,+\infty[$ par additivité.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(x) \right) dx$$
$$= \int_0^1 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx = 1}$$

Exercice 2 : A et B sont deux matrices de$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, α est un réel non nul tels que : $A.B - B.A = \alpha B$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}_k$ la proposition : $A.B^k - B^k.A = k\alpha B^k$

La proposition $\mathscr{P}_1$ s'écrit : $A.B - B.A = \alpha B$. Elle est donc vérifiée par hypothèse.

Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vérifiée : $A.B^k - B^k.A = k\alpha B^k$

alors $A.B^{k+1} - B^{k+1}.A = A.B^k.B - B^{k+1}.A = (B^k.A + k\alpha B^k).B - B^{k+1}.A$
$= B^k.A.B + k\alpha B^{k+1} - B^{k+1}.A$
$= B^k.(A.B - B.A) + k\alpha B^{k+1}$
$= B^k.(k\alpha B^k) + k\alpha B^{k+1}$

$A.B^{k+1} - B^{k+1}.A = (k+1)\alpha B^{k+1}$

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\text{la relation } \mathscr{P}_k \text{ est vraie pour tout entier } k \in \mathbb{N}}$.

b) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme réel.

Ecrivons les relations $\mathscr{P}_k$ pour k variant de 0 à m :

$$\begin{cases} A.I_n - B.I_n = 0.\alpha.I_n \\ A.B - B.A = \alpha B \\ A.B^2 - B^2.A = 2\alpha B \\ \dots\dots\dots \\ A.B^m - B^m.A = m\alpha B^m \end{cases}$$

Multiplions la première ligne par a_0, la suivante par a_1, la suivante par a_2, etc... , la dernière par a_m, et ajoutons ces égalités :

$A.(a_0 I_n + a_1 B + a_2 B^2 + ... + a_m B^m) - (a_0 I_n + a_1 B + a_2 B^2 + ... + a_m B^m).A = \alpha(a_1 B + 2a_2 B^2 + ... + m a_m B^m)$

soit : $A.P(B) - P(B).A = \alpha B(a_1 I_n + 2a_2 B + ... + m a_m B^{m-1}) = \alpha B.P'(B)$

On a ainsi montré que : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ A.P(B) - P(B).A = \alpha B.P'(B)}$

c) Considérons le polynôme minimal de la matrice B, c'est à dire le polynôme annulateur de B de degré minimal, unitaire. (Ce polynôme est aussi un générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de B)

Notons le $Q(X)$.

En appliquant le résultat précédent à ce polynôme, on peut écrire : $A.\underbrace{Q(B)}_{=0} - \underbrace{Q(B)}_{=0}.A = \alpha B.Q'(B)$

ce qui montre que $B.Q'(B) = 0$ puisque par hypothèse $\alpha \neq 0$.

Le polynôme $X.Q'(X)$ est donc lui aussi un polynôme annulateur de la matrice B, de même degré que le polynôme $Q(X)$.

Donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, non nul, tel que $X.Q'(X) = \lambda Q(X)$

Le polynôme $Q(X)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $xy' - \lambda y = 0$

La solution générale, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$ de cette équation linéaire du premier ordre est de la forme : $x \mapsto y(x) = \mu \exp(-\int \frac{-\lambda}{x} dx) = \mu |x|^\lambda$

Le polynôme $Q(X)$ est de ce type, c'est un polynôme, la puissance doit être entière, donc il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $Q(X) = X^\lambda$. Dès lors, $Q(B) = B^\lambda = 0$, ce qui montre que la matrice B est nilpotente.

0.3.4 TPE :

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ est-il défini ?

Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ est elle convergente ?

SOLUTION : • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et donc sur $\left]0, \frac{1}{n}\right]$.

$f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1} = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$. On sait que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{1/n} \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ converge si et seulement si $1-\alpha < 1$, si et seulement si $\alpha > 0$.

Par équivalence, $\boxed{\text{l'intégrale } u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}}dx \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 0}$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \left]0, \frac{1}{n}\right], 0 < x \leqslant \frac{1}{n} \implies 0 < \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \implies 1 < 1+\sqrt{x} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\implies \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{x}} < 1 \implies \frac{x^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt{x}} < x^{\alpha-1}$

$\implies \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \displaystyle\int_0^{1/n} x^{\alpha-1}dx \leqslant u_n < \int_0^{1/n} x^{\alpha-1}dx$ (en intégrant sur $\left]0, \frac{1}{n}\right]$)

or $\displaystyle\int_0^{1/n} x^{\alpha-1}dx = \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha\, n^\alpha}$.

On obtient l'encadrement : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \times \dfrac{1}{\alpha\, n^\alpha} \leqslant u_n < \dfrac{1}{\alpha\, n^\alpha}$

qui montre que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha\, n^\alpha}}$, et qui permet de conclure par équivalence à une série de Riemann que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$

0.3.5 TPE - EIVP

Exercice 1 : On considère une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum c_n$ converge absolument.

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ en fonction de la série $\sum c_n$.

Exercice 2 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

On construit la matrice M par blocs : $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)_{2n}$ où O_n est la matrice nulle.

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et que B vérifie une condition que l'on précisera.

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1) Puisque la série $\sum c_n$ converge, la suite (c_n) converge vers 0, et est donc bornée : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |c_n| \leqslant M$

alors $\forall t \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\dfrac{c_n t^n}{n!}\right| \leqslant M\dfrac{|t|^n}{n!}$ et on sait que la série exponentielle $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ converge pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Par majoration la série $\sum \frac{c_n t^n}{n!}$ converge absolument pour tout complexe t. La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On sait qu'une série entière est continue sur son ouvert de convergence.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur l'ouvert de convergence }]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}}$.

2) $\forall t \in [0,+\infty[, f(t)e^{-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n e^{-t}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ u_n(t) = \dfrac{c_n t^n e^{-t}}{n!}$

Chaque fonction $u_n : t \mapsto \dfrac{c_n t^n e^{-t}}{n!}$ est continue sur $[0,+\infty[$, négligeable en $+\infty$ devant la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}$ (car $t^n \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{\frac{t}{2}}\right)$), donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par intégration par parties (sur un segment de la forme $[0,a], a > 0$, puis en passant à la limite qd $a \to +\infty$),

$$J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_{t=0}^{t\to+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} nt^{n-1}e^{-t}dt = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt = nJ_{n-1}$$

L'initialisation $J_0=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=[-e^{-t}]_{t=0}^{t\to+\infty}=1$ permet alors de montrer, par une récurrence immédiate, que $\forall n\in\mathbb{N}, J_n=n!$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty}u_n(t)dt=\frac{c_n}{n!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt=\frac{c_n}{n!}J_n=c_n$, et par un calcul analogue,

$\forall n\in\mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt=|c_n|$

Ainsi, • chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

• la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $[0,+\infty[$,

• et la série numérique $\sum\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt$ converge

Par application du théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on en déduit que f est intégrable sur $[0,+\infty[$, et que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}f(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(t)dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n}$$

Exercice 2 : On considère deux matrices $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB=BA$.

On construit la matrice M par blocs : $M=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_n&A\end{array}\right)_{2n}$ où O_n est la matrice nulle.

$$M^2=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_n&A\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_n&A\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A^2&2AB\\\hline O_n&A^2\end{array}\right)$$

$$M^3=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_n&A\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c|c}A^2&2AB\\\hline O_n&A^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A^3&3A^2B\\\hline O_n&A^3\end{array}\right)$$

$$M^4=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_n&A\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c|c}A^3&3A^2B\\\hline O_n&A^3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A^4&4A^3B\\\hline O_n&A^4\end{array}\right)$$

et par une récurrence immédiate, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M^k=\left(\begin{array}{c|c}A^k&kA^{k-1}B\\\hline O_n&A^k\end{array}\right)$

Soit $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$.

Alors $P(M)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kM^k=\sum_{k=0}^{p}a_k\left(\begin{array}{c|c}A^k&kA^{k-1}B\\\hline O_n&A^k\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kA^k&\displaystyle\sum_{k=0}^{p}ka_kA^{k-1}B\\\hline O_n&\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kA^k\end{array}\right)$

Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}ka_kX^{k-1}=P'(X)$, de sorte que $\boxed{P(M)=\left(\begin{array}{c|c}P(A)&P'(A)B\\\hline O_n&P(A)\end{array}\right)}$

• Supposons M diagonalisable. Alors il existe un polynôme $P(X)$, scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, tel que $P(M)=0$.

Alors $\left(\begin{array}{c|c}P(A)&P'(A)B\\\hline O_n&P(A)\end{array}\right)=O_{2n}$, donc $P(A)=0_n$ et $P'(A).B=O_n$.

P est donc un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{C}[X]$, et à racines simples . Donc la matrice A est diagonalisable.

De plus $P(X)=(X-b_1)(X-b_2).....(X-b_p)$ où $b_1,b_2,.....,b_p$ sont les racines de $P(X)$. Aucun des b_i n'est racine de $P'(X)$ (car une racine ciommune à $P(X)$ et $P'(X)$ serait une racine double de $P(X)$).

Donc aucun des diviseurs premiers de $P(X)$, à savoir les polynômes $(X-b_1),(X-b_2),.....,(X-b_p)$, n'est diviseur de $P'(X)$. Les polynômes $P(X)$ et $P'(X)$ sont donc premires entre eux.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ tels que :

$U(X)P(X)+V(X)P'(X)=1$.

En appliquant cette égalité à la matrice A, on obtient : $U(A)\underbrace{P(A)}_{=0_n}+V(A)P'(A)=I_n$

Donc $V(A)P'(A)=I_n$, ce qui montre que la matrice $P'(A)$ est inversible (et a pour inverse $V(A)$)

En multipliant à gauche par $(P'(A))^{-1}=V(A)$, l'égalité $P'(A).B=O_n$ entraîne $B=0$.

• Réciproquement, supposons que A est diagonalisable, et que $B=0$.

Alors la matrice A admet un polynôme annulateur $P(X)\in\mathbb{C}[X]$, scindé et à racines simples.

Par le calcul fait précédemment, $P(M)=\left(\begin{array}{c|c}P(A)&P'(A)B\\\hline O_n&P(A)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}O_n&O_n\\\hline O_n&O_n\end{array}\right)=O_{2n}$

$P(X)$ est aussi polynôme annulateur de M, ce qui montre que M est diagonalisable.

• En conclusion, $\boxed{M \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable et } B=0_n}$.

0.3.6 Mines

EXERCICE 1 : Algèbre

On considère une base d'un espace vectoriel E de dimension 3, que l'on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit n le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans cette base .

Déterminer dans la base $\mathscr{B}$ la matrice de la projection orthogonale sur le plan ayant pour vecteur normal $n = (1,1,1)$.

Cette matrice est elle diagonalisable ? Donner les sous-espaces propres.

Question ajoutée par l'examinateur à l'oral : - La matrice trouvée de la projection est elle inversible ?

EXERCICE 2 : Analyse

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$

On donne une solution particulière $x \mapsto exp(-2x)$

Question ajoutée à l'oral par l'examinateur : - Quelle est la forme de l'ensemble des solutions - De manière implicite une discussion sur la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ était demandée

Note sur le déroulement :

Les deux exercices étaient donnés en même temps pour la préparation, avec libre choix de commencer par l'algèbre ou l'analyse. 20 min de préparation, 30 min de passage.

SOLUTION **: EXERCICE 1 : Algèbre**

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3, dont une base orthonormale est $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. n est le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans cette base .

Pour déterminer la projection p_1 sur le plan $\mathscr{P} = \mathscr{D}^\perp$, on va commencer par déterminer la projection orthogonale p_2 sur la droite $\mathscr{D}$, puis utiliser la relation $p_1 + p_2 = Id_E$

Le vecteur $n' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ est un vecteur unitaire qui constitue à lui seul une BON de la droite $\mathscr{D}$.

Le projeté d'une vecteur V de E sur $\mathscr{D}$ est $p_2(V) =< n', V > n'$

En particulier, $p_2(e_1) =< e_1, n' > n' =< (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) > \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,1,1)$

Par un calcul analogue, $p_2(e_2) =< e_2, n' > n' = \frac{1}{3}(1,1,1)$ et $p_2(e_3) =< e_3, n' > n' = \frac{1}{3}(1,1,1)$

La matrice de p_2 dans la base $\mathscr{B}$ est donc : $P_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{La matrice de } p_1\text{, projection orthogonale sur le plan } \mathscr{P} \text{ est : } P_1 = I_3 - P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

• Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable (à l'aide d'une matrice de passage orthogonale)

Autre argument simple : Tout projecteur est diagonalisable : ses valeurs propres sont 0 et 1. Le sous espace propre lié à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs invariants du projecteur, c'est à dire le sous espace sur lequel on projette (ici le plan $\mathscr{P}$) .

Le sous espace propre lié à la valeur propre 0 est le noyau du projecteur, qui est aussi la direction de la projection (ici la droite $\mathscr{D}$) .

La matrice trouvée n'est pas inversible. Le seul projecteur qui soit inversible est Id.

EXERCICE 2 : Analyse

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

On vérifie que la fonction $g : x \mapsto \exp(-2x)$ est solution (calcul sans difficulté)

On recherche la solution générale de (E) sous la forme $y = g.z$ où z est une fonction inconnue.

Alors $y' = g.z' + g'.z$ et $y'' = g.z'' + 2g'.z' + g''.z$

y est solution de (E) sur un intervalle I si et seulement si :

$\forall x \in I, (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y(x) = 0$

$\iff \forall x \in I,\ (2x+1)(g(x).z''(x)+2g'(x).z'(x)+g''(x).z(x))+(4x-2)(g(x).z'(x)+g'(x).z(x))-8g(x)z(x) = 0$

Les termes en $z(x)$ sont facteurs de $(2x+1)g''(x) + (4x-2)g'(x) - 8g(x)$, qui est nul. Il reste :

$\forall x \in I,\ (2x+1)(g(x).z''(x) + 2g'(x).z'(x)) + (4x-2)(g(x).z'(x)) = 0$,

qui est une équation différentielle du premier ordre en la fonction $Z'(x)$:

$$\forall x \in I,\ \underbrace{(2x+1)g(x)}_{A(x)}.z''(x) + \underbrace{((4x+2)g'(x) + (4x-2)g(x))}_{B(x)}.z'(x) = 0$$

La solution générale de l'équation (F) : $A(X)Z'(X) + B(X)Z(X) = 0$ a pour solution générale :

$$x \mapsto Z(x) = \lambda \exp\left(-\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)}dt\right) = \lambda \exp\left(-\int_a^x \frac{(4t+2)g'(t)+(4t-2)g(t)}{(2t+1)g(t)}dt\right) = \lambda \exp\left(-\int_a^x \frac{2g'(t)}{g(t)} + \frac{(4t-2)}{(2t+1)}dt\right)$$

$$Z(x) = \lambda \exp\left(-2\ln|g(x)| - \int_a^x \frac{(4t+2-4)}{(2t+1)}dt\right) = \lambda \exp\left(-2\ln|g(x)| - 2x + 2\ln|2x+1|\right)$$

$$Z(x) = \lambda \frac{e^{-2x}(2x+1)^2}{g^2(x)} = \lambda e^{2x}(2x+1)^2$$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ z'(x) = \lambda e^{2x}(2x+1)^2 = \lambda e^{2x}(4x^2+4x+1)$

recherchons une primitive de la fonction $x \mapsto e^{2x}(4x^2+4x+1)$ de la forme $T(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$:
$T'(x) = (2ax+b+2ax^2+2bx+2c)e^{2x} = (2ax^2+2(a+b)x+b+2c)e^{2x}$

$$T'(x) = e^{2x}(4x^2+4x+1) \iff \left\{\begin{array}{c} 2a=4 \\ 2a+2b=4 \\ b+2c=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a=2 \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

L'égalité $z'(x) = \lambda e^{2x}(4x^2+4x+1)$ entraîne : que $\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ z(x) = \lambda(2x^2+\frac{1}{2})e^{2x} + \mu$
On revient ensuite à la fonction $y(x) = g(x)z(x) = e^{-2x}\lambda(2x^2+\frac{1}{2})e^{2x} + \mu = \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x}$
(en changeant la valeur de la constante λ)
En conclusion , la solution générale de l'équation (E) sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{x \mapsto y(x) = \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x}}$$

0.3.7 Mines

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Etudier la diagonalisabilité de A.

2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) f étant l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, quels sont les sous-espaces stables par f ?
(indication de l'examinateur : pour calculer A^n, faire la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur de A.)

SOLUTION **:** 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2-x & -x & 1 \\ 2-x & 1 & -x \end{vmatrix} \quad \text{(en ajoutant toutes les colonnes à la première)}$$

$$\chi_A(x) = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -x-1 \end{vmatrix} = (2-x)(x+1)^2$$

La matrice $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, car c'est une matrice réelle symétrique. $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2\}}$

Donc $P(X) = (X+1)(X-2)$ est un polynôme annulayeur de A.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et effectuons la division euclidienne de X^n par $P(X) = (X+1)(X-2)$:

$$\exists (Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2, \left\{\begin{array}{c} X^n = P(X)Q(X) + R(X) \\ d^\circ(R) < d^\circ(P) = 2 \end{array}\right.$$

Donc $X^n = P(X)Q(X) + a_nX + b_n$ où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
En remplaçant X par -1 puis X par 2, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} (-1)^n = P(-1)Q(-1) - a_n + b_n \\ 2^n = P(2)Q(2) + 2a_n + b_n \end{array}\right. \text{ soit : } \left\{\begin{array}{c} (-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{array}\right. \quad \text{(puisque } P(-1) = P(2) = 0)$$

d'où : $a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$ et $b_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right)$

• En remplaçant X par A dans l'égalité $X^n = P(X)Q(X) + a_nX + b_n$, on obtient :

$$A^n = \underbrace{P(A)}_{=0}Q(A) + a_nA + b_nI_3 \quad (P \text{ est un polynôme annulateur de } A)$$

d'où : $A^n = a_nA + b_nI_3 = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)A + \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right)I_3$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}}$$

0.3.8 Mines

Exercice 1 : Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2+y^2)$
dans le domaine $U = \mathbb{R}^2 - \{(x,0), x \in \mathbb{R}^-\}$, en passant en coordonnées polaires.

Exercice 2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'endomorphisme φ de E : $P(X) \mapsto P(2-X)$
Déterminer les élémenrs propres de φ.

SOLUTION **: Exercice 1 :** On considère l'application Φ :

$$(x,y) \mapsto \Phi(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y)) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right),$$

qui est alors un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur $V =]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$

Si f est une solution de l'équation$E$), on pose $g = f_o\Phi^{-1}$, de telle sorte que $f = g_o\Phi$:

$\forall (x,y) \in U, f(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y))$

$\Longrightarrow \ \forall (x,y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r(x,y), \theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r(x,y), \theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)$

et $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r(x,y), \theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r(x,y), \theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y)$

or $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et donc $\dfrac{\partial r}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\theta(x,y) = 2\text{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ et donc } \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = 2\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} \times \frac{-y\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = 2\frac{-y\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2} = 2\frac{-y\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+(x^2+y^2)+2x\sqrt{x^2+y^2}+y^2} = -y\frac{\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -y\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial r}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}}$

Pour les dérivées partielles par rapport à y, un calcul analogue aboutit à :

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

En reportant dans l'équation (E), on obtient : $\boxed{\forall (r,\theta) \in V, \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - g(r,\theta) = -r^2}$

0.3.9 Mines - Ponts

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Montrer que l'application définie par :

$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (t+x)^n P(t)dt$ est un endomorphisme de E, et qu'il est symétrique.

SOLUTION : • Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

alors $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (t+x)^n P(t)dt = \int_0^1 (t+x)^n \sum_{k=0}^{n} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k (t+x)^n dt$

Pour tout k, $\displaystyle\int_0^1 t^k(t+x)^n dt = \int_0^1 t^k \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j x^{n-j} dt = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^{n-j}\int_0^1 t^{j+k}dt = \sum_{j=0}^{n}\frac{\binom{n}{j}}{k+j+1}x^{n-j}$

est un polynôme de la variable x, de degré $\leqslant n$. Donc la somme $u(P)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k(t+x)^n dt$ est aussi un polynôme de la variable x, de degré $\leqslant n$.

Ainsi, u est bien une application de $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Il est immédiat de vérifier que u est linéaire. Donc $\boxed{u \in \mathcal{L}(E)}$.

• Soient $P, Q \in E$.

$< u(P), Q >= \int_0^1 u(P)(x).Q(x)dx = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 (t+x)^n P(t)dt \ .\ Q(x)\right) dx$

$\quad = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 (t+x)^n P(t)Q(x)dt\right) dx$

La fonction $(x,t) \mapsto (t+x)^n P(t)Q(x)$ est continue sur le pavé $[0,1]\times[0,1]$ (car est polynomiale).

On peut appliquer le théorème de Fubini et intervertir les ordres d'intégration :

$< u(P), Q >= \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 (t+x)^n P(t)Q(x)dx\right) dt = \int_0^1 \left(P(t)\int_0^1 (t+x)^n Q(x)dx\right) dt = \int_0^1 P(t)\ .\ u(Q)(t)dt$

$\quad =< P, u(Q) >$

On a ainsi montré que $\forall p, Q \in E,\ < u(P), Q >=< P, u(Q) >$,

donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$.

0.3.10 Mines - Ponts

Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)dt$$

SOLUTION : **Analyse :** Soit f une fonctions continue de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)dt$$

La fonction f^2 étant continue sur $]-1,1[$, l'intégrale fonction de la borne supérieure, $x \mapsto \int_0^x f^2(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, et a pour dérivée : $x \mapsto f^2(x)$.

La relation $f(x) = 1+\displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$ montre qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, et en dérivant cette relation,

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = f^2(x)$$

Sur tout intervalle J sur lequel f ne s'annule pas, on a : $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = 1$.

En intégrant : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ -\dfrac{1}{f(x)} = x+\lambda \implies f(x) = \dfrac{-1}{x+\lambda}$

f étant définie sur $]-1,1[$, $\forall x \in]-1,1], x+\lambda \neq 0$, donc $\lambda \notin]-1,1[$.

En reportant dans le relation de départ,

$\forall x \in]-1,1[, \dfrac{-1}{x+\lambda} = 1+\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{(t+\lambda)^2}dt = 1+\left[\dfrac{-1}{t+\lambda}\right]_0^x = 1+\dfrac{-1}{x+\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$, ce qui entraîne que $1+\frac{1}{\lambda} = 0$ et donc $\lambda = -1$.

Réciproquement, le calcul qui vient d'être fait montre que la fonction $t \mapsto \frac{-1}{x-1}$ est bien continue sur $]-1,1[$ et vérifie la relation étudiée.

En conclusion, il existe une et une seule fonction continue de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ et qui vérifie la condition :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)dt$$

$$\boxed{\text{C'est la fonction } f : t \mapsto \frac{1}{1-t}}$$

0.3.11 Mines - Ponts

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_1 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n+1}$

Montrer que les seules limites possibles de (u_n) sont $0, 1$ et $+\infty$.

On note $E_L = \{a > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L\}$.

Montrer que E_0, E_1 et E_∞ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Montrer que $[1,+\infty[\subset E_\infty$ et que E_∞ est ouvert.

SOLUTION : • Supposons que (u_n) converge vers le réel L. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n+1}$, on obtient $L = L^2$, soit $L^2 - L = L(l-1) = 0$ qui entraîne que $L = 0$ ou $L = 1$.

• Par ailleurs, si on suppose $a \geqslant 1$, alors $u_2 = u_1^2 + \frac{1}{2} = \underbrace{a^2}_{\geqslant 1} + \frac{1}{2} > 1$, et par récurrence, si $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{n+1} > 1$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2, a_n > 1$.

$\forall n \geqslant 2, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{1}{n+1} = \underbrace{u_n(u_n-1)}_{\geqslant 0} + \frac{1}{n+1} > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante après le rang 2. Elle est donc soit convergente, soit de limite infinie. Si elle convergeait, ce ne pourrait être que vers 0 ou 1 d'après ce qu'on vient de montrer.

Or les inégalité $0 < 1 < u_2 < u_n$ entraînent par passage à la limite que $0 < 1 < u_2 \leqslant L$, ce qui est impossible.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

• Soit $L \in \{0, 1, +\infty\}$, a et $b \in E_L$, (u_n) telle que $u_1 = a$ et (v_n) telle que $v_1 = b$.

Quitte à renommer ces deux suites, on peut supposer que $a < b$. Pour montrer que E_L est un intervalle, il faut montrer que $\forall c \in]a,b[, c \in E_L$.

Soit donc $c \in]a,b[$, et (w_n) la suite vérifiant la même relation de récurrence, et telle que $w_1 = c$.

On a l'ordonnancement $a < c < b$, c'est à dire $u_1 < w_1 < v_1$, ce qui entraine que $u_1^2 < w_1^2 < v_1^2$, et en joutant $\frac{1}{2}$ à chaque terme de cette encadrement, on obtient : $u_2 < w_2 < v_2$.

En répétant ce calcul, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < w_n < v_n$.

Mais puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$.

Ce qui montre que $c \in L$.

On a ainsi montré que $\boxed{E_L \text{ est un intervalle}}$.

• On a montré précédemment que si $a \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Donc $\boxed{[1,+\infty[\subset E_\infty}$

• E_∞ est un intervalle de $\mathbb{R}$, qui contient $[1,+\infty[$. Il ne peut être que l'un des trois types suivants : $[m,+\infty[$ ou $]m,+\infty[$ avec $m\in\mathbb{R}$, ou $]-\infty,+\infty[$.

Pour s'assurer que E_∞ est un ouvert, il suffit de montrer que $\forall a\in E_\infty,\ \exists b<a$ tel que $b\in E_\infty$.

D'après des calculs faits ci-dessus, s'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}>1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante, ne peut converger vers 0 ou 1, donc diverge vers $+\infty$.

Soit $a\in E_\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\exists n_1\in\mathbb{N}, u_{n_1}>2$.

Notons plus précisément $u_n(a)$ le terme d'indice n de la suite qui vérifie la relation de récurrence étudiée, et dont le premier terme est $u_1=a$.

Ainsi $u_1(a)=a$, $u_2(a)=a^2+\frac{1}{2}$,

$u_3(a)=u_2^2(a)+\frac{1}{3}=\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=a^4+a^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=a^4+a^2+\frac{7}{12}$

$u_4(a)=a^8+2a^6+\frac{13}{6}a^4+\frac{7}{6}a^2+\frac{85}{144}$

Ce type de calcul permet de montrer par récurrence que chaque terme $u_n(a)$ de la suite est un polynôme de la variable a (et de degré 2^{n-1}).

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists Q_n\in\mathbb{R}[X],\forall a>0,\ u_n(a)=Q_n(a)$

La fonction $a\mapsto u_n(a)$ est donc continue, puisque polynomiale. Donc $\lim\limits_{b\to a} u_{n_1}(b)=u_{n_1}(a)$

Donc $\exists b<a$ tel que $|u_{n_1}(b)-u_{n_1}(a)|\leqslant 1$

alors $u_{n_1}(b)=\underbrace{u_{n_1}(a)}_{>2}+\underbrace{[u_{n_1}(b)-u_{n_1}(b)]}_{-1\leqslant\ terme\ \leqslant 1}>1$

De la minoration $u_{n_1}(b)>1$, on peut déduire comme ci-dessus que la suite $(u_n(b))_{n\geqslant n_1}$ est croissante et diverge vers $+\infty$. Donc $b\in E_\infty$.

On ainsi montré que $\forall b\in E_\infty,\exists b<a,\ b\in E_\infty$, ce qui montre que E_∞ est de l'un des deux types $]m,+\infty[$ avec $m\in\mathbb{R}$, ou $]-\infty,+\infty[$, et est donc un intervalle ouvert.

0.3.12 Mines - Ponts

Soit $M(x_0,y_0)$ un point de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2=2px$. $\quad (p>0)$

On note M_n la deuxième intersection entre la normale à la parabole en M_{n-1} et la parabole.

Etudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$

SOLUTION On peut paramétrer la parabole par $y: y\mapsto M\left(\frac{y^2}{2p},y\right)$

La tangente à $\mathscr{P}$ au point $M(x,y)$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dy}\left(\dfrac{y}{p},1\right)$, colinéaire à $\overrightarrow{T}(y,p)$

Soit $N(X,Y)$ un point quelconque du plan. N appartient à la normale à $\mathscr{P}$ en $M(x,y)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MP}(X-x,Y-y)$ est normal au vecteur $\overrightarrow{T}(y,p)$, si et seulement si $<\overrightarrow{MP},\overrightarrow{T}>=y(Y-y)+p(X-x)=0$

En appliquant ce résultat à la normale à $\mathscr{P}$ au point $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$, les coordonnées (x_n,y_n) du point M_n vérifient le système : $\left\{\begin{array}{l}(x_n-x_{n-1})y_{n-1}+p(y_n-y_{n-1})=0\\ y_n^2=2px_n\end{array}\right.$

$$\iff\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{y_n^2}{2p}-\frac{y_{n-1}^2}{2p}\right)y_{n-1}+p(y_n-y_{n-1})=0\\ x_n=\frac{y_n^2}{2p}\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{l}(y_n+y_{n-1})\,y_{n-1}+2p^2=0\\ x_n=\frac{y_n^2}{2p}\end{array}\right.$$

$$\implies\boxed{y_n=-y_{n-1}-\dfrac{2p^2}{y_{n-1}}=-\dfrac{y_{n-1}^2+2p^2}{y_{n-1}}}$$

• La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n, y_n=-\dfrac{y_{n-1}^2+2p^2}{y_{n-1}}$. Cela montre que (t_n) est une suite **alternée**. La suite $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)_{n\geqslant 0}$ aussi. Pour s'assurer de la convergence de la série $\sum\frac{1}{y_n}$, il suffit de montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{|y_n|}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 en décroissant, c'est à dire que la suite $(|y_n|)$ tend vers $+\infty$ en croissant.

0.3.13 Mines - Ponts

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle (E) : $\quad xy''-y'-4x^3y=0$

Résoudre cette équation par une méthode de votre choix.

Retrouver ce résultat par le changement de variable $t=x^2$.

Exercice 2 : E est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ sans point fixe autre que le vecteur nul, tel que f^2-2f est diagonaliosable.
Montrer que f est diagonalisable.

SOLUTION : Recherchons les séries entières solutions :

Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall x \in]-R,R[,\ S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

et $\quad S''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

S est solution de (E_0) sur $]-R,R[, \iff \forall x \in]-R,R[,\ \ xS''(x)-S'(x)+4x^3S(x)=0$

$$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3}=0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n=0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[, a_1+0.\,x+3a_3x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n(n+1)-n-1)a_{n+1}+4a_{n-3}\right]x^n=0$$

$$\iff \begin{cases} a_1=0 \\ a_3=0 \\ \forall n \geqslant 3,\ (n^2-1)a_{n+1}+4a_{n-3}=0 \end{cases} \quad \text{(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)}$$

$$\iff \begin{cases} a_1=a_3=0 \\ \forall n \geqslant 3,\ a_{n+1}=-\dfrac{4a_{n-3}}{n^2-1}=-\dfrac{4a_{n-3}}{(n-1)(n+1)} \end{cases}$$

Les relations $a_1=a_3=0$ et la récurrence entraînent que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1}=0}$

La récurrence s'écrit aussi : $\forall n \geqslant 4,\ a_n=-\dfrac{4a_{n-4}}{n(n-2)}$, qui donne :

$$\begin{cases} a_4=\dfrac{-4a_0}{2\times 4}=\dfrac{-a_0}{1\times 2} \\ a_8=\dfrac{-a_4}{3\times 4} \\ a_{12}=\dfrac{-a_8}{5\times 6} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{4n}=\dfrac{-a_{2n-4}}{(2n-1)\times 2n} \end{cases} \quad \text{soit : } \boxed{a_{4n}=\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}a_0} \qquad \begin{cases} a_6=\dfrac{-4a_2}{4\times 6}=\dfrac{-a_0}{2\times 3} \\ a_{10}=\dfrac{-a_6}{4\times 5} \\ a_{14}=\dfrac{-a_{10}}{6\times 7} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{4n+2}=\dfrac{-a_{4n-2}}{2n\times(2n+1)} \end{cases} \quad \text{soit : } \boxed{a_{4n+2}=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_2}$$

$$S(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n}x^{4n}+a_2\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+2}x^{4n+2}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}+a_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$$

Ces séries entières on des rayons de convergences infinis.

$$S(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^2)^{2n}+a_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^2)^{2n+1}=a_0\cos(x^2)+a_2\sin(x^2)$$

Deuxième méthode : Par le changement de variable $t=x^2$ (c'est à dire $x=\sqrt{t}$ si $x>0$ et $x=-\sqrt{t}$ si $x<0$), qu'on l'on peut écrire dans les deux cas $x=\varepsilon t$ où ε est le signe de x :

On recherche la fonction z telle que $z(t)=y(\varepsilon\sqrt{t})$

Après calculs, on parvient à l'équation différentielle (F) : $\quad z''(t)+z(t)=0$, qui a pour solution générale $z(t)=\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)$ et donc $y(x)=z(x^2)=\lambda\cos(x^2)+\mu\sin(x^2)$ sur chacun des intervalles $I_1=]-\infty,0[$, $I_2=]0,+\infty[$.

Exercice 2 : E est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$

On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ n'a pas de point fixe autre que le vecteur nul, et que f^2-2f est diagonaliosable.

Il existe donc un polynôme $Q(X)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2).....(X-\lambda_q)=\displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X-\lambda_k)$, scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, annulateur de f^2-2f :

$$Q(f^2-2f)=\prod_{k=1}^{q}(f^2-2f-\lambda_k Id_E)=\omega$$

Donc le polynôme $P(X)=\displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X^2-2X-\lambda_k)$ est un polynôme annulateur de f.

$X^2-2X-\lambda_k=(X-1)^2-1-\lambda_k=(X-1)^2-(1+\lambda_k)$

Si l'un des λ_k vaut -1, dans la composée $Q(f^2-2f) = \prod_{k=1}^{q}(f^2-2f-\lambda_k Id_E) = \omega$ apparaît le facteur $f^2-2f+Id_E = (f-I_E)_o(f-I_E)$

Or, f n'ayant pas de point fixe autre que 0_E, $\ker(f-Id_E)=\{0\}$, et l'endomorphisme $f-Id_E$ est inversible. En composant deux fois par $(f-Id_E)^{-1}$ dans l'égalité $\prod_{k=1}^{q}(f^2-2f-\lambda_k Id_E)=\omega$, on obtient une égalité du même type , $\prod_k (f^2-2f-\lambda_k Id_E)=\omega$, mais dans laquelle aucun des λ_k ne vaut -1.

Alors, pour tout k, le complexe $1+\lambda_k$ est non nul, et admet deux racines complexes non nullles, distictes et opposées, μ_k et $-\mu_k$.

Le polynôme annulateur de f devient :
$P(X) = \prod_{k=1}^{q}\left((X-1)^2-(1+\lambda_k)\right) = \prod_{k=1}^{q}\left((X-1)^2-\mu_k^2\right) = \prod_{k=1}^{q}\left((X-1-\mu_k)(X-1+\mu_k)\right)$ où les μ_k sont deux à deux distincts, différents de -1 et de 1.

Ce polynôme annulateur de f est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et et à racines simples .

Ce qui permet d'affirmer que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

0.3.14 Mines

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 13 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

Trouver $P, Q \in GL_4(\mathbb{R})$ telles que $P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$

***SOLUTION* : Exercice 1 :** Procédons à la réduction de Gauss sur la matrice A concaténée avec la matrice identité I_4 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 13 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 0 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\ \longleftarrow ------ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 34 & 51 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{17}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{10}L_4 \\ \longleftarrow ------ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\frac{7}{17} & 0 & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ \longleftarrow ------ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{17} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

On sait que ces opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice équivalent à multilier la matrice à gauche par une matrice inversible. Ayant procédé aux mêmes opérations sur les lignes de la matrice I_4 que sur la matrice A, à la fin du procédé, alors que la matrice A aura été multipliée par la matrice P pour devenir $P.A$, la matrice I_4 aura elle aussi été multipliée par la matrice P, et sera devenue $P.I_4 = P$.

Donc, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{17} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{17} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$, on a : $P.A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Procédons de la même manière sur les colonnes de la matrice $P.A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cette fois, pour la transformer en la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cette fois, nous positions I_4 en dessus de la matrice $P.A$ pour qu'elle subisse les mêmes transformations sur les colonnes :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 6C_1 \\ \longleftarrow - - - - - - \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2 \\ \longleftarrow - - - - - - \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ces opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice équivalent à multilier la matrice à droite par une matrice inversible. Ayant procédé aux mêmes opérations sur les colonnes de la matrice I_4 que sur la matrice $P.A$, à la fin du procédé, alors que la matrice $P.A$ aura été multipliée par la matrice Q pour devenir $P.A.Q$, la matrice I_4 aura elle aussi été multipliée par la matrice Q, et sera devenue $I_4.Q = Q$.

Donc, en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Finalement, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{17} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{17} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on a bien $P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : ce calcul peut être vérifié à la calculatrice ou avec MAPLE

Exercice 2 : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ...$ est le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{1}{k!}$ (série exponentielle convergente, et de somme $\exp(1) = e$)

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant r_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + ...\right)$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + ...\right) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^j}$$

Cette dernière série est une série géométrique de raison $\frac{1}{n+2}$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, cet encadrement montre que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}}$

0.3.15 Mines

Exercice 1 : On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et l'application T qui à $f \in E$ associe la fonction $T(f)$ définie par : $\quad \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t) dt.$

Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$.

Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de T.

Exercice 2 : A quelle(s) condition(s) la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

SOLUTION **: Exercice 1 :** Soit $f \in E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto \min(x,t) f(t)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \min(x,t) f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$.

$\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,1],\ |\min(x,t) f(t)| \leqslant \|f\|_{[0,1]}^{\infty}$ où la fonction constante $t \mapsto \|f\|_{[0,1]}^{\infty}$ est continue et intégrable sur le segment $[0,1]$.

Par le théorème de continuité sous le signe $\int$, on en déduit que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$; $f \in E$. par ailleurs, il est immédiat de vérifier que T est linéaire.

Donc $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de l'espace } E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})}$.

- Recherchons les valeurs propres et sous espaces propres de T :

Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$T(f) = \lambda f \iff \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \lambda f(x)$

$\iff \forall x \in [0,1],\ \int_0^1 \min(x,t) f(t)dt = \lambda f(x)$

$\iff \forall x \in [0,1],\ \int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 xf(t)dt = \lambda f(x)$

$\iff \forall x \in [0,1],\ \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt = \lambda f(x) \qquad (*)$

Dans le membre de gauche, les deux fonctions $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^1 f(t)dt$ sont dérivables, d'après la dérivation d'une intégrale d'une fonction continue, fonction de la borne supérieure (ou inférieure). Ces deux fonctions ont pour dérivées respectives :

$x \mapsto xf(x)$ et $x \mapsto -f(x)$

Le membre de droite est lui aussi dérivable, puisqu'il est égal au membre de gauche qui l'est.

En dérivant la relation (*), on obtient : $\forall x \in [0,1],\ xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t)dt = \lambda f'(x)$

et en dérivant encore une fois (même raisonnement) : $\forall x \in [0,1],\ -f(x) = \lambda f''(x)$

- Pour $\lambda = 0$, on obtient pour f la fonction nulle, qui ne peut pas être un vecteur propre de T. Donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } T}$

- Si $\lambda > 0$, f est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$

C'est une équation du second ordre linéaire à coefficients constants, dont la solution générale est :

$x \mapsto y(x) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)$

Tout réel positif est donc valeur propre de T, et son sous-espace propre associé est de dimension 2.

- Si $\lambda < 0$, f est solution de l'équation différentielle : $y'' - \frac{1}{-\lambda} y = 0$

C'est une équation du second ordre linéaire à coefficients constants, dont la solution générale est :

$x \mapsto y(x) = A\text{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right) + B\text{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right)$ ou aussi :

$x \mapsto y(x) = C\exp\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right) + D\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right)$

Tout réel négatif est donc valeur propre de T, et son sous-espace propre associé est de dimension 2.

Finalement $\boxed{\text{Sp}(T) = \mathbb{R}^*}$

Exercice 2 : $\chi_A(x) = \det(xI_4 - A) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} 1-x & a & b & c \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$

$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$ (en développant suivant la première colonne)

$= (1-x)^2(2-x)^2$ (déterminant triangulaire)

$\boxed{\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2}$ $\boxed{\text{Sp}(A) = \{1,2\}}$

- Rappelons que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\dim(E_A(\lambda)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_4)$

- $A - 1 \times I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a - b - c$

Donc $\text{rg}(A - I_4) = 3$ si $a - b - c \neq 0$, et $\text{rg}(A - I_4) = 2$ si $a - b - c = 0$.

d'où $\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dim(E_A(1)) = 1 \quad si \quad a-b-c \neq 0 \\ \qquad\qquad et \\ \dim(E_A(1)) = 2 \quad si \quad a-b-c = 0 \end{array}\right.}$

- $A - 1 \times I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a toujours pour rang 2 (les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes, les troisième et quatrième colonnes sont colinéaires à la première).

Donc dans tous les cas, $\dim(E_A(1)) = 2$

- Si $a - b - c = 0$, $\dim(E_A(1)) + \dim(E_A(2)) = 1 + 2 = 3 < 4$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Si $a - b - c \neq 0$, $\dim(E_A(1)) + \dim(E_A(2)) = 2 + 2 = 4$, la matrice A est diagonalisable.

0.3.16 Mines

Exercice 1 : Quelle est la nature de la série de terme général : $u_n = \text{Arg ch}\left(\frac{n+1}{n}\right)$?

Exercice 2 : On considère le plan complexe $\mathbb{C}$.

Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3 ait pour othocentre le point O, d'affixe 0..

SOLUTION **: Exercice 1 :** La fonction Arg ch est la réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction "ch".

x	1		$+\infty$
			$+\infty$
Arg ch(x)		$\nearrow$	
	0		

Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \in [1, +\infty[$. Donc $u_n = \text{Arg ch}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est défini.

Quand $n \to +\infty$, $\frac{n+1}{n} \to 1^+$, et par continuité de la fonction Argch, $u_n = \text{Arg ch}\left(\frac{n+1}{n}\right) \to \text{Arg ch}(1) = 0$.

Rappelons le developpement limité à l'ordre 2 da le fonction ch en 0 : $\text{ch}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + 0(t^2)$

D'où l'on déduit : $\text{ch}(t) - 1 = \dfrac{t^2}{2} + 0(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$

et puisque $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$,

$$\text{ch}(u_n) - 1 = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et puisque u_n est positif, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \text{ ce qui montre que la série } \sum u_n \text{ diverge}}$, par équivalence à une série de Riemann convergente.

Exercice 2 : Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans le plan complexe (c'est à dire d'affixes respectives $z = a + ib$ et $z' = c + id$), leur produit scalaire est $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= ac + bd$

Or $z.\overline{z'} = (a + ib)(c - id) = ac + bd + i(bc - ad)$.

Donc $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= ac + bd = \text{Re}(z.\overline{z'}) = \frac{1}{2}\left(z.\overline{z'} + \overline{z}.z'\right)$

• O est l'orthocentre du trinagle ABC si et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC} \\ \quad et \\ \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \text{Re}\left(z.\overline{(z^3 - z^2)}\right) = 0 \\ \text{Re}\left(z^2.\overline{(z^3 - z)}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z.\overline{(z^3 - z^2)} + \overline{z}.(z^3 - z^2) = 0 \\ z^2.\overline{(z^3 - z)} + \overline{z^2}.(z^3 - z) = 0 \end{cases}$$

Le cas $z.\overline{z} = |z|^2 = 0$ correspondrait à $z = 0$, et les points A, B et C seraient confondus au point O.

Supposons désormais que $z \neq 0$. On peut simplifier chaque égalité par $z.\overline{z} = |z|^2$:

$$\iff \begin{cases} \overline{(z^2 - z)} + (z^2 - z) = 0 \\ z.\overline{(z^2 - 1)} + \overline{z}.(z^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{z^2} + z^2 = z + \overline{z} \\ z.\overline{z}^2 + \overline{z}.z^2 = z + \overline{z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{z^2} + z^2 = z + \overline{z} \\ z.\overline{z}(z + +\overline{z}) = z + \overline{z} \end{cases}$$

• Si $z + \overline{z} = 0$ et $z \neq 0$, alors z est un imaginaire pur de la forme $i.a$, $a \in \mathbb{R}$.

$z^2 = -a^2$ est un réel négatif, $z^3 = -ia^3$ est un imaginaire pur. Alors OC, qui est vertical ne peut pas être orthogonal à AB qui n'est pas horizontal. z ne paur pas être solution dans ce cas.

• Supposons donc désormais que $z + \overline{z} \neq 0$.

Le système équivaut à : $\begin{cases} \overline{z^2} + z^2 = z + \overline{z} \\ z.\overline{z} = 1 \end{cases}$ (après simplification par $z + \overline{z}$)

$z.\overline{z} = 1 \implies |z| = 1 \implies \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$

$z^2 + \overline{z^2} = z + \overline{z} \implies e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \implies \cos(2\theta) = \cos(\theta)$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta) \iff \begin{cases} 2\theta = \theta \quad [2\pi] \\ \quad ou \\ 2\theta = -\theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta = 0 \quad [2\pi] \\ \quad ou \\ \theta = 0 \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ ou \\ z \in \{1, j, j^2\} \end{cases}$$

Le cas $z = 1$ donne $A = B = C$ puisque $z = z^2 = z^3 = 1$.

Le cas $z = j$ donne les points A, B et C d'affixes respectives j, j^2 et 1. Alors O est bien orthocentre (et centre de gravité) du triangle ABC.

Le cas $z = j^2$ donne les points A, B et C d'affixes respectives $j^2, j^4 = j$ et $j^6 = 1$. Alors O est bien orthocentre (et centre de gravité) du triangle ABC.

En conclusion, $\boxed{O \text{ est orthocentre du triangle } ABC \text{ (non réduit à un point) si et seulement si } z = j \text{ ou } z = j^2}$.

0.3.17 Mines

Exercice 1 : Donner une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 2 : Justifier l'existence de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

En écrivant A comme somme d'une série alternée, déterminer le signe de A.

***SOLUTION* : Exercice 1 :**

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -z & -z \\ -1 & x & -z \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - z^2 - z - 3xz$ (règle de Sarrus)

Ce polynôme caractéristique admet trois racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. Si ces trois racines sont distinctes, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

Mais elle peut avoir une racine multiple (double ou triple).

Etudions ce cas : Si χ_A admet une racine multiple, $t \in \mathbb{C}$, celle-ci est racine de $\chi_A(X) = X^3 - 3zX - z - z^2$ et de $\chi'_A(X) = 3X^2 - 3z = 3(X^2 - z)$.

Donc t vérifie $t^2 = z$.

• Si $z = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. (si elle l'était, elle serait semblable à la matrice nulle, et serait la matrice nulle).

• Si $z \neq 0$, notons w et $-w$ les deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ du complexe z : $w^2 = z$.

Le polynôme dérivé $\chi'_A(X) = 3(X^2 - z)$ a pour racines w et $-w$.

Voyons si ces complexes sont aussi racines de $\chi_A(X)$:

$\chi_A(w) = w^3 - 3zw - z - z^2 = w^3 - 3w^3 - w^2 - w^4 = -w^2(w^2 + 2w + 1) = -w^2(w+1)^2$

$\chi_A(-w) = -w^3 + 3zw - z - z^2 = -w^3 + 3w^3 - w^2 - w^4 = -w^2(w^2 - 2w + 1) = -w^2(w-1)^2$

Le cas $w = 0$ qui entraîne $z = 0$ a déjà été étudié.

Les cas $w = -1$ ou $w = 1$ entraînent $z = w^2 = 1$, et donnent pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Dans tous les autres cas, A possède trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

En conclusion, $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ si et seulement si } z \neq 0}$

Exercice 2 : La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

• $f(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$

En posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur le **fermé** $[0, +\infty[$.

Elle est donc intégrable sur tout segment $[0, a], a > 0$

• Soit $a > 0$. Par intégration par parties,

$\forall x \in [a, +\infty[, \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}} \sin t \, dt = \int_a^x \sin t \, . \, t^{-1/2} \, dt = \Big[-\cos t \, . \, t^{-1/2}\Big]_a^x - \frac{1}{2} \int_a^x \cos t \, . \, t^{-3/2} \, dt$

$\displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}} \sin t \, dt = \frac{\cos a}{\sqrt{a}} - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \int_a^x \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$ (*)

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$ puisque $\cos x$ est borné et $\sqrt{x} \to +\infty$

$\forall t \in [a, +\infty[, \left|\dfrac{\cos t}{t\sqrt{t}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, et par majoration la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t\sqrt{t}}$ l'est aussi. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$ est donc absolument convergente.

La relation (*) permet alors d'écrire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{\cos a}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$ est donc convergente.

Par additivité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ l'est aussi.

Remarque : On aurait pu demander aussi si cette intégrale était absolument convergente.

• Par la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par le changement devariable affine $t = u + k\pi$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+k\pi)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}$ est continue et positive sur $[0,\pi]$. Donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du > 0$

Notons $v_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité :

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k v_k, \text{ on obtient :}$$

$$\boxed{A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k v_k}$$

A apparait ainsi comme somme d'une série alternée (puisque $\forall k,\ v_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du > 0$)

• $v_{k+1} - v_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+(k+1)\pi}}\, du - \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du = \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{u+(k+1)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{u+k\pi}} \right)}_{\leqslant 0} \underbrace{\sin u}_{\geqslant 0}\, du$

La suite $(v_k)_k$ est donc décroissante.

• $0 \leqslant v_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+k\pi}}\, du \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{u+k\pi}}\, du \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\, du = \frac{\pi}{\sqrt{k\pi}} = \sqrt{\pi}.\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

La série alternée $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k v_k$ vérifie le critère de Leibniz.

On en déduit que c'est une série convergente (ce qu'on savait déjà) et que sa somme est du signe de son premier terme $v_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$, qui est positif. Donc $\boxed{A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt > 0}$.

0.3.18 Mines

Exercice 1 : Rechercher les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de trace nulle, telles que $M^2 + M^T = I_3$ (*)

Exercice 2 : E désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-1,1]$, à valeurs réelles.

Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & f(0)g(0) + \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)dt \end{cases}$

définit un produit scalaire sur E.

Trouver une base orthonormale du sous espace $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$

***SOLUTION* : Exercice 1 :** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice de trace nulle, telle que $M^2 + M^T = I_3$

alors $M^T = I_3 - M^2$, et en prenant les transposées, $M = (I_3)^T - (M^2)^T = I_3 - (M^T)^2$

$\Longrightarrow M = I_3 - (I_3 - M^2)^2 = 2M^2 - M^4$

$\Longrightarrow M^4 - 2M^2 + M = 0$

Le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.

$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1)$

Le polynôme $X^2 + X - 1$ a deux racines réelles : $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Finalement, $P(X) = X(X-1)(X-a_1)(X-a_2)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. La matrice M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0, 1, a_1, a_2\}$

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$: $\exists V \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, M.V = \lambda.V$

La relation (*) entraîne : $V^T.M^2.V + V^T.M^T.V = V^T.V = \|V\|^2$

Or $M^2V = M(MV) = \pounds(\lambda V) = \lambda.M.V = \lambda^2 V$ et $V^T.M^T = (M.V)^T = (\lambda.V)^T = \lambda.V^T$

Reportons dans l'expression précédente :

$V^T.(M^2.V) + (V^T.M^T).V = \|V\|^2$, ce qui donne : $\lambda^2 V^T.V + \lambda V^T.V = \|V\|^2$

qui entraîne que $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ (puisque $V \neq 0$)

Donc $\lambda \in \{a_1, a_2\}$

Dès lors, M est semblable à l'une des quatre matrices suivantes :

$$D_1=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & a_1\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix},\ D_3=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix},\ D_4=\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}$$

Or aucune de ces matrices n'a de trace nulle, contrairement à ce qui devrait être puisque deux matrices semblables on même trace.

$\boxed{\text{Il n'existe donc pas de matrice } M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{, de trace nulle, vérifiant la relation (*)}}$

Exercice 2 : • L'application Φ est bien définie sur $E\times E$, car lorsque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)dt$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Il est immédiat que Φ est symétrique et bilinéaire.

Montrons que c'est une forme définie positive :

Soit $f\in E$. $\qquad \Phi(f,f)=\underbrace{[f(0)]^2}_{\geqslant 0}+\displaystyle\int_{-1}^{1}\underbrace{f'^2(t)}_{\geqslant 0}\,dt$

Donc Φ est une forme positive.

Soit $f\in E$ etl que $\Phi(f,f)=0$, c'est à dire tel que : $\underbrace{[f(0)]^2}_{\geqslant 0}+\displaystyle\int_{-1}^{1}\underbrace{f'^2(t)}_{\geqslant 0}\,dt=0$

donc $\left\{\begin{array}{c} [f(0)]^2=0\\ et\\ \int_{-1}^{1} f'^2(t)dt=0\end{array}\right.$

La fonction f'^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur l'intervalle $[-1,1]$. C'est donc la fonction nulle sur $[-1,1]$. Il en est de même de la fonction f', et f est une fonction constante sur l'intervalle $[-1,1]$. Mais puisque $f(0)=0$, cette constante est nulle. Donc f est la fonction nulle.

On a finalement montré que Φ est une application bilinéaire symétrique définie-positive sur l'espace E, c'est à dire un produit scalaire sur E.

• $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(0)=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est le noyau de la forme linéaire $(P\mapsto P(0))$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$. C'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire un sous espace de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 2.

Il est clair que les deux polynômes X et X^2 appartiennent à F, et forment un système libre, puisqu'ils sont de degrés différents. Ils forment donc une base de F.

Recherchons d'abord une base **orthogonale** (Q_0,Q_1) de F par le procédé de Schmitt, en partant de la base (X,X^2) : $\left\{\begin{array}{l} Q_0=X\\ Q_1=X^2+\lambda Q_0\end{array}\right.$

$$\Phi(Q_0,Q_1)=0 \iff Q_0(0)Q_1(0)+\int_{-1}^{1} Q_0'(t)Q_1'(t)dt=0$$

$$\iff 0+\int_{-1}^{1} 1.(2t+\lambda)dt=0 \iff 2\lambda=0$$

$\boxed{\text{Le système } (X,X^2) \text{ est donc orthogonal}}$.

$\Phi(X,X)=0+\int_{-1}^{1} 1\times 1dt=2.\quad$ Donc $\|X\|=\sqrt{\Phi(X,X)}=\sqrt{2}$

$\Phi(X^2,X^2)=0+\int_{-1}^{1} 4t^2dt=\frac{8}{3}.\quad$ Donc $\|X^2\|=\sqrt{\Phi(X^2,X^2)}=\sqrt{\frac{8}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\text{Une base orthonormale de } F \text{ est formée des polynômes : } P_0(X)=\frac{X}{\sqrt{2}},\ P_1(X)=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{X^2}{2}}$

0.3.19 Mines

Exercice 1 : On considère deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$, deux applications linéaires, $u\in\mathscr{L}(E,F)$, $v\in\mathscr{L}(F,E)$ telles que $v_o u\in GL(E)$.

Montrer que $\mathrm{Im}u\oplus\ker v=F$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différnetielle (E) : $\quad (1+x^2)y''+4xy'+2y=1$

SOLUTION **: Exercice 1 :** • Soit $y\in\mathrm{Im}u\cap\ker v$:

$\exists x\in E, y=u(x)$ et $v(y)=0$.

Donc $v(y)=v_o u(x)=0$. Mais puisque $v_o u\in GL(E)$, son noyau est réduit à $\{0\}$ et donc $x=0$, ce qui entraîne que $y=u(x)=0$. Donc $\mathrm{Im}u\cap\ker v=\{0\}$. La somme $\mathrm{Im}u+\ker v$ est directe.

• Montrons que cette somme est égale à F, c'est à dire que tout vecteur $x\in F$ peut s'écrire sous la forme $a+b$ avec $a\in\mathrm{Im}u$ et $b\in\ker v$.

Analyse : Soit $x\in F$, et $(a,b)\in\mathrm{Im}u\times\ker v$ tel que $x=a+b$.

alors il existe $c\in E$ tel que $a=u(c)$ $\quad$ (puisque $a\in\mathrm{Im}u$)

donc $v(x) = v(a) + \underbrace{v(b)}_{=0} = v_o u(c)$, et puisque $v_o u \in GL(E)$, $c = (v_o u)^{-1}(v(x))$

Dès lors, $a = u[(v_o u)^{-1}(v(x))]$ et par différence, $b = x - a = x - u[(v_o u)^{-1}(v(x))]$

Synthèse : Soit $x \in F$. Soit $a = u[(v_o u)^{-1}(v(x))]$

a est bien défini, puisque $x \in F, v(x) \in E$, $(v_o u)^{-1}(v(x))$ est défini et appartient à E puisque $v(x) \in E$ et $v_o u \in GL(E)$, et finalement $a = u[(v_o u)^{-1}(v(x))]$ est bien défini.

Par différence de deux éléments de F, soit $b = x - a = x - u[(v_o u)^{-1}(v(x))]$ est bien défini.

On a bien alors $\boxed{a + b = x}$

$\boxed{a \in \mathrm{Im} u}$ puisque a est l'image par u d'un vecteur de E.

Il reste à vérifier que $b \in \ker v$. Pour cela calculons $v(b)$:

$v(b) = v\left[x - u[(v_o u)^{-1}(v(x))]\right] = v(x) - v_o u[(v_o u)^{-1}(v(x))] = v(x) - v(x) = 0$

Donc $\boxed{b \in \ker v}$

On a ainsi montré que $F \subset \mathrm{Im} u \cap \ker v$, et l'égalité puisque l'inclusion réciproque est triviale.

Exercice 2 : Recherchons les séries entières solutions de l'équation diffétentielle homogène (E_0) :

$$(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on peut affirmer que :

$$\forall x \in]R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n\ a_n\ x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)\ a_n\ x^{n-2}$$

S est solution de (E_0) sur l'intervalle $]R, R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]R, R[,\ (1 + x^2)S''(x) + 4xS'(x) + 2S(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in]R, R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)\ a_n\ x^{n-2} + \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)\ a_n\ x^n + 4\sum_{n=0,1}^{\infty} n\ a_n\ x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\ a_{n+2}\ x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1) + 4n + 2)a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\ a_{n+2}\ x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + 3n + 2)a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\ (a_{n+2} + a_n)x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0\ x^n$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} + a_n = 0$ (par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n$

$$\iff \forall p \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{2p} = (-1)^p a_0 \\ a_{2p+1} = (-1)^p a_1 \end{cases}$$

Les séries entières solutions de (E_0) sont les SE de la forme :

$$S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = a_0\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p x^{2p} + a_1\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p x^{2p+1}$$

$$S(x) = a_0\sum_{p=0}^{\infty}(-x^2)^p + a_1 x\sum_{p=0}^{\infty}(-x^2)^p = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + x^2}$$

On obtient un sous espace vectoriel de dimension 2. Or (E_0) est une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène, pour laquelle le coefficient de y'' dans l'équation, le terme $(1 + x^2)$, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ forme donc un espace vectoriel de dimension 2. Or les séries entières solutions forment déjà un espace de solutions de dimension 2. C'est donc que l'on a là toutes les solutions de (E_0).

En conclusion, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto y(x) = \dfrac{Ax + B}{1 + x^2}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

- La fonction constante $\frac{1}{2}$ est clairement solution de (E) : $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions de la forme : } x \mapsto y(x) = \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{1}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}}.$$

0.4 X - ENS : -

0.4.1 X -ENS

Exercice 1 : On considère la suite (x_n) définie par la donnée des réels $x_0 > 0$ et $a > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n} \qquad (*)$$

Etudier la limite de cette suite, et rechercher un équivalent simple de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 : Trouver toutes les racines de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUTION **:** Par récurrence immédiate, on peut affirmer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, x_n est défini et $x_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \dfrac{a}{x_n} > 0.$ La suite (x_n) est strictement croissante.

Si elle convergeait vers un réel L, alors, par croissance de la suite, on aurait :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < x_0 < x_n \leqslant L.$ Donc $L \neq 0$.

En passant à la limite dans la relation (*), on obtiendrait : $L = L + \dfrac{a}{L}$

ce qui est absurde car $\dfrac{a}{L}$ ne peut pas être nul.

Donc la suite (x_n) est divergente. Étant croissante, on peut affirmer que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$

- Soit α un réel.

$\forall n \in \mathbb{N},\ (x_{n+1})^\alpha - x_n^\alpha = \left[x_n\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)\right]^\alpha - x_n^\alpha = x_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)^\alpha - 1\right]$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} x_n^\alpha\ \alpha\ \dfrac{a}{x_n^2} = a\ \alpha\ x_n^{\alpha-2}$ (car $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha\ u$)

En particulier, en prenant $\alpha = 2$,

$(x_{n+1})^2 - x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ a$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(x_{n+1})^2 - x_n^2\right] = 2\ a$

Posons $u_n = (x_{n+1})^2 - x_n^2$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ a$ et soit $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$

D'après le théorème de Cesaro, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ a$

Or $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \dfrac{(x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_2^2) + \cdots + (x_{n+1})^2 - x_n^2}{n} = \dfrac{(x_{n+1})^2 - x_1^2}{n}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $(x_{n+1})^2 - x_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (x_{n+1})^2$

et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(x_{n+1})^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ a$, d'où l'on déduit finalement :

$x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ a\ (n-1)$ et $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ a\ n}}$

Exercice 2 : Trouver toutes les racines de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Analyse : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine de A : $M^2 = A$

alors $A.M = M^2.M = M^3 = MM^2 = M.A$

Donc M commute avec la matrice diagonale A, dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.

Il s'ensuit que M est diagonale : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$M^2 = A \implies \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Donc M est l'une des quatre matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

Synthèse : on vérifie immédiatement que ces quatre matrices sont solutions.

0.4.2 X - ENS

Exercice 1 : Soit $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Montrer que la matrice $A = ((U_i|U_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont strictement positives.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ est prologeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

f est elle de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \cdots$ etc . . . ?

SOLUTION **:** Notons $a_{i,j} = (U_i|U_j)$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A.

$\forall (i,j) \in \{1, 2, \cdots, n\},\ a_{i,j} = (U_i|U_j) = (U_j|U_i) = a_{j,i}$ par symétrie du produit scalaire.

La matrice A est symétrique, réelle, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$: $\exists V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ A.V = \lambda V$

alors $V^T.A.V = V^T.\lambda.V = \lambda V^T.V = \lambda \|V\|^2$

$A.V$ est un vecteur colonne, dont la ligne d'indice i est : $(A.V)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_k$

$$V^T.A.V = V^T.(A.V) = (v_1, v_2, \cdots, v_n). \begin{pmatrix} (A.V)_1 \\ (A.V)_2 \\ \vdots \\ (A.V)_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i.(A.V)_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i. \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_k \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{n} v_k (U_i | U_k) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(U_i \mid \sum_{k=1}^{n} v_k U_k \right)$$

d'où : $\lambda \|V\|^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i U_i \mid \sum_{k=1}^{n} v_k U_k \right) = \left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i U_i \right\|^2$

Puisque le vecteur propre V n'est pas nulle, $\|V\| > 0$.

Le vecteur $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i U_i$ n'est pas nul lui non plus, puisqu'au moins l'une de ses composantes v_k dans la base $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ n'est pas nul. Donc $\|W\|^2 = \left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i U_i \right\|^2 > 0$

L'égalité $\lambda = \dfrac{\left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i U_i \right\|^2}{\|V\|^2} = \dfrac{\|W\|^2}{\|V\|^2}$ montre alors que $\boxed{\lambda > 0}$

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ est prologeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

f est elle de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \cdots$ etc . . . ?

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par composition , la fonction $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction $x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ aussi.

• la fonction $x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ est bornée et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$

$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ est donc prologeable en une fonction } f \text{ continue sur } \mathbb{R}\text{, en posant } f(0) = 0}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - x^2 \times \dfrac{-1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x} = 2x \sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}$

Quand $x \to 0$, $x \sin \frac{1}{x} \to 0$ comme produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle.

$\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. (il oscille entre -1 et +1)

Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Mais ceci n'implique pas que f n'est pas dérivable en 0.

Revenons à la défintion en étudiant la limite du taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$

Par contre f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque f' n'est pas continue en 0.

En particulier, f' n'est pas dérivable en 0 car n'est pas continue en ce point.

0.4.3 X - ENS

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f , $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que les coefficients de la série de taylor de f sont des nombres rationnels.

SOLUTION **:** La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est définie sur sur $\mathbb{R}^*$.

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{1}{x} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots$

En posant $g(0)=1$, alors $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}$, la fonction g prolonge bien la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{x}$ en une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus g ne s'annule pas en 0, puisque $g(0)=1$, et ne s'annule nulle part ailleurs sur $\mathbb{R}^*$ car :

$e^x-1=0\iff x=0$

g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas. La fonction $f=\frac{1}{g}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et est elle-même $\mathcal{C}^\infty$.

Sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est donc définie. (ce qui ne signifie pas pour l'instant qu'elle converge. D'ailleurs cette question de la convergence n'est pas posée dans le texte).

• Il s'agit maintenant de prouver que tous les coefficients $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ sont rationnels.

Puisqu'il n'y a pas dans le cours de maths Spé de théorème concernant le DSE de l'inverse $\frac{1}{f}$ d'une fonction f, nous utiliserons les développements limités.

Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier quelconque.

Le développement limité de f à l'ordre n est : $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+x^n\varepsilon_1(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to0}\varepsilon_1(x)=0$

Le développement limité de g à l'ordre n est : $g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{(k+1)!}+x^n\varepsilon_2(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to0}\varepsilon_2(x)=0$

Or $\forall x\in\mathbb{R}, f(x).g(x)=1$.

On obtient le DL à l'ordre n du produit $f.g$ en multipliant les deux parties régulières polynomiales des DL de f et de g, et en en retenant que les termes de degrés $\leqslant n$.

De DL se résume à : $f(x).g(x)=1+0.x+0.x^2+0.x^3+\cdots+x^n\varepsilon(x)$ (avec $\varepsilon(x)=0$)

Dans le polynôme produit

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right).\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{(k+1)!}\right)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n).\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots+\frac{x^n}{(n+1)!}\right)$$ on ne retient que les termes de degrés $\leqslant n$, c'est à dire :

$$\begin{cases} c_0=1=a_0\\ c_1=0=\frac{a_0}{2}+a_1\\ c_2=0=\frac{a_0}{6}+\frac{a_1}{2}+a_2\\ \vdots\\ c_n=0=\frac{a_0}{(n+1)!}+\frac{a_1}{n!}+\frac{a_2}{(n-1)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n\end{cases}$$

Ces relations montrent par récurrence :

$a_0=1$ est rationnel,

$a_1=-\frac{a_0}{2}=-\frac{1}{2}$ est rationnel,

$a_2=-\frac{a_0}{6}-\frac{a_1}{2}$ est rationnel, (car a_0 et a_1 le sont)

$\vdots$

$a_n=-\frac{a_0}{(n+1)!}-\frac{a_1}{n!}-\frac{a_2}{(n-1)!}+\cdots+-\frac{a_{n-1}}{2}$ est rationnel, (car a_0 et $a_1,\cdots a_{n-1}$ le sont)

0.4.4 X - ENS

Soit $\gamma:t\in\mathbb{R}\ \mapsto e^{-t^2/2}$.

a) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}\gamma(t)dt$ est convergente.

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose : $F(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}\gamma(t)dt$

b) Donner un développement en série entière de F en 0 et préciser le rayon de convergence.

c) Montrer que l'application $x\in\mathbb{R}\ \mapsto F(ix)\gamma(x)$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

d) Donner alors une expression de F .

On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$ (intégrale de Gauss)

SOLUTION **:** a) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la fonction $t\mapsto e^{-izt}\gamma(t)dt$ est définie et continue sur $]-\infty,+\infty[$.

Si $z=a+ib,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left|e^{-izt}\gamma(t)\right|=\left|e^{-i(a+ib)t}\gamma(t)\right|=\left|e^{bt}e^{-iat}\gamma(t)\right|=e^{bt}e^{-t^2/2}\underset{t\to\pm\infty}{=}o(e^{-|t|})$

Or la fonction $t\mapsto e^{-|t|}$ est intégrable sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Par majoration, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{-izt}\gamma(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-izt}\gamma(t)dt$ sont donc absolument convergentes, et

$F(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}\gamma(t)dt$ est défini pour tout $z\in\mathbb{C}$.

b) On sait que : $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $t \in [0, +\infty[,\ e^{-izt} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-izt)^k}{k!}$

et $F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-izt)^k}{k!} \gamma(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{t^k e^{-t^2/2}}{k!} z^k\ dt$

Cherchons à échanger l'intégration $\int_{-\infty}^{+\infty}$ et le sommation $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$.

Pour cela, il faut s'assurer que la série numérique $\displaystyle\sum_k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{t^k e^{-t^2/2}}{k!} z^k \right| dt \right)$ est convergente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2/2} dt$

Par intégration par parties, $\forall k \in \mathbb{N},\ J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2/2} dt = \underbrace{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-t^2/2} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{k+1} e^{-t^2/2} dt$

$J_k = \dfrac{J_{k+2}}{k+1}$, soit aussi : $J_{k+2} = (k+1)J_k$.

d'où l'on déduit par récurrence immédiate :

$\forall k \in \mathbb{N},\ J_{2k} = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) J_0 = \dfrac{(2k)!}{2^k k!} J_0$

$J_{2k+1} = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k) J_1 = 2^k k! J_1$

En notant $I_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{t^k e^{-t^2/2}}{k!} z^k \right| dt = 2 \frac{|z|^k}{k!} \int_0^{+\infty} \left| t^k e^{-t^2/2} \right| dt = 2 \frac{|z|^k}{k!} J_k$, on obtient :

$I_{2k} = 2 \dfrac{|z|^{2k}}{(2k)!} J_{2k} = 2 \dfrac{|z|^{2k}}{(2k)!} \dfrac{(2k)!}{2^k k!} J_0 = 2 \dfrac{|z|^{2k}}{2^k k!} J_0$, qui donne une série exponentielle convergente car de la forme $\dfrac{\left(\frac{|z|^2}{2}\right)^k}{k!}$

$I_{2k+1} = 2 \dfrac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!} J_{2k+1} = 2 \dfrac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!} 2^k\ k!\ J_1$, qui donne aussi une série convergente, par le critère de d'Alembert.

On a ainsi montré que la série $\displaystyle\sum_k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{t^k e^{-t^2/2}}{k!} z^k \right| dt \right)$ converge.

D'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque, on peut écrire :

$F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{t^k e^{-t^2/2}}{k!} z^k\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2/2} z^k\ dt$

$\boxed{F(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2/2}\ dt \right) z^k}$, ce qui montre que $\boxed{F \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{C}}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(ix)\gamma(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2/2} dt \ .\ e^{-x^2/2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, soit $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t) dt$ en notant : $G(x,t) = e^{xt} e^{-t^2/2}$

La majoration : $\forall x \in [-a, a], \forall t \in]-\infty, +\infty[,\ \left| \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) \right| = |t|\ e^{xt} e^{-t^2/2} \leqslant |t|\ e^{|at|} e^{-t^2/2} \underset{t \to \pm\infty}{=} o(e^{-|t|})$

permet d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur tout segment $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, et d'en conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{xt} e^{-t^2/2} dt$

- Soit alors $h(x) = F(ix)\gamma(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2/2} dt \ .\ e^{-x^2/2} = g(x) e^{-x^2/2}$

h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g'(x) e^{-x^2/2} - x\ g(x) e^{-x^2/2}$

$h'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{xt} e^{-t^2/2} dt \ .\ e^{-x^2/2} - x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2/2} dt \ .\ e^{-x^2/2}$

En intégrant par parties $(t \mapsto t e^{-t^2/2})$ qui a pour primitive $(t \mapsto -e^{-t^2/2})$, on obtient :

$$h'(x) = \left[\underbrace{\left[-e^{xt}e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{xt}e^{-t^2/2} \right] e^{-x^2/2} - x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}e^{-t^2/2}dt \, . \, e^{-x^2/2}$$
$$= x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}e^{-t^2/2}dt \, . \, e^{-x^2/2} - x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}e^{-t^2/2}dt \, . \, e^{-x^2/2} = 0$$

Ayant une dérivée nulle, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

• En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = F(ix)\gamma(x) = F(0)\gamma(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \times 1 = \sqrt{2\pi}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F(ix)\gamma(x) = \sqrt{2\pi}}$$

d) On vient de montrer que, pour tout x réel, $F(ix) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\gamma(x)} = \sqrt{2\pi}\ e^{x^2/2}$

Pour l'instant, rien ne permet d'affirmer que cette formule est encore vraie pour tout x complexe.

Mais on sait que F est DSE sur $\mathbb{C}$: il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(ix) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (ix)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k i^k \ x^k$

$$= \sqrt{2\pi}\ e^{x^2/2} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^k \ k!}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} a_{2k+1} = 0 \\ a_{2k}\ i^{2k} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^k \ k!} \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} a_{2k+1} = 0 \\ a_{2k} = (-1)^k \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^k \ k!} \end{cases}$$

d'où, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi}}{2^k \ k!} \ z^{2k} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{2}\right)^k}{k!} = \sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \ F(z) = \sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}}$$

0.4.5 X - ENS

a) Montrer que les fonctions $(t \mapsto \ln(1 - \cos t))$, $(t \mapsto \ln(1 + \cos t))$ et $(t \mapsto \ln(\sin t))$ sont intégrables sur $]0, \pi[$.

Montrer que les trois intégrales ont la même valeur, qu'on calculera.

b) Scinder $X^{2n} - 1$ sur $\mathbb{C}$.

Calculer $(X^2 - 1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - 2\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) X + 1 \right)$

c) Pour $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$

Montrer que $f(x)$ est bien défini, et le calculer.

d) En déduire une seconde méthode pour calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - \cos t)dt$

SOLUTION :

0.5 Probabilités -

0.5.1 ESCP 2004 - 3.2

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}; \mathcal{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Soit Z et T les variables aléatoires définies par :

$Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance de la variable aléatoire A.

1. a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T.

b) Montrer que $E(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leqslant U \leqslant K$

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de l'espérance $E(U)$.

b) Calculer de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U), E(U^2), E(U^3)$.

3. a) Calculer pour tout $j \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geqslant j)$.
   b) En utilisant la question 2. a), retrouver la valeur de $E(T)$.

4. Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X.

***SOLUTION* :** 1. a) Z et T sont des variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Elles admettent donc des moments de tous ordres puisque les sommes qui les définissent sont des sommes finies : le moment d'ordre m de la vaiable aléatoire Z est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^m P(X = m)$

b) Puisque X et Y prennent les valeurs $0, 1, \cdots, n$, $X-Y$ prend ses valeurs dans $\{-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\}$, et $Z = |X - Y|$ prend les valeurs $0, 1, \cdots, n$.

Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$,

$$(Z = i) = [(X = i) \cap (Y = 0)] \cup [(X = i+1) \cap (Y = 1)] \cup \cdots \cup [(X = n) \cap (Y = n-i)]$$
$$\cup [(X = 0) \cap (Y = i)] \cup [(X = 1) \cap (Y = i+1)] \cup \cdots \cup [(X = n-i) \cap (Y = n)]$$

Chaque évènement $(X = i) \cap (Y = j)$ a pour probabilité $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ puisque X et Y suivent une loi uniforme sur $\{0, 1, \cdots, n-1, n\}$ et sont indépendantes.

L'évènement $(Z = i)$ étant décomposé en une union disjoints de $2(n - i + 1)$ évènements,

$$P(Z = i) = 2(n - i + 1) \times \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2(n - i + 1)}{(n+1)^2}$$

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{n} iP(Z = i) = \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^{n} i(n - i + 1)$$
$$= \frac{2}{(n+1)^2} \left((n+1) \sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2 \right)$$
$$= \frac{2}{(n+1)^2} \left((n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$
$$= \frac{2}{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(2n+1)}{6} \right) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{3n^2 + 3n - 2n^2 - n}{6} \right) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n}{6} \right)$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}}$$

c) Pour tous réels x et y ,

$$|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y) \quad \text{et} \quad x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$$

donc par différence, $T = \min(X, Y) = \frac{1}{2}\left[(X + Y) - |X - Y|\right] = \frac{1}{2}\left[X + Y - Z\right]$

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = \frac{1}{2}\left[E(X) + E(Y) - E(Z)\right]$

et comme X et Y suivent une loi uniforme sur $\{0, 1, \cdots, n-1, n\}$, $E(X) = E(Y) = \dfrac{n}{2}$

$$E(T) = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right] = \frac{3n^2 + 3n - n^2 - 2n}{6(n+1)} = \frac{2n^2 + n}{6(n+1)}$$

$$\boxed{E(T) = \frac{2n^2 + n}{6(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{3}}$$

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leqslant U \leqslant K$

a) $P(U \geqslant 1) = P(U = 1) + P(U = 2) + \cdots + P(K)$ car $(U \geqslant 0) = (U = 0) \cup P(U = 1) \cup \cdots \cup P(K)$ et ces évènements sont incompatibles. De même,

$P(U \geqslant 2) = P(U = 2) + P(U = 3) + \cdots + P(K)$

$P(U \geqslant 3) = P(U = 3) + P(U = 4) + \cdots + P(K)$

$\vdots$

$P(U \geqslant K) = P(K)$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$P(U \geqslant 1) + P(U \geqslant 2) + \cdots + P(U \geqslant K) = P(U = 1) + 2P(U = 2) + 3P(U = 3) + \cdots + K.P(K)$

ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j) = \sum_{j=0,1}^{K} j.P(U = j) = E(U)}$$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j) = \sum_{j=1}^{K} j^2 \left(\sum_{i=j}^{K} P(U=i)\right)$

$\displaystyle = 1^2 \sum_{i=1}^{K} P(U=i) + 2^2 \sum_{i=2}^{K} P(U=i) + 3^2 \sum_{i=3}^{K} P(U=i) + \cdots + K^2 \sum_{i=K}^{K} P(U=i)$

$= 1^2 P(U=1) + (1^2+2^2)P(U=2) + (1^2+2^2+3^2)P(U=3) + \cdots + (1^2+2^2+\cdots+K^2)P(U=K)$

$\displaystyle = \sum_{j=1}^{K}\left[\left(\sum_{i=1}^{j} i^2\right) P(U=j)\right] = \sum_{j=1}^{K} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} P(U=j)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{K} j^3 P(U=j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U=j) + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{K} j P(U=j)$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j) = \frac{1}{3}E(U^3) + \frac{1}{2}E(U^2) + \frac{1}{6}E(U)}$$

3. a) Remarquons que $(T \geqslant j) = (\min(X,Y) \geqslant j) = (X \geqslant j) \cap (Y \geqslant j)$
   Puisque X et Y sont indépendantes,

   $$P(T \geqslant j) = P(X \geqslant j) \times P(Y \geqslant j) = \frac{n-j+1}{n+1} \times \frac{n-j+1}{n+1} = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2$$

   $$\boxed{P(T \geqslant j) = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2}$$

• D'après la question 2.a), $\displaystyle E(T) = \sum_{j=1}^{n} P(T \geqslant j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2$

Or quand j varie de 1 à n, $h = n-j+1$ varie de n à 1. Par le changement d'indice $h = n-j+1$,

$$E(T) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

On retrouve bien la formule obtenue en 1.c)

4. $E(Z^2) = E(|X-Y|^2) = E((X-Y)^2)$ car X et Y sont à valeurs réelles,
   $= E(X^2+Y^2-2XY) = E(X^2)+E(Y^2)-2E(XY)$ par linéarité de l'epérance,
   $= E(X^2+Y^2-2XY) = E(X^2)+E(Y^2)-2E(X)E(Y)$ par indépendance de X et Y,
   $= 2E(X^2) - 2(E(X))^2$ puisque X et Y suivent la même loi

   $$\boxed{E(Z^2) = 2[E(X^2) - (E(X))^2] = 2V(X) = 2(\sigma(X))^2}$$

Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j$ en fonction de l'espérance $E(U)$.

0.5.2 ESCP 2005 - 3.17

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3. On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note p_n la probabilité de l'évènement $(X=n)$ et c_n la probabilité de l'évènement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.
   Calculer c_2, c_3 et c_4.
   b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.
2. a) Montrer que pour $n \geqslant 1, p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1-c_n)$
   b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27}p_n = 0$.
3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n$.
   Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite nulle.
   b) En déduire que pour $n \geqslant 2, p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right)$
   c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} p_n$.

   Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que X admet des moments à tous les ordres, et calculer son espérance.

SOLUTION **:** 1.a) p_1 est la probabilité de l'évènement $(X = 1)$, c'est à dire que le même numero sorte trois fois de suite en un seul tirage. Cet évènement est impossible, donc $p_1 = 0$.

Pour la même raison (le même numero ne peut sortir trois fois de suite en deux tirages), $p_2 = 0$.

p_3 est la probabilité que le même numero sorte trois fois de suite en trois tirage. Ces tirages peuvent être $(1, 1, 1)$, ou $(2, 2, 2)$, ou $(3, 3, 3)$, qui sont deux à deux incompatibles, et on chacun pour probabilté $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Donc $\boxed{p_3 = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}}$

p_3 est la probabilité que le même numero sorte pour la première fois trois fois de suite en trois tirage. Un tel évènement correspond au tirage d'un certain numéro i parmi $1, 2, 3$ au premier tirage (probabilité $= 1$), et d'un numero $j \neq i$ aux deuxième, troisième et quatrième tirage.

Les tirages favorables sont : $(1, 2, 2, 2), (1, 3, 3, 3), (2, 1, 1, 1), (2, 3, 3, 3), (3, 1, 1, 1), (3, 2, 2, 2)$. ils sont incompatible et on chacun pour probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^4$. Donc $\boxed{p_4 = \frac{6}{3^4} = \frac{2}{27}}$

$c_2 = P(X \leqslant 2) = P(\emptyset) = 0$
$c_3 = P(X \leqslant 3) = P(X = 3) = p_3 = \frac{1}{9}$
$c_4 = P(X \leqslant 4) = P((X = 3) \cup (X = 4)) = p_3 + p_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $(X \leqslant n) = (X \leqslant n - 1) \cup (X = n)$. Ces deux derniers évènements étant incompatibles,
$P(X \leqslant n) = P(X \leqslant n - 1) + P(X = n)$, donc $c_n = c_{n-1} + p_n$, de qui donne bien la relation :
$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ p_n = c_n - c_{n-1}.}$

2. a) L'évènement $(X = n + 3)$ est réalisé si et seulement si jusqu'au tirage de rang n, on n'a jamais tiré trois fois consécutivement le même numéro (c'est à dire si $(X > n)$) et si on a obtenu aux tirages de rangs $n + 1$, $n + 2$ et $n + 3$ le même numéro, distinct de celui obtenu au tirage de rang n.

Comme les tirages successifs sont indépendants,

$$p_{n+3} = \underbrace{(1 - c_n)}_{P(X>n)=1-P(X\leqslant n)} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2(1 - c_n) \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

b) $\forall n \geqslant 2, p_{n+3} - p_{n+2} = 2(1 - c_n) \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2(1 - c_{n-1}) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 2(-c_n + c_{n-1}) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{2}{27}p_n$.

donc $\boxed{p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27}p_n = 0}$.

3. a) $u_2 = p_4 - \frac{2}{3}p_3 - \frac{2}{9}p_2 = \frac{2}{27} - \frac{2}{27} + 0 = 0$.
$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = p_{n+3} - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} = p_{n+2} - \frac{2}{27}p_n - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1}$
$= \frac{1}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} - \frac{2}{27}p_n = \frac{1}{3}\left(p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n\right) = \frac{1}{3}u_n$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{3}$.

Puisque $u_2 = 0$, par une récurrence immédiate, $\boxed{\forall n \geqslant 2, u_n = 0}$

b) La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence linéaire à deux pas :
(R) : $\quad \forall n \geqslant 2,\ p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$

L'équation carctérisque associée est : $t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} = 0$

Son discriminant esst $\delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}$$

Les suites vérifiant la relation de récurrence (R) sont les suites de la forme :

$$v_n = a\left(\tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + b\left(\tfrac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles.}$$

Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \geqslant 2,\ p_n = a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n$, ou,

en posant $a' = a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2$ et $b' = b\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2$,

$$\begin{cases} p_2 = 0 = a' + b' \\ p_3 = \frac{1}{9} = a'x_1 + b'x_2 \end{cases}$$

d'où : $b' = -a'$ et $\frac{1}{9} = a'(x_1 - x_2) = a' \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$a' = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$ et $b' = -\frac{\sqrt{3}}{18}$

Finalement, pour tout $\boxed{n \geqslant 2,\ p_n = \frac{\sqrt{3}}{18}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right]}$

c) $|x_1| = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \simeq 0.91 < 1$ et $|x_2| = \frac{\sqrt{3}-1}{3} \simeq 0.24 < 1$

Les deux séries géométriques $\sum x_1^n$ et $\sum x_2^n$ convergent, puisque leur raison est en module strictement plus petite que 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n = \frac{\sqrt{3}}{18}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n\right] = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{1}{1-x_1} - \frac{1}{1-x_2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{3}{2-\sqrt{3}} - \frac{3}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2\sqrt{3} = 1$$

donc $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1}$, ce dont on pouvait se douter puisque le suite $(X = n)_{n\geqslant 2}$ est une suite complète d'évènements.

• $c_n = P(X \leqslant n) = \sum_{k=2}^{n} p_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=2}^{+\infty} p_k = 1$

Ceci montre qu'en répétant le tirage suffisamment de fois, l'obtention de trois numeros consécutifs égaux est un évènement presque sûr.

d) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum n^k x_1^n$ et $\sum n^k x_2^n$ convergent.

X admet donc des moments à tous les ordres.

• En particuler, pour $k = 1$, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} np_n$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\sum_{n=2}^{\infty} n\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right]$$

Par dérivation de la série entière sur l'ouvert $]-1,1[$, $\sum_{n=0,1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

d'où $E(X) = \frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{3}{1+\sqrt{3}}\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{3}{1-\sqrt{3}}\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})}\left[\frac{9}{(2-\sqrt{3})^2} - 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})}\left[\frac{9}{(2+\sqrt{3})^2} - 1\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})}\left[9(2+\sqrt{3})^2 - 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})}\left[9(2-\sqrt{3})^2 - 1\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})}\left[62+36\sqrt{3}\right] - \frac{\sqrt{3}}{6(1-\sqrt{3})}\left[62-36\sqrt{3}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{12}\left[62+36\sqrt{3}\right] + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{12}\left[62-36\sqrt{3}\right]$$
$$= \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left[31+18\sqrt{3}\right] + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left[31-18\sqrt{3}\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[93-54+23\sqrt{3}+93-54-23\sqrt{3}\right] = \frac{78}{6} = 13 \qquad \boxed{E(X) = 13}$$

0.5.3 ESCP 2005 - 3.29

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par : $\quad f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$, que l'on notera u_n.

Etudier les variations et la limite de la suite (u_n).

2. a) Montrer qu'il existe des réels k et q pour lesquels il existe des variables aléatoires X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q.u_n^n \ \text{ et } \ P(Y = n) = k\left(\tfrac{1}{2} - u_n\right)$$

b) X et Y étant de telles variables, montrer que X et Y admettent une espérance, qui vérifient :

$$E(X) \leqslant 2q \ \text{ et } \ E(Y) \leqslant \tfrac{k}{4}$$

X et Y admettent elles une variance ?

SOLUTION : 1. La fonction f_n a une dérivée positive sur $[0, +\infty[$ et est donc strictement croissante sur cet intervalle. Elle s'annulera au plus une fois sur $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, $f_n(0) = -4 < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n, polynômiale, étant continue, elle prend toute valeur entre $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, et en particulier la valeur 0.

Finalement, il existe un unique réel $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + 16u_n^2 - 4 = u_n^{n+1} - u_n^n + \underbrace{u_n^n + 16u_n^2 - 4}_{=0} = u_n^n \underbrace{(u_n - 1)}_{<0} < 0$

$$\left.\begin{array}{r} f_{n+1}(u_n) < 0 \\ f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \\ f_{n+1} \text{ est strictement croissante} \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n < u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc elle est convergente, et de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$

• L'encadrement $0 < u_n < \frac{1}{2}$ entraine que $0 < u_n^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et par encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$

L'égalité $f_n(u_n) = 0 = u_n^n + 16u_n^2 - 4$ entraîne alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} 16u_n^2 = 4$, et puisque la suite (u_n) est à termes positifs, que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}}$

2. a) La majoration $0 < u_n^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ où la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente entraîne, par majoration, que la série $\sum u_n^n$ converge, et que sa somme, σ, est strictement positive.

En prenant $q = \frac{1}{\sigma}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q u_n^n = q \times \sigma = 1$.

Il existe donc une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q\, u_n^n$

• Il s'agit de montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{2} - u_n\right)$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0 = u_n^n + 16\left(u_n - \frac{1}{2}\right)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$

donc $\left|\frac{1}{2} - u_n\right| = \dfrac{u_n^n}{16\left(\frac{1}{2} + u_n\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{u_n^n}{16} = \dfrac{1}{16} u_n^n$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

On a vu que la série $\sum u_n^n$ convergeait. L'équivalence précédente montre alors que la série $\sum \left(\frac{1}{2} - u_n\right)$ converge absolument, et que sa somme est positive, puisque $0 < u_n < \frac{1}{2}$. En notant s sa somme, et en prenant $k = \frac{1}{s}$,

on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k\left(\dfrac{1}{2} - u_n\right) = k \times s = 1$.

Il existe donc une variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = k\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$

b) L'encadrement $0 < q\, u_n^n < q\left(\frac{1}{2}\right)^n$, entraîne que $0 < nP(X = n) < qn\left(\frac{1}{2}\right)^n$ où la série $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, et par sommation,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) \leqslant q \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par dérivation de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ on obtient : $\forall x \in]-1, 1[,\ \sum\limits_{n=0,1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

d'où : $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) \leqslant q \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{q}{2} \times \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2q$

• Reprenons l'égalité $P(Y = n) = k\left(\frac{1}{2} - u_n\right) = k\,\dfrac{u_n^n}{16\left(\frac{1}{2} + u_n\right)} \leqslant k\dfrac{u_n^n}{8} \leqslant \dfrac{k}{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\text{d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y = n) \leqslant \frac{k}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{k}{16} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{k}{4}$$

• Les majorations $0 < n^2 P(X = n) = q.n^2 u_n^n < q.n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et

$0 < n^2 P(Y = n) = k.n^2\left(\frac{1}{2} - u_n\right) \leqslant \frac{k}{8} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et la convergence des séries $\sum n^2 x^n$ pour $x \in]-1, 1[$ entraine la convergence des moments d'ordre 2 $E(X^2) = \sum n^2 P(X = n)$ et $E(Y^2) = \sum n^2 P(Y = n)$ et l'existence des variances $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et $V(Y)$.

0.5.4 ESCP 2006 - 3.2

Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise d'un jeton, en notant, à chaque fois, le numero obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre aléatoire de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Quelles sont les valeurs prises par T_n ?
   b) Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$
   c) Calculer $P(T_n = 2)$.
2. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$.

Déterminer une relation liant $P(T_{n+1} = k)$, $P(T_n = k)$,$P(T_n = k-1)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme :

$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)X^k$$

a) Prouver l'égalité : $\quad G_{n+1} = \dfrac{1}{N}(X - X^2)G'_n + XG_n$

b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à G_n, exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$, N et n, puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de N et n .

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{E(T_n)}{N}$

SOLUTION **:** 1. a) T_n compte le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages. L'urne ne comprenant que N numéros distintcs, $T_n \leqslant N$.

Puisque'on a procédé à n tirages, $T_n \leqslant n$.

Enfin, pout tout nombre $k \in [[1, \min(n, N)]]$, T_n peut prendre la valeur k, par exemple dans la succession tirage $(1, 2, 3, \cdots, k-1, k, 1, 1, \cdots, 1)$ de n tirages.

Donc les valeurs prises par T_n sont $[[1, \min(n, N)]]$.

b) L'avènement $(T_n = 1)$ correspond aux tirages $\underbrace{(k, k, \cdots, k)}_{n\ fois}$ où $k \in [[1, \min(n, N)]]$. Il y a N manières de choisir k, entre 1 et N.

Il y a par ailleurs $\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n\ fois} = N^n$ successions de n tirages avec remise possibles.

Donc $\boxed{P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}}$

• Si $n > N$, L'évènement $T_n = n$ est impossible (en n tirages successifs, on ne peut pas avoir n résultts distincts, puisque le nombre de boules distinctes est $N < n$). Dans ce cas, $\boxed{P(T_n = n) = 0}$

• Si $n \leqslant N$, L'évènement $T_n = n$ correspont aux possibiltés d'avoir n tirages distincts.

Il y a N possibilités pour le premier tirage, $N-1$ pour le second, $\cdots$, et $N-n+1$ pour le n^e tirage. Donc

$$\boxed{P(T_n = n) = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!\, N^n} = \frac{(N-1)!}{(N-n)!\, N^{n-1}}}$$

c) L'évènement $(T_n = 2)$ est formé des successions de n tirages ne comprenant que deux mêmes numeros p et q, distincts, appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \cdots, N\}$. Il y a $\dbinom{N}{2} = \dfrac{N(N-1)}{2}$ manières de choisir ces deux numeros. Le nombre de successions de n tirages ne comportant que ces deux numeros est $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\ fois} = 2^n$.

Son comptés dans ces 2^n tirages les successions $(p, p, \cdots, p)$ et $(q, q, \cdots, q)$. Restent donc $2^n - 2$ successions de n tirages ayant exactement p et q comme résultats.

Finalement, $\boxed{P(T_n = 2) = \dfrac{\binom{N}{2} \times (2^n - 2)}{N^n} = \dfrac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}}$

2. a) Si $T_{n+1} = k$, alors $T_n = k$ ou $T_n = k-1$.

Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} = k) &= P[(T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)] + P[(T_{n+1} = k) \cap (T_n = k-1)], \\ &= P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k)] \times P(T_n = k) + P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k-1)] \times P(T_n = k-1) \end{aligned}$$

Dans le cas où $T_n = k$, au $(n+1)^e$ tirage, on doit obtenir l'un des k numéros déjà apparus lors des n premiers tirages : cela donne k possibilité : $P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k)] = \frac{k}{N}$

Dans le cas où $T_n = k-1$, au $(n+1)^e$ tirage, on doit obtenir l'un des $N - (k-1)$ numéros qui ne sont pas lors des n premiers tirages : cela donne $N - (k-1)$ possibilité : $P[(T_{n+1} = k)|(T_n = k-1)] = \frac{N-k+1}{N}$

En reportant ces deux probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\boxed{P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \times P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} \times P(T_n = k-1)}$$

3. On considère le polynôme :

$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{N} P(T_n = k)X^k$$

alors $\displaystyle G'_n(X) = \sum_{k=1}^{N} k.P(T_n = k)X^{k-1}$

a) $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_{n+1}(X) = \sum_{k=1}^{N} P(T_{n+1} = k)X^k$. $\quad$ En utilisant la question précédente,

$$G_{n+1} = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}\times P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\times P(T_n=k-1)\right]X^k$$
$$= \frac{X}{N}\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k+1}{N}\times P(T_n=k-1)X^k$$

Par le changement d'indice $h=k-1$ dans la deuxième somme,

$$G_{n+1} = \frac{X}{N}\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}+\sum_{h=0}^{N-1}\frac{N-h}{N}\times P(T_n=h)X^{h+1}$$

Dans la dernière somme, on peut faire varier h jusqu'à la valeur N puisque le coefficient $N-h$ est alors nul:

$$G_{n+1} = \frac{X}{N}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)X^{k-1}}_{G'_n(X)}+\underbrace{\sum_{h=0}^{N}P(T_n=h)X^{h+1}}_{XG_n(X)}-\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{h=0}^{N}hP(T_n=h)X^{h+1}}_{X^2G'_n(X)}$$

ce qui donne bien l'égalité : $\boxed{G_{n+1}=\frac{1}{N}(X-X^2)G'_n+XG_n}$

b) L'égalité $G'_n(X)=\sum_{k=1}^{N}k.P(T_n=k)X^{k-1}$ donne au point 1 :

$$G'_n(1)=\sum_{k=1}^{N}k.P(T_n=k)=E(T_n) \qquad \boxed{E(T_n)=G'_n(1)}$$

• En dérivant l'égalité : $G_{n+1}=\frac{1}{N}(X-X^2)G'_n+XG_n$, on obtient :

$$G'_{n+1}=\frac{1}{N}(X-X^2)G''_n+\frac{1}{N}(1-2X)G'_n+XG'_n+G_n\ ,$$

et en prenant la valeur au point 1 :

$$G'_{n+1}(1)=-\frac{1}{N}G'_n(1)+G'_n(1)+G_n(1).$$

En injectant les égalités : $E(T_n)=G'_n(1)$ et $E(T_{n+1})=G'_{n+1}(1)$, et en tenant compte de l'égalité $G_n(1)=\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)=1$, on obtient :

$$E(T_{n+1})=-\frac{1}{N}E(T_n)+E(T_n)+1. \qquad \text{Donc } \boxed{E(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1}$$

• La suite $(E(T_n))_{n\geqslant 1}$ satisfait une relation de récurrence arithmético-géométrique.

On recherche $a\in\mathbb{R}$ tell que la suite $(v_n)=(E(T_n)-a)$ satisfasse une relation géometrique :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}=E(T_{n+1})-a=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1-a$
$=\left(1-\frac{1}{N}\right)(v_n+a)+1-a$
$=\left(1-\frac{1}{N}\right)v_n+\left(1-\frac{1}{N}\right)a+1-a$
$=\left(1-\frac{1}{N}\right)v_n+-\frac{1}{N}a+1$

Cette suite est géométrique, et de raison $\left(1-\frac{1}{N}\right)$ si $a=N$

En prenant $a=N$, on a donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}v_1=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(E(T_1)-N)$

Or $E(T_1)=P(T_1=1)=1$ car $\forall k\geqslant 2$, l'évènement $(T_1=k)$ est impossible.

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E(T_n)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(1-N)+N=N\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{N}-1\right)+1\right)$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E(T_n)=N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)}$$

c) $\dfrac{E(T_N)}{N}=1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N=1-e^{N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty}e^{N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}=e^{-1}$, donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{E(T_N)}{N}=1-e^{-1}}$

0.5.5 ESCP 2006 - 3.9

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants, et qu'à chaque lancer, la pièce donne "Face" avec la probabilité p $(0<p<1)$, et "Pile" avec la probablité $q=1-p$.

On s'intéresse aux nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "Face" de suite.

On suppose donné un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note U_n l'évènement "on obtient deux "Face" de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$", et on pose $u_n=P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'évènement "les n premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le n^e lancer donne "Face" ", et B_n l'évènement "les n premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le n^e lancer donne "Pile" "

On pose $x_n = P(A_n),\ y_n = P(B_n)$

1.a) Calculer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.

b) Pour $n \geqslant 2$, trouver une relation simple entre x_n et u_n.

c) Pour $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelle :

$$P(A_{n+1}|A_n),\ P(A_{n+1}|B_n),\ P(B_{n+1}|A_n),\ P(B_{n+1}|B_n)$$

d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p\, y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose que $p = 1/2$.

a) On pose $v_n = 2^n y_n$.
Déterminer une relation de récurrence entre v_{n-1}, v_n et v_{n+1}.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de x_n puis de u_n en fonction de n.

c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, et en donner une interprétation.

SOLUTION **:** 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons F_k l'évènement : le k^e lancer est "Face"
et P_k l'évènement : le k^e lancer est "Pile" .

Avec ces notations, $u_1 = P(U_1) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1).P(F_2)$ (les lancers 1 et 2 sont indépendants)

$$\boxed{u_1 = p^2}$$

$x_2 = P(A_2) = P(P_1 \cap F_2) = P(P_1).P(F_2) = p.q$

$y_2 = P(B_2) = P[(F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_2)] = P(F_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap P_2)$ (évènements incompatibles)

$\quad = P(F_1).P(P_2) + P(P_1).P(P_2) = p(1-p) + (1-p)^2 = 1 - p$

$u_2 = P(U_2) = P(P_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(P_1).P(F_2).P(F_3) = (1-p)p^2 = q.p^2$

$x_3 = P(A_3) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3)$

$\quad = p(1-p)^2 + p^2(1-p) = p(1-p)[(1-p)+p] = p(1-p) = pq$

$y_3 = P(A_3) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3)$

$\quad = (1-p)^3 + 2p(1-p)^2 = (1-p)^2(1-p+2p) = (1+p)q^2$

$u_3 = P(U_3) = P(P_2 \cap F_3 \cap F_4) = p^2(1-p)$

b) $u_n = P(U_n) = P($on obtient deux "Face" de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1)$

$x_n = P(A_n) = P($les n premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le n^e lancer donne "Face"$)$

Or $U_n = A_n \cap F_{n+1}$, et puisque les lancers successifs sont indépendants, F_{n+1} est indépendant de A_n, donc:

$u_n = P(U_n) = P(A_n \cap F_{n+1}) = P(A_n).P(F_{n+1}) = p.x_n \qquad \boxed{u_n = p.x_n}$

c) A_n est l'évènement : "les n premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le n^e lancer donne "Face", et A_{n+1} est l'évènement : "les $n+1$ premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le $(n+1)^e$ lancer donne "Face".

A_{n+1} entraîne que les lancers n et $n+1$ ne sont pas F_nF_{n+1}, ce qui est contraire aux définitions de A_n (le n^e lancer donne "Face") et de A_{n+1} (le $(n+1)^e$ lancer donne "Face"). Donc A_n et A_{n+1} sont incompatibles.

$$\boxed{P(A_{n+1}|A_n) = 0}$$

• B_n est l'évènement : "les n premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le n^e lancer donne "Pile", et A_{n+1} est l'évènement : "les $n+1$ premiers lancers ne donnent jamais deux "Face" de suite, et le $(n+1)^e$ lancer donne "Face".

Donc $A_{n+1} = B_n \cap F_{n+1}$ et $A_{n+1} \cap B_n = A_{n+1}$. Dès lors, par indépendance,

$P(A_{n+1} \cap B_n) = P(A_{n+1}) = P(B_n).P(F_{n+1}) = pP(B_n)$

et $\boxed{P(A_{n+1}|B_n) = \dfrac{P(A_{n+1} \cap B_n)}{P(B_n)} = p}$

• $B_{n+1} = A_n \cap P_{n+1}$, donc $B_{n+1} \cap A_n = B_{n+1}$.

d'où : $P(B_{n+1} \cap A_n) = P(B_{n+1}) = P(A_n).P(P_{n+1}) = qP(A_n)$ et donc :

et $\boxed{P(B_{n+1}|A_n) = \dfrac{P(B_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = P(P_{n+1}) = q = 1 - p}$

• $B_{n+1} \cap B_n = (\underbrace{\cdots\cdots P_n}_{B_n} P_{n+1}) = B_n \cap P_{n+1}$, d'où : $P(B_{n+1} \cap B_n) = P(B_n).P(P_{n+1}) = qP(B_n)$ et donc :

et $\boxed{P(B_{n+1}|B_n) = \dfrac{P(B_{n+1} \cap B_n)}{P(B_n)} = q}$

d) Pour $n \geqslant 2$, le couple (A_n, B_n) forme un système complet d'évènements, et d'après la formule des probabilités totales,

$$x_{n+1} = P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{=0} P(A_n) + \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{p} \underbrace{P(B_n)}_{y_n} = p.y_n$$
$$y_{n+1} = P(B_{n+1}) = \underbrace{P(B_{n+1}|A_n)}_{=q} P(A_n) + \underbrace{P(B_{n+1}|B_n)}_{q} \underbrace{P(B_n)}_{y_n} = q.x_n + q.y_n = q(x_n + y_n)$$

donc $\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = p\, y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}}$

2. a) En multipliant l'égalité $y_{n+1} = q(x_n + y_n)$ par 2^{n+1}, on obtient :
$v_{n+1} = 2^{n+1} y_{n+1} = q(2^{n+1} x_n + 2^{n+1} y_n) = 2^{n+1} q x_n + 2q v_n$
d'après la première relation, $2^{n+1} x_n = p\, 2^{n+1}\, y_{n-1} = 4 p v_{n-1}$
d'où : $v_{n+1} = 2q v_n + 4pq v_{n-1}$, et, puisque $p = 1/2 = q$, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_{n+1} = v_n + v_{n-1} \quad (*)}$

b) (v_n) vérifie une relation de récurrence linéaire à deux pas.
L'équation polynomiale associée, $R^2 - r - 1 = 0$ a pour solutions $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 2,\ v_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
Pour $n = 2,\ v_2 = 4 y_2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2 = \lambda \alpha^2 + \mu \beta^2$
Pour $n = 3,\ v_3 = 8 y_3 = 8 \times \frac{3}{8} = 3 = \lambda \alpha^3 + \mu \beta^3$
$v_3 - \beta v_2 = 3 - 2\beta = \lambda \alpha^3 - \lambda \alpha^2 \beta = 2 + \sqrt{5} = \lambda \alpha^2 (\alpha - \beta) = \lambda \alpha^2 \sqrt{5}$
d'où $\lambda = \frac{2+\sqrt{5}}{\alpha^2 \sqrt{5}}$
de manière analogue, $v_3 - \alpha v_2 = 3 - 2\alpha = 2 - \sqrt{5} = \mu \beta^2 (\beta - \alpha) = -\mu \beta^2 \sqrt{5}$
d'où $\mu = -\frac{2-\sqrt{5}}{\beta^2 \sqrt{5}}$
????????????????????????????

0.5.6 ESCP 2006 - 3.10

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Un urne contient une boule noire et $n-1$ boules blanches.

On vide l'urne en effectuant des tirages successsifs de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième avec remise, le troisième sans remise, le quatrième avec remise....

D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise, et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?
b) Pour tout $j \in [[1, n-1]]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{eme}$ tirage ?
Combien ne reste-t-il avant le $(2j+1)^{eme}$ tirage ?

2. On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au k^{eme} tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.
a) Calculer $P(X_1 = 1)$ et $P(X_2 = 1)$
b) Pour tout entier $j \in [[1, n-1]]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$

3. Pour tout $j \in [[1, n-1]]$, on note U_j l'évènement "On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)^{eme}$ tirage"
a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{eme}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$
b) Montrer que pour tout $j \in [[1, n-1]]$, on a : $P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$
c) Exprimer l'évènement $(X = 1)$ en fonction des évènements (U_j) et en déduire la valeur de $P(X = 1)$.
Calculer $P(X = n)$.

SOLUTION : 1.a) Après le premier tirage, sans remise, restent dans l'urne $n-1$ boules.
Après le second tirage, avec remise, restent dans l'urne $n-1$ boules.
Après le 3^e tirage, sans remise, restent dans l'urne $n-2$ boules.
Après le 4^e tirage, avec remise, restent dans l'urne $n-2$ boules.
par récurrence immédiate, après le $(2j)^e$ tirage, avec remise, restent dans l'urne $n-j$ boules, après le $(2j+1)^e$ tirage, sans remise, restent dans l'urne $n-j-1$ boules.
Après le $(2n-2)^e = (2(n-1))^e$ tirage, avec remise, reste dans l'urne $n-(n-1) = 1$ boule.
Après le $(2n-1)^e = (2(n-1)+1)^e$ tirage, la dernière est tirée sans remise, et l'urne est vide.
Donc $\boxed{N = 2n-1}$

b) D'après le dénombrement effectué ci-dessus, pour tout $j \in [[0, n-1]]$, avant le $(2j)^e$ tirage, c'est à dire après le $(2j-1)^e = (2(j-1)+1)^e$ tirage, il reste $n-(j-1)+1 = n-j$ boules dans l'urne.
Avant le $(2j+1)^e$ tirage, c'est à dire après le $(2j)^e$ tirage, il reste $n-j$ boules dans l'urne.

2.a) $(X_1 = 1)$ est l'évènement : "au premier tirage, la boule noire sort".

Au premier tirage, l'urne contient n boules, dont une noire. la probabilité que cette boule sorte soit est donc $\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}}$

$(X_2 = 1)$ est l'évènement : "au deuxième tirage, la boule noire sort". Tout va dépendre si l'urne contient encore la boule noire. Les deux évènements $(X_1 = 1)$ (le premier tirage est une boule noire), et $(X_1 = 0)$ (le premier tirage est une boule blanche) forment un système complet d'évènements

Donc $(X_2 = 1) = [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)] \cup [(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)]$, et

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 1) &= P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) \\
&= \underbrace{P((X_2 = 1)|(X_1 = 1))}_{=0\ (incompatibilite)} P(X_1 = 1) + P((X_2 = 1)|(X_1 = 0))P(X_1 = 0) \\
&= P((X_2 = 1)|(X_1 = 0))P(X_1 = 0) = \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_2 = 1) = \frac{1}{n}}$$

b) L'évènement $(X_{2j+1} = 1)$ signifie que la boule noire sort au $(2j+1)^e$ tirage. Cela entraîne qu'elle n'est pas sortie aux tirages de rangs 1, 3, $\cdots, 2j-1$, car pour chacun de ces tirages d'ordre impair, la boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

Par compte, il est indifférent que la boule noire sorte, ou non, à l'un quelconque des tirages d'ordre 2, 4, $\cdots, 2j$, puisque la boule sortie à ces tirages de rangs pairs est remise dans l'urne.

Donc $(X_{2j+1} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_5 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j+1} = 1)$

Rappelons que $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C).P(B \cap C) = P(A|B \cap C).P(B|C).P(C)$

et plus généralement,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p) = P(A_1|A_2 \cap \cdots \cap A_p).P(A_2|A_3 \cap \cdots \cap A_p) \cdots P(A_{p-1}|A_p).P(A_p)$$

$$\begin{aligned}
P(X_{2j+1} = 1) = {} & P((X_{2j+1} = 1)|(X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_5 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0)) \\
& \times P((X_{2j-1} = 0)|(X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_5 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-3} = 0)) \\
& \vdots \\
& \times P((X_5 = 0)|(X_1 = 0) \cap (X_3 = 0)) \\
& \times P((X_3 = 0)|(X_1 = 0)) \\
& \times P(X_1 = 0)
\end{aligned}$$

$$P(X_{2j+1} = 1) = \frac{1}{n-j} \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{n-j+1}{n-j+2} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Comme au $(2j)^e$ tirage la boule sortie a été remise dans l'urne, la situation avant le $(2j)^e$ tirage est la même que la situation avant le $(2j+1)^e$ tirage.

donc $\boxed{P(X_{2j+1} = 1) = P(X_{2j} = 1) = \frac{1}{n}}$

0.5.7 ESCP 2007 - 3.17

1. Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives r et b, avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$. Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.

Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne 1 point au k^{ieme} tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.

Soit G la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des n tirages.

a) Pour $k \in [[2, n]]$, on définit la variable aléatoire X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k.
Préciser la loi de X_k et calculer la covariance $\text{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in [[2, n-1]]$.
b) Calculer l'espérance et la variance de G.
c) Peut-on choisir r et b pour que G suive une loi binomiale ?

3. On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire T_n par :
si $G \geqslant 1$, T_n est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, T_n vaut $n+1$.
a) Déterminer la loi de T_n.
b) Dans cette question, $r = b = 1/2$.
Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $1/2$.
En déduire une estimation de $E(T_n)$ quand n est grand.

SOLUTION : 1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables aléatoires qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q.

On sait que si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$

• Réciproquement, supposons que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Alors $X(\Omega) = X(\Omega) = \{0, 1\} \implies (XY)(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc $\boxed{XY \text{ suit une loi de Bernoulli}}$.

On sait qu'une loi de Bernoulli a pour paramètre $E(XY) = P(XY = 1)$

Or $\text{Cov}(X, Y) = 0 = E(XY) - E(X)E(Y) \implies E(XY) = E(X)E(Y) = p \times q$

Donc $P[(X=1)\cap(Y=1)] = P(XY=1) = E(XY) = p.q = P(X=1).P(Y=1)$. Les évènements $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants.

On sait qu'alors les évènements $(X=1)$ et $\overline{(Y=1)} = (Y=0)$ le sont, de même que les évènements $(X=0) = \overline{(X=1)}$ et $(Y=1)$ et les évènements $(X=0) = \overline{(X=1)}$ et $(Y=0) = \overline{(X=1)}$.

On a fait le tour de tous les évènements $(X=k)$, $(Y=h)$ pour des lois de Bernoulli (seulement 4 cas à considérer).

Donc $\boxed{\text{les lois } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

2. a) Notons R_k l'évènement : la k^e boule tirée est rouge $(1 \leqslant k \leqslant n)$
et B_k l'évènement : la k^e boule tirée est blanche.

X_k est égale au gain du joueur pour le tirage de rang k, à savoir $+1$ si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent et 0 sinon.

X_k ne peut prendre que les valeurs 1 ou 0 ; elle suit une loi de Bernoulli.

$X_k = 1$ si les tirages de rangs $k-1$ et k sont l'un des deux types suivantes :

$(\cdots, R_{k-1}, B_k, \cdots)$ ou $(\cdots, B_{k-1}, R_k, \cdots)$. Ces deux cas qui s'excluent mutuellement ont pour probabilités respectives : $r \times b$ et $b \times r$.

Donc $P(X_k = 1) = r \times b + b \times r = 2b.r$. Il en résulte que $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2b.r)}$

• Pour chacune des variables aléatoires X_k et X_{k+1} qui suivent une loi de Bernoulli de paramères $b.r$, $E(X_k) = E(X_{k+1}) = 2b.r$

Or $\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_k X_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1})$

$X_k.X_{k+1}$, produit de deux variables suivant une loi de Bernoulli, suit encore une loi de Bernoulli, de paramètre $P(X_k.X_{k+1} = 1)$

$$\begin{aligned} P(X_k.X_{k+1} = 1) &= P[(X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)] = P[(\cdots, R_{k-1}, B_k, R_{k+1} \cdots) \cup (\cdots, B_{k-1}, R_k, B_{k+1} \cdots)] \\ &= r.b.r + b.r.b = b.r\underbrace{(b+r)}_{=1} = b.r \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_k X_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1}) = b.r - 4b^2.r^2}$

b) Par linéarité de l'espérance, $E(G) = E\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} E(X_k) = (n-1) \times 2.b.r$

$$\boxed{E(G) = 2(n-1)br}$$