Oraux 2016 - Solutions

PSI* ORAUX 2016 -

Note : la section 1 contient des sujets CCP et ENSAM.
la section 2 contient des sujets Centrale - Supelec, dont 9 sujets 2015 issus du site
(voir **https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/SujetsOral2015p/PSI**)
L'épreuve maths 1 dure 30mn sans préparation, l'épreuve maths 2 dure 30mn avec préparation de 30 mn, avec usage de Python. L'une et l'autre ont pour coefficient 12/100 .
la section 3 contient des sujets Mines-Ponts et écoles du même groupe .
la section 4 contient des sujets X-ENS

Les exercices plus difficiles sont indiquées par une ou deux **

1 CCP - ENSAM : -

1.1 CCP 00 :

Exercice 1 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $e^x - e^{-x} = 2$

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\text{sh}(t))^n dt$ où $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$

Montrer que J_n est bien définie, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$

3) Trouver une relation liant J_{n+2}, J_n, et $\sqrt{2}$

En déduire un équivalent de J_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION : 1) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - e^{-x} = 2 \iff (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$

Le polynôme $Q(Y) = Y^2 - 2Y - 1$ a pour discriminant $\delta = 8$ et pour racines $y_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} > 0$ et $y_2 = 1-\sqrt{2} < 0$

L'équation $e^x = y_2$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ car $e^x > 0$ et $y_2 < 0$

$\boxed{\text{L'équation } e^x - e^{-x} = 2 \text{ admet une unique racine réelle : } \alpha = \ln(1+\sqrt{2})}$

2) Remarquons que puisque α est racine de l'équation $e^x + e^{-x} = 2$, elle vérifie l'égalité $\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = 1$, c'est à dire sh $\alpha = 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\text{sh}(t))^n$ est continue sur le segment $[0, \alpha]$, donc est intégrable sur ce segment. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\text{sh}(t))^n dt$ est donc définie.

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur le segment $[0, \alpha]$. Donc
$\forall t \in [0, \alpha[, 0 \leqslant \text{sh}t < \text{sh}\alpha = 1$

La suite $((\text{sh}(t))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suité géométrique de raison strictement inférieure à 1. Elle a donc pour limite 0. La suite de fonctions $(t \mapsto (\text{sh}(t))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur le semi ouvert $[0, \alpha[$ vers la fonction nulle. Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \alpha[, 0 \leqslant (\text{sh}(t))^n \leqslant 1$, où la fonction constante 1 est intégrable sur $[0, \alpha[$. D'après le théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\alpha} (\text{sh}(t))^n dt = \int_0^{\alpha} \left(\lim_{n\to+\infty} (\text{sh}(t))^n\right) dt = \int_0^{\alpha} 0\ dt = 0 \qquad \text{Donc } \boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

3) Les fonctions "sh" et compagnie étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \alpha]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut procéder à une intégration par parties comme suit :

$$J_{n+2} = \int_0^{\alpha} \text{sh}(t)\ \text{sh}^{n+1}(t) dt = \left[\text{ch}(t)\text{sh}^{n+1}(t)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} (n+1)\text{ch}^2(t)\text{sh}^n(t) dt$$

$$= \text{ch}(\alpha) - (n+1) \int_0^{\alpha} (\text{sh}^2(t)+1)\text{sh}^n(t) dt \qquad (\text{car sh } \alpha = 1)$$

$$= \text{ch}(\alpha) - (n+1) \left(\int_0^{\alpha} \text{sh}^{n+2}(t) + \text{sh}^n(t) dt\right)$$

$J_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1)(J_{n+2} + J_n) \implies (n+2)J_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1)J_n$

Par ailleurs, $\text{ch}^2(\alpha) = \text{sh}^2(\alpha) + 1 = 1 + 1 = 2$, donc $\boxed{\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}}$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)J_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)J_n}$

• $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^\alpha \text{sh}^n(t)\underbrace{(\text{sh}(t)-1)}_{\leqslant 0}\,dt \leqslant 0.$ La suite (J_n) est donc décroissante.

alors $(2n+3)J_{n+2} = (n+2)J_{n+2}+(n+1)J_{n+2} \leqslant \underbrace{(n+2)J_{n+2}+(n+1)J_n}_{=\sqrt{2}} \leqslant (n+2)J_n+(n+1)J_n = (2n+3)J_n$

$$\Longrightarrow (2n+3)J_{n+2} \leqslant \sqrt{2} \leqslant (2n+3)J_n$$

$$\Longrightarrow (2n-1)J_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant (2n+3)J_n \quad \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2n+3} \leqslant J_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \quad \Longrightarrow \boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2n}}$$

1.2 CCP C.N. :

Exercice 1 : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+e^{-nx})$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonctions f.

b) Etudier la continuité de f.

c) Préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $f(\mathscr{D})$

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que : H est stable par $u \iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \text{Im}(u - \lambda Id_E) \subset H$

2) Déterminer les sous espaces de E stables par f, f étant un endomorphisme de E qui a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dans une base } \mathscr{B}.$$

<u>SOLUTION</u> : Exercice 1 : a) Si $x \leqslant 0$, $\ln(1+e^{-nx}) \geqslant \ln 2$, la suite $\ln(1+e^{-nx})^n$ ne converge pas vers 0, et la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+e^{-nx})$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$, $\quad \ln(1+e^{-nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nx} = (e^{-x})^n$, et cette série géométrique converge puisque $0 < e^{-x} < 1$

Le domaine de définition de la fonction f est donc $\boxed{\mathcal{D} =]0,+\infty[}$

b) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, $u_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$

Chaque fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$, comme composée de fonctions logarithme et exponentielle qui sont continues.

Soit $a > 0$, quelconque, fixé.

Pour tout $x \geqslant a$, $nx \geqslant na \implies e^{-nx} \leqslant e^{-na} \implies 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$

Donc $\|u_n\|_{[a,+\infty[}^{\infty} \leqslant u_n(a)$, et puisque la série $\sum u_n(a)$ converge, par majoration la série numérique $\sum \|u_n\|_{[a,+\infty[}^{\infty}$ converge aussi. Ce qui montre la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$. La fonction f est alors continue sur $[a,+\infty[$ comme limite uniforme d'une série de fonctions continues. Puisque ceci est valable pour tout $a > 0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$.

c) Puisque la série converge uniformément sur $[a,+\infty[$, d'après le théorème de la double limite appliqué aux séries, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} u_n(x)\right)$

et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-nx}) = \ln 1 = 0$, on en conclut que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) • Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(u - \lambda Id_E) \subset H$.

Alors, $\forall x \in H,\ u(x) - \lambda x \in H$; $\exists y \in H,\ u(x) - \lambda x = y$, donc $u(x) = \lambda \underbrace{x}_{\in H} + \underbrace{y}_{\in H} \in H$

On a montré que $\forall x \in H,\ u(x) \in H$, c'est à dire que H est stable par u.

1) • Supposons que H est stable par u. Soit $e_n \in E - H$, de sorte que $E = H \oplus \text{Vect}(e_n)$.

$u(e_n)$ est un vecteur de E, il se décompose sous la forme : $u(e_n) = \underbrace{h}_{\in H} + \alpha e_n$

Soit $x \in E$. x se décompose sous la forme $x = \underbrace{h'}_{\in H} + \beta e_n$

$$\begin{aligned} \text{alors } u(x) &= \underbrace{u(h')}_{\in H} + \beta u(e_n) = u(h') + \beta(h + \alpha e_n) \\ &= u(h') + \beta h + \alpha \underbrace{\beta\, e_n}_{=x-h'} \\ &= u(h') + \beta h + \alpha(x - h') \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ u(x)-\alpha x = u(h')+\beta h+-\alpha h' \in H$

α ne dépend pas de x, et on a montré que $\forall x\in E,\ u(x)-\alpha x\in H$, c'est à dire que $\mathrm{Im}(u-\alpha Id_E)\subset H$

2) Soit $f\in_r dL(E)$ qui a pour matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.

$\chi_A(X)=X^3-6X^2+13X-8=(X-1)\underbrace{(X^2-5X+8)}_{\delta<0}$ (après calcul)

• $\{0\}$ et E sont deux sous espaces stables par f. Ils ont pour dimensions respectives 0 et 3.

• Les sous espaces de dimension 1 stables par f sont les droites engendrées par un vecteur propre de f. Or f n'a qu'une seule valeur propre (le corps de référence est $\mathbb{R}$), à savoir $\lambda=1$, et le sous espace propre associé est la droite dirigée par $V=\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$. Donc f admet une seule droite stable par f, la droite $D=E_f(1)$.

• Les sous espaces de dimension 2 (hyperplans puisque $\dim(E)=3$) stables par f sont les hyperplans H pour lesquels il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ etl que $\mathrm{Im}(u-\alpha Id_E)\subset H$. (d'après la question précédente)

Il faut pour cela que $\mathrm{Im}(u-\lambda Id_E)$ ne soit pas E, c'est à dire que $u-\lambda Id_E$ ne soit pas surjective, ou encore que $u-\lambda Id_E$ ne soit pas inversible (ou injective), ce qui équivaut encore à ce que λ soit une valeur propre de f. ($\Longleftrightarrow \det(u-\lambda Id_E)=0$)

Or $A-I_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ a pour image $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$. C'est le plan d'équation $y=0$.

Donc f admet un et un seul plan stable par f : le plan d'équation $y=0$ dans la base $\mathscr{B}$.

1.3 CCP F.L.:

Exercice 1 : Existence et calcul de $J=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u}{\sqrt{4-3\sin^2 u}}du$

Piste : symétrie (non fournie)
$\sin(u)=v$ (fournie après 5 mn)

Exercice 2 : $E=\mathbb{R}_n[X]$ Soit $f:\mathbb{R}_n[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]$ telle que : $f(P)(X)=X(X+1)P'(X)-nXP(X)$

a) $f\in\mathscr{L}(E)$?

b) f diagonalisable ?

c) Valeurs propres de f ?

SOLUTION : Exercice 1 : Quand u décrit $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin u$ décrit $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\sin^2 u$ décrit $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $3\sin^2 u$ décrit $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, et $4-3\sin^2 u$ décrit $\left[\frac{5}{2},4\right]$

La fonction $u\mapsto\dfrac{\cos u}{\sqrt{4-3\sin^2 u}}$ est donc définie et continue sur le segment $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

L'intégrale $J=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u}{\sqrt{4-3\sin^2 u}}du$ est alors définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Par le changement de variable $v=\sin u,\ dv=\cos u du,\ J=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dv}{\sqrt{4-3v^2}}$

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dv}{\sqrt{1-\frac{3}{4}v^2}}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dv}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dv}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2}}$$

et par le changement de variable $t=\frac{\sqrt{3}}{2}v,\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dv$,

$$J=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\sqrt{6}}{4}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{Arcsin}]_{-\frac{\sqrt{6}}{4}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{6}}{4}\qquad \boxed{J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos u}{\sqrt{4-3\sin^2 u}}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

Exercice 2 : a) Il est clair que f est linéaire : $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}[X])$ (vérification sans difficulté)

Soit $P(X)\in\mathbb{R}_n[X]$, de terme dominant a_nX^n : $P(X)=a_nX^n+Q(X),\ d^\circ(Q)<n$

alors $P'(X)=na_nX^{n-1}+Q'(X),\ d^\circ(Q')<n-1$

Le terme dominant de $X(X+1)P'(X)$ est $X^2\times na_nX^{n-1}=na_nX^{n+1}$

Le terme dominant de $nXP(X)$ est $nX\ a_nX^{n-1}=na_nX^{n+1}$

Les termes de degré $n+1$ s'éliminent et $f(P)(X)=X(X+1)P'(X)-nXP(X)$ est bien un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

b) et c) Recherchons les éléments propres de f : Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul.

alors $f(P)=\lambda P\iff X(X+1)P'(X)-nXP(X)=\lambda P(X)$

$\iff P$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{F} : x(x+1)y' - (nx+\lambda)y = 0$

Cette équation a pour solution générale :

$$x \mapsto y(x) = \mu \exp\left(\int \frac{nx+\lambda}{x(x+1)}dx\right) = \mu \exp\left(\int \frac{(n-\lambda)x+\lambda(x+1)}{x(x+1)}dx\right)$$
$$= \mu \exp\left(\int \frac{(n-\lambda)}{(x+1)} + \frac{\lambda}{x}dx\right) = \mu \exp\left((n-\lambda)\ln|x+1| + \lambda \ln|x|\right)$$
$$= \mu |x+1|^{n-\lambda}|x|^{\lambda}$$

On obtiendra des fonctions polynômes solutions lorsque les exposants $n-\lambda$ et λ seront des entiers naturels, c'est à dire pour $\lambda \in \{0, 1, \cdots, n\}$

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, \cdots, n\}}$ et le sous espace propre associé à l'entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ est la droite vetorielle engendrée par le polynôme $Q_k(X) = X^k(X+1)^{n-k}$

f est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$ qui possède $n+1$ valeurs propres distinctes.

$\boxed{f \text{ est donc diagonalisable}}$

1.4 CCP C.MB.

Exercice 1 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

On suppose que $\exists c > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in [0, +\infty[,\ |f(t)| \leqslant ce^{at}$

On considère l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$

a) Montrer que $F(x)$ est défini $\forall x > a$.

b) On suppose dans toute cette question que $a \leqslant 0$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ quand $x \to +\infty$ et en déduire un équivalent de F en $+\infty$.

On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x.F(x) = L$ et en déduire un équivalent de F en 0^+.

Exercice 2 * : $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M.D = D.M \iff M$ est diagonale.

b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $M = P(D)$

c) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.

Montrer que l'ensemble des matrices S$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est l'ensemble des polynômes en A.

<u>**SOLUTION**</u> **: Exercice 1 :** a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ puisque f l'est par hypothèse.

Soit $x > a$. $\quad \forall t \in [0, +\infty[,\ |f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt} \leqslant c\,e^{at}e^{-xt} = c\,e^{(a-x)t}$

Puisque $a - x < 0$, la fonction $(t \mapsto e^{(a-x)t})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est absolument convergente.

Donc $\boxed{F(x) \text{ est défini } \forall x > a}$.

b) Soit $x > 0$. par le changement de variable $u = xt,\ du = xdt$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\frac{du}{x}, \text{ donc } xF(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}du$$

• Supposons que

Soit (x_n) une suite réelle quelconque de limite $+\infty$.

$$\forall n,\ x_nF(x_n) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x_n}\right)e^{-u}du$$

Puisque f est continue en 0, la suite de fonctions $\left(u \mapsto f\left(\frac{u}{x_n}\right)e^{-u}\right)_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $(u \mapsto f(0)\,e^{-u})$.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, +\infty[, \left|f\left(\frac{u}{x_n}\right)e^{-u}\right| \leqslant c\,e^{a\frac{u}{x_n}}e^{-u} \leqslant c\,e^{-u} \qquad$ (puisque $a \leqslant 0$)

La fonction $(u \mapsto c\,e^{-u})$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_nF(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x_n}\right)e^{-u}du = \int_0^{+\infty} f(0)\,e^{-u}du = f(0)\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = f(0)$$

Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) de limite $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = f(0)$, ce qui donne l'équivalence :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{x}}$$

• Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$.

Soit (x_n) une suite réelle positive quelconque de limite nulle.

$$\forall n,\ x_n F(x_n) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u} du$$

D'après l'hypothèse sur f en $+\infty$, la suite de fonctions $\left(u \mapsto f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u}\right)_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $(u \mapsto Le^{-u})$.

La majoration obtenue précédemment est toujours valable :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in]0, +\infty[, \left| f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u} \right| \leqslant c\, e^{a \frac{u}{x_n}} e^{-u} \leqslant c\, e^{-u} \qquad \text{(puisque } a \leqslant 0\text{)}$$

La fonction $(u \mapsto c\, e^{-u})$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u} du = \int_0^{+\infty} L\, e^{-u} du = L\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = L$$

Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) positive de limite nulle, $\lim\limits_{x\to 0} xF(x) = L$, ce qui donne l'équivalence :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{L}{x}}$$

1.5 CCP R.G. :

Exercice 1 : On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $(E_n) : x^n = x + n$

a) Montrer qu'il existe une unique solution u_n de (E_n) dans l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ 1 < u_n < 2$

c) Etudier la convergence de la suite (u_n) et sa limite L.

d) Calculer un équivalent de $(u_n - L)$.

Exercice 2 :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_n \qquad P_n(X) \text{ est son polynôme caracréristique.}$$

a) Montrer que $P_n(X) = X.P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$

Calculer P_1, P_2, P_3.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x = 2\cos t$

<u>**SOLUTION**</u> **: Exercice 1 :** a) et b) Soit $P_n(X)$ le polynôme $X^n - X - n$

$P_n'(X) = nX^{n-1} - 1$ s'annule en $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$

x	0		α_n		1	2	$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$			
$P_n(x)$	$-n$	$\searrow$	$m < 0$	$\nearrow$	$-n$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction P_n est décroissante sur $[0, \alpha_n]$, donc est négative sur cet internalle puisque $P_n(0) = -n$. Elle passe par un minimum $P_n(\alpha_n) = m < 0$

P_n est strictement croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$, donc injective.

$P_n(\alpha_n) = m < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$. Puisque P_n est une fonction continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend toute valeur entre m et $+\infty$, et en particulier la valeur 0.

En conclusion, P_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}^+$, en un point $u_n \in [\alpha_n, +\infty[$

Puisque $P_n(1) = -n < 0$ et $P_n(2) = 2^n - n - 2 > 0$ (car $n \geqslant 3$), P_n s'annule entre 1 et 2.

Donc $\boxed{1 < u_n < 2}$ (l'inégalité stricte vient de ce que $P_n(1) \neq 0$ et $P_n(2) \neq 0$

c) u_n vérifie l'égalité $u_n^n = u_n + n$.

Pour tout $n \geqslant 3$, $\quad 1 < u_n < 2 \implies 1 + n < u_n + n < 2 + n$

$\implies 1 + n < u_n^n < 2 + n$

$\implies \ln(1+n) < n\ln(u_n) < \ln(2+n)$

$\implies \dfrac{\ln(1+n)}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{\ln(2+n)}{n}$

$\implies \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0 \qquad \left(\text{car } \dfrac{\ln(1+n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ \right)$

$\boxed{\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1}$ (par continuité de l'exponentielle en 0)

d) Posons $a_n = u_n - 1$ (de sorte que $u_n = 1 + a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$)

$$\begin{aligned} u_n^n = u_n + n &\Longrightarrow (1+a_n)^n = a_n + n + 1 \\ &\Longrightarrow n\ln(1+a_n) = \ln(a_n+n+1) \\ &\Longrightarrow na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \qquad (\text{car } \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u) \\ &\Longrightarrow \boxed{a_n = u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1.6 CCP H.J. :

Exercice 1 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E, tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 2 : On rappelle que la série harmonique alternée converge et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

1- Montrer qu'il existe a, b, c tels que $\displaystyle\frac{1}{4X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{2X-1} + \frac{c}{2X+1}$

2- Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ convergent, calculer leur somme.

3- Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$ converge, calculer sa somme.

4- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3 - x}$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer

SOLUTION : Exercice 1 : Voir exercices chapître "Diagonalisation"

Exercice 2 : Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{X} + \frac{b}{2X-1} + \frac{c}{2X+1} &= \frac{a(2X+1)(2X-1) + bX(2X+1) + cX(2X-1)}{X(2X-1)(2X+1)} \\ &= \frac{a(4X^2-1) + b(2X^2+X) + c(2X^2-X)}{4X^3-X} \\ &= \frac{(4a+2b+2c)X^2 + (b-c)X - a}{4X^3 - X} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+2c = 0 \\ b - c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = c \\ -4 + 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = c = 1 \end{cases}$$

donc $\boxed{\displaystyle\frac{1}{4X^3 - X} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2X-1} + \frac{1}{2X+1}}$

2) $\displaystyle\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{2k-(2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k(2k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{4k^2}$ converge. Par équivalence, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ converge aussi.

Raisonnement analogue pour établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

On rappelle que $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - \ln(n) - \gamma - \varepsilon_n = \ln(2) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$

En prenant la limite quand $n \to +\infty$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\ln 2}$

Calcul analogue pour établir que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)=\ln 2-1}$

3) L'équivalence $\displaystyle\frac{1}{4k^3-k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4k^3}$ montre la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$

• D'après la première question, pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{4k^3-k}=\frac{-1}{k}+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}$

$$\frac{1}{4k^3-k}=\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$$

Puisque les deux séries ci-dessus convergent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)=2\ln 2-1}$$

4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^3-x}=\frac{1}{x(2x-1)(2x+1)}$ est continue sur le fermé $[1,+\infty[$.

L'équivalence $\displaystyle\frac{1}{4x^3-x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4x^3}$ où la fonction $(x \mapsto \frac{1}{4x^3})$ est une fonction de référence intégrable sur $[1,+\infty[$ assure que la fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^3-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ est absolument convergente.

• Pour tout $y \geqslant 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^y\frac{dx}{4x^3-x}&=\int_1^y\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)dx\\&=\left[-\ln x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_1^y\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2y-1)(2y+1)}{y^2}\right)-\frac{1}{2}\ln 3\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $y \to +\infty$, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{4x^3-x}=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3}$

1.7 CCP V.K. :

Exercice 1 : Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien de dimension n et pour tout $i \leqslant p$, U_i un endomorphisme symétrique de E tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\mathrm{rg}(U_i)=\dim(E)$ et tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}<U_i(x),(x)>=\|x\|^2$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}U_i=Id_E$

2) montrer que U_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(U_i)$

Exercice 2

$E=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \in E$

U est l'application définie par : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x)=\int_0^x\cos(x-t)f(t)dt$

1) montrer que U est un endomorphisme de E.
2) U est elle surjective ?
3) Déterminer le noyau de U .

<u>**SOLUTION**</u> **: Exercice 1 :** Notons $\displaystyle S=\sum_{i=1}^{p}U_i$

Par hypothèse, $\displaystyle\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p}<U_i(x),x>=\left\langle\sum_{i=1}^{p}U_i(x),x\right\rangle=<S(x),x>=\|x\|^2$

• Soit $z \in (\mathrm{Im}S)^{\perp}$. Alors $\forall x \in E$, $<\underbrace{S(x)}_{\in\mathrm{Im}S},\underbrace{z}_{\in(\mathrm{Im}S)^{\perp}}>=0$, en particulier, $<S(z),z>=\|z\|^2=0$, donc $z=0$.

On a ainsi montré que $(\mathrm{Im}S)^{\perp}=\{0\}$, et donc que $\mathrm{Im}S=E$

• $\mathrm{Im}S=E=\mathrm{Im}(U_1+\cdots+U_p)\subset \mathrm{Im}U_1+\cdots+\mathrm{Im}U_p\subset E$

Par double inclusion, $\mathrm{Im}U_1+\cdots+\mathrm{Im}U_p=E$

Donc $\displaystyle\dim(\underbrace{\mathrm{Im}U_1+\cdots+\mathrm{Im}U_p}_{=E})=\dim E\leqslant\dim(\mathrm{Im}U_1)+\cdots+\dim(\mathrm{Im}U_p)=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{rg}U_i=\dim E$

donc $\dim(\mathrm{Im}U_1+\cdots+\mathrm{Im}U_p) = \dim(\mathrm{Im}U_1)+\cdots+\dim(\mathrm{Im}U_p)$, ce qui montre que la somme $\mathrm{Im}U_1+\cdots+\mathrm{Im}U_p$ est directe, incluse dans E, et de même dimension que E, donc $\boxed{\mathrm{Im}U_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}U_p = E}$

??????????????????????

Exercice 2 : 1- On vérifie sans difficulté que U est linéaire.

$\forall f \in E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = \int_0^x [\cos(x)\cos(t)+\sin(x)\sin(t)]f(t)dt$

$$U(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt \qquad (*)$$

f étant continue, la fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)dt$ est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de dérivée $x \mapsto \cos(x)f(x)$) . Il en est de même de la fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)dt$

La relation (*) montre alors que $U(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$)

$\boxed{F \text{ est une application linéaire, de } E \text{ dans } E\text{, c'est à dire un endomorphisme de } E}$.

2- L'étude précédente a montré que $\forall f \in E$, $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une fonction de E qui est seulement continue, et non dérivable, n'aura donc pas d'antécédent par U. Donc $\boxed{U \text{ n'est pas surjective}}$

3- Soit $f \in \ker U$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt = 0 \qquad (*)$$

En dérivant (on a vu qu'on pouvait le faire en question 1), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos^2 x f(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt + \sin^2 x f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt + f(x) = 0 \qquad (**)$$

$(*) \times \cos x - (**) \times \sin x \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \cos(t)f(t)dt - \sin(x)f(x) = 0$

Dérivons à nouveau : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)f(x) - \cos(x)f(x) - \sin(x)f'(x) = 0$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x)f'(x) = 0$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ f'(x) = 0$, et par continuité de la fonction f' aux points de la forme $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$.

Donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: $\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \beta$

alors $(*) \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \beta\cos(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)dt + \beta\sin(x)\int_0^x \sin(t)dt = 0$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \beta\cos(x)\sin(x) + \beta\sin(x)(1-\cos(x)) = 0$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \beta\sin(x) = 0 \quad \Longrightarrow \beta = 0 \qquad$ Donc $\boxed{\ker U = \{\omega\} \quad \text{(fonction nulle)}}$

1.8 CCP C.S.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 - 7A^2 + 9A - 4I_n = 0$.

Justifier les assertions suivantes :

a) A est inversible

b) A est diagonalisable

c) $\det(A) > 0$

SOLUTION : a) $2A^3 - 7A^2 + 9A - 4I_n = 0 \Longrightarrow A(2A^2 - 7A + 9I_n) = 4I_n$

$\Longrightarrow A$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(2A^2 - 7A + 9I_n)$

b) A admet pour polynôme annulateur $Q(X) = 2X^3 - 7X^2 + 9X - 4 = (X-1)(2X^2 - 5X + 4)$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$. $\quad A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = I_n$

Dans $\mathbb{C}[X]$, $Q(X) = (X-1)\left(X - \frac{5+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(X - \frac{5-i\sqrt{7}}{4}\right)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

c) Notons $\alpha = \frac{5+i\sqrt{7}}{4}$ et $\overline{\alpha} = \frac{5-i\sqrt{7}}{4}$ les racines complexes de $Q(X)$

A est semblable à une matrice diagonale $\Delta = diag(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\ fois},\underbrace{\alpha,\cdots,\alpha}_{q\ fois},\underbrace{\overline{\alpha},\cdots,\overline{\alpha}}_{q\ fois})$

donc $\boxed{\det(A) = 1^p \times \alpha^q \times \overline{\alpha}^q = (\alpha\overline{\alpha})^q = |\alpha|^{2q} > 0}$

1.9 CCP 511 - 532

Exercice 1 : Une machine à sous tire au hasard un entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$. (si T est l'entier tiré, $P(T = n) = \frac{1}{2^n}$)

Si le nombre tiré, n, est pair, le joueur gagne n points, si le nombre tiré n est impair, la joueur perd n points.

a) Justifier qu'une telle loi de probabilité est cohérente.
Quelle est la probabilité que la joueur gagne ?

b) Soit G la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer l'espérance de G.

Exercice 2 : Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

<u>**SOLUTION**</u> **: Exercice 1 :** a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

$P(T = n) = \frac{1}{2^n}$ correspond bien à une loi de probabilité.

• Notons W l'évènement "le joueur gagne". Cela signifie que le nombre sorti est pair.

$W = (T = 2) \cup (T = 4) \cup (T = 6) \cup \cdots = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (T = 2k)$

Ces évènements étant deux à deux incompatibles,

$$P(W) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{P(\text{" le joueur gagne "}) = \tfrac{1}{3}}$$

b) G est la variable aléatoire égale au gain du joueur : $G(\Omega) = \{2, 4, 6, \cdots\} \cup \{-1, -3, -5, \cdots\}$

D'après la formule du transfert ,

$$E(G) = \sum_{k=1}^{\infty} G(k)P(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kP(T = 2k) - \sum_{k=0}^{\infty}(2k + 1)P(T = 2k + 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \times \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=0}^{\infty}(2k + 1) \times \frac{1}{2^{2k+1}}$$

Rappelons que $\forall x \in] - 1, 1[, \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$, et par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, $\displaystyle\sum_{k=0,1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$

$$E(G) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \times \frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k + 1) \times \frac{1}{4^k}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{4}\sum_{k=0,1}^{\infty} k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{2}{9} \qquad \boxed{E(G) = -\tfrac{2}{9}}$$

Exercice 2 : Considérons d'abord les n matrices élémentaires $B_{i,i} = E_{i,i},\ i = 1, \cdots, n$

Soit Δ une matrice diagonale avec des vaelurs propres deux à eux distinctes sur la diagonale, par exemple $\Delta = E_{1,1} + 2E_{2,2} + 3E_{3,3} + \cdots + nE_{n,n}$ et considérons les $n^2 - n$ matrices $B_{i,j} = \Delta + E_{i,j}$, losque $i \neq j$.

Les matrices $E_{i,i}$ sont déjà diagonales, donc diagonalisables. Les matrices $B_{i,j}$ sont triangulaires, leurs valeurs propres sont sur leur diagonale. Chaque $B_{i,j}$ admet donc n valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

Vérifions que les n^2 matrices $B_{i,j}$ forment un système générateur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- Chaque matrice $E_{i,i}$ s'exprime en fonction d'elles puisque $E_{i,i} = B_{i,i}$
- Chaque matrice $E_{i,j},\ j \neq i$ est égale à $B_{i,j} - \Delta$:

$$E_{i,j} = B_{i,j} - (E_{1,1} + 2E_{2,2} + 3E_{3,3} + \cdots + nE_{n,n}) = B_{i,j} - (B_{1,1} + 2B_{2,2} + 3B_{3,3} + \cdots + nB_{n,n})$$

Ainsi, chacune des matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'exprime en fonction des matrices $B_{i,j}$. Celles-ci forment donc un système générateur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cette famille génératrice possède $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ éléments. C'est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, formée de matrices diagonalisables.

1.10 CCP 867 :

On considère un espace euclidien E de dimension n et v un endomorphisme de E

a) Montrer que $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} < v(e_k), e_k >$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E choisie.

b) Montrer que $T = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} < v(e_i), f_k >^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de E choisies.

Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

SOLUTION : a) Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de v dans la base orthonormée $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E.

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\ v(e_k) = m_{1,k}e_1 + m_{2,k}e_2 + \cdots + m_{n,k}e_n$

$$< v(e_k), e_k >= m_{1,k} \underbrace{< e_1, e_k >}_{=0} + m_{2,k} < e_2, e_k > + \cdots + m_{k,k} \underbrace{< e_k, e_k >}_{=1} + \cdots + m_{n,k} \underbrace{< e_n, e_k >}_{=0}$$

$$< v(e_k), e_k >= m_{k,k}$$

alors, $S = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} < v(e_k), e_k >= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} = m_{k,k} = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(v)$

Donc $\boxed{S = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} < v(e_k), e_k > \text{ ne dépend pas de la BON } (e_1, e_2, \cdots, e_n) \text{ de } E \text{ choisie, et est égal à } \mathrm{tr}(v)}$.

b) Rappelons que si $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base orthonormale de E, alors, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{k=1}^{k} < f_k, x > f_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{k} < f_k, x >^2$$

D'où , $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} < v(e_i), f_k >^2 = \|v(e_i)\|^2$, ce qui montre que

$T = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} < v(e_i), f_k >^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|v(e_i)\|^2$ ne dépend pas de la base orthonormée $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$.

Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de v dans la base orthonormée $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$;

Pour tout i, $v(e_i) = \sum_{h=1}^{n} m_{h,i}e_h$, et $\|v(e_i)\|^2 = \sum_{h=1}^{n} m_{h,i}^2$, (calcul dans la BON $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$)

et $T = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|v(e_i)\|^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} m_{h,i}^2 = \mathrm{tr}({}^tM.M)$

Montrons que $\mathrm{tr}({}^tM.M)$ ne dépend pas du choix de la BON $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ une autre BON de E. la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale. Par la formule de changement de base pour un endomophisme, la matrice M' de v dans la base $\mathscr{B}'$ est $M' = P^{-1}.M.P$.

Alors $\mathrm{tr}({}^tM'.M') = \mathrm{tr}({}^t(P^{-1}.M.P).P^{-1}.M.P) = \mathrm{tr}({}^tP.{}^tM.{}^t(P^{-1})P^{-1}.M.P)$

Mais $P^{-1} = {}^tP$, puisque P est orthogonale, et ${}^t(P^{-1}) = {}^t({}^tP) = P$

d'où : $\mathrm{tr}({}^tM'.M') = \mathrm{tr}({}^tP.{}^tM.{}^t(P^{-1})P^{-1}.M.P) = \mathrm{tr}({}^tP.{}^tM.P.P^{-1}.M.P)$

$= \mathrm{tr}({}^tP.{}^tM.M.P) = \mathrm{tr}({}^tM.M.\underbrace{P.{}^tP}_{=I_n}) = \mathrm{tr}({}^tM.M) = T$

ce qui montre que T ne dépend pas de la BON $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E choisie.

• Si v est un projecteur orthogonal de rang r, il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de v est $M = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{r\ fois}, 0, \cdots, 0)$

Alors, $\boxed{T = \mathrm{tr}({}^tM.M) = \mathrm{tr}(M^2) = \mathrm{tr}(M) = r}$

1.11 CCP 868

On considère un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et la série entière $\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^n$, de somme $S(x)$.

Déterminer son rayon de convergence, et calculer sa somme sur son disque de convergence.

SOLUTION : Notons $a_n = \binom{n}{m}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} \times \frac{m!(n-m)!}{n!} = \frac{n+1}{n-m+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

La série entière $S(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^n$ a donc pour rayon de convergence $R = \frac{1}{1} = 1$

Par le changement d'indice $n = m + k$, on obtient :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} x^{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!\,k!} x^{m+k} = \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} x^k$$

$$S(x) = \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} x^k = \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (m+k)(m+k-1) \cdots (k+2)(k+1) x^k \qquad (*)$$

Or on sait que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, et par dérivation,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0,1}^{\infty} k x^{k-1},$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0,2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2},$$
$$\frac{3!}{(1-x)^4} = \sum_{k=0,3}^{\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3},$$

et par une récurrence sans difficulté, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=0,m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)x^{k-m}$,

Par le changement d'indice $n = k - m$, on obtient :

$\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)\cdots(n+1)x^n$,

En reportant cette dernière égalité dans la relation (*), on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \frac{x^m}{m!}\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}}$$

1.12 CCP 869 **texte rectifié**

p est un entier naturel non nul fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} dt$

a) Justifier l'existence de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$

Calculer $T(a,b)$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_0 = p\,!\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$

d) Montrer que la suite (S_n) converge. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\, e^{-nt} dt = p\,!\zeta(p+1)$

SOLUTION : a) Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^p}{e^t-1}e^{-nt}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\dfrac{t^p}{e^t-1}e^{-nt} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^p}{t} = t^{p-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. (car $p - 1 \geqslant 0$)

$\dfrac{t^p}{e^t-1}e^{-nt} \underset{t\to +\infty}{\sim} t^p e^{-(n+1)t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$

Calculer $T(a,b)$.

En intégrant par parties, $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt = \underbrace{\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}e^{-bt}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + b\int_0^{+\infty} \frac{t^{a+1}}{a+1}e^{-bt} dt$

$T(a,b) = \dfrac{b}{a+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a+1} e^{-bt} dt = \frac{b}{a+1}T(a+1,b)$

En remplaçant a par $a-1$, on obtient : $T(a,b) = \dfrac{a}{b}T(a-1,b)$

d'où : $T(a,b) = \dfrac{a}{b}T(a-1,b) = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a-1}{b}T(a-2,b) = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a-1}{b} \times \dfrac{a-2}{b}T(a-3,b)$

et par récurrence : $T(a,b) = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a-1}{b} \times \dfrac{a-2}{b} \times \cdots \times \dfrac{1}{b}T(0,b) = \dfrac{a!}{b^a}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-bt} dt = \frac{a!}{b^{a+1}}$

$$\boxed{T(a,b) = \frac{a!}{b^{a+1}}}$$

c) $S_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t(1-e^{-t})} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \frac{z^n}{1-z}$

Donc $S_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kt} + \frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}}\right) dt$

$$S_0 = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^p e^{-(k+1)t} + \frac{t^p e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}\right) dt$$

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} t^p e^{-(k+1)t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-(n)t}}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} T(p, k+1) + S_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} T(p,k) + S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p!}{k^{p+1}} + S_n = p\,!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$$
$$\boxed{S_0 = p\,!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n}$$

d) Notons f_n la fonction $t \mapsto \dfrac{t^p}{e^t - 1}\, e^{-nt}$.

• Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (voir question a)).

• $\forall t \in]0, +\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle ω.

• $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, +\infty[, 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_0(t) = \dfrac{t^p}{e^t - 1}$ où f_0 est intégrable sur $]0, +\infty[$ $(p \geqslant 1)$

D'après le théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) = \int_0^{+\infty} \omega = 0$$

La série de Riemann $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{p+1}}$ converge puisque $p \geqslant 1 \implies p+1 \geqslant 2$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $S_0 = p\,!\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{p+1}} + S_n$, on obtient : $\boxed{S_0 = p\,!\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{p+1}} = p\,!\zeta(p+1)}$

1.13 CCP 883 * - 884 :

Exercice 1 : On considère les matrices :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des complexes donnés.

a) Calculer le polynôme caractéristique de J. En déduire la valeur de J^n.

b) La matrice J est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c) Calculer J^k pour $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
Trouver un polynôme $P(X)$ tel que $A = P(J)$

d) En déduire la valeur du déterminant de A. (en fonction des a_i est des racines n^e de l'unité).

Exercice 2 : E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que : $|\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g$

SOLUTION : a) $\forall x \in \mathbb{C}, \chi_{_J}(x) = \det(xI_n - J) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & x & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_n$

$$\chi_{_J}(x) = x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \times (-1) \begin{vmatrix} -1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n-1} \quad \left(\begin{array}{c}\text{en développant} \\ \text{suivant la} \\ \text{première ligne}\end{array}\right)$$

$\chi_{_J}(x) = x^n + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} = x^n - 1$ $\boxed{\chi_{_J}(X) = X^n - 1}$

Puisque le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur d'une matrice, $\boxed{J^n = I_n}$

b) $\chi_{_J}(X) = X^n - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples. J est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Les seules racines réelles de $\chi_{_J}(X) = X^n - 1$ ne peuvent être que 1 (dans tous les cas) et -1 (si n est pair).

Si J était diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle serait semplable à une matrice de la forme $\text{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$, et son carré serait I_n, ce qui n'est pas vérifié (sauf si $n = 2$)

Donc, si $n \geqslant 3$, la matrice J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) En considérant l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice J

(qui vérifie $\begin{cases} f(e_1)=e_2 \\ f(e_2)=e_3 \\ \vdots \\ f(e_{n-1})=e_n \\ f(e_n)=e_1 \end{cases}$ où $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$)

on vérifie que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors, $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots a_{n-1} J^{n-1}$

En posant $\boxed{P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots a_{n-1} X^{n-1} \text{ , on a bien l'égalité : } A = P(J)}$

d) Supposons $a_{n-1} \neq 0$.

Le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots a_{n-1} X^{n-1}$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = a_{n-1}(X-\beta_1)(X-\beta_2).\cdots.(X-\beta_{n-1}) = a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(X-\beta_k)$$

donc $A = P(J) = a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(J-\beta_k I_n)$, et $\det(A) = a_{n-1}^n \prod_{k=1}^{n-1}\det(J-\beta_k I_n)$

$\det(J-\beta_k I_n) = (-1)^n \det(\beta_k I_n - J) = (-1)^n \chi_J(\beta_k) = (-1)^n(\beta_k^n - 1)$ (puisque $\chi_J(X) = X^n - 1$)

en notant $u_h = e^{\frac{2ih\pi}{n}}$, $h = 0, 1, \cdots, n-1$, les racines n^e de l'unité, $X^n - 1 = \prod_{h=0}^{n-1}(X-u_h)$

donc $\det(J-\beta_k I_n) = (-1)^n(\beta_k^n - 1) = (-1)^n \prod_{h=0}^{n-1}(\beta_k - u_h)$

alors, $\det(A) = a_{n-1}^n \prod_{k=1}^{n-1}\det(J-\beta_k I_n) = a_{n-1}^n \prod_{k=1}^{n-1}\left[(-1)^n \prod_{h=0}^{n-1}(\beta_k - u_h)\right]$

$$\det(A) = a_{n-1}^n \underbrace{[(-1)^n]^{n-1}}_{=1} \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{h=0}^{n-1}(\beta_k - u_h) = a_{n-1}^n \prod_{h=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\beta_k - u_h)$$

$$= a_{n-1}^n \prod_{h=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(u_h - \beta_k) = \prod_{h=0}^{n-1}\left[(-1)^{n-1} a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(u_h - \beta_k)\right]$$

$$= \underbrace{[(-1)^n]^{n-1}}_{=1} \prod_{h=0}^{n-1} P(u_h) \qquad \boxed{\det(A) = \prod_{h=0}^{n-1} P(u_h)}$$

Par exemple, pour $n = 3$, $\det(A) P(1)P(j)P(j^2) = (a_0 + a_1 + a_2)(a_0 + a_1 j + a_2 j^2)(a_0 + a_1 j^2 + a_2 j)$

Pour $n = 4$, $P(A) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i)(a_0 - a_1 + a_2 - a_3)(a_0 - ia_1 - a_2 + ia_3)$

Exercice 2 : E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

Montrer que : $|\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g$

SOLUTION : $\forall y \in \text{Im}(f+g), \exists x \in E,\ y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, donc $y \in \text{Im}f + \text{Im}g$.

on a ainsi montré l'inclusion : $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$

dès lors, $\dim(\text{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\text{Im}f + \text{Im}g) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g) - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$

$$\underbrace{\dim(\text{Im}(f+g))}_{\text{rg}(f+g)} \leqslant \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g) - \underbrace{\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g)}_{\geqslant 0} \leqslant \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g)$$

ce qui montre que $\boxed{\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g}$

En appliquant cette formule, $\text{rg}(f) = \text{rg}((f+g)+(-g)) \leqslant \text{rg}(f+g) + \underbrace{\text{rg}(-g)}_{=\text{rg}g}$

et donc $\text{rg}f - \text{rg}g \leqslant \text{rg}(f+g)$
De même, $\text{rg}g - \text{rg}f \leqslant \text{rg}(g+f) = \text{rg}(f+g)$
et : $|\text{rg}f - \text{rg}g| = max(\text{rg}f - \text{rg}g, \text{rg}g - \text{rg}f) \leqslant \text{rg}(f+g)$
Finalement, $\boxed{|\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g}$

1.14 CCP 897 :

Exercice 1 : F et G sont deux sous espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie.
A quelle(s) condition(s) sur F et G existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker u = F$ et $\text{Im}u = G$?

Exercice 2 : E est un espace vectoriel de dimension finie n. A quelle(s) condition(s) existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker u = \text{Im}u$?

SOLUTION : Exercice 1 : • Analyse
Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker u = F$ et $\text{Im}u = G$.
Alors $\dim F + \dim G = \dim(\ker u) + \dim(\text{Im}u) = \dim E$ (théorème du rang)

• Synthèse . Supposons que $\underbrace{\dim F}_{=p} + \underbrace{\dim G}_{=q} = \underbrace{\dim(E)}_{=n}$

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ de E.
Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$ une base de G.
On sait qu'un endomorphisme de E est déterminé de manière unique par les images des vecteurs d'une base.

Soit donc $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\left\{\begin{array}{c} u(e_1) = 0 \\ \vdots \\ u(e_p) = 0 \\ u(e_{p+1}) = \varepsilon_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = \varepsilon_q \end{array}\right.$ (ceci est bien cohérent puisque $p + q = n$)

Alors il est clair que $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = F \subset \ker u$ et que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q) = G \subset \text{Im}u$
Si l'une de ces deux inclusions était stricte, on aurait :
$\dim F + \dim G < \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u))$, ce qui n'est pas possible puisque chacun de ces deux membres vaut n. Donc $\boxed{F = \ker u \text{ et } G = \text{Im}u}$

Exercice 2 : • Analyse : Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker u = \text{Im}u$. Alors $\dim E = \dim\ker u + \dim \text{Im}u = 2\dim\ker u$.
Donc n est pair

• Synthèse : Soit E un espace vectoriel de dimension paire $n = 2p$. Soit $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1} \cdots, e_n)$ une base de E.
On sait qu'un endomorphisme de E est déterminé de manière unique par les images des vecteurs d'une base.

Soit donc $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\left\{\begin{array}{c} u(e_1) = 0 \\ \vdots \\ u(e_p) = 0 \\ u(e_{p+1}) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_p \end{array}\right.$ On verifie alors que $\ker u = \text{Im}u = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$

1.15 CCP 903 :

On considère l'endomorphisme $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array}\right.$

φ est il diagonalisable ?

SOLUTION :

$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$,

$\varphi^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$, $\varphi^3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & a \end{pmatrix}$, $\varphi^4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

donc $\varphi^4 = Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
Le polynôme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de φ.

$X^4-1=(X^2-1)(X^2+1)=(X-1)(X+1)(X+i)(X-i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples. Donc φ est diagonalisable comme endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\varphi(E_{1,1})=\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E_{1,2}$$
$$\varphi(E_{1,2})=\varphi\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=E_{2,1}$$
$$\varphi(E_{2,1})=\varphi\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=E_{2,2}$$
$$\varphi(E_{2,2})=\varphi\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=E_{1,1}$$

La matrice de φ dans la base canonique $(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ est $M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$$\chi_\varphi(x)=\begin{vmatrix}-x&0&0&-1\\-1&-x&0&0\\0&-1&-x&0\\0&0&-1&-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x-1&0&0&-1\\-x-1&-x&0&0\\-x-1&-1&-x&0\\-x-1&0&-1&-x\end{vmatrix}=(-x-1)\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&-x&0&0\\1&-1&-x&0\\1&0&-1&-x\end{vmatrix}$$
$$=-(x+1)\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\0&-x&0&1\\0&-1&-x&1\\0&0&-1&-x+1\end{vmatrix}=-(x+1)\begin{vmatrix}-x&0&1\\-1&-x&1\\0&-1&-x+1\end{vmatrix}$$
$$=-(x+1)\begin{vmatrix}-x+1&0&1\\0&-x&1\\-x+1&-1&-x+1\end{vmatrix}=-(x+1)(-x+1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-x&1\\1&-1&-x+1\end{vmatrix}$$
$$=-(x+1)(-x+1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-x&1\\0&-1&-x\end{vmatrix}=-(x+1)(-x+1)\begin{vmatrix}-x&1\\-1&-x\end{vmatrix}$$
$$\boxed{\chi_\varphi(X)=(X-1)(X+1)(X^2+1)}$$

$\chi_\varphi(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc φ n'est pas diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : On peut aussi étudier directement l'équation $\varphi(M)=M$

1.16 CCP 912 * :

a) On considère des réels $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ deux à deux distincts.

Montrer que l'application $\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{n-1}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^n\\P&\mapsto&(P(\lambda_1),P(\lambda_2),\cdots,P(\lambda_n))\end{array}\right.$ est un isomorphisme linéaire.

b) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(i) Montrer que les vecteurs propres de f sont sont aussi des vecteurs propres de g. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et à g.

(ii) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g=P(f)$.

SOLUTION : a) L'application Φ est une application linéaire (vérification sans difficulté)

Soit $P\in\ker\Phi$: $\Phi(P)=(P(\lambda_1),P(\lambda_2),\cdots,P(\lambda_n))=0_{\mathbb{R}^n}$

$\Longrightarrow P(\lambda_1)=P(\lambda_2)=\cdots=P(\lambda_n)=0.$

Le polynôme $P(X)$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet n racines distinctes. C'est donc le polynôme nul. On a ainsi montré que $\ker\Phi=\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, ce qui entraîne que Φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])=n=\dim(\mathbb{R}^n)$

Donc Φ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(i) Puisque f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, et que $\dim E=n$, f est diagonalisable, et les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

Soit v un vecteur propre de f. v est associé à l'une des valeurs propres λ_i de f : $f(v)=\lambda_i v$.

Puisque $E_f(\lambda_i)$ est une droite qui contient le vecteur v non nul (car c'est un vecteur propre)

$E_f(\lambda_i)=\text{Vect}(v)$

$g[f(v)]=g(\lambda_i v)=\lambda_i g(v)=g_o f(v)=f_o g(v)=f[g(v)]$

L'égalité $f[g(v)] = \lambda_i g(v)$ montre que $g(v) \in E_f(\lambda_i) = \text{Vect}(v)$
donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g(v) = \mu v$, et v est un vecteur propre de g.
On a ainsi montré que $\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ est aussi vecteur propre de } g}$.

• Soit alors $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f (il en existe puisque f est diagonalisable). D'après ce qu'on vient juste de montrer, $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est aussi formée de vecteurs propres de g.

(ii) Reprenons la base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ dont on vient de prouver l'existence. Tout vecteur v_i de cette base est aussi vecteur propre de g : il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$, $g(v_i) = \mu_i v_i$

D'après la question 1, puisque $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, l'application Φ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, elle est surjective, et il existe $Q(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Phi(Q) = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, c'est à dire tel que : $(Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), \cdots, Q(\lambda_n)) = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ ou encore que $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, Q(\lambda_i) = \mu_i$

Montrons que $g = Q(f)$. Pour cela, il suffit de vérifier que les deux endomrphismes $Q(f)$ et g de E coïncident sur la base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de E.

Or, puisque $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $Q(f)(v_i) = Q(\lambda_i)v_i = \mu_i v_i = g(v_i)$

Donc $Q(f)$ et g coïncident sur la base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de E. Donc $\boxed{Q(f) = g}$

1.17 CCP 921 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$

a) Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, qu'on notera u_n.
Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que la suite (u_n) converge, vers une limite L qu'on calculera.
Trouver un équivalent de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$

SOLUTION : a) • Notons P_n la fonction polynomiale $x \mapsto x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$. C'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée positive) et continue. Etant strictement croissante, elle est injective et prend au plus une fois la valeur 1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

$P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = n > 1$. Etant continue, f_n prend sur l'intervalle $[0, 1]$ toute valeur intermédiaire entre $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = n$, et en particulier la valeur 1.

L'équation (E_n) admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Soit u_n cette solution.

• $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (équation du second degré)

b) • $P_n(u_n) = u_n + u_n^2 + \cdots + u_n^n = 1$

$P_{n+1}(u_n) = \underbrace{u_n + u_n^2 + \cdots + u_n^n}_{=1} + u_n^{n+1} = 1 + u_n^{n+1} > 1 = P_{n+1}(u_{n+1})$

P_{n+1} étant une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge, vers une limite $L \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant L \leqslant u_n < u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618$

• $P_n(u_n) = 1 = u_n + u_n^2 + \cdots + u_n^n = u_n \dfrac{1 - u_n^n}{1 - u_n}$ (1)

L'encadrement $0 \leqslant u_n^n \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ (puisque $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$)

En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $1 = L\dfrac{1}{1-L}$, qui montre que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

• Notons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, de sorte que $u_n = v_n + \frac{1}{2}$

En reportant dans (1), on obtient : $1 - u_n = u_n - u_n^{n+1}$

$1 = 2u_n - u_n^{n+1} = 2v_n + 1 - u_n^{n+1} \implies 2v_n = u_n^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 + 2v_n)^{n+1}$

$\implies v_n = \dfrac{1}{2^{n+2}}(1 + 2v_n)^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}} e^{(n+1)\ln(1+2v_n)}$

Puisque $\lim v_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0, v_n \leqslant \frac{1}{6}$

alors, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+2}}\left(1 + \dfrac{2}{6}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$(n+1)\ln(1 + 2v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nv_n = o(1)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\ln(1 + 2v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(n+1)\ln(1+2v_n)} = 1$

De l'égalité $v_n = \dfrac{1}{2^{n+2}} e^{(n+1)\ln(1+2v_n)}$, on déduit : $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{n+2}}}$

1.18 CCP 931 * :

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\, dt$ est définie.

b) Montrer que $\sin^5(t) = \dfrac{1}{16}[\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)]$

c) Montrer que $\forall a > 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2} dt = -\frac{5}{16}\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + \frac{10}{16}\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\, dt$

SOLUTION : a) La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin^5(t)}{t^2}$ est continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$

$\dfrac{\sin^5(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^5}{t^2} = t^3 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. On peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Elle est alors intégrable sur $[0, 1]$ comme fonction continue sur un segment.

$|g(t)| = \left|\dfrac{\sin^5(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Par majoration, la fonction g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par additivité, g est intégrable sur $[0, +\infty[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^2}\, dt$ est absolument convergente.

b) $$\sin^5(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5it} - 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} - 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} - e^{-5it}}{(2i)^5}$$
$$= \frac{e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}}{(2i)^5} = \frac{\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)}{(2i)^4}$$

$$\boxed{\sin^5(t) = \frac{1}{16}[\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)]}$$

c) Soient a et b tels que $0 < a < b$.

$$J(a, b) = \int_a^b \frac{\sin^5(t)}{t^2}\, dt = \frac{1}{16}\int_a^b \left(\frac{\sin(5t)}{t^2} - 5\frac{\sin(3t)}{t^2} + 10\frac{\sin(t)}{t^2}\right) dt$$
$$16\ J(a, b) = \int_a^b \frac{\sin(5t)}{t^2} dt - 5\int_a^b \frac{\sin(3t)}{t^2} dt + 10\int_a^b \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

En faisant le changement de variable $u = 5t$ dans la première intégrale, et $u = 3t$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$16\ J(a, b) = 5\int_{5a}^{5b} \frac{\sin(u)}{u^2} du - 15\int_{3a}^{3b} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10\int_a^b \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

La majoration $\left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$ assure la convergence de l'intégrale entre a et $+\infty$. On peut passer à la limite quand $b \to +\infty$:

$$16\int_a^{+\infty} \frac{\sin(5t)}{t^2} dt = 5\int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du - 15\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10\int_a^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$
$$= 5\int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du - 15\left(\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + \int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du\right) + 10\left(\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + \int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + \int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du\right)$$
$$16\int_a^{+\infty} \frac{\sin(5t)}{t^2} dt = -5\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

Par étude de la fonction $u \mapsto \sin u - u + \frac{u^3}{6}$, on montre que : $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u - \frac{u^3}{6} \leqslant \sin u \leqslant u$.

Pour a assez petit pour que $[a, 3a] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{u - \frac{u^3}{6}}{u^2} du \leqslant \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du \leqslant \int_a^{3a} \frac{u}{u^2} du$

$$\Longrightarrow \int_a^{3a} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{6}\right) du \leqslant \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du \leqslant \int_a^{3a} \frac{1}{u} du$$
$$\Longrightarrow \ln(3) - \frac{2a^2}{3} \leqslant \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du \leqslant \ln(3) \Longrightarrow \boxed{\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du = \ln 3}$$

On montre de même que $\boxed{\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du = \ln 5 - \ln 3}$

Reprenons la relation : $\displaystyle 16\int_a^{+\infty} \frac{\sin(5t)}{t^2} dt = -5\int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10\int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du$

et passons à le limite quand $a \to 0$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5t)}{t^2} dt = -\frac{5}{16}(\ln 5 - \ln 3) + \frac{10}{16}\ln 3 = \frac{15}{16}\ln 3 - \frac{5}{16}\ln 5}$$

1.19 CCP 957

Soient X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, et $Y = X^2 + 1$

a) Déterminer l'espérance de Y.

b) Quelle est la probabilité que $2X < Y$?

c) Comparer les probabilités que Y soit paire et que Y soit impaire.

SOLUTION : a) On sait que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, $E(X) = V(X) = \lambda$.

$E(Y) = E(X^2) + 1$. Or $\underbrace{V(X)}_{=\lambda} = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{=\lambda^2}$, donc $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$

$\boxed{E(Y) = E(X^2) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1}$

b) $Y - 2X = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

Pour tout $\omega \in \Omega, (X(\omega) - 1)^2 \geqslant 0$. L'évènement $(X-1)^2 \geqslant 0$ est donc l'évènement certain : $P((X-1)^2 \geqslant 0) = 1$

Mais $(X^2 - 2X + 1 \geqslant 0) = \underbrace{(X^2 - 2X + 1 > 0) \cup (X^2 - 2X + 1 = 0)}_{evenements\ incompatibles}$

$$P(X^2 - 2X + 1 \geqslant 0) = 1 = P(X^2 - 2X + 1 > 0) + P(X^2 - 2X + 1 = 0)$$

Y	1	2	5	10	17	26	37	50	$\cdots$
$2X$	0	2	4	6	8	10	12	14	$\cdots$

L'évènement $2X = Y$ est égal à l'évènement $(X = 1)$, dont la probabilité est $P(X = 1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1\,!} = \lambda e^{-\lambda}$

Finalement, $\boxed{P(2X < Y) = P(X^2 - 2X + 1 > 0) = 1 - P(X^2 - 2X + 1 = 0) = 1 - \lambda e^{-\lambda}}$

c) Pour tout $\omega \in \Omega, Y(\omega) = X^2(\omega) + 1$ est pair si et seulement si $X(\omega)$ est impair.

donc $(Y \text{ est pair}) = (X \text{ est impair}) = (X = 1) \cup (X = 3) \cup \cdots = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k+1)$

Ces évènements étant deux à deux incompatibles, $P(Y \text{ est pair}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\boxed{P(Y \text{ est pair}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda)}$$

Par un raisonnement analogue, $\boxed{P(Y \text{ est impair}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda)}$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(\lambda) - \mathrm{sh}(\mu) = e^{-\lambda} > 0$, donc $\boxed{P(Y \text{ est impair}) > P(Y \text{ est pair})}$

1.20 CCP 959

Soit $a > 0$, et X une variable aléatoire qui a pour loi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$

a) Déterminer la constante a.

b) La variable X admet elle une espérance ? une variance ? Expliciter sa fonction génératrice.

SOLUTION : a) $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m} P(X = n) = a \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = a \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = a\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = a$

La formule $P(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$ définira une loi de probabilités si et seulement si $a = 1$.

b) $nP(X = n) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. Donc X n'admet pas d'espérance.

Même argument pour la variance.

• $\forall t,\ G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n} - \frac{t^n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$

$$= -\ln(1-t) - \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t) - \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) - \frac{1}{t}\left(-\ln(1-t) - t\right)$$

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[,\ G_X(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right)\ln(1-t) + 1}$$

1.21 CCP 963

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune un loi de Poisson, et $Z = X + Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k|Z = n)$

c) En déduire la loi de X sachant $(Z = n)$

SOLUTION : a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(Z = k) &= [(X = 0) \cap (Y = k)] \cup [(X = 1) \cap (Y = k-1)] \cup \cdots \cup [(X = k) \cap (Y = 0)] \\ &= \bigcup_{i=0,\dots,k} [(X = i) \cap (Y = k-i)]\end{aligned}$$

Les évènements $(X = i) \cap (Y = k - i)$ sont deux à deux incompatibles, donc

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n} P[(X = i) \cap (Y = k-i)] = \sum_{i=0}^{n} P(X = i)P(Y = k-i)$$

(puisque les lois X et Y sont indépendantes)

$$\begin{aligned}P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{n}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\lambda^i\,\mu^{k-i} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\lambda^i\,\mu^{k-i} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(Z = k) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}} \quad \text{donc } \boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)}$$

Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

b) • Si $0 \leqslant k \leqslant n$, par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(X = k|Z = n) = \dfrac{P((X = k) \cap (Z = n))}{P(Z = n)}$

$$\begin{aligned}P(X = k|Z = n) &= \frac{P((X = k) \cap (Y = n-k))}{P(Z = n)} \quad (\text{car } Y = Z - X) \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n-k)}{P(Z = n)} \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X = k|Z = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}}$$

• Si $n < k$, l'évènement $(X = k|Z = n)$ est impossible, et sa probabilté est nulle.

c) La formule établie à la question précédente montre que X sachant $(Z = n)$ suit une loi binomiale, de paramètres n et $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$: $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

1.22 ENSAM L.G.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, et $f : X \mapsto X + \mathrm{tr}(X)A$

a) Mq $f \in \mathscr{L}(E)$

b) Mq f est bijective ssi $\mathrm{tr}(A) \neq -1$

c) Dans le cas où $\mathrm{tr}(A) = -1$, trouver $\ker f$. En déduire $\mathrm{rg} f$.

d) On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Retrouver le résultat de b)

SOLUTION : a) f est une application de E dans E, linéaire (par linéarité de l'application "trace").

Donc $\boxed{f \in \mathscr{L}(E)}$

b) Soit $X \in \ker f$.

alors $f(X) = X + \mathrm{tr}(X)A = 0 \qquad (*)$

$\Longrightarrow X = -\mathrm{tr}(X)A$

$\Longrightarrow -\mathrm{tr}(X)A + \mathrm{tr}(-\mathrm{tr}(X)A)A = 0 \quad$ (en reportant l'égalité $X = -\mathrm{tr}(X)A$ dans (*))

$\Longrightarrow -\mathrm{tr}(X)A - \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A)A = 0$

$\Longrightarrow \underbrace{\mathrm{tr}(X)(1 + \mathrm{tr}(A))}_{scalaire} A = 0$

$\Longrightarrow \mathrm{tr}(X)(1 + \mathrm{tr}(A)) = 0 \qquad (\text{car } A \neq 0)$

- si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, cette dernière égalité entraîne que $\mathrm{tr}(X) = 0$, et la relation (*) que $X = 0$.

Dans ce cas, $\ker f = \{0\}$ et f est injective. Puisque c'est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie, f est bijective.

- si $\mathrm{tr}(A) = -1$, $f(A) = A + \mathrm{tr}(A).A = A - A = 0$

Donc $A \in \ker f$. Le noyau de f n'est pas réduit à la matrice nulle. f n'est pas injective (ni bijective).

Finalement, $\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } \mathrm{tr}A \neq -1}$

c) Lorsque $\mathrm{tr}(A) = -1$, on vient de voir que $A \in \ker f$.

$\ker f$ contient donc la droite vectorielle engendré par la matrice A : $\mathrm{Vect}(A) \subset \ker f$

Soit $X \in \ker f$: $f(X) = X + \mathrm{tr}(X)A = 0$

$\implies X = -\mathrm{tr}(X)A \implies X \in \mathrm{Vect}(A)$.

Donc $\ker f \subset \mathrm{Vect}(A)$, et par double implication : $\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}(A)}$

d) $f(E_{1,1}) = E_{1,1} + \underbrace{\mathrm{tr}(E_{1,1})}_{=1} A = A + E_{1,1} = (a_{1,1}+1)E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}$

$f(E_{1,2}) = E_{1,2} + \underbrace{\mathrm{tr}(E_{1,2})}_{=0} A = E_{1,2}$

$f(E_{2,1}) = E_{2,1} + \underbrace{\mathrm{tr}(E_{2,1})}_{=0} A = E_{2,1}$

$f(E_{2,2}) = E_{2,2} + \underbrace{\mathrm{tr}(E_{2,2})}_{=1} A = A + E_{2,2} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + (a_{2,2}+1)E_{2,2}$

La matrice de f dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1}+1 & 0 & 0 & a_{1,1} \\ a_{1,2} & 1 & 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 & 1 & a_{2,1} \\ a_{2,2} & 0 & 0 & a_{2,2}+1 \end{pmatrix}$$

En développant $\det(M)$ successivement par rapport à la deuxème puis la troisième colonne, on obtient :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+1 & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,2}+1 \end{vmatrix} = (a_{1,1}+1)(a_{2,2}+1) - a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,1} + a_{2,2} + 1$$

d'où : f est bijective $\iff \det(M) \neq 0 \iff \underbrace{a_{1,1} + a_{2,2}}_{=\mathrm{tr}(A)} + 1 \neq 0 \iff \mathrm{tr}(A) \neq -1$

Dans le cas où $n = 2$, on retrouve bien le résultat de la question b).

1.23 ENSAM 592 * :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}dt$, et la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

b) Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$

c) Montrer que $R = 1$

SOLUTION : a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}dt \leqslant \int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1} \leqslant 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|a_n x^n| \leqslant |x|^n$, ce qui montre par majoration que la série entière entière $\sum a_n x^n$ converge absolument si $|x| < 1$. Donc $\boxed{R \geqslant 1}$

b) $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}dt \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(xt)^n}{2+t^2}dt \right)$

Pour tout x tel que $|x| < 1$, posons $u_n(t) = \frac{(xt)^n}{2+t^2}$.

$\forall t \in [0,1], |u_n(t)| = \dfrac{(|x|t)^n}{2+t^2} \leqslant |x|^n$, donc $\|u_n(\ )\|_{[0,1]}^{\infty} \leqslant |x|^n$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur la segment $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un segment, on peut affirmer que :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 u_n(t)dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt \right)$, c'est à dire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(xt)^n}{2+t^2}dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{2+t^2}dt \right) = \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (xt)^n dt \right)$$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} \times \frac{1}{1-xt}dt$$

Décomposons la fraction rationnelle $\dfrac{1}{2+t^2} \times \dfrac{1}{1-xt}$ de la variable t en éléments simples : recherchons les réels a, b et c tels que : $\forall t$, $\dfrac{1}{2+t^2} \times \dfrac{1}{1-xt} = \dfrac{at+b}{2+t^2} + \dfrac{c}{1-xt}$

$$\frac{1}{(2+t^2)(1-xt)} = \frac{(at+b)(1-xt)+c(2+t^2)}{(2+t^2)(1-xt)} = \frac{(c-ax)t^2+(a-bx)t+b+2c}{(2+t^2)(1-xt)}$$

En multipliant par le dénominateur $(2+t^2)(1-xt)$ puis en identifiant les polynômes de la variable t, on obtient : $\begin{cases} c-ax=0 \\ a-bx=0 \\ b+2c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=bx \\ c=ax=bx^2 \\ b+2bx^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=\frac{1}{2x^2+1} \\ c=bx^2=\frac{x^2}{2x^2+1} \\ a=bx=\frac{x}{2x^2+1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f(x) &= \frac{1}{2x^2+1}\int_0^1 \left(\frac{xt+1}{2+t^2}+\frac{x^2}{1-xt}\right)dt \\ &= \frac{1}{2x^2+1}\int_0^1 \left(x\frac{t}{2+t^2}+\frac{1}{2+t^2}-x^2\frac{1}{xt-1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2x^2+1}\left[\frac{x}{2}\ln(2+t^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\frac{t}{\sqrt{2}})-x\ln|xt-1|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2x^2+1}\left[\frac{x}{2}(\ln(3)-\ln(2))+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{2}})-x\ln|x-1|\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\frac{1}{2x^2+1}\left[\frac{x}{2}(\ln(3)-\ln(2))+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{2}})-x\ln|x-1|\right]}$$

c) Si le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ était strictement supérieur à 1, la fonction f, somme de cette série entière, serait continue au point 1. Or le terme $x\ln|x-1|$ qui figure dans l'expression de f montre que f n'est pas continue au point 1 ($\lim\limits_{1^-} f=\infty$). Donc $\boxed{R=1}$

1.24 ENSAM 605 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}dt$

a) Déterminer le domaine de définition de cette fonction.

b) Etudier la dérivabilité de f. En déduire $f'(x)$ puis $f(x)$.

SOLUTION : a) $H(x,t)=\dfrac{t^x-1}{\ln t}=\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$

- si $x=0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{t^x-1}{\ln t}$ est la fonction nulle ; elle est intégrable sur $]0,1[$ et $g(0)$ est défini et nul.

- si $x>0$, $\lim\limits_{t\to0^+} x\ln t=-\infty$, $\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{-1}{\ln t}=o\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ converge absolument. Par ailleurs, $\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\underset{t\to1}{\sim}\dfrac{x\ln t}{\ln t}=x$

La fonction $t\mapsto\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$ est prolongeable par continuité au point 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ converge.

Pour $x\geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ est bien définie.

- si $x<0$, $\lim\limits_{t\to0^+}x\ln t=+\infty$, $\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{t^x}{\ln t}=o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ est absolument convergente si $-x<1$ c'est à dire si $x>-1$.

Dans ce cas, on a toujours $\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\underset{t\to1}{\sim}\dfrac{x\ln t}{\ln t}=x$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ est bien définie.

si $x<-1$, $\left|\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\right|\underset{t\to0^+}{\sim}\left|\dfrac{t^x}{\ln t}\right|\geqslant\left|\dfrac{1}{t\ln t}\right|$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$ est divergente.

finalement, $\boxed{\mathcal{D}_f=]-1,+\infty[}$.

b) $f'(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^1\frac{\ln t\, e^{x\ln t}}{\ln t}dt=\int_0^1 t^x dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}$

Pour tout $x\in]-1,+\infty[$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, et donc

$$f(x)=\underbrace{f(0)}_{=0}+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{t+1}=\ln(x+1)$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,+\infty[,\ f(x)=\ln(x+1)}$$

1.25 ENSAM 874

On s'intéresse aux nombres de Flavius Josèphe construits de la sorte :

- On prend la liste des entiers naturels $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \cdots$
- On enlève les nombres de deux en deux : le deuxième de la liste, le quatrième, le sixième, etc ...

1 , ~~2~~, 3 , ~~4~~ , 5, ~~6~~ , 7 ,~~8~~ , 9 ~~10~~ , 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~ , 21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31,

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \cdots \longrightarrow 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, \cdots$

- On enlève les nombres de 3 en 3 : 1, 3, ~~5~~, 7, 9, ~~11~~, 13, 15, ~~17~~, 19, 21, ~~23~~, 25, 27, ~~29~~, 31, 33, ~~35~~, 37, ...

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, \cdots \longrightarrow 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, 33, \cdots$

- On enlève les nombres de 4 en 4 : 1, 3, 7, ~~9~~, 13, 15, 19, ~~21~~, 25, 27, 31, ~~33~~, ...

$1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, 33, \cdots \longrightarrow 1, 3, 7, 13, 15, 19, 25, 27, 31, \cdots$

et ainsi de suite . . . . jusqu'à l'infini . . . .

On obtient alors la suite des nombres de Flavius Josephe.

a) Ecrire une fonction "`Retirer(L,i)`" qui prend en paramètre d'entrée une liste d'entiers `L`, un entier `i`, et qui retire le i^e terme, le $(2i)^e$ terme, et tous les termes donc les indices sont multiples de i. On prendra garde que pour que cette méthode puisse être appliquées à la suite qui précède, l'indice de numérotation doit commencer à 1 (et pas à 0 comme c'est le cas dans une liste Python)

b) Ecrire une procédure permettant de calculertous les nombres de Flavius Josephe compris entre 1 et 100.

c) Ecrire une fonction "`FlaviusJosephe(n)`" qui, étant donné un entier `n`, renvoie la liste des nombres de Flavius Josephe inférieurs ou égaux à `n` .

d) Ecrire une fonction `U(n)` qui retourne le nombre U_n de nombres de Flavius inférieurs à `n`

e) La suite de terme général $v_n = \dfrac{4n}{U_n^2}$ semble-t-elle converger ? Conjecturer sa limite λ.

SOLUTION : a)

```
def Retirer(L,i):
    M=[ ]
    for j in range(len(L)):
        if (j+1)%i !=0:
            M.append(L[j])
    return M
```

b)
```
L=[k for k in range(1,101)]
for i in range(2,15):
    L=Retirer(L,i)
    print("i=",i,'L=',L)
```

Réponse : arrivé à $i = 11$, les termes de la suite inféroeurs ou égaux à 100 n'évoluent plus

```
L= [1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91]
```

c)

```
def FJ(n):
    L=[k for k in range(1,n+1)]
    i=2
    while i<len(L):
        L=Retirer(L,i)
        i+=1
    return L
```

d)
```
def U(n):
    return len(FJ(n))
```

e)
```
for m in range(1,10):
    n=5**m
    print(m,4*n/(U(n))**2)
```

Réponse :

1 2.2222222222222223
2 2.7777777777777777
3 2.9585798816568047
4 3.188775510204082
5 3.1494079113126734
6 3.1437050450178563
7 3.1295064893446565
8 3.1437050450178563
9 3.1414246245067714 $\boxed{\text{On peut conjecturer que } (v_n) \text{ converge vers } \pi}$.

1.26 ENSAM 875

a) Pour un entier `n`, que renvoie l'instruction `list(str(n))`

b) Ecrire une fonction `somme(n)` qui à tout entier naturel `n` associe la somme de ses chiffres.

c) Un nombre est dit adéquat si la somme de ses chiffres est un multiple de 10.
Ecrire une fonction test qui renvoie le booléen `True` si le nombre est adéquat, et `False` sinon.

d) Ecrire une fonction "`modification(n)`" qui change le signe des unités de `n` pour qu'il soit adéquat. Si `n` est déjà adéquat, la fonction le renvoie sans modification.

e) Tester la fonction pour 10 entiers entre 10 000 et 100 000 grâce à la fonction `randint`

SOLUTION : a) L'instruction `list(str(n))` renvoie la liste des chiffres qui composent le nombre entier `n`. Cette liste est composée de caractères, pas de nombres entiers. Mais on peut transformer ces caractères en nombres en leur appliquant la fonction `int` .

```
n=987654321
print(n)
a=str(n)
print(a)
print(type(a))
b=list(str(n))
print(type(b))
print(b)
print(type(b[0]))
print(type(int(b[0])))
```

b)
```
def somme(n):
   a=list(str(n))
   b=[int(a[k]) for k in range(len(a))]
   return(sum(b))
```
(ou aussi `b=[int(x) for x in a]`)

c)
```
def TestAdequat(n):
      test=False
      if somme(n)%10==0:
          test=True
      return test
```

d)
```
def modification(n):

    unit=n%10
    n0=n-unit
    while TestAdequat(n0)==False:
        n0+=1
    return(n0)
```

e)
```
import random as rd
   for k in range(10):
       m=rd.randint(10000,100001)
       print("modification de",m,"=",modification(m))
```

1.27 ENSAM 876

a) Ecrire une fonction `DecimalBinaire(n)` qui prend en argument un entier `n`, écrit en base 10, et qui retourne une liste correspondant à son écriture binaire. Ainsi `DecimalBinaire(23)` devra renvoyer `[1, 0, 1, 1, 1]`
$(23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0)$
Donner une solution directe et une solution récursive.

b) On note `T(n)` la somme modulo 2 de l'écriture de l'entier `n` en base 2.
Ecrire une fonction calculant `T(n)` .
Ecrire une fonction récursive calculant `T(n)` .

SOLUTION : a-1) Solution directe

```
def DecimalBinaire(n):
    q,r=n//2,n%2
    B=[r]
    while q>0:
        q,r=q//2,q%2
        B=[r]+B
    return B
```

a-2) Solution récursive

```
def DecimalBinaireRec(n):
    if n==1:
        B=[1]
    else:
        q,r=n//2,n%2
        B= DecimalBinaireRec(q)+[r]
    return B
```

b-1)
```
def T(n):
        return sum(DecimalBinaireRec(n))%2
```
b-2)

```
def TRec(n):
    if n==0:
        resultat=0
    else:
        resultat=(TRec(n//2)+(n%2))%2
    return resultat
```

1.28 ENSAM 877 * :

Une date du calendrier gérgorien est représentée par un triple (j, m, a), (jour, mois, année).

Par exemple (20, 7, 1969) réprésente le 20 juillet 1969, (29,2,2016) représente le 29 février 2016.

Une année est bissextile si elle est multiple de 4, mais pas multiple de 100, sauf si elle est multiple de 400.

Par exemple, 1700, 1800, 1900, 2100 ne sont pas des années bissextile, mais 1600 et 2000 en sont une.

Entre 1789 et 1830, les années bissextiles sont 1792, 1796, 1804, 1808, 1812, 1816, 1820, 1824, 1828.

a) Ecrire une fonction " `TestBissectile(a)` " qui prend en paramètre d'entrée une année `a (integer)` qui retourne le booléen `True` si l'année `a` est bissextile, et `False` sinon.

Ecrire une fonction " `VerifierDate(j,m,a)` " qui vérifie si une date est valide en retournant booléen `True` si c'est le cas.

Par exemple, (10, 6, 2016), (29, 2, 2016) sont des dates valides, (5, 13, 2010), (29, 2, 2015) et (33, 3, 2016) n'en sont pas.

b) Ecrire une fonction "`Compter29fev(j1,m1,a1,j2,m2,a2)`" qui compte le nombre de 29 février entre les deux dates "`(j1,m1,a1)`" et "`(j2,m2,a2)`", bornes extrémités comprises.

c) Ecrire une fonction "`NbreJours(d1,d2)`" qui revoit le nombre de jours entre deux dates, bornes `d1` et `d2` exclues.

SOLUTION : a)

```
def TestBissectile(n):
    test=False
    if n%4==0:
        test=True
    if n%100 ==0:
        test=False
    if n%400==0:
        test=True
    return test
```

Testons cette fonction sur les années entre 1888 et 1908 :

```
print([(k,TestBissectile(k)) for k in range(1888,1909)])
```

• Fonction "`VerifierDate(j,m,a)`"

```
Mois31jours=[1,3,5,7,8,10,12]
Mois30jours=[4,6,9,11]

def VerifierDate(j,m,a):
    resultat=False
    if m in Mois31jours:
        if j in [k for k in range(1,32)]:
            resultat=True
    elif m in Mois30jours:
```

```
        if j in [k for k in range(1,31)]:
            resultat=True
    elif m==2:
        if TestBissectile(a)==True:
            if j in [k for k in range(1,30)]:
                resultat=True
        elif TestBissectile(a)==False:
            if j in [k for k in range(1,29)]:
                resultat=True
    return resultat
```

b) Fonction "Compter29fev(j1,m1,a1,j2,m2,a2)"

On compte d'abord les 29 février entre l'année a1+1 et a2-1 incluses. Pour cela il suffit de compter les années bissextiles dans cet intervalle (fermé).

Dans le cas où a1 serait bissextile, on rajoute 1 si la première date est antérieure ou égale au 29 février.

Dans le cas où a2 serait bissextile, on rajoute 1 si la deuxième date est ultérieure ou égale au 29 février.

```
def Compter29fev(j1,m1,a1,j2,m2,a2):
    compteur=0
    for year in range(a1+1,a2):
        if TestBissectile(year)==True:
            compteur+=1
    if TestBissectile(a1)==True:
        if m1<=2:
            compteur+=1
    if TestBissectile(a2)==True:
        if m2>=3:
            compteur+=1
        elif (j2,m2)==(29,2):
            compteur+=1
    return compteur
```

c) Ecrire une fonction "NbreJours(d1,d2)" qui revoit le nombre de jours entre deux dates, bornes d1 et d2 exclues.

On compte d'abord les jours des années pleines entre l'année a1 et l'année a2, sans compter les 29 février : il y a 365 $\times(a_2 - a_1 - 1)$ jours de ce type.

On rajoute les 29 févriers entre ces deux dates, décalées d'un jour (on ne compte pas les bornes)

On rajoute les jours de l'année a1 entre (j1, m1, a1) et (31, 12, a1)

On rajoute les jours de l'année a2 entre (1, 1, a2) et (j2, m2, a2)

????????????????????????????

1.29 ENSEA 962

Soient $p \in]0,1]$, $q = 1-p$, $X_1, X_2, \cdots, X_N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une lloi géométrique de même paramètre p. (On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [[1,N]],\ P(X_i = n) = pq^{n-1}$

a) Calculer $P(X_i \leqslant n)$

b) Soit $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_N)$. Calculer $P(Y \leqslant n)$. En déduire $P(Y = n)$.

c) Montrer que Y admet une espérance. (on ne demande pas de la calculer)

<u>**SOLUTION**</u> **:** a) $(X_i \leqslant n) = (X_i = 1) \cup (X_i = 2) \cup \cdots \cup (X_i = n)$, et puisque ces évènements sont deux à deux incompatibles, $P(X_i \leqslant n) = P(X_i = 1) + P(X_i = 2) + \cdots + P(X_i = n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\dfrac{1-q^n}{1-q}$

$\boxed{P(X_i = n) = 1 - q^n}$

b) Les évènements $(X_1 \leqslant n), (X_2 \leqslant n), \cdots, (X_N \leqslant n)$ étant mutuellement indépendants,

$(Y \leqslant n) = (X_1 \leqslant n) \cap (X_2 \leqslant n) \cap \cdots \cap (X_N \leqslant n)$ et $P(Y \leqslant n) = P(X_1 \leqslant n).(X_2 \leqslant n). \cdots .(X_N \leqslant n)$

donc $P(Y \leqslant n) = \underbrace{(1-q^n)(1-q^n). \cdots .(1-q^n)}_{N\ fois} = (1-q^n)^N$ $\boxed{P(Y \leqslant n) = (1-q^n)^N}$

• Les évènements $(Y \leqslant n-1)$ et $(Y = n)$ sont incompatibles.

Donc $P(Y \leqslant n) = P[(Y \leqslant n-1) \cup (Y = n)] = P(Y \leqslant n-1) + P(Y = n)$

d'où l'on déduit : $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1)$

$\boxed{P(Y = n) = (1-q^n)^N - (1-q^{n-1})^N}$

c) La variable aléatoire Y admet une espérance si et sulement si la série de terme général

$u_n = nP(Y = n) = n[(1 - q^n)^N - (1 - q^{n-1})^N]$ converge.

Quand $n \to +\infty$, $q^n \to 0$ puisque $0 \leqslant q < 1$, d'après l'hypothèse $p \in]0, 1]$.

Quand $x \to 0$, $(1 + x)^N = 1 + Nx + o(x)$, donc

$$u_n = n[(1 - q^n)^N - (1 - q^{n-1})^N] = n[1 - Nq^n + o(q^n) - 1 + Nq^{n-1} + o(q^{n-1})]$$

$$u_n = n[Nq^{n-1} - Nq^n + o(q^n)] = n\ N\ q^{n-1}(1 - q + o(1))$$

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} Np\ nq^{n-1}$$

Or la série $\sum nq^{n-1}$ converge (critère de d'Alembert, $0 \leqslant q < 1$), donc, par équivalence, la série $\sum u_n = \sum n\, P(Y = n)$ converge et Y admet une espérance.

1.30 965 Navale *

Une entreprise de dépannage à domicile affirme pouvoir intervenir dans les 30 minutes qui suivent l'appel telephonique d'un client. La probabilité que ce délai ne soit pas respecté est $p = \frac{1}{4}$.

a) Un client a besoin 4 fois dans cette année de faire appel aux services de cette entreprise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de retards lors de ces 4 interventions. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.

b) La société de dépannage reçoit Y appels dans la journée, où Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit Z la variable aléatoire associée au nombre de retards dans la journée. Quelle est la loi de Z ?

c) On reste avec les hypothèses de la question précédente. On nore U la variable aléatoire assiciée au rang du premier appel qui mène à un retard dans l'intervention demadée. Si toutes les interventions de la journée se font en temps imparti, U n'est pas défini.

Donner la probabilité que U soit défini.

Donner la loi de U.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(U = k$. (on admetrra qu'on peut permuter les deux $\sum$ rencontrés)

Commentaire ?

<u>SOLUTION</u> : a) Si on appelle (paradoxalement) succès le cas où l'entreprise intervient avec retard, X compte le nombre de succès dans l'épreuve de Bernoulli qu'est l'intervention de la société lors de la répétition 4 fois de cette épreuve. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4, p = \frac{1}{4}$: $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p) = \mathscr{B}(4, \frac{1}{4})$

$$\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\},\ P(X = k) = \binom{4}{k} p^k (1 - p)^{4-k}$$

$$E(X) = n\, p = 1 \qquad V(X) = n\, p\, q = 4 \times \tfrac{1}{4} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}$$

b) La famille $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une famille complète d'évènements.

Donc $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(Z = k | Y = n) P(Y = n)$

$(Z = k | Y = n)$ est constitué des évènements qui comptent k succès parmi n tirages :

$P(Z = k | Y = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Remarquons que si $k > n$, en n appels, il ne peut pas y avois k retards, donc dans ce cas, $P(Z = k | Y = n) = 0$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N},\ P(Z = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z = k | Y = n) P(Y = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n \lambda^n}{n!} \quad \text{(par le décalage d'indice } n' = n - k)$$

$$P(Z = k) = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda q} = \frac{e^{-\lambda + \lambda q} p^k \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda\, p} \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(Z = k) = e^{-\lambda\, p} \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}} \qquad \boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda\, p)}$$

c) Un jour donné, U n'est pas défini si les Y appels reçus par la société ont donné lieu à des interventions en temps annoncé.

Y peut prendre toute valeur $n \in \mathbb{N}$, et lorsque $Y = n$, on doit avoir aucun succès sur les n interventions, ce qui a lieu avec une probabilité égale à q^n (n échecs dans la répétition de n épreuves de Bernoulli)

La probabilité que U ne soit pas défini est donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda\, q)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda\, q} = e^{\lambda(q-1)} = e^{-p\lambda}$$

• U prend ses valeurs dans N^* quand elle est définie.

La famille $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ constituant une famille complète d'évènements, Pour tout $k \geqslant 1$, $(U=k) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(U=k)\cap(Y=n)]$

Pour $n<k$, l'évènement $(U=k)\cap(Y=n)$ est impossible, car le premier succès ne peut pas parvenir au k^e appel s'il n'y a que n appels dans la journée, avec $n<k$.

Donc $(U=k) = \bigcup_{n\geqslant k} [(U=k)\cap(Y=n)]$, et puisque ces évènements sont deux à deux incompatibles,

$$P(U=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P[(U=k)\cap(Y=n)] = \sum_{n=k}^{\infty} P(U=k|Y=n)P(Y=n)]$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} pq^{k-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = pq^{k-1}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \boxed{P(U=k) = pq^{k-1}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}}$$

• $$\sum_{k=1}^{\infty} P(U=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(pq^{k-1}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right) = pe^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} q^{k-1}\frac{\lambda^n}{n!}\right)$$

$$= pe^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\frac{\lambda^n}{n!} = pe^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}\right)$$

$$= pe^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{1-q^n}{1-q} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1-q^n) \qquad (\text{car } 1-q=p)$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!}\right) = e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1-e^{q\lambda}+1)$$

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} P(U=k) = 1-e^{-p\lambda}}$ Ce résultat est en accord avec la probabilité que U soit définie.

1.31 St Cyr 881 **texte rectifié**

Pour x réel, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}dt$

a) Etudier le domaine de définition et la dérivabilité de la fonction g.

b) En déduire $g(x)$

c) programmer le calcul de $g(x)$ par la méthode des trapèzes

Tracer sur un même graphique le garaphe de la fonction g sur le segment $[0,10]$, d'une part donnée par la méthode des trapèzes, d'autre part par la valeur exacte calculée au b)

d) Déterminer un réel x tel que $g(x) = \frac{\pi}{2}$

$g(x) = \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2}\ln(1+x) = \frac{\pi}{2} \iff \ln(1+x)=1 \iff 1+x=e \iff x=e-1$

SOLUTION : a) La fonction tan est définie et continue sur $[0,\pi/2[$, et la fonction Arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Comme composée et quotient de fonctions continues, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}$ est définie et continue que $]0,\pi/2[$.

$\dfrac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x\tan(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x\,t}{t} = x$. La fonction est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable sur $]0,\pi/4]$.

Quand $t\to\pi/2^-$, $\mathrm{Arctan}(x\tan(t))$ est borné, et $\tan(t)\to+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2^-}\frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)} = 0$. On peut prolonger la fonction par continuité en 0; elle est donc intégrable sur $[0,\pi/2[$.

Finalement, $\boxed{J(x) \text{ est défini pour tout } x\in\mathbb{R}}$.

b) Notons $G(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}$, de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} G(x,t)dt$

• Pour tout $t\in I =]0,\pi/2[$, la fonction $x\mapsto G(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+x^2\tan^2(t)}$

• Pour tout $x\in J=\mathbb{R}$, les fonctions $t\mapsto G(x,t)$ et $t\mapsto\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $I=]0,\pi/2[$
(la première a été étudiée avec le domaine de définition de g, pour la seconde, voir la majoration qui suit)

• Pour tout $(x,t)\in J\times I$, $\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{1+x^2\tan^2(t)} \leqslant 1$, et la fonction constante 1 est bien intégrable sur $I=]0,\pi/2[$.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on peut affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+x^2\tan^2(t)}dt}$

• Effectuons le changement de variable $u=\tan(t),\ t=\text{Arctan}(u),\ dt=\dfrac{du}{1+u^2}$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+x^2\tan^2(t)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2u^2}\times\frac{1}{1+u^2}du$$

$$\frac{1}{1+x^2y}\times\frac{1}{1+y}=\frac{a}{1+x^2y}+\frac{b}{1+y}=\frac{a(1+y)+b(1+x^2y)}{(1+x^2y)(1+y)}=\frac{(a+bx^2)y+a+b}{(1+x^2y)(1+y)}$$

Par identification des termes constants et en y, $\begin{cases} a+bx^2=0\\ a+b=1\end{cases}\implies\begin{cases} a=\frac{x^2}{x^2-1}\\ b=\frac{1}{1-x^2}\end{cases}$

En remplaçant y par u^2, on obtient : $\dfrac{1}{1+x^2u^2}\times\dfrac{1}{1+u^2}=\dfrac{x^2}{x^2-1}\times\dfrac{1}{1+x^2u^2}+\dfrac{1}{1-x^2}\times\dfrac{1}{1+u^2}$

d'où : $g'(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+x^2u^2}+\frac{1}{1-x^2}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}}_{=\pi/2}$

$$\forall x>0,\ g'(x)=\frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\frac{1}{x^2}+u^2}+\frac{1}{1-x^2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{x^2-1}x\left[\text{Arctan}(xu)\right]_0^{+\infty}+\frac{\pi}{2(1-x^2)}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}\times\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{x+1}$$

Finalement, $\boxed{\forall x>0,\ g'(x)=\dfrac{\pi}{2(x+1)}}$

Pour $x=0$, $\boxed{g'(0)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}}$

La fonction g est impaire (comme la fonction Arctan). Sa dérivée g' est donc paire.

Donc $\forall x<0,\ g'(x)=g'(-x)=\dfrac{\pi}{2(-x+1)}=\dfrac{\pi}{2(|x|+1)}$

Finalement, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\dfrac{\pi}{2(|x|+1)}}$

$$\forall x>0,\ g(x)=g(0)+\int_0^x g'(t)dt=0+\frac{\pi}{2}\int_0^x\frac{dt}{t+1}=\frac{\pi}{2}\ln(x+1)$$

$\boxed{\forall x>0,\ g(x)=\frac{\pi}{2}\ln(x+1)}$ $\boxed{\forall x<0,\ g(x)=-g(-x)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-x)}$

c) • Définition de la fonction la fonction $(x,t)\mapsto\dfrac{\text{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}$:

```
def f(x,t):
    if t==0:
        R=x
    else:
        R=math.atan(x*np.tan(t))/np.tan(t)
    return R
```

• Définition de la fonction $(x\mapsto g(x))$: On a un second paramètre d'entée par la méthode de trapèzes : le nombre n d'intervalles de la subdivision.

```
def g(x,n):
    S=(f(x,0)+f(x,np.pi/2))/2
    T=np.linspace(0,np.pi/2,n+1)
    for k in range(1,n):
        S+=f(x,T[k])
    return S*(np.pi/2)/n
```

• Tracé des deux corbes :

```
plt.figure()
m=10          # prendre différentes valeurs de m : 5,  10,  20,  50,  etc...
X=np.linspace(0,10,m)
A=[g(x,m) for x in X]
L=[np.pi/2*np.log(1+x) for x in X]
plt.plot(X,A,'b',X,L,'r')
plt.show()
```

On constate que même pour les petites valeurs de m, les deux courbes sont très proches

d) $g(x)=\frac{\pi}{2}\iff\frac{\pi}{2}\ln(1+x)=\frac{\pi}{2}\iff\ln(1+x)=1\iff 1+x=e\iff x=e-1$

1.32 ENAC W.K.

Exercice 1 : 30 mn de préparation

On pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$

1) Donner le domaine de définition de la fonction ζ.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de ζ.

3) Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)dx$ est définie, et est égale à la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$

Exercice 2 : sans préparation $E=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\ /M \text{ est orthogonale }\}$

1) Déterminer E

2) Nombre d'éléments de E ?

SOLUTION : Exercice 1 : 1) On sait que la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x>1$.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_\zeta=]1,+\infty[}$

2- Soient $x>1$ et $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^x}\leqslant\frac{1}{t^x}\leqslant\frac{1}{k^x}$, et en intégrant cette inégalité pour $t\in[k,k+1]$,

on obtient : $\frac{1}{(k+1)^x}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^x}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{k^x}=\frac{1}{k^x}$

En sommant pour k variant de 1 à p, puis en passant à la limite quand $p\to+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^x}\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x},$$

Puisque $\forall x>1$, $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}=\int_1^{+\infty}t^{-x}dt=\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{x-1}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\zeta(x)-1\leqslant\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x),\text{ soit aussi : }\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)\leqslant1+\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

• L'encadrement $\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)\leqslant\frac{x}{x-1}$ montre que $\boxed{\lim_{x\to1^+}\zeta(x)=+\infty}$ et que $\boxed{\zeta(x)\underset{x\to1^+}{\sim}\frac{1}{x-1}}$

• L'encadrement $1\leqslant\zeta(x)\leqslant\frac{x}{x-1}$ montre que $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1}$

2- Pour tout $n\geqslant1$ et $x>1$, notons $u_n(x)=\frac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$

- Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $u_n'(x)=-\ln n\ e^{-x\ln n}$
- La série de fonction $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ (série de Riemann)
- Soit $a>1$, quelconque, fixé. $\forall x\in[a,+\infty[, 0\leqslant|u_n'(x)|\leqslant|u_n'(a)|=\frac{\ln n}{n^a}$.

donc $\|u_n\|_{[a,+\infty[}^{\infty}\leqslant\frac{\ln n}{n^a}$, qui est une série convergente car $a>1$

La série des dérivées, $\sum u_n'(\ )$ converge normalement , donc converge uniformément sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que la fonction somme, ζ, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et que $\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$

Ceci étant vrai pour tout $a>1$, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, et $\boxed{\forall x\in]1,+\infty[,\ \zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}}$

3) la fonction $x\mapsto\zeta(x)-1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, donc est continue sur $[2,+\infty[$.

$\forall x\in[2,+\infty[,\zeta(x)-1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\ln n}$. Posons $v_n(x)=e^{-x\ln n}$.

Pour tout $n\geqslant2$, la fonction $v_n(\ )$ est continue et intégrable sur $[2,+\infty[$ (fonction exponentielle décroissante de référence) et,

$$\int_2^{+\infty}u_n(x)dx=\int_2^{+\infty}e^{-x\ln n}dx=\left[\frac{e^{-x\ln n}}{-\ln n}\right]_2^{+\infty}=\frac{e^{-2\ln n}}{\ln n}=\frac{1}{n^2\ \ln n}$$

$\int_2^{+\infty}|u_n(x)|dx=\frac{1}{n^2\ \ln n}$ est le terme général d'une série numérique convergente

(car $\forall n\geqslant3,\ 0\leqslant\frac{1}{n^2\ \ln n}\leqslant\frac{1}{n^2}$)

Par application du théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque, on peut affirmer que la fonction $(x\mapsto\zeta(x)-1)$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ et que :

$$\int_2^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}v_n(x)\right)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\int_2^{+\infty}v_n(x)dx\right),\text{ donc }\boxed{\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}}$$

Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)dx$ est définie, et est égale à la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$

Exercice 2 : 1) $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \ / M \text{ est orthogonale } \}$

Une matrice $M \in E$ est orthogonale et à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Les vecteurs colonnes de cette matrice forment une BON de $\mathbb{R}^n$.

La somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1. Or ce sont des entiers. Donc un et un seul d'entre eux peut être non nul, et vaut nécessaurement ± 1.

Donc chaque colonne est composée de $n-1$ fois le coefficient 0 et une fois 1 ou -1.

Deux colonnes doivent être orthogonales entre elles, donc être linéairement indépendantes. Cela entraîne que la position (indice ligne) du coefficient non nul est différent d'une colonne à l'autre.

Finalement, les matrices de E sont les matrices dont les coefficients de chaque colonne sont nuls, sauf l'un d'entre eux, qui vaut 1 ou -1, et ces coefficients non nuls sont décalés d'une colonne à l'autre.

2) Dans la première colonne, le coefficient non nul peut être dans n'importe laquelle des n lignes. Il vaut ± 1, cela donne $2n$ possibilités.

Le coefficient non nul de la deuxième colonne peut être dans n'importe quelle ligne autre que celle où se trouve le coefficient non nul de la première colonne. Cela donne $n-1$ positions possibles, donc $2(n-1)$ colonnes possibles puisque ce coefficient vaut ± 1.

De même, pour la troisième colonne, il y aura $2(n-2)$ possibilités. Ainsi de suite jusqu'à la dernière colonne où il y a 2 possibilités.

Finalement, $\quad \text{Card}(E) = 2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \cdots \times 6 \times 4 \times 2 = 2^n \ n!$ $\qquad \boxed{\text{Card}(E) = 2^n n!}$

2 Mines - Ponts : -

2.1 "Petites mines" M.B.

Exercice 1 : $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \ a_{i,j} = \dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 2 : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $g : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente.

SOLUTION : Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots & \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

La matrice A est triangulaire supérieure, et son déterminant est $\binom{1}{1} \times \binom{2}{2} \times \cdots \times \binom{n}{n} = 1 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.

Essayons d'interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme ou comme une matrice de passage.

La k^e colonne de A est $C_k = \begin{pmatrix} \binom{k}{1} \\ \binom{k}{2} \\ \binom{k}{3} \\ \vdots \\ \binom{k}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coefficients de cette colonne apparaissent dans la formule du binôme : $(a+b)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$

En particulier, $(X+1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j 1^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} X + \binom{k}{2} X^2 + \cdots + \binom{k}{k} X^k$

Le polynôme $P_k = (X+1)^k - 1$ se décompose de la manière suivante sur la famille $(X, X^2, \cdots X^k)$:

$$P_k = (X+1)^k - 1 = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} X^j$$

On peut voir cette égalité comme la décomposiyion de P_k sur la famille $(X, X^2, \cdots X^n)$:

$$P_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} X^j + 0.X^{k+1} + \cdots + 0.X^n = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} X^j \qquad (*)$$

La famille $(X, X^2, \cdots X^n)$ est libre (polynômes de degrés deux à deux distincts), et engendre

$\text{Vect}(X, X^2, \cdots X^n) = X\mathbb{R}_{n-1}[X]$

C'est donc une base de $E_n = X\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Pour $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, le polynôme $P_k(X) = (X+1)^k - 1$ appartient bien à E_n (il se factorise par X puisque $P(0) = 1 - 1 = 0$), et le système $(P_1(X), P_2(X), \cdots, P_n(X))$ est une base de E_n (système libre car polynômes de degrés deux à deux distincts, et possèdant n vecteurs, avec $n = \dim(E_n)$)

Les égalités $P_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} X^j + 0.X^{k+1} + \cdots + 0.X^n = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} X^j$ (*) expriment les vecteurs de la base $(P_1(X), P_2(X), \cdots, P_n(X))$ en fonction de la base $(X, X^2, \cdots, X^n)$. La matrice A est donc la matrice de passage de la base $(X, X^2, \cdots, X^n)$ à la base $(P_1(X), P_2(X), \cdots, P_n(X))$

Pour calculer la matrice inverse A^{-1}, il suffit d'exprimer les polynômes $(X, X^2, \cdots, X^n)$ en fonction de $(P_1(X), P_2(X), \cdots, P_n(X))$.

• Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $X^k = (X + 1 - 1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (X+1)^j (-1)^{k-j}$

$$X^k = \underbrace{\binom{k}{0}(-1)^k}_{j=0} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (X+1)^j (-1)^{k-j} \qquad \text{or } (X+1)^j = P_j(X) + 1$$

$$\begin{aligned} X^k &= \binom{k}{0}(-1)^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [P_j(X) + 1](-1)^{k-j} \\ &= \binom{k}{0}(-1)^k + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P_j(X) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P_j(X) + \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}}_{=(1-1)^k=0} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $X^k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} P_j(X) + 0.P_{k+1}(X) + \cdots + 0.P_n(X)$.

En posant : $\boxed{A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \text{ on a : } \begin{cases} b_{j,k} = (-1)^{k-j}\dbinom{k}{j} & \text{si } j \leqslant k \\ b_{j,k} = 0 \quad \text{si } j > k \end{cases}}$

Exercice 2 : Puisque $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et intégrable sur tout segment $[1, x]$ pour tout $x > 0$.

La fonction $g : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. La fonction g et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, on peut intégrer par parties sur $[1, x]$ pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0, \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x f(t) \times \frac{1}{t} dt = \left[g(t) \times \frac{1}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{g(t)}{t^2} dt$$

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \frac{g(x)}{x} - \underbrace{g(1)}_{=0} + \int_1^x \frac{g(t)}{t^2} dt \qquad (*)$$

Par hypothèse g est bornée, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in [1, +\infty[, |g(t)| \leqslant M$, donc $\left| \dfrac{g(t)}{t^2} \right| \leqslant \dfrac{M}{t^2}$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. Par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^2} dt$ est donc **absolument** convergente.

L'égalité (*) montre alors que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = 0 - \underbrace{g(1)}_{=0} + \int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^2} dt$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ est convergente}}$ (et égale à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^2} dt$)

2.2 TPE 864

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION : • La dernière ligne de A nous montre que 2 est valeur propre ($\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -1 & x-3 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$, et on développe suivant la dernière ligne)

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rang 1. Donc $\dim(E_A(2)) = 3 - 1 = 2 \leqslant \ ordre(2)$

2 est valeur propre au moins double. Si on note $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3$ les valeurs propres de A,

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + \lambda_3 = \operatorname{tr}(A) = 8$, donc $\lambda_3 = 4$

Ainsi , $\operatorname{Sp}(A) = \{ \underbrace{2}_{double}, 4\}$, $\dim(E_A(2)) + \dim(E_A(4)) = 2 + 1 = 3$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Elle admet alors pour polynôme annulateur $P(X) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda) = (X-2)(X-4)$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, effectuons la division euclidienne de X^n par $P(X) = (X-2)(X-4)$:

Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, dépendant de $\mathbb{N}$ tels que : $X^n = (X-2)(X-4)Q(X) + \underbrace{aX + b}_{degre < d^\circ(P) = 2}$

En prenant les valeurs de ces polynômes et 2 et en 4, on obtient deux relations : $\begin{cases} 2^n = 2a + b \\ 4^n = 4a + b \end{cases}$

Par différence : $a = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$

et substitution : $b = 2^n - 2a = 2^n - (4^n - 2^n) = 2 \times 2^n - 4^n$

En appliquant l'égalité $X^n = (X-2)(X-4)Q(X) + aX + b$, on obtient :

$A^n = \underbrace{P(A)}_{=0} + \frac{1}{2}(4^n - 2^n)A + (2 \times 2^n - 4^n)I_3$ $\boxed{A^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)A + (2 \times 2^n - 4^n)I_3}$

2.3 TPE 902 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$

Montrer que A est inversible, et que $\det(A) > 0$

SOLUTION : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$

alors $A(A^2 - I_n) = I_n$, ce qui montre que A est inversible, et que $A^{-1} = A^2 - I_n$

Le polynôme $P(X) = X^3 - X - 1$ est un polynôme annulateur de A.

$P'(X) = 3X^2 - 1 = 3\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$M = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ $\qquad m = P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < P(0) = -1 < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$		0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$M < 0$	$\searrow$		$m < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

L'étude du tableau de variations de P montre que le polynôme P admet une et une seule racine réelle $\beta > \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$

Il admet donc deux récines complexes conjuguées non réelles α et $\overline{\alpha}$

La polynôme annulateur $P(X)$ étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A est semblable à une matrice diagonale de la forme $\Delta = \operatorname{diag}(\underbrace{\alpha, \cdots, \alpha}_{p\ fois}, \underbrace{\overline{\alpha}, \cdots, \overline{\alpha}}_{p\ fois}, \underbrace{\beta, \cdots, \beta}_{q\ fois})$

α et $\overline{\alpha}$ ont même ordre de multiplicité puisque A est une matrice réelle.

alors $\det(A) = \det(\Delta) = \alpha^p \overline{\alpha}^p \beta^q = (\alpha\overline{\alpha})^p \beta^q = |\alpha|^{2p} \beta^q > 0$ puisque $|\alpha| > 0$ et $\beta > 0$.

2.4 TPE 907:

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases}$

Les matrices A et B sont elles diagonalisables ?

SOLUTION : $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient les relations : $\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases}$

alors $\begin{cases} 4A + 6B = 2C^2 \\ 5A + 6B = C^3 \end{cases} \Longrightarrow A = C^3 - 2C^2$

et $2(C^3-2C^2)+3B=C^2 \implies B=-\frac{2}{3}C^3+\frac{5}{3}C^2$

En reportant dans la relation $A+B=C$, on obtient : $C^3-2C^2-\frac{2}{3}C^3+\frac{5}{3}C^2=C$, soit :

$\frac{1}{3}C^3-\frac{1}{3}C^2-C=0$.

Le polynôme $X^3-X^2-3X=X(X^2-X-3)$ est un polynôme annulateur de C, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. (le discriminant $\delta=1+12=13>0$)

Donc $\boxed{C \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$, $\Delta\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, telles que $C=P.\Delta.P^{-1}$

$A=C^3-2C^2=(P.\Delta.P^{-1})^3-2(P.\Delta.P^{-1})^2=P.(\underbrace{\Delta^3-2\Delta^2}_{diagonale}).P^{-1}$, ce qui montre que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De manière analogue, $B=-\frac{2}{3}C^3+\frac{5}{3}C^2=P.\left(-\frac{2}{3}\Delta^3+\frac{5}{3}\Delta^2\right).P^{-1}$ et B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.5 TPE 961

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(X=k)=\dfrac{k-1}{2^k}$

a) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=1$

b) Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?

c) X admet - elle une espérance finie ? Si oui la calculer.

SOLUTION : a) On sait que $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^k$

Par dérivation (justifier), $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{k=0,1}^{\infty}kx^{k-1}$, et par le changement d'indice $k=k'-1$,

$\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{k=1,2}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$, et en multipliant par x^2,

$\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{x^2}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{k=1,2}^{\infty}(k-1)x^{k}$, et en remplaçant x par $\frac{1}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}=\frac{(\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{(2-1)^2}=1$$

b) $G_X(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)t^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}t^k=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\left(\frac{t}{2}\right)^k=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{t^2}{(2-t)^2}$ $\quad\boxed{G_X(t)=\dfrac{t^2}{(2-t)^2}}$

Son rayon de convergence est égal à 2. (immédiat par le critère de d'Alembert)

La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)$ converge, (immédiat par le critère de d'Alembert), donc l'espérance de X est bien définie.

On sait qu'alors $E(X)=G'_X(1)$.

Or $G_X(t)=\dfrac{t^2}{(t-2)^2}\implies G'_X(t)=\dfrac{2t(t-2)^2-t^2.2.(t-2)}{(t-2)^4}=\dfrac{2t(t-2)-2t^2}{(t-2)^3}$

donc $\boxed{E(X)=G'_X(1)=\dfrac{-2-2}{(-1)^3}=4}$

2.6 Telecom SudParis T.L.) : sans préparation

Exercice 1 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, de rang r.

Montrer que $[\mathrm{tr}A]^2\leqslant r.\mathrm{tr}(A^2)$

Exercice 2 : On considère l'application $f: x\mapsto \dfrac{1}{-x^2+x+2}$

Etudier son développement en série entière.

SOLUTION : Exercice 1 : Voir chapître "Espaces préhilbertiens et euclidiens"

Exercice 2 : $-X^2+X+2=-(X+1)(X-2)$

$$\frac{1}{-x^2+x+2}=\frac{-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\times\frac{(x-2)-(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

On sait que $\forall u\in]-1,1[,\dfrac{1}{1-u}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}u^k$

Donc $\forall x\in]-1,1[,\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k$

et $\forall x \in]-2,2[, \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^{k+1}}$

d'où : $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2-x}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^{k+1}}\right)$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left((-1)^k + \frac{1}{2^{k+1}}\right) x^k}$$

2.7 Mines T.L.

Exercice 1 : $A = \dfrac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer la nature et les caractéristiques de f, endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

Exercice 2 : Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$

a) Domaine de définition de F ?
b) Continuité ?
c) Dérivabilité ?
d) Valeur de $F(x)$?

SOLUTION : Exercice 1 : Les trois colonnes de la matrice A, à savoir

$C_1 = \dfrac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \dfrac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $C_3 = \dfrac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux à deux orthogonales et unitaires. A est donc une matrice orthogonale.

En développant suivant la deuxième colonne, $\det(A) = \dfrac{1}{8} \times \left(\sqrt{2}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \sqrt{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}\right) = +1$

f est donc une isométrie vectorielle directe, c'est à dire une rotation de l'espace. Son axe est formé des vecteurs invariants.

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$, de vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(v) = v &\iff A.V = V \iff (A - I_3)V = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -a - \sqrt{2}\, b + c = 0 \\ \sqrt{2}a - 2b - \sqrt{2}\, c = 0 \\ a + \sqrt{2}\, b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - \sqrt{2}\, b + c = 0 \\ a - \sqrt{2}\, b - c = 0 \\ a + \sqrt{2}\, b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - \sqrt{2}\, b - c = 0 \\ a + \sqrt{2}\, b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'axe de la rotation f est dirigé par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normons ce vecteur en prenant $\overrightarrow{k}$ de vecteur colonne $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit alors $\overrightarrow{i}$ de vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, orthogonal à $\overrightarrow{k}$ et unitaire, et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}$ de vecteur colonne $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, et on sait que la matrice de f dans cette base est de la forme : $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = 0$ et $\theta = \pm\pi/4$

$\sin\theta = < f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{j} > = \left\langle \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 1$, donc $\theta = +\frac{\pi}{2}$

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est la rotation de l'espace } \mathbb{R}^3 \text{ d'axe dirigé et orienté par le vecteur } \overrightarrow{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et d'angle } +\frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 2 : a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Par ailleurs, $\dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt^2}{t^2} = x$, la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\right)$ est prolongeable en une fonction continue sur le fermé $[0,+\infty[$.

- Si $x \geqslant 0$, $\forall t \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et par majoration, la fonction $(t \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- Si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2} = -\infty$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt$ est divergente.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = [0,+\infty[}$

b) Posons : $\forall (x,t) \in \underbrace{[0,+\infty[}_{J} \times \underbrace{]0,+\infty[}_{I}$, $H(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$

• Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur J,
• Pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur I.

Pour tout réel $u < 0$, par la formule des accroissements finis, il existe $v \in [u,0]$ tel que $|1-e^u| = |e^0 - e^u| = |0-u|e^v \leqslant |u|$

Donc $\forall x \geqslant 0, \forall t > 0, |H(x,t)| = \frac{|1-e^{-xt^2}|}{t^2} \leqslant \frac{xt^2}{t^2} = x$

et aussi : $\forall x \geqslant 0, \forall t > 0, |H(x,t)| = \frac{|1-e^{-xt^2}|}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2}$

• Soit $b > 0$, quelconque, et soit φ la fonction définie par : $\begin{cases} \forall t \in [0,b],\ \varphi(t) = b \\ \forall t \in]b,+\infty[,\ \varphi(t) = \frac{2}{t^2} \end{cases}$

alors $\forall (x,t) \in [0,b] \times I$, $|H(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur I.

D'après le théorème de continuité sous le signe $\int$, on peut affirmer que F est continue sur le segment $[0,b]$.

Ceci étant vrai pour tout réel $b > 0$, $\boxed{F \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$

c) • Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et $\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = e^{-xt^2}$

• Pour tout $x \in J = [0,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto H(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur I .
(pour l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$, voir la domination qui suit)

• Soit $a > 0$ quelconque, fixé,
$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H(x,t)}{\partial x}\right| = e^{-xt^2} \leqslant e^{-at^2}$ où la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $I =]0,+\infty[$.

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et $\forall x \in [a,+\infty[$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

(par le changement de variable $u = t\sqrt{x}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}du$, et l'intégrale de Gauss, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$

d) Soit $a > 0$ quelconque, fixé;
$\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt = \sqrt{\pi}\int_a^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{\pi}\ [\sqrt{t}]_a^x = \sqrt{\pi}(\sqrt{x} - \sqrt{a})$

En passant à la limite quand $a \to 0$, puisque F est continue en 0,

$$F(x) - \underbrace{F(0)}_{=0} = \sqrt{\pi x} \qquad \boxed{F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt = \sqrt{\pi x}}$$

2.8 Mines 309 * :

1- Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel α racine à la fois de $\chi_A(X)$ et de son dérivé $\chi'_A(X)$.

Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne), la famille $(v, Av, A^2v, \cdots, A^{n-1}v)$ est liée.

2- a) Soit P un polynôme unitaire de degré n, $n \geqslant 1$. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si :

$\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)|$

2- b) Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires, de degré n, et scindés dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que U_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$. Est elle compacte ?

SOLUTION : a) La matrice A est symétrique rélle donc diagonalisable. Puisque α est racine de $\chi_A(X)$ et de $\chi'_A(X)$, α est valeur propre double de A. Or si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ (valeurs distinctes), on sait que $Q(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A. Puisque α est valeur propre double, elle ne figure qu'une fois dans le produit $\prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$, et le polynôme $Q(X)$ est au plus de degré $n-1$:

$\exists (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \cdots, 0),\ Q(X) = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$

$Q(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} = 0$, donc pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$Q(A).v = a_0.v + a_1 A.v + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}.v = 0_{\mathbb{R}^n}$, et puisque $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, cette égalité montre que la famille $(v, Av, A^2v, \cdots, A^{n-1}v)$ est liée.

2- a) Soit P un polynôme unitaire de degré n, $n \geqslant 1$.

• Supposons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$:

il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2). \cdots .(X - \lambda_n)$

Soit $z \in \mathbb{C}$, qui s'écrit sous la forme : $z = a + ib$, $\quad a = \Re(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$

$|P(z)| = |(z - \lambda_1)(z - \lambda_2). \cdots .(z - \lambda_n)| = |z - \lambda_1|.|z - \lambda_2|. \cdots .|z - \lambda_n|$

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $|z - \lambda_k|^2 = |a - \lambda_k + ib|^2 = \underbrace{(a - \lambda_k)^2}_{\geqslant 0} + b^2 \geqslant b^2$

donc $|z - \lambda_k| \geqslant |b| = |\mathrm{Im}(z)|$

d'où : $|P(z)| = |z - \lambda_1|.|z - \lambda_2|. \cdots .|z - \lambda_n| \geqslant |b|^n = |\mathrm{Im}(z)|^n$

• Réciproquement, supposons que $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)|$

P est unitaire, de degré n. Il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert - Gauss :

il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n,\ P(X) = (X - \lambda_1). \cdots .(X - \lambda_n)$

Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $0 \leqslant |\mathrm{Im}(\lambda_i)|^n \leqslant |P(\lambda_i)| = 0$

donc $\mathrm{Im}(\lambda_i) = 0$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

2- b) Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires, de degré n, et scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de U_n, qui converge dans $\mathbb{R}_n[X]$ vers un polynômes $Q(X)$

Chaque polynôme P_k est unitaire de degré n, et scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Décomposons chaque polynôme $P_k(X)$ dans la base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$:

$P_k(X) = a_{k,0} + a_{k,1}X + a_{k,2}X^2 + \cdots + \underbrace{a_{k,n}}_{=1} X^n$

dans un espace vectoriel normé de dimension finie, la convergence d'une suite de vecteurs (ici de la suite (P_k)) s'étudie composante pas composante :

Dire que $\lim\limits_{k \to +\infty} P_k = Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n$ signifie que : $\forall i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{k,i} = b_i$

En particulier, l'égalité $\lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{a_{k,n}}_{=1} = b_n$ montre que $b_n = 1$, c'est à dire que Q est unitaire de degré n.

• Il reste à montrer que Q est scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$

D'après la question précédente, $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P_k(z)|$.

En passant à la limite quand $k \to +\infty$, $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |Q(z)|$, ce qui montre, d'après la question précédente, que Q est scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc $Q \in U_n$. On a ainsi montré que toute suite de vecteurs de U_n, qui converge dans l'EVN $\mathbb{R}_n[X]$ a sa limite dans U_n. Donc U_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$ (d'après le théorème de caractérisation séquentielle des fermés)

• Enfin, la suite $[X^{n-1}(X + k)]_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de U_n, qui n'est pas bornée. (regarder le terme en X^{n-1})

Donc U_n n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}_n[X]$. Ce n'est pas un compact de $\mathbb{R}_n[X]$.

(on rappelle qu'un compact d'un EVN de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est une partie fermée et bornée de cet EVN)

2.9 Mines 331 * :

On considère l'ensemble $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6\}$ et la fonction f définie sur Δ par :

$\forall (x, y) \in \Delta,\ f(x, y) = x^2y(x + y - 4)$

a) Représenter le domaine Δ

b) Trouver les extrema locaux et globaux de f sur Δ

SOLUTION : a) Δ est l'intérieur du triangle qui a pour sommets $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 6)$. Il est délimité par l'axe (Ox), l'axe (Oy), et la droite d'équation $x + y = 6$ parallèle à la seconde bissectrice.

b) Le domaine Δ est fermé et borné, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est continue car polynomiale en les variables x et y. Toutes fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. f est donc bornée sur Δ, et ses bornes sont atteintes. Donc f admet un maximum global et un minimum global sur Δ.

• f étant de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale), sur l'ouvert $\overset{o}{\Delta} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0, y > 0, x + y < 6\}$, un extremum local est nécessairement un point critique. Recherchons donc les points critiques.

$M(x,y) \in \overset{o}{\Delta}$ est un point critique si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} xy(3x + 2y - 8) = 0 \\ x^2(x + 2y - 4) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 8 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{(car sur } \overset{o}{\Delta},\ x > 0 \text{ et } y > 0)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} f\text{admet un et un seul} \\ \text{point critique sur } \overset{o}{\Delta} \end{array} \right., \text{ c'est le point } M_0 = (2,1)$$

Seul le point M_0 peut être un extremum local de la fonction f sur $\overset{o}{\Delta}$

Pour savoir si f est effectivement un extremum local de f, il faut comparer $f(x,y)$ et $f(2,1) = -4$ pour $(x,y) \in \overset{o}{\Delta}$ voisin de M_0. On posera donc $(x,y) = (2 + h, 1 + k)$, et on recherchera le signe de la différence $f(M) - f(M_0) = f(2 + h, 1 + k) + 4$ lorsque (h,k) est petit.

$$\begin{aligned} f(2 + h, 1 + k) + 4 &= (2 + h)^2(1 + k)(h + k - 1) + 4 \\ &= 3h^2 + 4k^2 + 4hk + 4h^2k + 4hk^2 + h^3 + h^3k + h^2k^2 \\ &= 3h^2 + 4k^2 + 4hk + O(\|(h,k)\|^3) \text{ est du signe de } q(h,k) = 3h^2 + 4k^2 + 4hk \text{ lorsque } (h,k) \to (0,0) \end{aligned}$$

• $q(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - 3 & -2 \\ -2 & x - 4 \end{vmatrix} = x^2 - 7x + 8$$

$X^2 - 7X + 8 = \left(X - \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)\left(X - \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{17}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{17}}{2} > 0$

La matrice symétrique A est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage P orthogonale (qu'il est inutile de calculer) : $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

Dans une BON formée de vecteurs propres de A, (h,k) a pour coordonnées (h', k') telles que :

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$$

alors, $q(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h,k)P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h',k')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$

$$q(h,k) = \lambda_1 h'^2 + \lambda_2 j'^2 \geqslant 0$$

Donc pour (h,k) petit, c'est à dire pour $P = (x,y) = (2 + h, 1 + k)$ suffisamment proche de M_0,
$f(M) - f(M_0) = q(h,k) \geqslant 0$, et donc $f(M) \geqslant M_0$.

On en déduit que $\boxed{M_0 = (2,1) \text{ est un miminum local de } f. \quad (f(M_0) = -4)}$

• On a pas trouvé de maximum local dans $\overset{o}{\Delta}$. Le maximum de f sur Δ (dont on a justifié l'existence au tout début) se trouve donc sur la frontière de Δ, c'est à dire sur l'un des 3 segments : $[OA], [OB]$ ou $[AB]$

Pour tout $(x,y) \in [OA], y = 0$ et donc $f(x,y) = 0$. Or on remarque sur la droite d'équation $x + y = 4$, $f(x,y) = 0$, au dessus de cette droite, $f(x,y) \geqslant 0$, et au dessous de cette droite $f(x,y) \leqslant 0$ (car dans tous les cas $x^2y \geqslant 0$)

Les points des segment $[(0,0),(0,4)]$ et $[(0,0),(4,0)]$ sont donc des maxima locaux de la fonction f.

Les points des segment $[(4,0),A]$ et $[(0,4),B]$ sont donc des minima locaux de la fonction f.

Tout ceci ne nous donne pas encore le maximum global.

• Il reste encore à étudier ce qui se passe sur le segment $[A,B]$

Soit $M = (x, 6 - x) \in [A,B]$. $\quad f(x, 6 - x) = x^2(6 - x)(x + 6 - x - 4) = -2x^3 + 12x^2$

En posant $g(x) = -2x^3 + 12x^2$, $\quad g'(x) = -6x^2 + 24x = 6x(4 - x)$

x	0		4		6
$g'(x)$	0	+	0	−	
$g(x)$			64		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Ceci montre que $\max\limits_{M \in [A,B]} f(M) = g(4) = f(4,2) = 64$

et comme le maximum de f sur Δ ne peut être atteint que sur sa frontière, $M_1 = (4,2)$ est le maximum de la fonction f sur Δ. $\boxed{\max\limits_{M \in \Delta} f(M) = f(4,2) = 64}$

2.10 Mines PSI 471

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$ et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

b) Déterminer la matrice représentative de u dans cette base.

c) Déterminer les sous espaces vectoriels de E stable par u.

d) Déterminer le commutant $\mathcal{C}(u) = \{f \in \mathscr{L}(E),\ f_o u = u_o f\}$

SOLUTION : Puisque $u^{n-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$

Montrons que le système $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est libre dans E.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$

En composant par u^{n-1}, on obtient :

$$\alpha_0 \underbrace{u^{n-1}(x_0)}_{\neq 0} + \alpha_1 \underbrace{u^n(x_0)}_{=0} + \cdots + \alpha_{n-1} \underbrace{u^{2n-2}(x_0)}_{=0} = 0$$

donc $\quad \alpha_0 \underbrace{u^{n-1}(x_0)}_{\neq 0} = 0$, qui entraîne que $\alpha_0 = 0$.

L'égalité de départ devient : $\alpha_1 u(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$

En composant par u^{n-2}, par un raisonnement analogue, on obtient : $\alpha_1 = 0$.

En répétant ce procédé n fois, on otient finalement : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, ce qui montre que le système $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est libre dans E. Or c'est un système de n vecteurs dans l'espace vectoriel E qui est de dimension n, c'est donc une base de E.

b) La matrice de u dans la base $\mathscr{B} =$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u(x_0) & u^2(x_0) & \cdots & u^{n-1}(x_0) & u^n(x_0) \end{pmatrix} & \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_0 \\ u(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n-1}(x_0) \end{array} \end{array}$$

c) et d) Voir exercice 5-2 pages 33-34 du chapître "diagonalisation"

2.11 Mines PSI 472

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le sous espace F engendré par les fonctions $S : x \mapsto \sin(x)$ et $C : x \mapsto \cos(x)$

D désigne l'application dérivation.

a) Montrer que F est stable pour D et qu'il existe $u \in \mathscr{L}(F)$ tel que $u_o u = \widetilde{D}$ où $\widetilde{D}$ est l'endomorphisme induit par D sur F.

b) D désigne la dérivation de E dans E. Existe-t-il $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v_o v = D$?

SOLUTION : a) (S, C) est une base de F, $D(S) = C \in F$ et $D(C) = -S \in F$. $F = \text{Vect}(S, C)$ est donc stable par D. L'endomorphisme $\widetilde{D}$ induit par D sur F est donc bien défini.

Les égalités ci-dessus montrent que la matrice de $\widetilde{D}$ dans la base (S, C) est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Or $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation plane d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^2$

En considérant u, endomorphisme de F dont la matrice dans la base (S, C) est $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, la relation $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^2 = R$ montre que $\boxed{u_o u = \widetilde{D}}$

b) Soit v un éventuel endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la relation : $v_o v = D$

Notons X l'application $x \mapsto x$ et U l'application $x \mapsto 1$.

$v[v(U)] = v_o v(U) = D(U) = 0$, donc $v(U) \in \ker v$.

$D[v(U)] = v_o v_o v(U) = v[D(U)] = v(0) = 0$, donc $v(U) \in \ker D = \text{Vect}(U)$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(U) = \lambda U$

alors en composant par v, $\underbrace{v_o v}_{=D}(U) = \lambda v(U) \implies D(U) = 0 = \lambda^2 \underbrace{U}_{\neq 0} \implies \lambda = 0$

Donc $\boxed{v(U)=0}$.

Alors $D[v(X)] = D_o v(X) = v_o \underbrace{D(X)}_{=U} = v(U) = 0$, donc $v(X) \in \ker D = \text{Vect}(U)$

Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v(X) = \mu U$, donc $D(X) = v_o v(X) = v(\mu U) = \mu v(U) = 0$.

Cette dernière égalité, $D(X) = 0$ est contraire à celle bien connue : $D(X) = U$.

Cette contradiction prouve qu'$\boxed{\text{il n'existe pas } v \in \mathscr{L}(E) \text{ tel que } v_o v = D}$.

L'endomorphisme $\widetilde{D}$ possède des racines carrées, mais l'endomorphisme D n'en n'a pas.

2.12 Mines PSI 474

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\text{tr}(A) = 0$.

SOLUTION : • Si A est semblable à $-A$, alors ces deux matrices ont même trace:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(-A) = -\text{tr}(A) \implies \text{tr}(A) = 0$$

• Supposons que $\text{tr}(A) = 0$. Alors A est de la forme : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x+a \end{vmatrix} = x^2 - a^2 - bc$$

(i) Si $a^2 + bc \neq 0$, le complexe $a^2 + bc$ admet deux racines carrées complexes opposées non nulles α et $-\alpha$

$\chi_A(X) = X^2 - a^2 - bc = (X - \alpha)(X + \alpha)$. Donc A, matrice $2-2$, admet deux valeurs propres distintes.

Elle est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, mais aussi à $\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = -\Delta$ (on peut diagonaliser une matrice en mettant les valeurs propres dans l'ordre que l'on veut)

Or $-\Delta$ est semblable à $-A$ (puisque Δ est semblable à A), et par transitivité, A est semblable à $-A$.

(ii) Si $a^2 + bc = 0$, $\chi_A(X) = X^2$ et A admet zero comme unique valeur propre double.

Si A est diagonalisable, alors elle est nulle et donc semblable à son opposée.

Si A n'est pas diagonalisable, alors elle est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ($P^2 = I_n$ donc $P^{-1} = P$)

$$P.T.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -T$$

Dans ce cas, A est semblable à T, qui est semblable à $-T$, qui est semblable à $-A$.

Par transitivité, $\boxed{A \text{ est semblable à } -A}$

2.13 Mines PSI 485

A et B sont deux matrices données de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On considère l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E) : M \mapsto A.M.B$

a) Montrer que $\varphi = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

b) Montrer que φ est nilpotent si et seulement si A ou B est nilpotente.

c) Montrer que si φ est diagonalisable, alors A et B le sont . Réciproque ?

SOLUTION : a) Il est immédiat que si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $\varphi = 0$.

Montrons la réciproque par contraposée : Supposons $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Considérons $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et a et b les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et B.

Si on trouve $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $a_o f_o b = \neq 0$, alors la matrice M représentative de f dans la base $\mathscr{B}_0$ vérifiera $\varphi(M) = A.M.B \neq 0$, ce qui montrera que φ n'est pas l'endomorphisme nul de E.

Puisque $B \neq 0$, b n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$ et il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $b(x) \neq 0$

Puisque $A \neq 0$, a n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$ et il existe un vecteur $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $a(y) \neq 0$

On peut compléter le vecteur non nul $b(x)$ en une base $(b(x), v_2, v_3, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ est déterminé par les images qu'il donne des vecteurs de la base $(b(x), v_2, v_3, \cdots, v_n)$. En particulier, il existe $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $f(b(x)) = y$. Alors $a_o f_o b(x) = a[f(b(x))] = a(y) \neq 0$

L'endomorphisme f ainsi défini n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$, et sa matrice M n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc il existe $M \neq 0$ tel que $A.M.B \neq 0$, ce qui montre que $\varphi \neq 0$.

Par double implication, on a montré que $\boxed{\varphi = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0}$

b) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(M) = A.M.B$, $\quad \varphi^2(M) = \varphi(A.M.B) = A.(A.M.B).B = A^2M.B^2$, et par une récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^k(M) = A^k.M.B^k$

Si A est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. alors, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi^p(M) = \underbrace{A^p}_{=0}.M.B^p = 0$, ce qui montre que $\varphi^p = 0$, et que φ est nilpotent. Raisonnement analogue sir B est nilpotente.

Réciproquement, supposons que φ est nilpotent : $\exists p \in \mathbb{N}$, $\varphi^p = 0$

alors, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi^p(M) = A^p.M.B^p = 0$, ce qui entraîne d'après la question a) que $A^p = 0$ ou que $B^p = 0$, c'est à dire que A ou B est nilpotente.

c) ?????????????????

2.14 Mines PSI 486

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

Dénombrer les sous espaces vectoriels de E stables par u.

SOLUTION : Notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u. Elles sont deux à deux distinctes par hypothèse.

Donc $E = \ker(u - \lambda_1 Id_E) \oplus \ker(u - \lambda_2 Id_E) \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_n Id_E)$ et chaque sous espace propre $\ker(u - \lambda_k Id_E)$ est une droite. Soit w_k un vecteur non nul de cette droite $\ker(u - \lambda_k Id_E)$.

$\mathscr{B} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u.

Soit F un sous espace vectoriel de E, stable par u, de dimension p. Notons $\widetilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F. Puisque u est diagonalisable, $\widetilde{u}$ l'est aussi. Il existe une base $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ de F diagonale pour $\widetilde{u}$: $\forall k \in [[1,p]], \widetilde{u}(v_k) = \mu_k v_k$, donc $u(v_k) = \mu_k v_k$, donc μ_k est une valeur propre de u. ($\mu_k \in \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$)

Il existe $j_k \in [[1,n]]$ tel que $\mu_k = \lambda_{j_k}$ et $v_k \in$Vect(w_{j_k})

$$F = \text{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_p) = \text{Vect}(w_{j_1}, w_{j_2}, \cdots, w_{j_p})$$
$$= \ker(u - \lambda_{j_1}) \oplus \ker(u - \lambda_{j_2}) \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_{j_p})$$

Donc F est la somme (directe) de p droites, sous-espaces propres de u.

Réciproquement, tout sous espace de E de ce type est stable par u.

Pour dénombrer les sous-espaces stables de dimension p, il suffit de dénombrer les sous ensembles à p éléments extraits de l'ensemble des droites $\ker(u - \lambda_j)$. Il y en a $\binom{n}{p}$.

Au total, $\boxed{\text{il y aura } \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \text{ sous espaces de } E \text{ stables par } u.}$

2.15 Mines PSI 487

Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ et $\mu \in \mathbb{C}$, distincts, tels que : $\begin{cases} A + B = I_n \\ \lambda A + \mu B = M \\ \lambda^2 A + \mu^2 B = M^2 \end{cases}$

a) Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.

c) La matrice M est elle digonalisable ? Déterminer son spectre.

SOLUTION : a) Par combinaison linéaire, les relations $\begin{cases} \lambda A + \mu B = M & (1) \\ \lambda^2 A + \mu^2 B = M^2 & (2) \end{cases}$ permettent d'exprimer A et B en fonction de M : $A = \dfrac{M^2 - \mu M}{\lambda(\lambda - \mu)}$ et $B = \dfrac{M^2 - \lambda M}{\mu(\mu - \lambda)}$

En reportant dans la relation (0) : $A + B = I_n$, on obtient :

$$I_n = A + B = \frac{M^2 - \mu M}{\lambda(\lambda - \mu)} + \frac{M^2 - \lambda M}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{M}{\lambda\mu(\lambda - \mu)}(\mu M - \mu^2 I_n - \lambda M + \lambda^2 I_n)$$
$$I_n = A + B = \frac{M}{\lambda\mu(\lambda - \mu)}[(\mu - \lambda)M + (\lambda^2 - \mu^2)I_n] = \frac{M}{\lambda\mu}(-M + (\lambda + \mu)I_n)$$

L'égalité $I_n = \dfrac{1}{\lambda\mu}(-M + (\lambda+\mu)I_n) \times M$ montre que M est inversible, et que $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{\lambda\mu}[-M + (\lambda + \mu)I_n]}$

b) Le produit des relation (0) et (2) donne:

$$(A + B)(\lambda^2 A + \mu^2 B) = I_n \times M^2 \implies \lambda^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \lambda^2 BA + \mu^2 AB = M^2$$

La relation (1), élevée au carré, donne : $\lambda^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \lambda\mu(AB + BA) = M^2$

Par différence, $\lambda^2 BA + \mu^2 AB - \lambda\mu(AB + BA) = 0$

En multipliant la relation (0) par A à gauche d'une part, et en la multipliant par A à droite d'autre part, on obtient : $\begin{cases} A^2 + A.B = A \\ A^2 + B.A = A \end{cases}$, et par différence, $A.B = B.A$

La relation précédente s'écrit alors plus simplement : $(\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu)AB = 0$

soit encore : $(\lambda - \mu)^2 AB = 0$, qui entraîne que $AB = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

La relation $A^2 + \underbrace{A.B}_{=0} = A$ devient $A^2 = A$, qui montre que $\boxed{A \text{ est une matrice de projecteur}}$.

Le résultat est valable pour la matrice B par symétrie des hypothèses sur A et B.

c) Dans la partie a), on a montré la relation : $-M^2 + (\lambda+\mu)M = \lambda\mu I_n$

Le polynôme $P(X) = X^2 - (\lambda+\mu)X + \lambda\mu = (X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de M, scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples.

M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}}$

2.16 Mines PSI 492

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\ker(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AV = 0\}$
et $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = A.X\}$

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\ker(A) = \ker(A^2)$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tA.A$.

Montrer que B est une matrice symétrique positive (c'est à dire dont les valeurs propres sont positives ou nulles).

c) Montrer que B et A ont même noyau. En déduire que $\mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(A)$

On suppose dans toute la suite de l'exercice que A est une matrice réelle antisymétrique.

d) Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

e) Montrer que A^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

f) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

SOLUTION : a) • Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une valeur propre non nlle de A^2, et β l'une des deux racines carrées complexes de α.

Montrons que $\ker(A^2 - \alpha I_n) = \ker(A + \beta I_n) \oplus \ker(A - \beta I_n)$

(i) Les deux sous espaces $\ker(A + \beta I_n)$ et $\ker(A - \beta I_n)$ sont soit réduits à $\{0\}$, soit des sous espces propres de A, associé à deux valeurs propres distinctes β et $-\beta$ (car $\alpha = \beta^2 \neq 0 \implies \beta \neq -\beta$)

Leurs somme est donc directe : $\ker(A + \beta I_n) \cap \ker(A - \beta I_n) = \{0\}$

(ii) Vérifions l'inclusion $\ker(A + \beta I_n) \oplus \ker(A - \beta I_n) \subset \ker(A^2 - \alpha I_n)$

Soit $Z \in \ker(A + \beta I_n) \oplus \ker(A - \beta I_n)$; $\exists (X, Y) \in \ker(A + \beta I_n) \times \ker(A - \beta I_n)$, $Z = X + Y$

$A.Z = A.X + A.Y = -\beta X + \beta Y$ et $A^Z = -\beta A.X + \beta A.Y = \beta^2 X + \beta^2 Y = \alpha(X + Y) = \alpha Z.$

Donc $Z \in \ker(A^2 - \alpha I_n)$

(iii) Vérifions l'inclusion réciproque.

Soit $Z \in \ker(A^2 - \alpha I_n)$. Une analyse (sans difficulté) nous conduit à définir :

$X = \frac{1}{2\beta}(-A.Z + \beta Z)$ et $Y = \frac{1}{2\beta}(A.Z + \beta Z)$

alors : $X + Y = \frac{1}{2\beta}(-A.Z + \beta Z + A.Z + \beta Z) = Z$

$AX = \frac{1}{2\beta}(-\underbrace{A^2.Z}_{=\alpha Z} + \beta A.Z) = \frac{1}{2\beta}(-\beta^2.Z + \beta A.Z) = \frac{1}{2}(-\beta.Z + A.Z) = -\beta X$

et $A.Y = \beta Y$, ce qui montre que $X \in \ker(A + \beta I_n)$ et $Y \in \ker(A - \beta I_n)$

On a ainsi établi l'inclusion réciproque : $\ker(A^2 - \alpha I_n) \subset \ker(A + \beta I_n) \oplus \ker(A - \beta I_n)$

• Supposons que A^2 soit diagonalisable, notons $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ ses valeurs propres non nulles, et supposons que $\ker A^2 = \ker A$.

Alors $C^n = \ker(A^2 - \alpha_1 I_n) \oplus \ker(A^2 - \alpha_2 I_n) \oplus \cdots \oplus \ker(A^2 - \alpha_p I_n) \underbrace{\oplus \ker A^2}_{(*)}$

(*) Ce dernier terme $\oplus \ker A$ peut être réduit à $\{0\}$ si A (ou A^2 de manière équivalente) est inversible

En remplaçant chaque terme $\ker(A^2 - \alpha_k I_n)$ par $\ker(A + \beta_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)$ ou β_k est une racine carrée complexe de α_k, on obtient :

$C^n = \ker(A + \beta_1 I_n) \oplus \ker(A - \beta_1 I_n) \oplus \cdots \oplus \ker(A + \beta_p I_n) \oplus \ker(A - \beta_p I_n) \oplus \underbrace{\ker A^2}_{=\ker(A)}$, ce qui montre que la somme des sous espaces propres de A est égale à $\mathbb{C}^n$, et que A est diagonalisable.

b) ${}^tB = {}^t({}^tA.A) = {}^tA.{}^t({}^tA) = {}^tA.A = B$. B est une matrice symétrique. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B. Il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $BV = \lambda.V$

alors ${}^tV.B.V = {}^tV.(\lambda.V) = \lambda.{}^tV.V = \lambda\|V\|^2$

$= {}^tV.{}^tA.A.V = {}^t(A.V).A.V = \|A.V\|^2 \geqslant 0$

Puisque V est un vecteur colonne non nul, $\|V\| > 0$. Alors $\lambda = \frac{\|A.V\|^2}{\|V\|^2} \geqslant 0$

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+}$. B est une matrice symétrique positive.

c) Soit $X \in \ker(A)$. Alors $B.X = {}^tA.\underbrace{A.X}_{=0} = 0$. Donc $\ker A \subset \ker B$.

Soit $X \in \ker(B)$. Alors $\|A.X\|^2 = {}^t(A.X).(A.X) = {}^tX\,\underbrace{{}^tA.A}_{=B}.X = {}^tX.\underbrace{B.X}_{=0} = 0$

donc $A.X = 0$ et $X \in \ker A$. Ceci établit l'inclusion : $\ker B \subset \ker A$
et par double inclusion, $\boxed{\ker B = \ker A}$

• Cette égalité entraîne que $\dim(\ker B) = \dim(\ker A)$, et par la formule du rang,
$\mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(B) = n - \dim(\ker B) = n - \dim(\ker A) = \mathrm{rg}(A)$. Donc $\boxed{\mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(A)}$

d) Soit A une matrice réelle antisymétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre (à priori complexe) de A.

Il existe $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $A.V = \lambda.V$.

alors ${}^t\overline{V}.A.V = {}^t\overline{V}.\lambda.V = \lambda.{}^t\overline{V}.V = \lambda(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} v_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2$

La matrice ${}^t\overline{V}.A.V$ étant une matrice $1-1$, elle est égale à sa transposée :
${}^t\overline{V}.A.V = {}^t({}^t\overline{V}.A.V) = {}^tV\,{}^tA.\overline{V} = {}^tV(-A).\overline{V} = -\,{}^tV.A.\overline{V}$

or, par conjugaison, l'égalité $A.V = \lambda.V$ entraîne $\overline{A}.\overline{V} = \overline{\lambda}.\overline{V}$, soit, puisque A est réelle, $A.\overline{V} = \overline{\lambda}.\overline{V}$. En reportant dans l'égalité précédente,

$${}^t\overline{V}.A.V = -\,{}^tV.\overline{\lambda}.\overline{V} = -\overline{\lambda}\,{}^tV.\overline{V} = -\overline{\lambda}(v_1, v_2, \cdots, v_n) \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} = -\overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2$$

Il s'en suit que $\lambda \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 = -\overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2$, et puisque $\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 \neq 0$, $\lambda = -\overline{\lambda}$, ce qui montre que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellemen nul).

e) ${}^t(A^2) = {}^tA.{}^tA = (-A)(-A) = A^2$

La matrice A^2 est une matrice réelle symétrique. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

f) D'après c), $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(-A^2) = \mathrm{rg}(A^2)$, et d'après e), A^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il s'en suit d'après a) que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

2.17 Mines 511

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$, et la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n \geqslant 2} u_n(x)$

a) Préciser le domaine de définition de la fonction S.

b) Etudier la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n(\ )$

c) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

d) Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

<u>SOLUTION</u> : a) Si $x = 0$, la série $S(x) = \sum_{n \geqslant 2} u_n(x)$ est formée de termes tous nuls ; c'est une série convergente et de somme nulle : $S(0) = 0$

Si $x > 0, \forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n} \leqslant x\left(e^{-x}\right)^n$. Cette dernière série est une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$, donc est convergente. Par majoration, la série à termes positifs $\sum u_n(x)$ converge et $S(x)$ est défini.

Si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \infty$, (croissance comparée logarithme - exponentielle) et la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

Finalement, $\boxed{\mathcal{D}_S = [0, +\infty[}$

b) Etudions la convergence normale de la série de fonctions sur son domaine de définition $\mathcal{D}_S = [0, +\infty[$, et pour cela calculons $\|u_n(\ )\|^{\infty}_{[0,+\infty[}$.

Pour simplifier, considérons la suite de fonctions $v_n : x \mapsto xe^{-nx}$

$\forall n \geqslant 2, \forall x \in [0, +\infty[,\ v_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1 - nx)e^{-nx}$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$v_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$v_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e\,n}$	$\searrow$	0

On en déduit que $\|u_n(\ )\|^{\infty}_{[0,+\infty[} = \dfrac{1}{e\,n\ln n}$, qui est le terme général d'une série de Bertrand divergente.

Donc $\boxed{\text{il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions } \sum u_n \text{ sur le domaine } [0,+\infty[}$

Etudions la convergence normale sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a>0$.
Soit $a>0$. Pour tout $n>\frac{1}{a}$, le tableau de variations de v_n montre que :

$$\|u_n(\ )\|^{\infty}_{[0,+\infty[} = \sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) = \frac{ae^{-na}}{\ln n}$$

C'est le terme général d'une série convergente (par le critère de d'Alembert).
On en conclut que $\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement sur tout intervalle de la forme } [a,+\infty[, a>0}$

c) Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et $u_n'(x) = \dfrac{1-nx}{\ln n}e^{-nx}$
Soit $a>0$ quelconque, fixé.
Pour tout $n>\frac{1}{a}, \forall x\in[a,+\infty[, |u_n'(x)| \leqslant \left|\dfrac{e^{-nx}}{\ln n}\right| + n\left|\dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}\right| \leqslant \dfrac{e^{-na}}{\ln n} + \dfrac{nae^{-na}}{\ln n}$

$$\text{donc } \|u_n'(\ )\|^{\infty}_{[a,+\infty[} \leqslant \underbrace{\frac{e^{-na}}{\ln n} + \frac{nae^{-na}}{\ln n}}_{\textit{serie convergente}}$$

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle du type $[a,+\infty[, a>0$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$.

En conclusion, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $\boxed{S'(x) = \sum_{n\geqslant 2} u_n(x) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1-nx}{\ln n}e^{-nx}}$

d) Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n}$$

La série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergente. Soit $A>0$. Il existe $n_0 \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{\ln n} \geqslant 2A$

soit $\alpha = \frac{\ln 2}{n_0}$, de sorte que $\forall x<\alpha$, $\forall n \in \{2,3,\cdots,n_0\}$,
$n\leqslant n_0 \implies -nx \geqslant -n_0x \implies e^{-nx} \geqslant e^{-n_0x}$
$\forall x,\ 0<x<\alpha = \frac{\ln 2}{n_0} \implies \forall n\in\{2,3,\cdots,n_0\},\ 0<nx<n\alpha$

$$\implies -nx \geqslant -n\alpha \implies e^{-nx} \geqslant e^{-n\alpha} = e^{-n\frac{\ln 2}{n_0}} \geqslant e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc, } 0<x<\alpha \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \geqslant \sum_{n=2}^{n_0} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n_0}\frac{1}{\ln n} \geqslant \frac{1}{2}\times 2A = A$$

On a ainsi montré que : $\forall A>0, \exists\alpha, \forall x,\ 0<x<\alpha \implies \dfrac{S(x)-S(0)}{x-0} > A$, c'est à dire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = +\infty.$$

On en conclut que $\boxed{\text{la fonction } S \text{ n'est pas dérivable au point } 0}$.

2.18 Mines PSI 513:

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J=]0,+\infty[$
b) Etudier les variations de f et ses limites aux bornes.
c) Montrer que $\forall x>0,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$
d) Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$

SOLUTION : a) Chaque fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J=]0,+\infty[$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|u_n\|^{\infty}_J = \sup_{x\in J}\frac{1}{n!\,(x+n)} = \frac{1}{n\,n!} \leqslant \frac{1}{n!}$$

La série de fonction $\sum u_n(\ )$ converge normalement (et donc simplement) sur $J=]0,+\infty[$. Sa somme f est donc définie sur J.

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in J,\ u_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|u_n'\|^{\infty}_J = \sup_{x\in J}\frac{1}{n!\,(x+n)^2} = \frac{1}{n^2\,n!} \leqslant \frac{1}{n!} \quad \text{(série convergente)}$$

La série de fonction $\sum u_n'(\ )$ converge normalement, et donc uniformément, sur $J=]0,+\infty[$.
D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur J et :

$$\boxed{\forall x \in J,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}}$$

b) $\forall x \in J,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{6(x+3)^2} + \cdots$

Pour tout $x > 0$, la suite numérique $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, décroissante en valeur absolue, et de limite nulle. D'après le critère de Leibniz des séries alternées, on peut affirmer que la somme

$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}$ a même signe que son prémier terme $-\frac{1}{x^2}$. Donc $\forall x \in J,\ f'(x) < 0$.

La fonction f est décroissante sur J.

• La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement, donc uniformément sur J.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)} = 0$, et la série $\sum\ 0$ converge.

D'après le théorème de la double limite, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

• Considérons la série de fonctions :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{6(x+3)} + \cdots$$

(c'est la série qui définit $f(x)$, à laquelle on a retiré son premier terme $\frac{1}{x}$)

Par la majoration $\|u_n\|_{[0,+\infty[}^{\infty} = \dfrac{1}{n\,n!} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, elle converge normalement et donc uniformément sur le fermé $[0, +\infty[$. Chaque fonction u_n étant continue sur $[0, +\infty[$, la fonction g l'est aussi.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,n!}$

Or, $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty} + \underbrace{g(x)}_{\to g(0),\ fini}$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$ et que $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

c) $\forall x > 0,\ xf(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n!\,(x+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!\,(x+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0,1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n}{n!(x+n)}$

$$= e^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = e^{-1} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'}}{n'!(x+n'+1)} \quad \text{(chgmt d'indice } n' = n-1\text{)}$$

$$xf(x) = e^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} = e^{-1} + f(x+1) \qquad \boxed{\forall x > 0,\ xf(x) - f(x+1) = e^{-1}}$$

d) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (question b)), la relation précédente entraîne que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = e^{-1}$

et que $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{x} = \dfrac{1}{e\,x}}$

Par ailleurs, $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(1+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (par changement d'indice, $n' = n+1$)

$f(1) = -(e^{-1} - 1) = 1 - e^{-1}$

L'égalité $xf(x) - f(x+1) = e^{-1}$, et la continuité de f au point 1 permet d'affirmer que :

$\displaystyle\lim_{x\to 0} xf(x) = f(1) + e^{-1} = 1$, et de retrouver l'équivalence : $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

2.19 Mines 514

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2015}\right) x^n$ et calculer sa somme.

SOLUTION : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sin\left(\frac{n\,\pi}{2015}\right) x^n\right| \leqslant |x|^n$.

Puisque la série $\sum |x|^n$ converge lorsque $|x| < 1$, par majoration, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2015}\right) x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$. On en déduit que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x = 1$, la suite $\left(\sin \dfrac{n\,\pi}{2015}\, x^n\right)_n = \left(\sin \dfrac{n\,\pi}{2015}\right)_n$ est périodique (de période 4030) et non nulle, donc ne converge pas vers 0.

La série entière est grossièrement divergente au point 1, ce qui montre que son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1. Finalement $\boxed{R = 1}$

• Notons $a = \frac{\pi}{2015}$

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2015}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(na)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(e^{ina}) x^n = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{ina} x^n\right)$$

$$S(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (x\,e^{ia})^n\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - x\,e^{ia}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - x\,e^{-ia}}{(1 - x\,e^{ia})(1 - x\,e^{-ia})}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1 - x\,e^{-ia}}{x^2 - 2x\cos a + 1}\right) = \frac{x\sin(a)}{x^2 - 2x\cos a + 1}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2015}\right) x^n = \frac{x\sin(a)}{x^2 - 2x\cos a + 1} = \frac{x\sin\left(\frac{\pi}{2015}\right)}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{2015}\right) + 1}}$$

2.20 Mines 518

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\ n!(2n+1)}$.

(indication : on pourra utiliser une équation différentielle)

SOLUTION : Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \dfrac{1}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}} = \dfrac{x^2}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{C}$; son rayon de convergence est infini.

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

On sait qu'on peut dériver une série entière terme à terme en tout point de son domaine ouvert de convergence:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1} = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = 1 + xS(x)$$

La fonction S est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $\quad y' - xy = 1$

L'équation homogène associée : (E_0) : $\quad y' - xy = 0 \quad$ a pour solution générale :

$$x \mapsto y(x) = \lambda \exp(-\textstyle\int_0^x -t\, dt) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$$

Par la méthode de variation de la constante, la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ est solution de l'équation complète (E) si et seulement si $\lambda'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, c'est à dire si et seulement si $y(x) = \left(k + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{x^2}{2}}$ où k est une constante réelle.

Or S est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \left(k + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{x^2}{2}}$

Or $S(0) = 0$, ce qui impose que $k = 0$. Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$

• En particulier, pour $x = 1$, $S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = e^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{t^2}{2})^n}{n!}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-\frac{t^2}{2})^n}{n!} dt\right)$ (on peut intégrer terme à terme une série entière sur tout segment inclus dans son ouvert de convergence, ici sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$) :

$$\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\ n!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\ n!(2n+1)}$$

d'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = e^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{e}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\; n!(2n+1)}}$

2.21 Mines 519 * :

On considère une suite réelle (u_n) et on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

a) On suppose que la suite (u_n) est bornée.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!}x^n$

b) Trouver une relation entre S, S' et U'

c) On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U(x)e^{-x} = 0$

d) On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U(x)e^{-x}$

e) On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)e^{-x}$ en fonction de $\sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

SOLUTION : a) La suite (u_n) est bornée : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$

donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{u_n}{n!}x^n\right| \leqslant M\dfrac{|x|^n}{n!}$. Cette dernière série est une série exponentielle (de somme $Me^{|x|}$) qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par majoration, la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La série entière } \displaystyle\sum \frac{u_n}{n!}x^n \text{ a donc un rayon de convergence infini}}$.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ |s_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \underbrace{|u_k|}_{\leqslant M} \leqslant M(n+1)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{s_n}{n!}x^n\right| = \dfrac{|s_n|}{n!}|x|^n \leqslant \dfrac{M(n+1)}{n!}|x|^n = \dfrac{M|x|^n}{(n-1)!} + \dfrac{M|x|^n}{n!}$, somme de deux séries exponentielles convergentes. Par majoration, la série $\displaystyle\sum \frac{s_n}{n!}x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La série entière } \displaystyle\sum \frac{s_n}{n!}x^n \text{ a donc un rayon de convergence infini}}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n!}x^n$

$$= u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n-1}}{n!}x^n$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!}x^n$ et par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0,1}^{\infty} n\frac{s_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{n+1}}{n!}x^n$ (par décalage d'indice)

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n + u_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = S(x) + U'(x)$$

c) On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| < \varepsilon$

$\forall x > 0, \forall n \geqslant n_0,\ U(x)e^{-x} = e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0} \frac{u_n}{n!}x^n + e^{-x}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$

$$\Longrightarrow\ |U(x)|e^{-x} \leqslant \left|\sum_{n=0}^{n_0} \frac{u_n}{n!}x^n e^{-x}\right| + e^{-x}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}x^n$$

la somme $U_{n_0}(x)e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0} \frac{u_n}{n!}x^n e^{-x}$ est une somme finie de $n_0 + 1$ termes qui sont tous de limite nulle quand $n \to +\infty$: $\forall n \in \{0, 1, \cdots, n_0\},\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_{n_0}(x)e^{-x} = 0$

Il existe $A \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \geqslant A,\ |U_{n_0}(x)e^{-x}| < \varepsilon$

alors, $\forall x \geqslant A,\ |U(x)e^{-x}| \leqslant \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{n_0} \frac{u_n}{n!}x^n e^{-x}\right|}_{<\varepsilon} + e^{-x} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}x^n \leqslant \varepsilon + e^{-x}\ \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leqslant \varepsilon + e^{-x}\ \varepsilon\ e^x = 2\varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A, |U(x)e^{-x}| < 2\varepsilon$, c'est à dire que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} U(x)e^{-x} = 0}$

d) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$

Posons $v_n = u_n - L$ de sorte que $u_n = L + v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Alors $e^{-x}S(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L+v_n}{n!}x^n = e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}x^n\right)$

$= Le^{-x}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{=e^x} + e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}x^n = L + e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}x^n$

d'après la questuion précédente, puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}x^n = 0$, d'où l'on déduit par addition que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{-x}U(x) = L}$

e) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Notons $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Alors $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sigma$, et en appliquant le résultat de la question précédente, où s_n joue le rôle de u_n, on obtient : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{-x}S(x) = \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n}$

2.22 Mines 539 :

E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$, G est un sous espace vectoriel de E. Recherchez la dimension de $W = \{u \in \mathscr{L}(E,F),\ G \subset \ker u\}$

SOLUTION : Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de G $\quad (p = \dim(G))$, que l'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ de E.

Considérons l'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \mapsto & (u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n)) \end{array}\right.$

Φ est une application linéaire (immédiat) de $\mathscr{L}(E,F)$ dans F^n. Elle est injectice (si $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n)) = (0, \cdots, 0)$, alors $u = \omega$ (application linéaire nulle de $\mathscr{L}(E,F)$) car les images de tous les vecteurs de la base sont nulles)

Elle est surjective, car il existe une (et une seule) application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ dont les images des vecteurs de bases sont imposées. Donc Φ est un isomorphisme linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ sur F^n.

$\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ u \in W \iff G \subset \ker u \iff e_1, e_2, \cdots, e_p$ appartiennenet à $\ker u$

$\iff u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_p) = 0$

$\iff \Phi(u) = \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{p\ fois} \times F^{n-p}$

Donc $W = \Phi^{-1}(\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times F^{n-p})$ est isomorphe à F^{n-p}, et $\boxed{\dim W = (n-p)\dim(F)}$

2.23 Mines 542

Soient $A, B, \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A.B = A^2 + A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

SOLUTION : $A.B = A^2 + A + I_n \implies A(B - A - I_n) = I_n$

$\implies A$ est inversible, et $A^{-1} = B - A - I_n$

$\implies (B - A - I_n).A = I_n \implies B.A = A^2 + A + I_n$

$\implies A.B = B.A \qquad$ (par différence)

2.24 Mines 564 *

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers une limite L. On définie alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ku_k.$$

Montrer que la suite (v_n) converge, et préciser sa limite.

SOLUTION : • Si on considère le cas où (u_n) est une suite constante de valeur $c \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kc = \frac{c}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{cn(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{c}{2}.$$

• Supposons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (Le cas général s'obtiendra ensuite par addition de ces deux premiers cas)

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$

$$\forall n \geqslant n_0, |v_n| = \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n} ku_k\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n_0} ku_k\right| + \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} ku_k\right|$$

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n^2} \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n_0} ku_k\right|}_{S_{n_0}\ independent\ de\ n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} k\underbrace{|u_k|}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant \frac{S_{n_0}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} k$$

$$|v_n| \leqslant \frac{S_{n_0}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{S_{n_0}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{S_{n_0}}{n^2} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{n}\frac{n+1}{2}}_{\leqslant\varepsilon}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n_0}}{n^2} = 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ \frac{S_{n_0}}{n^2} \leqslant \varepsilon$

donc $\forall n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1),\ |v_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

On a ainsi montré que : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_2, |v_n| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui signifie bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

• Etudions le cas général où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$.

En posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n = u_n - L$, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(L+\varepsilon_k) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kL + \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k$

d'après la première étude, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kL = 0$, et d'après la seconde étude, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon_k = \dfrac{L}{2}$.

donc , par addition, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = \dfrac{L}{2}}$.

2.25 Mines 571 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on pose : $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt$.

a) Calculer $T(f)$ pour les fonctions monômes : $t \mapsto t^n,\ n \in \mathbb{N}$

et pour les fonctions exponentielles : $t \mapsto e^{at},\ a \in_R$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f telles que $T(f) = \lambda f$.

SOLUTION : Remarquons que $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$,

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 xf(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$$

a) • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : t \mapsto t^n$.

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x t^{n+1}dt + x\int_x^1 t^n dt = \left[\tfrac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x + x\left[\tfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^1$$
$$= \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+1} = \frac{x}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

• Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto e^{at}$.

$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x te^{at}dt + x\int_x^1 e^{at}dt$

$$T(f)(x) = \left[t\frac{e^{at}}{a}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{at}}{a}dt + x\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_x^1$$
$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \left[\frac{e^{at}}{a^2}\right]_0^x + x\frac{e^a - e^{ax}}{a}$$
$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}-1}{a^2} + x\frac{e^a - e^{ax}}{a} = \frac{axe^{ax} - e^{ax} + 1 + axe^a - axe^{ax}}{a^2}$$

$$\boxed{T(f)(x) = \frac{1 - e^{ax} + axe^a}{a^2}}$$

b)Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et a pour dérivée: $x \mapsto f(x)$

Soit $f \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $T(f) = \lambda f$: $\forall x \in [0,1], T(f)(x) = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt = \lambda f(x)$

En dérivant la dernière égalité comme on vient de le justifier,

$\forall x \in [0,1], xf(x) + \displaystyle\int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \lambda f'(x)$

$\Longrightarrow \forall x \in [0,1], \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = \lambda f'(x)$

Le membre de gauche étant un fonction $\mathcal{C}^1$, si $\lambda \neq 0$, le membre de droite l'est aussi, ce qui signifie que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

En dérivant à nouveau, $\forall x \in [0,1], -f(x) = \lambda f''(x)$

- Si $\lambda = 0$, seule la fonction nulle est solution.
- Si $\lambda \neq 0$, la fonction f est solution de l'équation différentielle D : $\quad y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$
  - Si $\lambda > 0$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \alpha \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$
  - Si $\lambda < 0$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \alpha e^{\frac{t}{\sqrt{-\lambda}}} + \beta e^{\frac{-t}{\sqrt{-\lambda}}}$

Il reste à vérifier que les fonctions de ce type sont effectivement solutions.

2.26 Mines 572 * :

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}}$

a) Quel est le domaine de définition de f ? Peut-on réduire son domaine d'étude ?

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Etudier ses variations.

c) Etudier la limite de f en $+\infty$. Calculer un équivalent de f en $+\infty$.

d) Etudier la limite de f en 0^+. Peut on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est elle définie ? Si oui, la calculer.

SOLUTION : a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Si $x > 0$, elle est continue sur le segment $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^*$, et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}}$ est définie, comme intégrale d'une fonction **continue** sur un **segment**.

Si $x < 0$, elle est continue sur le segment $[2x, x] \subset \mathbb{R}^*$, et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}}$ est définie pour la même raison. Pour $x = 0$, $f(0)$ s'écrirait $\int_0^0 \frac{1}{0}dt$, ce qui n'a pas de sens. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$

Si $x > 0$, le changement de variable $u = -t$ donne :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}} = \int_{-x}^{-2x} \frac{-du}{\sqrt{u^2+u^4}} = -\int_{-x}^{-2x} \frac{du}{\sqrt{u^2+u^4}} = -f(-x)$$

Donc f est une fonction impaire. On peut réduite son étude à l'intervalle $]0, +\infty[$ et on aura tout son graphe par symétrie par rapport au point origine $O(0,0)$

b) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet sur cet intervalle une primitive $G : \forall t \in]0, +\infty[,\ G'(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}$

Alors, $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \int_x^{2x} g(t)dt = G(2x) - G(x)$.

Puisque G est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f l'est aussi, et

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}} < 0}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[}$

c) $\forall t > 0,\ t^4 \leqslant t^2 + t^4 \leqslant t^2 + 2t^3 + t^4 = (t^2+t)^2$, donc $\dfrac{1}{t^2+t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

et pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$

Or, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+t} = \int_x^{2x} \frac{t+1-t}{t(t+1)}dt = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln 2 - \ln(2x+1) + \ln(x+1)$

et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

donc, pour tout $x > 0$, $\ln 2 - \ln(2x+1) + \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$

Or, $\ln\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2x+1+1}{2x+1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2x+1}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x+1} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$

De cet encadrement, on déduit que $\boxed{f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}}$ et que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

d) Par un calcul analogue, $\forall t > 0,\ t^2 \leqslant t^2 + t^4 \leqslant (t^2+t)^2$, entraîne que :

$$\forall x > 0,\ \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$$

et donc $\ln\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$, quii montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2}$

• On peut prolonger f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = \ln 2$. Mais puisque f est impaire, elle ne sera pas continue à gauche en 0. On ne peut donc pas prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

• Une fois prolongée par continuité en 0, f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Mais l'équivalence $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ montre que $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } [0,+\infty[}$.

2.27 Mines 589 :

Rayon de convergence et calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$ lorsque $x > 0$.

SOLUTION : • $\boxed{R = 1}$ (immédiat par le critère de d'Alembert).

• $$\frac{1}{4n^2-5n+1} = \frac{1}{(n-1)(4n-1)} = \frac{1}{3}\frac{(4n-1)-4(n-1)}{(n-1)(4n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{4}{4n-1}\right)$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1} - \frac{4}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x)$$

Le calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1}$ est plus compliqué. Commençons par définir $T(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ (série entière de rayon 1)

D'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur son ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[,\ T'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{4n-2} = x^6 + x^{10} + x^{14} + \cdots = x^6\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^6}{1-x^4}$$

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{x^6}{1-x^4} = \frac{x^2(x^4-1)+x^2}{1-x^4} = -x^2 + \frac{x^2}{1-x^4}\\
&= -x^2 + \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)+(x^2+1)}{(1-x^2)(1+x^2)} = -x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\\
&= -x^2 - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1-x)(1+x)}\\
&= -x^2 - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\frac{(1-x)+(1+x)}{2(1-x)(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ T'(x) = -x^2 - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)}$$

D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière sur son ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[,\ T(x) = \underbrace{T(0)}_{=0} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1-x)$$

En multipliant par x,

$$xT(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n-1} = -\frac{x^4}{3} - \frac{x}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{4}\ln(1+x) - \frac{x}{4}\ln(1-x)$$

En remplaçant x par $\sqrt[4]{x}$ lorsque $x > 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1} = -\frac{x}{3} - \frac{\sqrt[4]{x}}{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt[4]{x}) + \frac{\sqrt[4]{x}}{4}\ln(1+\sqrt[4]{x}) - \frac{\sqrt[4]{x}}{4}\ln(1-\sqrt[4]{x})$$

Enfin, $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4n^2-5n+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1} - \frac{4}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4n-1}$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ S(x) = -\frac{x}{3}\ln(1-x) + \frac{4x}{9} + \frac{2\sqrt[4]{x}}{3}\operatorname{Arctan}(\sqrt[4]{x}) - \frac{\sqrt[4]{x}}{3}\ln(1+\sqrt[4]{x}) + \frac{\sqrt[4]{x}}{3}\ln(1-\sqrt[4]{x})}$$

2.28 Mines 593

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme $f(x)$.

b) Déterminer le comportement de $f(x)$ aux bornes du domaine de convergence.

SOLUTION : a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{H_{n+1}}{H_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}$

Puisqu'on sait que la série harmonique est divergente ($\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$), on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = 1$, ce qui montre que la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{1} = 1$.

• Définissons : $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 1,$

et soit $(c_n) = (a_n) \otimes (b_n)$ le produit de Cauchy de ces deux suites : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1 = H_n$

La série entière $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ a pour rayon de convergence $R_a = 1$ et pour somme :

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

La série entière $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k$ a pour rayon de convergence $R_b = 1$ et pour somme :

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$$

D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières, on peut affirmer que la série produit $\sum c_n x^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ (on a vu plus haut que ce rayon vaut 1) et que :

$$\forall x \in]-1, 1[, C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = A(x).B(x)$$

donc $\forall x \in]-1, 1[, C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} H_k x^k = f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

b) On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \text{ et que } f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{\ln 2}{2}}$

2.29 Mines 594 * :

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \end{cases}$

On définit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière f n'est pas nul.

b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
En déduire la fonction f et la suite (a_n).

SOLUTION : a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant n!$.
Cette propriété est clairement vérifiée pour $n = 0, 1$.
Supposons la vraie jusqu'au rang n.

$$\text{Alors, } 0 \leqslant a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{a_k}{k!}}_{\leqslant 1} \underbrace{\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant n! \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=n+1} = (n+1)n! = (n+1)!$$

On a insi montré par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant n!$.
Alors, $\forall x \in]-1, 1[$, $\left|\frac{a_n}{n!} x^n\right| \leqslant |x|^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente (car $|x| < 1$)

On en déduit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$, ce qui entraîne que

$\boxed{\text{son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1}}$.

b) Pour tout $x \in]-1,1[$, la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est absolument convergente. Notons $(c_n x^n)$ le produit de Cauchy de cette série entière par elle même :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = \frac{1}{n!}\ a_{n+1}$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est absolument convergente, le produit de cette série par elle même l'est aussi, et:

$$\forall x \in]-1,1[, f^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ a_{n+1} x^n$$

Par application du théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur son ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n \frac{a_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, f'(x) = f^2(x)}$. $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) :\ y' = y^2}$

•. Soit y une solution de (E) sur un intervalle J où elle ne s'annule pas. Alors, $\forall x \in J$, $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$, donc il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in J,\ -\frac{1}{y(x)} = x + k$

$\Longrightarrow \forall x \in J,\ y(x) = -\frac{1}{x+k}$

f, solution de (E) est de ce type : il existe $k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J,\ f(x) = -\frac{1}{x+k}$

Par ailleurs, $f(0) = a_0 = 1 = -\frac{1}{k}$. Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{1}{1-x}}$

•. $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, et par unicité des coefficients d'unes érie entière de rayon de convergence nom nul, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n!}$

2.30 Mines 600 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt$. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

Etudier ses limites aux bornes.

SOLUTION : Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto x + t$ est continue sur $[0, x]$ et ne s'y annule pas (elle prend ses valeurs entre x et $2x$).

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est donc définie et continue sur le segment $[0, x]$, et y est intégrable (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment) . Donc la fonction $f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Par le changement de variable $u = x + t,\ du = dt,\ f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^{u-x}}{u} du$

$$\forall x > 0,\ f(x) = e^{-x} \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} du$$

$$\forall u \in [x, 2x],\ x \leqslant u \leqslant 2x \implies \frac{e^x}{u} \leqslant \frac{e^u}{u} \leqslant \frac{e^{2x}}{u}$$

$$\implies \int_x^{2x} \frac{e^x}{u} du \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} du \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{u} du$$

$$\implies e^x \ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} du \leqslant e^{2x} \ln 2 \quad \text{et en multipliant par } e^{-x} :$$

$$\implies \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^x \ln 2$$

d'où il résulte que $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2}$

$$\forall u \in [x, 2x], \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{x} \implies \int_x^{2x} \frac{e^u}{2x} du \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} du \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^u}{x} du$$

$$\implies \frac{e^{2x} - e^x}{2x} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} du \leqslant \frac{e^{2x} - e^x}{x} \quad \text{et en multipliant par } e^{-x} :$$

$$\implies \frac{e^x - 1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e^x - 1}{x}$$

La minoration $\frac{e^x - 1}{2x} \leqslant f(x)$ entraîne que : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Par intégration par parties : $\displaystyle\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u} du = \left[e^u \frac{1}{u}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du = \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} + \int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du$

en multipliant par e^{-x} : $f(x) = \dfrac{e^x}{2x} - \dfrac{1}{x} + e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du$

soit : $f(x) - e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du = \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{x}$

Or $\forall u \in [x, 2x]$, $\frac{1}{u^2} \leqslant \frac{1}{ux}$, et donc $\displaystyle\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u} du$, d'où il résulte, en multipliant par e^{-x} que :

$$e^{-x}\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du = o(f(x)) \text{ quand } x \to +\infty$$

En prenant le terme dominant dans chaque membre de l'égalité : $f(x) - e^{-x}\displaystyle\int_x^{2x} e^u \frac{1}{u^2} du = \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{x}$, on obtient alors : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2x}}$

2.31 Mines 602 :

Montrer que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$

SOLUTION : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ où la fonction $t \mapsto \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est donc intégrable sur l'ouvert $]0, +\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons : $\forall x \geqslant 0, \forall t > 0,\ F(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

  et $\dfrac{\partial F}{\partial x}F(x,t) = \dfrac{\frac{1}{t}}{(1+t^2)(1+\frac{x^2}{t^2})} = \dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto F(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$

  et $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}F(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)}$

sont continue et intégrables sur $]0, +\infty[$

- Soit $a > 0$ quelconque.

  $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}F(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)} \leqslant \dfrac{1}{t^2+a^2}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$

  $\left(\text{car } t^2+1-t = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \implies t^2+1 > t \implies \frac{t}{t^2+1} < 1\right)$

Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ nous permet d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. a étant quelconque. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}F(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)}dt$

■ Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1+u)(u+x^2)}$ de la variable u :

$$\frac{1}{(1+u)(u+x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{(1+u)-(u+x^2)}{(1+u)(u+x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{u+x^2} - \frac{1}{1+u}\right)$$

En remplaçant u par t^2 et en multipliant pas t, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)} dt = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+x^2}{t^2+1}\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{-\ln(x^2)}{2(1-x^2)} = \frac{\ln x}{x^2-1}}$$

■ Comme étudié précédemment, la continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ et la domination :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ où la fonction $t \mapsto \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

permettent d'affirmer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, ma fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2-1} = \dfrac{\ln t}{(t-1)(t+1)}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc l'intégrale $\int_0^{1/2} g(t)dt$ est convergente.

$g(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{(t-1)(t+1)} \sim \dfrac{1}{2}$ et la fonction g est prolongeable en une fonction continue au point 1.

d'où : $\forall x > 0, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}dt = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt$

2.32 Mines 614 :

X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est bien définie et calculer son espérance

SOLUTION : Une variable aléatoire qui suit une loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (et ne prend pas la valeur 0). La variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est donc bien définie.

Par la formule du transfert, $E\left(\frac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q}\ln(1-q) = -\frac{p\ln p}{q}$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p\ln p}{q} = \frac{p\ln p}{p-1}}$$

2.33 Mines 616 :

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs, convergente.

Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n.u_{n+2}}$ converge aussi.

SOLUTION : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+2}}\right)^2 = u_n + u_{n+2} - 2\sqrt{u_n.u_{n+2}} \geqslant 0$ (carré d'un réel)

donc, $\forall n \in \mathbb{N}, 2\sqrt{u_n.u_{n+2}} \leqslant u_n + u_{n+2}$, ce qui montre par majoration que la série $\sum \sqrt{u_n.u_{n+2}}$ converge.

2.34 Mines 619 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.

On tire simultanément deux jetons. On note X le numéro le plus petit, et Y le numéro le plus grand.

a) Déterminer la loi de couple (X,Y) et les lois marginales X et Y.

X et Y sont elles indépendantes ?

b) Calculer espérance et variance de Y.

SOLUTION : a) Tirer simultanément deux jetons parmi l'ensemble $\{1,2,\cdots,n\}$ équivaut à choisir un sous ensemble à deux éléments parmi l'ensemble $\{1,2,\cdots,n\}$. Il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ manières de le faire. Et extraire un sous-ensemble à deux éléments équivaut, en ordonnant ces deux éléments par ordre croissant, à définir une valeur de (X,Y).

Donc : • Si $i \geqslant j,\ P((X,Y)=(i,j)) = 0$

• Si $i < j,\ P((X,Y)=(i,j)) = \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)}$

• X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,2,\cdots,n-1\}$, et pour tout $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,

$(X=k) = \{(k,k+1),(k,k+2),\cdots,(k,n)\}$, donc $\boxed{P(X=k) = \dfrac{n-k}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}$

• Y prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2,\cdots,n-1,n\}$, et pour tout $k \in \{2,\cdots,n-1,n\}$,

$(Y=k) = \{(1,k),(2,k),\cdots,(k-1,k)\}$, donc $\boxed{P(Y=k) = \dfrac{k-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}}$

• Si $i \geqslant j, P((X,Y)=(i,j)) = 0$ et $P(X=i)P(X=j) \neq 0$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Puisque Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'espérance et la variance de Y sont définies.

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=0,1,2}^{n} \frac{2k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{n^3-n}{3} = \frac{2}{3}(n+1)$$

$\boxed{E(Y)=\frac{2}{3}(n+1)}$

- $E(Y^2)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k^2P(Y=k)=\sum_{k=0,1,2}^{n}\frac{2k^2(k-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{2n(n+1)}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{4}-\frac{(2n+1)}{6}\right)$$
$$=\frac{2(n+1)}{(n-1)}\left(\frac{3n^2+3n-4n-2}{12}\right)=\frac{(n+1)(3n^2-n-2)}{6(n-1)}=\frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{6(n-1)}$$

$$\boxed{E(Y^2)=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}}$$

- $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-\dfrac{4}{9}(n+1)^2=\dfrac{n+1}{3}\times\left(\dfrac{3n+2}{2}-\dfrac{4n+4}{3}\right)$

$$=\frac{n+1}{3}\times\left(\frac{(9n+6)-(8n+8)}{6}\right)=\frac{(n+1)(n-2)}{18}\qquad\boxed{V(Y)=\frac{(n+1)(n-2)}{18}}$$

2.35 Mines 620 * :

Une urne contient une proportion p de boules noires, et une proportion $q=1-p$ de boules blanches.

On effectue des tirages avec remise dans cette urne.

On note N_k l'évènement " le k^e tirage est une boule noire", et B_k l'évènement " le k^e tirage est une boule blanche".

On note X la la longueur de la première série de tirages de boules de la même couleur, et Y la longueur de la série de tirages de même couleur qui suit.

Par exemple, l'évènement $(X=1,Y=2)=((X,Y)=(1,2))$ est $[N_1\cap B_2\cap B_3\cap N_4]\cup[B_1\cap N_2\cap N_3\cap B_4]$

a) Donner la loi conjointe du couple (X,Y).

b) Calculer la loi de X. Calculer l'espérance de X et montrer que $E(X)\geqslant 2$

c) Calculer la loi et l'espérance de Y.

SOLUTION : Remarquons que la première série de tirages de pions de la même couleur est toujours définie, et que sa longueur est supérieure ou égale à 1. La longueur pourrait être infinie, si tous les tirages sont de la même couleur indéfiniment, mais un tel évènement, possible, a une probabilité nulle.

De même, le nombre Y pourrait ne pas être défini, dans le cas qu l'on vient de voir où tous les tirages sont de la même couleur.

Nous étudierons donc les cas où X et Y prennent leur valeur dans $\mathbb{N}^*$:

Soient $k,h\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(X=k,Y=h)&=[N_1\cap N_2\cap N_3\cap\cdots\cap N_k\cap B_{k+1}\cap\cdots\cap B_{k+h}\cap N_{k+h+1}]\\&\quad\cup[B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_k\cap N_{k+1}\cap\cdots\cap N_{k+h}\cap B_{k+h+1}]\\P(X=k,Y=h)&=P[N_1\cap N_2\cap N_3\cap\cdots\cap N_k\cap B_{k+1}\cap\cdots\cap B_{k+h}\cap N_{k+h+1}]\\&\quad+P[B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_k\cap N_{k+1}\cap\cdots\cap N_{k+h}\cap B_{k+h+1}]\quad\text{(évènements incompatibles}\\P(X=k,Y=h)&=P(N_1).P(N_2).P(N_3).\cdots.P(N_k).P(B_{k+1}).\cdots.P(B_{k+h}).P(N_{k+h+1})\\&\quad+P(B_1).P(B_2).P(B_3).\cdots.P(B_k).P(N_{k+1}).\cdots.P(N_{k+h}).P(B_{k+h+1})\\&=p^kq^hp+q^kp^hq=p^{k+1}q^h+p^hq^{k+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k,h\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k,Y=h)=p^{k+1}q^h+p^hq^{k+1}}$$

b) $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(X=k)=\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}P(X=k,Y=h)=\sum_{h=1}^{\infty}p^{k+1}q^h+p^hq^{k+1}$

$$P(X=k)=p^{k+1}\sum_{h=1}^{\infty}q^h+q^{k+1}\sum_{h=1}^{\infty}p^h=p^{k+1}\frac{q}{1-q}+q^{k+1}\frac{p}{1-p}=p^kq+q^kp$$

La loi de X est donnée par : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, P(X=k)=p^kq+q^kp}$

- $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k(p^kq+q^kp)=q\sum_{k=1}^{\infty}kp^k+p\sum_{k=1}^{\infty}kq^k$

Rappelons que $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^k$, et par application du théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}$

d'où : $E(X)=pq\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}+pq\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{pq}{(1-p)^2}+\frac{pq}{(1-q)^2}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ $\qquad\boxed{E(X)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}}$

$\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$, ce qui montre que $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ (avec égalité si et seulement si $x = 1$)

En appliquant cette inégalité à $x = \frac{p}{q}$, on obtient : $\boxed{E(X) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geqslant 2}$

c) $\forall h \in \mathbb{N}^*, P(Y = h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y = h) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1}q^h + p^h q^{k+1}$

$$P(Y = h) = q^h \sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1} + p^h \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1} = q^h \frac{p^2}{1-p} + p^h \frac{q^2}{1-q} = p^2 q^{h-1} + q^2 p^{h-1}$$

$\boxed{\forall h \in \mathbb{N}^*, P(Y = h) = p^2 q^{h-1} + q^2 p^{h-1}}$

• $E(Y) = \displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} hP(X = h) = \sum_{h=1}^{\infty} (hp^2 q^{h-1} + hq^2 p^{h-1}) = p^2 \sum_{h=1}^{\infty} hq^{h-1} + q^2 \sum_{h=1}^{\infty} hp^{h-1}$

$= \dfrac{p^2}{(1-q)^2} + \dfrac{q^2}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2$ $\quad\boxed{E(Y) = 2}$

2.36 Mines 631 * :

X et Y sont deux variables aléatoires qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On définit $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

Déterminer la loi de (U, V). En déduire les lois de U et de V.

Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

SOLUTION : X et Y prennent leurs valeurs chacune dans $\mathbb{N}^*$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^{k-1}$

$U = |X - Y|$ prend donc ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (zero compris), $V = \min(X, Y)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

• $\forall h \in \mathbb{N}^*, (U = 0, V = h) = (X = Y, \min(X, Y) = h) = (X = h, Y = h)$

Par indépendance des variables X et Y, $P(U = 0, V = h) = P(X = h)P(Y = h) = pq^{h-1}.pq^{h-1} = p^2 q^{2h-2}$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathbb{N}^*, ((U, V) = (k, h)) = [(X = h) \cap (Y = k + h)] \cup [(X = k + h) \cap (Y = h)]$

Ces deux évènements étant incompatibles,

$P((U, V) = (k, h)) = P[(X = h) \cap (Y = k + h)] + P[(X = k + h) \cap (Y = h)]$, et par indépendance de X et Y,

$P((U, V) = (k, h)) = P(X = h)P(Y = k + h) + P(X = k + h)P(Y = h) = pq^{h-1}pq^{k+h-1} + pq^{h-1}pq^{k+h-1} = 2p^2 q^{k+2h-2}$

Finalement , la loi de couple (U, V) est définie par :

$\boxed{\forall h \in \mathbb{N}^*, P((U, V) = (0, h)) = p^2 q^{2h-2} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P((U, V) = (k, h)) = 2p^2 q^{k+2h-2}}$

• Calcul des lois marginales :

$(U = 0) = \displaystyle\bigcup_{h \in \mathbb{N}} ((U, V) = (0, h))$. Par incompatibilité des évènements,

$$P(U = 0) = \sum_{h=1}^{\infty} P((U, V) = (0, h)) = \sum_{h=1}^{\infty} p^2 q^{2h-2} = p^2 \sum_{h=1}^{\infty} q^{2h-2} = p^2 \sum_{h=0}^{\infty} q^{2h} \quad \text{(décalage d'indice)}$$

$$= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q} \qquad (1 - q = p)$$

$\forall k \geqslant 1, (U = k) = \displaystyle\bigcup_{h \in \mathbb{N}} ((U, V) = (k, h))$. Par incompatibilité des évènements,

$$P(U = k) = \sum_{h=1}^{\infty} P((U, V) = (k, h)) = \sum_{h=1}^{\infty} 2p^2 q^{k+2h-2} = 2p^2 q^k \sum_{h=1}^{\infty} q^{2h-2} = 2p^2 q^k \sum_{h=0}^{\infty} q^{2h} \quad \text{(décalage d'indice)}$$

$$= \frac{2p^2 q^k}{1-q^2} = \frac{2p^2 q^k}{(1-q)(1+q)} = \frac{2pq^k}{1+q} \qquad (1 - q = p)$$

En résumé,

$$\boxed{P(U = 0) = \frac{p}{1+q}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(U = k) = \frac{2pq^k}{1+q}}$$

Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$,

$$P(V = h) = P(U = 0, V = h) + \sum_{k=1}^{\infty} P((U, V) = (k, h)) = p^2 q^{2h-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2p^2 q^{k+2h-2}$$

$$= p^2 q^{2h-2} + 2p^2 q^{2h-2} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p^2 q^{2h-2} + 2p^2 \frac{q^{2h-2}.q}{1-q} = p^2 q^{2h-2} + 2pq^{2h-1} \quad (p = 1 - q)$$

$= pq^{2h-2}(p + 2q) = pq^{2h-2}(1 + q)$ $\quad\boxed{\forall h \in \mathbb{N}^*,\ P(V = h) = p(1 + q)q^{2h-2}}$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathbb{N}^*, P(U=k)P(V=h) = \dfrac{2pq^k}{1+q} \times p(1+q)q^{2h-2} = 2p^2q^{k+2h-2} = P((U,V)=(k,h))$

• Pour $k=0$, $\forall h \in \mathbb{N}^*, P(U=0)P(V=h) = \dfrac{p}{1+q} \times p(1+q)q^{2h-2} = p^2q^{2h-2} = P((U,V)=(0,h))$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{N}^*, P(U=k, V=h) = P(U=k)P(V=h)}$

$\boxed{\text{Les deux variables aléatoires } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes}}$.

3 Centrale - Supelec : -

3.1 Centrale maths II - (avec Python) 220 * :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on définit $u_n(x) = \dfrac{n\,!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k)}$

a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right) = -\dfrac{x}{n+1} + w_n(x)$, où $w_n(x)$ est le terme général d'une série convergente.

b) Soit $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n)$.

Tracer $(a_{10n})_{1\leqslant n\leqslant 10}$. Que pouvez vous conjecturer ?

c) Prouver que la suite (a_n) converge.

d) Trouver un équivalent de $u_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

En déduire le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série $\sum u_n(x)$. On posera : $\forall x \in \mathcal{D},\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

e) Montrer que $\forall x \geqslant 2,\ 0 < u_n(x) \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

En déduire un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_m(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} u_n(2)$ soit une approximation de $S(2)$ à ε près ou ε est un réel > 0 donné.

SOLUTION : a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)}}{\dfrac{n\,!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}} = \dfrac{n+1}{x+n+1}$

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) = \ln\left(\frac{(x+n+1)-x}{x+n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{x}{x+n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{x}{x+n+1} + O\left(\frac{x}{x+n+1}\right)^2 \qquad (\text{car } \ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + O(u^2))$$
$$= 1 - \frac{x}{n+1} + \frac{x}{n+1} - \frac{x}{x+n+1} + O\left(\frac{x}{x+n+1}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{x}{n+1} + \frac{x(x+n+1)-x(n+1)}{(n+1)(x+n+1)} + O\left(\frac{x}{x+n+1}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{x}{n+1} + \underbrace{\frac{x^2}{(n+1)(x+n+1)} + O\left(\frac{x}{x+n+1}\right)^2}_{=w_n(x)}$$

Pour tout $x > 0$ fixé, $w_n(x) = \dfrac{x^2}{(n+1)(x+n+1)} + O\left(\dfrac{x}{x+n+1}\right)^2 = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série abolument convergente. On a bien établi l'égalité :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right) = 1 - \frac{x}{n+1} + w_n(x) \qquad \text{où } \sum w_n(x) \text{ converge pour tout } x > 0.$$

on définit $u_n(x) = \dfrac{n\,!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k)}$

b) Le programme Python suivant :

```
import numpy as np
def a(n):
    return sum([1/(k+1) for k in range(2,n+1)])-np.log(n)
for  j in range(1,11):
    print(a(10*j))
```

donne pour résultats :

```
-0.282707748117
-0.350373568791
-0.373952186226
-0.385946171275
-0.393209823961
-0.398080706647
-0.401573977369
-0.404201676716
-0.406250056493
```

On peut aussi tracer les points de coordonnées (n, a_{10n}) :

```
n=50
plt.figure()
X=np.linspace(1,n,n)
print(X)
Y=[a(10*k) for k in range(1,n+1)]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On peut penser que la suite (a_n) est convergente.

c) Pour montrer que la suite (a_n) est convergente, il suffit de montre que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ l'est.

Définissons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \ln(n+1) + \ln(n)$

$$b_n = \frac{1}{n+2} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$b_n = -\frac{2}{n(n+2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum b_n$ converge absolument (par domination par une série de Riemamm convergente). La suite (a_n) est donc convergente.

d) En sommant pour k variant de 1 à n les égalités :

$\ln\left(\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right) = -\dfrac{x}{k+1} + w_k(x)$, on obtient, après "telescopage" des logarithmes :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}(x)}{u_1(x)}\right) = -x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} w_k(x) = -x(a_n + \ln n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k(x)}_{W_n(x)}$$

En prenant les exponentielles, $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_1(x)} = e^{-x\ a_n}e^{-x\ln n}e^{W_n(x)}$

$$u_{n+1}(x) = u_1(x)\frac{e^{-a_n\ x}}{n^x}e^{W_n(x)}$$

En notant $\alpha = \lim a_n$ et $\beta(x) = \lim W_n(x)$, on obtient $u_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a^{-\alpha x+\beta(x)}}{x+1} \times \dfrac{1}{n^x}$

Cette équivalence avec une série de Riemman montre que la série $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$.

$$\boxed{\mathcal{D} =]1, +\infty[}$$

e) Soit $x \geqslant 2$. $u_n(x) = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \cdots \times \times (n-1) \times n}{(x+1)\times(x+2)\times(x+3)\times\cdots\times(x+n-1)(x+n)}$

$$= 1 \times 2 \times \underbrace{\frac{3}{x+1}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{4}{x+2}}_{\leqslant 1} \cdots \times \underbrace{\frac{n-3}{x+n-1}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{n-2}{x+n}}_{\leqslant 1} \times \frac{1}{(x+n+1)(x+n)}$$

$$\leqslant 1 \times 2 \times \frac{1}{(x+n+1)(x+n)} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Donc, $\boxed{\forall x \geqslant 2,\ 0 < u_n(x) \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}}$

- $S(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(2) = \sum_{n=1}^{m} u_n(2) + \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(2)$

D'après le résultat précédent, $0 < \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(2) \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

Or $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=m+1}^{p}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+p+2}\right) = \frac{1}{m+2}$

donc $0 < \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(2) \leqslant \frac{2}{m+2}$

Pour que $S_m(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} u_n(2)$ soit une valeur approchée de $S(2)$ à ε près, il suffit que $0 < \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(2) \leqslant \varepsilon$, pour cela il suffit que $\frac{2}{m+2} \leqslant \varepsilon$, c'est à dire que $m \geqslant \frac{2}{\varepsilon} - 2$.

3.2 Centrale maths I 221 :

On considère $n+1$ réels $a_0; a_1, \cdots, a_n$ distincts, et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P, Q \in E$, on définit : $< P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$

a) Montrer que $< , >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Déterminer la distance d'un polynôme Q de E au sous espace $\mathcal{H} = \left\{P \in E, / \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$

SOLUTION : a) l'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est clairement bilinéaire et symétrique.

Elle est positive : en effet, $\forall P \in E,\ < P, P >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) \geqslant 0$ (puisque P est à coefficients réels)

Elle est définie-positive : en effet, supposons que $< P, P >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) = 0$.

Alors, puisque chaque terme $P^2(a_k)$ est positif ou nul et que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k)$ est nulle, il s'en suit que $\forall k \in \{0, 1, \cdots a\},\ P(a_k) = 0$. Le polynôme $P(X)$, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes. c'est donc le polynôme nul.

L'application $< , >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. c'est donc un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b) L'application $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) \end{cases}$ est linéaire (immédiat).

C'est une forme linéaire sur E. $\mathcal{H} = \left\{P \in E, / \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\} = \ker\varphi$ est le noyau de cette forme linéaire. C'est donc un hyperplan de E (de dimension $(n+1) - 1 = n$)

Déterminons le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{H}$, qui sera donc une droite $\mathcal{D}$:

Or $\forall P \in \mathcal{H},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) =< P, 1 >= 0$

Donc le polynôme constant 1 est orthogonal à tout polynôme P de E ; $1 \in \mathcal{D} = \mathcal{H}^{\perp}$. Donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{H}^{\perp} = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]}$

• $< 1, 1 >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 \times 1 = n+1 = \|1\|^2$.

Le polynôme constant $R_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ constitue à lui seul une base orthonormale de $\mathcal{H}^{\perp} = \mathbb{R}_0[X]$

• Notons p_1 la projection orthogonale sur l'hyperplan $\mathcal{H}$ et p_2 la projection orthogonale sur l'hyperplan $\mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{D}$.

Puisque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires orthogonaux, $p_1 + p_2 = Id_E$.

Si Q est un polynôme quelconque de E, on sait que la distance de Q au sous-espace $\mathcal{H}$ est égale à

$d = \|Q - p_1(Q)\| = \|(Id_E - p_1)(Q)\| = \|p_2(Q)\|$

Par ailleurs, puisque $R_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times 1$ est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, $p_2(Q) =< R_n, Q > R_n$

$p_2(Q) = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \times 1, Q \right\rangle \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \times 1 = \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right) \times 1 = \dfrac{\varphi(Q)}{n+1} \times 1$, et finalement :

$$\boxed{d(Q,\mathcal{H}) = \|p_2(Q)\| = \left|\frac{\varphi(Q)}{n+1}\right| \times \|1\| = \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right|}{\sqrt{n+1}} = \frac{|\varphi(Q)|}{\sqrt{n+1}}}$$

3.3 Centrale 231

a) Ecrire le developpement limité à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$

b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre $\leqslant 4$ $(N^4 = 0)$

Montrer que la matrice $I_n + N$ admet au moins une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_n + N$

SOLUTION : a) On sait que le DL à l'ordre n de la fonction $g : x \mapsto (1+x)^\alpha$ au point 0 est :

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{k\,!} x^k + o(x^n)$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \cdots \times \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k\,!} x^k + o(x^n)$

et à l'ordre $n = 3$: $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$

b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre $\leqslant 4$. $(N^4 = 0)$

Soit $M = I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3$.

alors $M^2 = \left(I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3\right) \cdot \left(I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3\right)$

$$= I_n + N + \underbrace{\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)}_{=0} N^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right)}_{=0} N^3 + \beta \underbrace{N^4}_{=0} + \gamma \underbrace{N^5}_{=0} + \delta \underbrace{N^6}_{=0}$$

$\boxed{\text{En prenant } M = I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3, \text{ on a bien : } M^2 = I_n + N}$

3.4 Centrale PSI 233 :

E est un espace eucldien, p est un projzecteur de E.

a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme symétrique et est 1- lipschitzien.

b) On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux.

(i) Prouver que le polynome caractéristique de $p+q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

$p+q$ est il nécessairement un projecteur ?

(ii) Montrer que les valeurs propres de $p+q$ appartiennent à l'intervalle $[0,2]$?

c) Donner un exemple de problème faisant intervenir des projecteurs orthogonaux.

SOLUTION : a) Soit p un projecteur orthogonal de E. Cela signifie que $\ker p \perp \mathrm{Im} p$

Soient x et y deux éléments de E . Alors, il existe $(a,b) \in \ker p \times \mathrm{Im} p$, $x = a+b$

et il existe $(c,d) \in \ker p \times \mathrm{Im} p$, $y = c+d$

$$< p(x), y > = < \underbrace{p(a)}_{=0} + \underbrace{p(b)}_{=b}, c+d > = \underbrace{< b, c >}_{=0} + < b, d > = < b, d >$$

$$< x, p(t) > = < a+b, \underbrace{p(c)}_{=0} + \underbrace{p(d)}_{=d} > = \underbrace{< a, d >}_{=0} + < b, d > = < b, d >$$

Donc, $\forall x, y \in E$, $< p(x), y > = < x, p(y) >$, ce qui montre que $\boxed{p \text{ est un endomorphisme symétrique}}$.

• Soit x un élément de E et $(a,b) \in \ker p \times \mathrm{Im} p$, $x = a+b$

alors $\|p(x)\|^2 = < p(x), p(x) > = < b, b > = \|b\|^2 \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a+b\|^2 = \|x\|^2$

(théorème de Pythagore puisque $a \perp b$)

donc $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, ce qui montre que $\boxed{p \text{ est 1- lipschitzien}}$.

b) On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux.

(i) D'après la question précédente, p et q sont des endomorphismes symétriques de E.

Alors $p+q$ est aussi un endomorphisme symétrique (sa matrice dans une BON est une matrice symétrique comme somme des matrices de p et de q qui sont symétriques)

Donc $p+q$ est diagonalisable et son polynôme caractéristique est scindé dans le corps de référence, c'est à dire le corps $\mathbb{R}$ puisque'on a affaire à un espace euclidien. Ainsi, $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } p+q \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $p+q$. Il existe $x \in E - \{0\}$, $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \lambda x$

alors, $<(p+q)(x),x>=<p(x),x>+<q(x),x>=<\lambda x,x>=\lambda<x,x>=\lambda\|x\|^2$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\lambda\|x\|^2=<p(x),x>+<q(x),x>\leqslant \underbrace{\|p(x)\|}_{\leqslant\|x\|}.\|x\|+\underbrace{\|q(x)\|}_{\leqslant\|x\|}.\|x\|\leqslant 2\|x\|^2 \quad (p \text{ et } q \text{ sont lipschitziens})$$

donc $\lambda\|x\|^2\leqslant 2\|x\|^2$, qui entraîne que $\boxed{\lambda\leqslant 2}$ puisque $\|x\|>0$.

- Soient p un projecteur orthogonal, $x\in E$, et $(a,b)\in\ker p\times \mathrm{Im} p$ tels que $x=a+b$

  Alors, $<p(x),x>=<p(a)+p(b),a+b>=<b,a+b>=\underbrace{<b,a>}_{=0}+<b,b>=\|b\|^2\geqslant 0$

  Soit λ une valeur propre de $p+q$, et $x\neq 0$ tel que $(p+q)(x)=\lambda x$

  alors, $<(p+q)(x),x>=\underbrace{<p(x),x>}_{\geqslant 0}+\underbrace{<q(x),x>}_{\geqslant 0}=<\lambda x,x>=\lambda<x,x>=\lambda\|x\|^2\geqslant 0$. Donc $\lambda\geqslant 0$.

  On a ainsi montré que $\boxed{\mathrm{Sp}(p+q)\subset[0,2]}$

c) Citer le théorème de la projection où il s'agit de calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

3.5 Centrale 648 (avec python) * :

On considère n joueurs ($n\geqslant 2$), numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte les autres, sans match nul possible dans une rencontre.

On définit la matrice $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la manière suivante

- Pour tout i, $a_{i,i}=0$
- $a_{i,j}=1$ si le joueur i a gagné contre le joueur j
- $a_{i,j}=-1$ si le joueur j a gagné contre le joueur i

a) Ecrire une fonction python qui prend n pour paramètre et retourne une matrice de tournoi aléatoire.

Quelle propriété possèdent toutes ces matrices ?

b) Sur plusieurs expériences, calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers impairs, puis pour des entiers pairs . Qu'observe-t-on ?

c) Démontrer la propriété pour des entiers impairs .

d) Soit $J_n=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer $\det(J_n-I_n)$

e) Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M-N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrer que M et N ont même parité.

Démontrer la propriété postulée pour les n pairs.

SOLUTION : a) Lorsque le joueur i gagne le match l'opposant au joueur j, c'est à dire lorsque $a_{i,j}=1$, alors j perd le match l'opposant à i et donc $a_{j,i}=-1$

Comme de plus $\forall i$, $a_{i,i}=0$, la matrice A est antisymétrique.

On commencera par construire une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 0.

Puis, pour tout couple (i,j) tel que $0\leqslant j<i\leqslant n$, on définit $a_{i,j}$ en prenant une valeur aléatoire 1 ou -1. Pour cela on tire un entier aléatoire dans $\{0,1\}$ par l'instruction `alea=rd.randint(0,2)`, et on le ramène dans l'ensemble $\{-1,1\}$ par la dilatation $(t\mapsto 2t-1)$. On affecte en même temps $a_{j,i}=-a_{i,j}$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as alg

def Tournoi(n):
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(0,i):
            alea=rd.randint(0,2)
            A[i,j]=2*alea-1
            A[j,i]=-A[i,j]
    return A
```

b) On répète plusieurs fois l'intruction :

```
n=7
M=Tournoi(n)
print(M)
print("det=",alg.det(M))
```

On change la valeur de n. par exemple, $n=5, n=6, n=8, n=9, \cdots etc...$

On constate : 1- Si n est impaire, $\det(M)=0$

2- Si n est pair, $\det(M)$ est le carré d'un entier impair : $\det(M) \in \{1,9,25,49,81,121,169,225\}$

c) Si n est impair, alors $\det(M)=\det({}^tM)=\det(-M)=(-1)^n\det(M)=-\det(M)$

(puisque n est impair, $(-1)^n=-1$)

donc $\boxed{\det(M)=0}$

d) Interessons nous au polynôme caractéristique $\chi_{J_n}(X)$.

$J_n=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1.

0 est donc valeur propre, et $\dim(E_{J_n}(1))=n-\mathrm{rg}(J_n)=n-1$

J_n est symétrique réelle, donc diagonalisable, donc l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est égale à la dimension de sons sous-espace propre, c'est à dire $n-1$. Donc $\chi_{J_n}(X)$ est divisible par X^{n-1}

En ajoutant toutes les colonens à le première, on obtient :

$\chi_{J_n}(x)=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & \cdots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-x & 1 & \cdots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & \cdots & 1 & 1-x \end{vmatrix}$, ce qui fait apparaître la facteur $(n-X)$ dans la première colonne.

Donc $\boxed{\chi_{J_n}(x)=\det(xI_n-J_n)=x^{n-1}(x-n)\}}$

Pour $x=1$, on obtient : $\det(I_n-J_n)=(1-n)$, et donc $\boxed{\det(J_n-I_n)=(-1)^{n-1}(n-1)}$

3.6 Centrale 660 (avec python) * :

On considère la matrice $A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1- a) Avec Python, calculer A^5, A^{10}, A^{20}, A^{50}

Quelle conjecture peut on émettre ?

b) Calculer les valeurs propres de A. Démontrer cette conjecture.

2-a) Soit n un entier naturel impar ($n \geqslant 3$).

Coder en python la matrice $A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & 1 & \dots & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \dots & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Vérifier votre programme pour $n=9$.

2-b) Pour n impair, montrer que la somme des éléments de chaque ligne est égale à une constante S qu'on exprimera en fonction de n.

2-c) On pose $B=\frac{1}{S}A$. Montrer que 1 est valeur propre de B et donner un vecteur propre associé.

Montrer que les autres valeurs propres de B dans $\mathbb{C}$ sont toutes de module strictement inférieur à 1.

2-d) En déduire la limite de la suite $(B^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Vérifier avec python pour $n=9$.

<u>**SOLUTION**</u> : 1-a)
```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A=1/4*np.array([[0,1,3],[3,0,1],[1,3,0]])
print(A)
print(alg.matrix_power(A,5))
print(alg.matrix_power(A,10))
print(alg.matrix_power(A,20))
print(alg.matrix_power(A,50))
```

Pour A^{50} on trouve :
```
[[ 0.33333333  0.33333333  0.33333333]
 [ 0.33333333  0.33333333  0.33333333]
 [ 0.33333333  0.33333333  0.33333333]]
```

On peut émettre la conjecture suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} A^k = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1-b) Calcul des valeurs propres de A :

```
[in] print(alg.eigvals(A))
[out] [ 1.0+0.j    -0.5+0.4330127j   -0.5-0.4330127j]
```

On peut obtenir aussi des vecteurs propres associés :

```
[in] print(alg.eig(A))
[out]array([[ 0.57735027+0.j , -0.57735027+0.j , -0.57735027-0.j ],
            [ 0.57735027+0.j ,  0.28867513+0.5j,  0.28867513-0.5j],
            [ 0.57735027+0.j ,  0.28867513-0.5j,  0.28867513+0.5j]])
```

On peut remarquer que le premier vecteur propre est colinéaire au vecteur $(1,1,1)$. On peut vérifier ce résultat par un calcul simple :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}+0+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A admet pour valeurs propres $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \alpha \simeq -0.5 + 0.4330127\, i,\ \lambda_3 = \overline{\alpha}$

Remarquons que $|\lambda_2| = |\lambda_3| < \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} < 1$

La matrice A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ (mais pas dans $\mathbb{R}$). Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ tel que $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.P^{-1}$

$$A = P.E_{1,1}.P^{-1} + \lambda_2 P.E_{2,2}.P^{-1} + \lambda_3 P.E_{3,3}.P^{-1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P.\begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}.P^{-1} = P.E_{1,1}.P^{-1} + \lambda_2^k P.E_{2,2}.P^{-1} + \lambda_3^k P.E_{3,3}.P^{-1}$

Puisque $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P.E_{1,1}.P^{-1} = B}$.

Donc la suite matricielle $(A^k)_k$ converge. Ces matrices sont réelles car A l'est. La limite B est donc une matrice réelle.

Puisque la matrice $E_{1,1}$ est de rang 1, la matrice $B = P.E_{1,1}.P^{-1}$ obtenue en multipliant $E_{1,1}$ à droite et à gauche par une matrice inversible a aussi pour rang 1.

Si on note $L_1 = (x,y,z)$ la première ligne de B, B est de la forme : $\begin{pmatrix} L_1 \\ aL_1 \\ bL_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{pmatrix}$

La relation $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entraîne que $A^2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

puis, par récurrence, que pour tout entier k, $A^k \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

et par passage à la limite quand $k \to +\infty$, $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x+y+z = 1 \\ a(x+y+z) = 1 \\ b(x+y+z) = 1 \end{cases} \implies a = b = 1$$

donc $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$

Les 3 lignes de la matrice B sont égales.

Le raisonnement fait dès le début montre que la transposée ${}^tB$, vérifie les mêmes propriétés (1 est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé. On en conclut que les lignes de ${}^tB$ sont égales, et donc les colonnes de B le sont. Cela entraîne que $x = y = z$: $B = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$

Enfin, l'égalité $B.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entraîne que $x + x + x = 1$, donc $x = \frac{1}{3}$

Finalement, $\boxed{B = \lim_{k\to+\infty} A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

2-a) Soit n un entier naturel impair ($n \geqslant 3$).

Pour coder en python la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & 1 & \dots & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \dots & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ on procédera aux étapes suivantes :

1- On définit une matrice $n - n$ formée de 1.
2- On place des 0 sur la diagonale principale,
3- On place des 3 sur les diagonales au-dessus de la diagonale principale.

On commence par la diagonale $\begin{pmatrix} a(0,2) \\ a(1,3) \\ a(2,4) \\ a(3,5) \\ \vdots \\ a(n-3,n-1) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} a(0,4) \\ a(1,5) \\ a(2,6) \\ \vdots \\ a(n-5,n-1) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} a(0,6) \\ a(1,7) \\ \vdots \\ a(n-7,n-1) \end{pmatrix}$

et on termine par $\begin{pmatrix} a(0,n-3) \\ a(1,n-2) \\ a(2,n-1) \end{pmatrix}$ et la dernière diagonale réduite au coefficient en haut à droite, $\begin{pmatrix} a(0,n-1) \end{pmatrix}$

4- On place des 3 sur les diagonales au-dessous de la diagonale principale.

On commence par la diagonale $\begin{pmatrix} a(1,0) \\ a(2,1) \\ a(3,2) \\ a(4,3) \\ \vdots \\ a(n-1,n-2) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} a(3,0) \\ a(4,1) \\ a(5,2) \\ \vdots \\ a(n-1,n-4) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} a(5,0) \\ a(6,1) \\ a(7,2) \\ \vdots \\ a(n-1,n-6) \end{pmatrix}$

et on termine par $\begin{pmatrix} a(n-2,0) \\ a(n-1,1) \end{pmatrix}$

5- On code ces étapes les unes après les autres :

```
def A(n):
    M=np.ones((n,n))
    for i in range(n):
        M[i,i]=0
    for j in range(2,n,2):
        for i in range(0,n-j):
            M[i,i+j]=3
    for i in range(1,n-1,2):
        for j in range(0,n-i):
            M[i+j,j]=3
    return M
```

On vérifie que la méthode est correcte par exemple pour $n = 9$: `print(A(9))`

```
[[ 0.  1.  3.  1.  3.  1.  3.  1.  3.]
 [ 3.  0.  1.  3.  1.  3.  1.  3.  1.]
 [ 1.  3.  0.  1.  3.  1.  3.  1.  3.]
 [ 3.  1.  3.  0.  1.  3.  1.  3.  1.]
 [ 1.  3.  1.  3.  0.  1.  3.  1.  3.]
 [ 3.  1.  3.  1.  3.  0.  1.  3.  1.]
 [ 1.  3.  1.  3.  1.  3.  0.  1.  3.]
 [ 3.  1.  3.  1.  3.  1.  3.  0.  1.]
 [ 1.  3.  1.  3.  1.  3.  1.  3.  0.]]
```

2-b) Lorsque n est impair, chaque ligne contient :
- une fois le nombre 0 (sur la diagonale)
- les $n-1$ autres coefficients se répartissent de manière égale en 1 et en 3.

La somme des coefficients d'une ligne est donc : $S = 1\times 0 + \frac{n-1}{2}\times 1 + \frac{n-1}{2}\times 3 = \frac{1}{2}((n-1)+3(n-1)) = 2n-2$

$\boxed{S = 2n - 2}$ Ce nombre ne dépend pas de la ligne considérée.

2-c) En posant $B = \frac{1}{S}A$, la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Cette relation est équivalente à l'égalité: $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ce qui montre que 1 est valeur propre de B, et que $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre 1.

Soit λ une valeur propre de A (complexe à priori) . Il existe $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $A.V = \lambda.V$

Soit i l'indice tel que $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |v_j| = |v_i|$

La i^e composante dans l'égalité $A.V = \lambda.V$ donne :

$a_{i,1}v_1 + a_{i,2}v_2 + \cdots + \underbrace{a_{i,i}}_{=0} v_i + \cdots + a_{i,n}v_n = \lambda v_i$

$\Longrightarrow\ a_{i,1}v_1 + a_{i,2}v_2 + \cdots + a_{i,i-1}v_{i-1} + a_{i,i+1}v_{i+1} + \cdots + a_{i,n}v_n = \lambda v_i$

$\Longrightarrow\ |\lambda v_i| = |a_{i,1}v_1 + a_{i,2}v_2 + \cdots + a_{i,i-1}v_{i-1} + a_{i,i+1}v_{i+1} + \cdots + a_{i,n}v_n|$

$\Longrightarrow\ |\lambda v_i| \leqslant a_{i,1}|v_1| + a_{i,2}|v_2| + \cdots + a_{i,i-1}|v_{i-1}| + a_{i,i+1}|v_{i+1}| + \cdots + a_{i,n}|v_n| \qquad (1)$

(les $a_{i,j},\ i \neq j$ sont tous > 0)

$\Longrightarrow\ |\lambda|.|v_i| \leqslant a_{i,1}|v_i| + a_{i,2}|v_i| + \cdots + a_{i,i-1}|v_i| + a_{i,i+1}|v_i| + \cdots + a_{i,n}|v_i| \quad (2)$ (pour tout j, $|v_j| \leqslant |v_i|$)

$\Longrightarrow\ |\lambda| \leqslant a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \cdots + a_{i,n} = 1 \qquad (3)$ (en simplifiant par $|v_i| > 0$)

Il ne peut y avoir égalité dans (3) que si il y a égalité dans (1) et dans (2).

Il n'y a égalité dans (1) que si les complexes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont positivement liés, et il n'y a égalité dans (2) que si tous les modules $|v_j|$ sont égaux. Les deux ne sont possibles que si $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$, c'est à dire si $V = v_1 W = v_i \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Or on a vu que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ était un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Si donc on suppose que $\lambda \neq 1$, on en déduit que $\boxed{|\lambda| < 1}$

2-d) On fait un calcul analogue à la question 1-b), pour aboutir à :

$\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = \frac{1}{n} J}$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

• Vérification avec python :

```
n=9
B=1/(2*n-2)*A(n)
print(B)
print(alg.matrix_power(B,5))
print(alg.matrix_power(B,10))
print(alg.matrix_power(B,20))
print(alg.matrix_power(B,50))
```

3.7 Centrale 689 (avec python):

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|$.

On définit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$

a) Montrer que F est un sous-espace affine de E. Est-ce un sous-espace vectoriel ?

b) Pour $f \in F$, on considère la fonction $T(f)$ définie par : $\begin{cases} \forall x \in [0, 1/3],\ T(f)(x) = \dfrac{f(3x)}{2} \\ \forall x \in]1/3, 2/3[,\ T(f)(x) = \dfrac{1}{2} \\ \forall x \in [2/3, 1],\ T(f)(x) = \dfrac{f(3x-2)+1}{2} \end{cases}$

b1) Ecrire un programme python `T(f,x)` qui prend en paramètre d'entrée une fonction $f \in F$, un réel $x \in [0,1]$, et qui retourne $T(f)(x)$

b2) On note $I = Id_{[0,1]}$. Tracer les graphes de I et de $T(I)$ sur une même figure.

C est la fonction $(t \mapsto t^3)$. Tracer les graphes de C et de $T(C)$ sur une même figure.

c) Montrer que T est une application de F dans lui-même.

Montrer que T est lipschitzienne pour un certain rapport $k < 1$.

SOLUTION : a) L'ensemble $G = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E. (non vide, stable par combinaison linéaire)

Mais F n'est pas un sous espace vectoriel de E. D'abord il ne contient pas le vecteur nul de E, à savoir la fonction nulle ω. Il n'est pas stable par addition : si f et g sont deux éléments de F, $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 \neq 1$. Il n'est pas stable par multiplication par un scalaire $\lambda \neq 1$: si $f \in G$, $\lambda f(1) = \lambda \neq 1$.

Cela fait plus de raisons qu'il n'en faut pour constater que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Considérons une fonction de F, par exemple la fonction I.

Alors, pour toute fonction f de E, $\quad f \in F \iff f - I \in G \quad$ (immédiat)

$$\iff \exists g \in G,\ f = g + I$$

On en conclut que F est le translaté du sous-espace vectoriel G par le vecteur $I \in E$. F est donc un sous espace affine de E, parallèle au sous-espace vectoriel G.

b1)
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def T(f,t):
    if (t>=0 and t<1/3):
        r=f(3*t)/2
    elif (t>=1/3 and t<=2/3):
        r=1/2
    else:
        r=(f(3*t-2)+1)/2
    return r
```

b2)
```
def I(t):
        return t

x=np.linspace(0,1,100)
y=[T(I,z) for z in x]
plt.clf()
plt.title('Fonction T')
plt.plot(x,x,'b',x,y,'r')
plt.legend(['Courbe $f$','Courbe $T(f)$'], loc='best')
plt.show()
```

Pour la fonction C on remplace dans le programme ci-dessus la définition de la fonction I par :
```
def C(t):
   return t**3
```

c) Rappelons que $\begin{cases} \forall x \in [0,1/3],\ T(f)(x) = \dfrac{f(3x)}{2} \\ \forall x \in]1/3, 2/3[,\ T(f)(x) = \dfrac{1}{2} \\ \forall x \in [2/3, 1],\ T(f)(x) = \dfrac{f(3x-2)+1}{2} \end{cases}$

La première formule montre que $\boxed{T(f)(0) = \frac{f(0)}{2} = 0}$, et le troisième que $\boxed{T(f)(1) = \dfrac{f(1)+1}{2} = 1}$

Par ailleurs, $T(f)$ est continue sur $[0, 1/3[$ d'après la première formule puisque f est continue.

$$\forall x \in [0,1/3],\ T(f)(x) = \frac{f(3x)}{2} \implies \lim_{x \to 1/3^-} T(f)(x) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \to 1/3^+} T(f)(x)$$

$T(f)$ est continue au point $1/3$. Elle est continue sur l'intervalle $]1/3, 2/3[$ car est constante sur cet intervalle.

Enfin, $\displaystyle\lim_{x \to 2/3^+} T(f)(x) = \lim_{x \to 2/3^+} \frac{f(3x-2)+1}{2} = \frac{f(0)+1}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \to 2/3^-} T(f)(x)$. Donc $T(f)$ est continue au point $2/3$, et est continue sur l'intervalle $]2/3, 1]$ d'après la troisième formule.

Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur le segment } [0,1]}$. Donc $\boxed{T(f) \in F}$

T est bien une application de F dans F.

• Soient $f, g \in F$, et $\|f\|$, $\|g\|$ leurs normes.

$$\forall x \in [0,1/3],\ |T(f)(x) - T(g)(x)| = \left|\frac{f(3x)}{2} - \frac{g(3x)}{2}\right| = \frac{1}{2}|f(3x) - g(3x)| \leqslant \frac{1}{2}\|f - g\|$$

$$\forall x \in [1/3, 2/3],\ |T(f)(x) - T(g)(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 0 \leqslant \frac{1}{2}\|f - g\|$$

$\forall x \in [2/3,1],\ |T(f)(x)-T(g)(x)| = \dfrac{1}{2}\,|f(3x-2)-g(3x-2)| \leqslant \dfrac{1}{2}\|f-g\|$

donc $\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)-T(g)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|$, ce qui montre que $\|T(f)-T(g)\| \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|$, c'est à dire que $\boxed{T \text{ est lipschitzienne, de rapport } \frac{1}{2}}$

3.8 Centrale 690 (avec python) * :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} X^k$

a) Tracer avec Python les représentations graphiques de P_n, pour $0 \leqslant n \leqslant 5$, sur le segment $[-2,2]$, en limitant les ordonnées entre 0 et 10.

b) Etudier le signe et les variations de la fonction polynomiale P_n.

c) Montrer que la fonction P_n présente un unique minimum en un point $a_n \in \mathbb{R}$.
Etudier la limite de la suite (a_n).

d) Etudier la limite de la suite (m_n) où $m_n = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} P_n(x)$.
Ilustrer le résultat trouvé sur le graphe des premiers polynômes P_n.

SOLUTION : a)
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def P0(t):
    return 1
def P1(t):
    return 1+t+t*t
def P2(t):
    return 1+t+t*t+t*t*t+t*t*t*t
def P3(t):
    return 1+t+t*t+t*t*t+t*t*t*t+t*t*t*t*t+t*t*t*t*t*t
def P4(t):
    return 1+t+t*t+t*t*t+t*t*t*t+t*t*t*t*t+t*t*t*t*t*t+t**7+t**8
def P5(t):
    return 1+t+t*t+t*t*t+t**4+t**5+t**6+t**7+t**8+t**9+t**10

x=np.linspace(-2,2,100)
plt.clf()
plt.title('Polynômes $P_n$')
plt.grid()
plt.plot(x,P1(x),'b',x,P2(x),'r',x,P3(x),'g',x,P4(x),'m',x,P5(x),'y')
plt.legend(['Courbe $P_1$','Courbe $P_2$','Courbe $P_3$','Courbe $P_4$','Courbe $P_5$'], loc='best')
plt.ylim(0,10)
plt.show()
```

b) $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} x^k = \dfrac{x^{2n+1}-1}{x-1}$

$$P_n'(x) = \frac{(2n+1)x^{2n}(x-1)-x^{2n+1}+1}{(x-1)^2} = \frac{2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1}{(x-1)^2} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$P_n'(x)$ est du signe de $N(x) = 2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ N'(x) = 2n(2n+1)x^{2n} - 2n(2n+1)x^{2n-1} = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1)$

On tracera successivement le tableau de signe de $N'(x)$, les variations puis le signe de $N(x)$, qui donne le signe de $P_n'(x)$, et les variation de $P_n(x)$

x	$-\infty$	-1	a_n		0		1		$+\infty$
$N'(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
$N(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-4n$	$\nearrow$		1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0		$+$		0	$+$	
$P_n(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$ m_n	$\nearrow$	1		$\nearrow$		

Ce tableau montre que la fonction P_n est minorée sur $\mathbb{R}$, et étant continue, admet un minimum en un point $a_n \in]-1,0[$

La décroissance stricte sur $]-\infty, a_n]$ et la croissance stricte sur $[a_n, +\infty[$ assurent l'unicité d'un tel minimum.

c) a_n est l'unique réel qui annule $P_n'(x)$ et aussi $N(x)$.

Donc $N(a_n) = 2na_n^{2n+1} - (2n+1)a_n^{2n} + 1 = 0 \implies a_n^{2n}(2n+1-2na_n) = 1$

Le tableau de variation montre que $-1 \leqslant a_n < 0$

$$\implies 0 < -a_n < 1$$
$$\implies 0 < -2na_n < 2n$$
$$\implies 2n+1 < 2n+1-2na_n < 4n+1$$
$$\implies \ln(2n+1) < \ln(2n+1-2na_n) < \ln(4n+1)$$

Or $\ln(2n+1) = \ln(2) + \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

et $\ln(4n+1) = \ln(4) + \ln\left(n+\frac{1}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

Donc par encadrement, $\ln(2n+1-2na_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

En reprenant l'égalité $a_n^{2n}(2n+1-2na_n) = 1$ et en prenant les logarithmes,

$\ln(a_n^{2n}) + \ln(2n+1-2na_n) = 0$

Il faut prendre garde que $a_n < 0$ et que $\ln(a_n)$ n'est pas défini. Par contre a_n^2 est positif, et son logarithme est défini : $n\ln(a_n^2) = -\ln(2n+1-2na_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$

donc $\ln(a_n^2) = \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ln n$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n^2) = 0$ et, par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 = 1$

Enfin, puisque $a_n < 0$, on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -1}$

d) $m_n = P_n(a_n) = \dfrac{a_n^{2n+1}-1}{a_n-1}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n^{2n+1}-1}{-2} = -\dfrac{1}{2}(a_n^{2n+1}-1)$

$a_n^{2n+1} = a_n \cdot a_n^{2n} = a_n\, e^{n\ln(a_n^2)}$ Or $\ln(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ln n \implies n\ln(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$

$\implies \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(a_n^2) = -\infty \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{2n+1} = 0$, et finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \dfrac{1}{2}}$

• On rajoute le graphe de la fonction constante $\frac{1}{2}$ sur le graphe déjà fait :

```
x=np.linspace(-2,2,100)
limite=[1/2 for z in x]
plt.clf()
plt.title('Polynômes $P_n$')
plt.grid()
plt.plot(x,P1(x),'b',x,P2(x),'r',x,P3(x),'g',x,P4(x),'m',x,P5(x),'y',x,limite,'c')
plt.legend(['Courbe $P_1$','Courbe $P_2$','Courbe $P_3$','Courbe $P_4$','Courbe $P_5$'], loc='best')
plt.ylim(0,10)
plt.show()
```

3.9 Centrale 694 (avec python):

On définit les suites (x_n) et (y_n) par les relations :

$$x_0 = y_0 = 0, \qquad \forall n \geqslant 0, \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{7-y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7+x_n} \end{array}\right.$$

a) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.

b) Avec Python, calculer les 10 premiers termes de chaque suite. Conjecturer le comportement de ces suites.

c) En supposant que ces suites convergent, calculer leurs limites.

d) Montrer la convergence de (x_n) et (y_n)

e) Montrer que (x_n) et (y_n) ne peuvent pas être monotones, même à partir d'un certain rang.

Donner un rang n_0 à partir duquel leurs limites sont approchées à 10^{-3} près.

SOLUTION : a) On établit par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$: x_n et y_n sont définis et $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x_n \leqslant 7 \\ 0 \leqslant y_n \leqslant 7 \end{array}\right.$

b)
```
import numpy as np

n=10
x,y=[0 for k in range(n+1)],[0 for k in range(n+1)]
for k in range(0,n):
```

```
    x[k+1]=np.sqrt(7-y[k])
    y[k+1]=np.sqrt(7+x[k])
print(x,y)
```

La lecture des valeurs approchées des 10 premiers termes de chaque suite donnent à penser que (x_n) converge vers 2, et (y_n) converge vers 3.

c) Supposons que ces suites convergent. Notons a et b respectivement leurs limites. En passant à la limite dans la relation $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7-y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7+x_n} \end{cases}$, on obtient : $\begin{cases} a = \sqrt{7-b} \\ b = \sqrt{7+a} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 7-b \\ b^2 = 7+a \end{cases}$ (en élevant au carré)

$\Longrightarrow a^2 - b^2 = -b - a$

$\Longrightarrow (a-b)(a+b) = -(a+b)$

$\Longrightarrow a - b = -1$ (on peut simplifier pas $a+b$ qui n'est pas nul car $a \geqslant 0$ et $b \geqslant \sqrt{7}$)

$\Longrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = 7-b \\ (a+1)^2 = 7+a \end{cases}$ (en reportant dans la première relation)

$\Longrightarrow \begin{cases} b^2 - b - 6 = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -2 \text{ ou } b = 3 \\ a = 2 \text{ ou } a = -3 \end{cases}$ et puisque $a = b-1$, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$,

il reste une unique solution : $a = 2$ et $b = 3$.

Conclusion : Si les suites (x_n) et (y_n) convergent, alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 3 \end{cases}$

d) Pour l'instant, **RIEN** n'a été prouvé quant à la convergence des suites (x_n) et (y_n) .

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 2 = \sqrt{7-y_n} - 2 = \dfrac{7-y_n-4}{\sqrt{7-y_n}+2} = \dfrac{3-y_n}{\sqrt{7-y_n}+2}$, donc $|x_{n+1}-2| = \dfrac{|3-y_n|}{\sqrt{7-y_n}+2} \leqslant \dfrac{1}{2}|y_n - 3|$

$y_{n+1} - 3 = \sqrt{7+x_n} - 3 = \dfrac{7+x_n-9}{\sqrt{7+x_n}+3} = \dfrac{x_n-2}{\sqrt{7+x_n}+3}$, donc $|y_{n+1}-3| \leqslant \dfrac{1}{3}|x_n-2|$

alors, $|x_{n+1}-2| \leqslant \frac{1}{2}|y_n-3| \leqslant \frac{1}{6}|x_{n-1}-2|$ et $|y_{n+1}-3| \leqslant \frac{1}{3}|x_n-2| \leqslant \frac{1}{6}|y_{n-1}-3|$

On en déduit que $|x_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{6^{n/2}}|x_0 - 2|$ si n est pair, et $|x_n-2| \leqslant \dfrac{1}{6^{\frac{n-1}{2}}}|x_1-2|$ si n est impair .

On déduit de ces deux majorations que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n-2| = 0$, c'est à dire, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2}$

Par une majoration analogue, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 3}$.

e) Remarquons que :

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{7-y_n} - \sqrt{7-y_{n-1}} = \dfrac{-y_n + y_{n-1}}{\sqrt{7-y_n}+\sqrt{7-y_{n-1}}}$ est du signe opposé de $y_n - y_{n-1}$ (1)

$y_{n+1} - y_n = \sqrt{7+x_n} - \sqrt{7+x_{n-1}} = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{7+x_n}+\sqrt{7+x_{n-1}}}$ est du même signe que $x_n - x_{n-1}$ (2)

Si, par exemple, la suite (x_n) était croissante à partir d'un rang n_0, on aurait : $\forall n > n_0,\ x_n - x_{n-1} > 0$, et donc $\forall n > n_0,\ y_{n+1} - y_n > 0$ d'après (2), et la suite (y_n) serait croisssante à partir du rang n_0.

Cela entraînerait d'après (1) que $x_{n+2} - x_{n+1} < 0$, ce qui est contradictoire avec la croissance de (x_n).

Raisonnement analogue en supposant que l'une ou l'autre de ces suites est monotone à partir d'un certain rang.

3.10 Centrale maths 1 - 2015 - sujet 1 *

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une partition de l'ensemble $[[1,n]] = \{1, 2, \cdots, n\}$ est la donnée d'un ensemble $\{U_1, \cdots, U_r\}$ de parties non vides de $[[1,n]]$, deux à deux disjointes, et dont la réunion forme $[[1,n]]$.

On note p_n le nombre de partitions de $[[1,n]]$.

1- Etant donnée une série entière $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, préciser les différents modes de convergence de la série sur l'intervalle ouvert de convergence.

2- Calculer p_1, p_2, p_3.

Montrer qu'en posant $p_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$

3- On définit la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{p_n}{n!} x^n$

a) Montrer que cette série entière a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

a) Calculer f sur $]-R, R[$

SOLUTION : 1- On sait qu'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge absolument et simplement en tout point de l'intervalle ouvert de convergence.

De plus elle converge normalement et uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$

2- p_1 compte le nombre de partitions d'un ensemble $E_1 = \{1\}$ qui n'a qu'un seul élément. Une seule partition est possible : $(\{1\})$. $\boxed{p_1 = 1}$.

- p_2 compte le nombre de partitions d'un ensemble $E_2 = \{1, 2\}$ qui a deux éléments.
Les partitions possibles sont : (E_2) et $(\{1\}, \{2\})$. $\boxed{p_2 = 2}$.

- p_3 compte le nombre de partitions d'un ensemble $E_3 = \{1, 2, 3\}$ qui a trois éléments.
Les partitions possibles sont : (E_3), $(\{1, 2\}, \{3\})$, $(\{1, 3\}, \{2\})$, $(\{2, 3\}, \{1\})$ et $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$.
$\boxed{p_3 = 5}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Considérons un ensemble $E_{n+1} = \{1, 2, ..., n, n + 1\}$ qui a $n + 1$ éléments.

Soit $\mathscr{P}$ une partition de E_{n+1}. L'élément $n+1$ appartient nécessairement à l'un des sous ensembles de cette partition :

- S'il appartient à une partie n'ayant qu'un élément, les autres sous ensembles de la partition forment une partition de $E_n = \{1, 2, ..., n\}$. Il y a donc p_n possibilités.

- S'il appartient à une partie ayant 2 éléments, celle ci est de la forme $\{n+1, k\}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ (n possibilités pour le choix de l'indice k), les autres sous-ensembles forment une partition de l'ensemble $\{1, 2, ..., k-1, k+1, n\}$, ce qui donne p_{n-1} possibilités distinctes.

Il y a donc $n \times p_{n-1}$ partitions de E_{n+1} dans laquelle $n + 1$ appartient à une partie ayant 2 éléments.

- plus généralement, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, comptons les partitions de E_{n+1} pour lesquelles $n + 1$ appartient à un sous ensemble à k éléments : il nous faut d'abord compléter $n + 1$ de façon à former un sous ensemble de E_{n+1} à k éléments. Pour cela on adjoindra à $n + 1$ un sous ensemble de $k - 1$ éléments de $E_n = \{1, 2, ..., n\}$. Cela donne $\binom{n}{k-1}$ possibilités pour le faire. Un tel sous ensemble à k éléments de E_{n+1} étant choisi, pour obtenir une partition de E_{n+1}, il faut compléter par une partition de l'ensemble à $n - k + 1$ éléments obtenu en retirant de E_{n+1} les éléments du sous ensemble à k éléments déja pris. cela donne p_{n+1-k} possibilités.

Il y a donc $\binom{n}{k-1} \times p_{n+1-k}$ partitions de E_{n+1} dans laquelle $n+1$ appartient à une partie ayant k éléments.

- le décompte se termine par celui des partitions de E_{n+1} dans lesquelles $n+1$ appartient à une partie ayant $n + 1$ éléments : il y en a une seule, qui est $(\{1, 2, ..., n, n + 1\})$.

- Au bilan final, $p_{n+1} = p_n + np_{n-1} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \times p_{n+1-k} + ... + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \times p_1 + \underbrace{1}_{=p_0}$

$$p_{n+1} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} p_n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} p_{n-1} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \times p_{n+1-k} + ... + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \times p_1 + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} p_0$$

donc $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_{n-k} = \sum_{h=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-h \end{pmatrix} p_h$ (par le changement $h = n - k$)

soit finalement : $\boxed{p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_k}$ (puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)

3- a) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n : p_n \leqslant n!$:

Le calcul de p_1, p_2, p_3 montre que cette propriété est vraie pour $n = 1, 2, 3$.

Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}$

$\Longrightarrow p_{n+1} \leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!}$ (par le changement $h = n - k$)

$\Longrightarrow p_{n+1} \leqslant n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.n! \leqslant (n + 1)n! = (n + 1)!$ (pour $n \geqslant 2$, on a : $n + 1 \geqslant 3 \geqslant e$)

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n \leqslant n!}$

- Alors, $\forall x \in]-1, 1[, \left| \frac{p_n}{n!} x^n \right| \leqslant |x|^n$, et par majoration par la série géométrique convergente $\sum |x|^n$, la série $\sum \frac{p_n}{n!} x^n$ converge absolument. On en déduit que $\boxed{\text{son rayon de convergence est } \geqslant 1}$.

3- b) Pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$

$\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$ et par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n$

Notons $c_n = \dfrac{p_{n+1}}{n!}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{p_{n+1}}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$ (d'après la question 1)

$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!}.\frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

La suite (c_n) apparait comme le produit de Cauchy des suites $(a_n) = \left(\frac{p_n}{n!}\right)$ et $(b_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)$.

La série $\sum a_n x^n = \sum \frac{p_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $R \geqslant 1$, et la série $\sum b_n x^n = \sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

D'après le théorème sur les séries entières produit, on peut écrire :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

$$\Longrightarrow\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = f(x)e^x$$

$$\boxed{\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = f(x)e^x}$$

• La fonction S est solution sur l'intervalle $]-R,R[$ de l'équation différentielle (E) : $y' - e^x y = 0$

La solution générale de cette équation est de la forme : $x \mapsto \lambda e^{\int e^x dx} = \lambda e^{e^x}$

S étant une solution de (E), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \lambda e^{e^x}$

Or $S(0) = p_0 = 1 = \lambda e^{e^0} = \lambda e$ donc $\lambda = \frac{1}{e} = e^{-1}$ et $\boxed{\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = e^{-1}e^{e^x} = e^{e^x - 1}}$

3.11 Centrale maths 1 - 2015 - sujet 2 *

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On se donne la variable $M\ :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$

On définit ensuite une variable aléatoire $X\ :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ comme suit :

- On fixe $\omega \in \Omega$
- On pose $n = M(\omega)$
- On lance une pièce parfaitement équilibrée n fois
- On note $X(\Omega)$ le nombre de "pile" obtenus.

1- Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $M = n_0$.

2- Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$

a) Déterminer le rayon R de la série entière qui définit $f(x)$.

b) Calculer $f(x)$ sur l'intervalle de convergence.

c) Déterminer la loi de X et reconnaître la loi de $X+1$.

SOLUTION : 1- La condition $M = n_0$ signifie que la pièce sera lancée n_0 fois. Il s'agit d'une expérience de Bernoulli, répétée n_0 fois, avec probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$ puisque le pièce est supposée équilibrée. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n_0, 1/2)$. (loi binomiale de paramètres n_0 et $1/2$)

Pour tout $k \leqslant n_0$, $P(X = k | M = n_0) = \binom{n_0}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0 - k} = \binom{n_0}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}$

2- a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $a_n = \dbinom{n}{k}$. Alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{\frac{(n+1)!}{k!\ (n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!\ (n-k)!}} = \dfrac{n+1}{n+1-k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n$ est donc $\boxed{R = \frac{1}{1} = 1}$

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^n$ (en simplifiant par $(n-k)!$)

Le terme $n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ est la k^e dérivée de la fonction $(x \mapsto x^n)$

En dérivant k fois l'égalité $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on obtient :

$$\sum_{n=0,1,\ldots,k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$ puis en multipliant chaque membre par x^k,

et en divisant pas $k!$: $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}}$

c) $M(\Omega) = \{1, 2, \cdots, \} = \mathbb{N}^*$ (loi géométrique), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(M = n) = p.q^{n-1}$

La famille $(M = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales, $\quad P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = k|M = n)P(M = n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(X = k|M = n)}_{=0 \ si \ n<k} P(M = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{P(X = k|M = n)}_{=\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^n}} \underbrace{P(M = n)}_{p.q^{n-1}}$$

(probabilités conditionnelles, valable seulement si $k \geqslant 1$)

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p.q^{n-1} = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{q}{2}\right)^n$

En appliquant la formule b) avec $x = \frac{q}{2}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{p}{q} \times \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{q}{2}\right)^{k+1}} = \frac{2p}{q} \times \frac{q^k}{(2-q)^{k+1}} \quad \text{(en multipliant haut et bas par } 2^{k+1}\text{)}$$

Or $q = 1 - p$ et $2 - q = 2 - 1 + p = 1 + p$, d'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{2p}{1-p} \times \frac{(1-p)^k}{(1+p)^{k+1}} = \frac{2p}{1-p^2} \times \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k}$$

• Pour $k = 0$, $P(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(X = 0|M = n)}_{=\frac{1}{2^n}} \underbrace{P(M = n)}_{p.q^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{pq^{n-1}}{2^n} = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^n$

$$P(X = 0) = \frac{p}{q} \times \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^n = \frac{p}{2} \times \frac{1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{p}{2-q} = \frac{p}{1+p} \qquad \boxed{P(X = 0) = \frac{p}{1+p}}$$

• **Vérification :** $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \frac{p}{1+p} + \frac{2p}{1-p^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \frac{p}{1+p} + \frac{2p}{1-p^2} \times \left(\frac{1-p}{1+p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \frac{p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2} \times \frac{1}{1-\frac{1-p}{1+p}} = \frac{p}{1+p} + \frac{2p}{1+p} \times \frac{1}{2p} = \frac{p}{1+p} + \frac{1}{1+p} = 1$$

• Soit $Z = X + 1$. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N},\ Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$P(Z = 1) = P(X + 1 = 1) = P(X = 0) = \frac{p}{1+p}$$

$$\forall k \geqslant 2,\ P(Z = k) = P(X = k - 1) = \frac{2p}{1-p^2} \times \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$$

La loi Z "ressemble" à une loi géométrique, mais n'en est pas une : en posant $q' = \frac{1-p}{1+p}$, de sorte qu'apparaisse le terme q'^{k-1}, $p' = 1 - q' = 1 - \frac{1-p}{1+p} = \frac{2p}{1+p} \neq \frac{2p}{1-p^2} = \frac{2p}{(1-p)(1+p)}$

3.12 Centrale maths 1 - 2015 - sujet 3

Soit $(A <,>)$ un espace euclidien. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E, et $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1- Construire un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui laisse invariant le plan d'équation $x_1+x_2 = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2- Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

3- Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = f$.

4- Soient $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$.

Montrer que $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$ et que $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

SOLUTION : 1- Recherchons un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^3$ qui laisse invariant le plan d'équation $x_1 + x_2 = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Sa matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & h \\ c & h & k \end{pmatrix}$

Soit $V \in \mathbb{R}^3$, de vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}_0$, et soit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de $f(V)$

Alors, $\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ y_2 = bx_1 + dx_2 + hx_3 \\ y_3 = cx_1 + hx_2 + kx_3 \end{cases} \qquad y_1 + y_2 = (a + b)x_1 + (b + d)x_2 + (c + h)x_3$

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x_1 + x_2 = 0$

Soit $V \in \mathscr{P}$. Alors $x_1 + x_2 = 0$, donc $y_1 + y_2 = ax_1 + b\underbrace{(x_1 + x_2)}_{=0} + dx_2 + (c+h)x_3$
$= (a-d)x_1 + (c+h)x_3$

Il suffit que $\left\{\begin{array}{l} a = d \\ h = -c \end{array}\right.$ pour que $y_1 + y_2 = 0$, c'est à dire pour que $f(V)$ appartienne à $\mathscr{P}$.

En conclusion, si la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ c & -c & k \end{pmatrix}$, alors le plan $\mathscr{P}$ est stable par f.

2- Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Puisque f est un endomorphisme symétrique, il est diagonalisable.
Notons $\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ son spectre.
On conviendra que $\lambda_0 = 0$ si 0 est valeur propre de f, et que $Sp(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ sinon.
Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $y = y_0 + y_1 + \cdots + y_p \in E$ tel que $x = f(y)$, où $y_i \in E_f(\lambda_i)$

$$x = \underbrace{f(y_0)}_{=0} + f(y_1) + \cdots + f(y_p) = \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} x_1 + \cdots + \underbrace{\lambda_p}_{\neq 0} x_p$$

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_p f(x_p) = \underbrace{\lambda_1^2 x_1}_{\in E_f(\lambda_1)} + \cdots + \underbrace{\lambda_p^2 x_p}_{\in E_f(\lambda_p)} = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1^2 x_1 = \lambda_2^2 x_2 = \cdots = \lambda_p^2 x_p = 0$ (car la somme $\bigoplus E_f(\lambda_i)$ est directe)
$\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$ (car pour $i \geqslant 1$, $\lambda_i \neq 0$)
$\Longrightarrow x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$

On a ainsi montré que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Les deux sous-espaces sont en somme directe.

Par la formule de Grassmann, $\dim(\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, et par le théorème du rang, $\dim(\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim E$. L'inclusion $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \subset E$ et l'égalité des dimensions permettent d'affirmer que $\boxed{\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E}$

3- Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ diagonale pour f : la matrice de f dans cette base est de la forme : $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Puisque $f \in \mathcal{S}^+(E)$, $\forall i, \lambda_1 \geqslant 0$.

Soit alors $h \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\Delta' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

h est bien un endomorphisme symétrique car sa matrice dans la BON $\mathscr{B}$ est symétrique. Il est bien positif puisque ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ sont positives ou nulles. Enfin, $h^2 = f$ puisque $\Delta'^2 = \Delta$.

4- Soient $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$.

a) $\forall x \in \ker(f) \cap \ker(g)$, $(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{=0} + \underbrace{g(x)}_{=0} = 0 + 0 = 0$, donc $\boxed{\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f+g)}$

b) Soit $x \in \ker(f+g)$. Alors $f(x) + g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = -g(x) \Longrightarrow < f(x), x > + < g(x), x >= 0$
Or si $f \in \mathcal{S}^+(E)$, f est diagonalisable dans une BON $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.
Tout $x \in E$ se décompose dans cette base : $\exists (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$
alors $< f(x), x >=< x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n), x_1 e_1 + \cdots, x_n e_n >$
$=< x_1 \lambda_1 e_1 + \cdots + x_n \lambda_n e_n, x_1 e_1 + \cdots, x_n e_n >$
$= \underbrace{\lambda_1}_{\geqslant 0} x_1^2 + \cdots + \underbrace{\lambda_n}_{\geqslant 0} x_n^2 \geqslant 0$

L'égalité $\underbrace{< f(x), x >}_{\geqslant 0} + \underbrace{< g(x), x >}_{\geqslant 0} = 0$ entraîne alors $< f(x), x >=< g(x), x >= 0$

A nouveau, en décomposant $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dans une BON $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ diagonale pour f, on obtient : $< f(x), x >= \underbrace{\lambda_1}_{>0} x_1^2 + \cdots + \underbrace{\lambda_n}_{>0} x_n^2 = 0$

qui entraîne que $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (en supposant que tous tes λ_i sont strictement positifs)
On a alors $x = \underbrace{x_1}_{=0} e_1 + \cdots + \underbrace{x_n}_{=0} e_n = 0$

Dans le cas où 0 est valeur propre, il reste éventuellement un terme de la forme $\lambda_0 x_0$, $x_0 \in E_f(0) = \ker(f)$. Mais puisque $(f+g)(x) = 0$ et que $f(x) = 0$, par différence on a aussi $g(x) = 0$, de sorte que $x \in \ker f \cap \ker g$

dans tous les cas, on a montré que $\boxed{\ker(f+g) \subset \ker(f) \cap \ker(g)}$
L'égalité s'obtient alors par double inclusion.

c) $\forall x \in \mathrm{Im}(f+g), \exists a \in E, x=(f+g)(a)=f(a)+g(a) \in \mathrm{Im} f+\mathrm{Im} g$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$

$\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$????????????????????

3.13 Centrale maths 1 - 2015 - sujet 4 *

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $p \in]0,1[$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Soient $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ définies par :

$$U=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad M=U(U^T)$$

1- Trouver les lois de probabilité de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$

2- Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

3- Dans cette question $n=2$.

On définit $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on note S la variable aléatoire $S=V^T.M.V$

Calculer la variance et l'espérance de S.

SOLUTION : 1- $M=U(U^T)=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.(X_1\, X_2\, \cdots\, X_n)=\begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & \cdots & X_2X_n \\ \vdots & & & \\ X_nX_1 & X_nX_2 & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}$ (*)

$$M=\left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1U & X_2U & \cdots & X_nU \end{array}\right)$$ (matrice écrite par blocs colonnes, X_i scalaire, U colonne)

$\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(X_1U, X_2U, \cdots, X_nU)$ (le rang d'une matrice est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes)

Toutes les colonnes de M étant colinéaires à la colonne U, le rang de M est :

- 0 si $M=0$
- 1 si $M \neq 0$

La variable aléatoire $R=\mathrm{rg}(M)$ suit donc une loi de bernoulli. (puisque $R(\Omega)=\{0,1\}$)

Si l'un des scalaires X_i n'est pas nul, alors le coefficient diagonal X_i^2 n'est pas nul, donc $M \neq 0$ et $R=\mathrm{rg}(M)=1$ .Si tous les scalaires X_i sont nuls, alors $M=0$ et $R=0$.

Ainsi, $(R=0)=(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap\cdots\cap(X_n=0)$ (égalité entre évènements)

d'où : $P(R=0)=\underbrace{P(X_1=0)}_{=1-p}\times P(X_2=0)\times\cdots\times\underbrace{P(X_n=0)}_{=1-p}$ (les X_i sont mutuellement indépendants)

Donc $\boxed{P(\mathrm{rg}(M)=0)=(1-p)^n}$ et $\boxed{P(\mathrm{rg}(M)=1)=1-(1-p)^n}$ ($R=\mathrm{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli)

$\boxed{\mathrm{rg}(M) \hookrightarrow \mathscr{B}(1-(1-p)^n)}$

- Puisque chaque X_i suit une loi de Bernoulli, $\forall \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) \in \{0,1\}$, et donc $X_i^2(\omega)=X_i(\omega)$

Donc $\forall i,\ X_i^2=X_i$ (égalité entre variables aléatoires, c'est à dire entre applications)

La calcul de M ci-dessus (*) montre que $\mathrm{tr}(M)=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2=X_1+X_2+\cdots+X_n$

Donc $\mathrm{tr}(M)=X_1+X_2+\cdots+X_n$

Chaque X_i prenant ces valeurs dans $\{0,1\}$, $\mathrm{tr}(M)$ compte exactement le nombre de X_i non nuls dans la somme $X_1+X_2+\cdots+X_n$, c'est à dire le nombre de succès dans les épreuves de Bermoulli deux à deux indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Donc $\boxed{\mathrm{tr}(M) \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$

tr suit une loi bibomiale de paramètres n et p.

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\cdots,n\},\ P(\mathrm{tr}(M)=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

2- M est une matrice de projection si et seulement si $M^2=M$

Or $M^2=U.(U^T).U.(U^T)=U.(U^T.U).U^T$

et $U^T.U=(X_1\, X_2\, \cdots\, X_n).\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n X_i^2=\sum_{i=1}^n X_i=\mathrm{tr}(M)$

(matrice $1-1$, assimilable à un scalaire)

donc $M^2 = U.(\text{tr}(M)).U^T = \text{tr}(M)U.U^T = \text{tr}(M).M$

d'où : M est une matrice de projection si et seulement si $\text{tr}(M).M = M$

$$\iff (\text{tr}(M)-1).M = 0 \iff \left\{\begin{array}{c}\text{tr}(M)=1\\ \text{ou}\\ M=0\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}P(M \text{ est une matrice de projection}) &= P[(\text{tr}(M)=1)\cup(M=0)]\\ &= P(\text{tr}(M)=1)+P(M=0) \quad \text{(évènements incompatibles)}\\ &= \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}+(1-p)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{P(M \text{ est une matrice de projection}) = (1-p)^{n-1}(pn+1-p)}$$

3- $S = V^T.M.V = V^T.U.U^T.V = (1\ \ 1).\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}.(X_1\ X_2).\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (X_1+X_2)^2$

$S = X_1^2+X_2^2+2X_1X_2 = X_1+X_2+2X_1X_2 \qquad (X_i^2 = X_i)$

d'où : $E(S) = E(X_1)+E(X_2)+2E(X_1X_2)$ (linéarité de l'espérance)

$= E(X_1)+E(X_2)+2E(X_1)E(X_2)$ (X_1 et X_2 sont indépendantes)

$= p+p+2p^2 = 2p(p+1)$ $\boxed{E(S) = 2p+2p^2}$

- $V(S) = E(S^2)-[E(S)]^2$

Compte tenu des égalités $X_i^2 = X_i$,

$S^2 = (X_1+X_2+2X_1X_2)^2 = X_1^2+X_2^2+4X_1^2X_2^2+2X_1X_2+4X_1^2X_2+4X_1X_2^2$

$= X_1+X_2+14X_1X_2$

$E(S^2) = E(X_1)+E(X_2)+14E(X_1X_2)$ (linéarité de l'espérance)

$= E(X_1)+E(X_2)+14E(X_1)E(X_2)$ (X_1 et X_2 sont indépendantes)

$= p+p+14p^2 = 2p+14p^2$

d'où : $V(S) = E(S^2)-[E(S)]^2 = 2p+14p^2-(2p+2p^2)^2$

$= 2p+14p^2-(4p^2+8p^3+4p^4)$ $\boxed{V(S) = 2p+10p^2-8p^3-4p^4}$

3.14 Centrale 2 Oral 2015-Sujet 1 (Algèbre) **

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice carrée $M(n)$ formée "en serpent" par les nombres $1, 2, 3, \cdots, n^2$.

Par exemple, $M(2) = \begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ $\quad M(3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&8&9\end{pmatrix}$ $\quad M(4) = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\8&7&6&5\\9&10&11&12\\16&15&14&13\end{pmatrix}$

1. Donner en `Python` ou en `Scilab` une fonction f telle que $f(n,i,j) = (M(n))_{i,j}$
2. Créer une fonction M d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ et revoyant $M(n)$. Tester pour $1 \leqslant n \leqslant 5$
3. Calculer le rang de $M(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Conjecturer la valeur de $\text{rg}(M(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et démontrer cette conjecture.
5. Définir une fonction permettant d'afficher la ligne brisée formée par les points de coordonnées $(k, \text{tr}(M(k)))$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$

   Tester pour $n = 10$, $n = 100$. Tester aussi pour $n = 1000$.
6. Afficher les 100 premières valeurs de $\dfrac{\text{tr}(M(n))}{n^3}$. Commenter.
7. Trouver un équivalent de $\text{tr}(M(n))$ quand $n \to +\infty$.
8. Trouver une expression pour $\text{tr}(M(n))$. (on pourra commencer par traiter le cas où n est pair)

SOLUTION : 1. Pour un entier n quelconque, la répartition des entiers en "serpent" s'effectue comme suit :

$M_{i,j}$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n-2$	$j=n-1$
$i=0$	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
$i=1$	$2n$	$2n-1$	$2n-2$	$\cdots$	$n+2$	$n+1$
$i=2$	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\cdots$	$3n-1$	$3n$
$i=3$	$4n$	$4n-1$	$4n-2$	$\cdots$	$3n+2$	$3n+1$
$i=4$	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$	$\cdots$	$5n-1$	$5n$
$i=5$	$6n$	$6n-1$	$6n-2$	$\cdots$	$5n+2$	$5n+1$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\cdots$	$\dots$	$\dots$
$i=2k$	$2kn+1$	$2kn+2$	$2kn+3$	$\cdots$	$(2k+1)n-1$	$(2k+1)n$
$i=2k+1$	$(2k+2)n$	$(2k+2)n-1$	$(2k+2)n-2$	$\cdots$	$(2k+1)n+2$	$(2k+1)n+1$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\cdots$	$\dots$	$\dots$

On observe que $M_{2k,j} = 2kn + j + 1$ et $M_{2k+1,j} = (2k+2)n - j$

ou de manière équivalente : $\begin{cases} M_{i,j} = in + j + 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ M_{i,j} = (i+1)n - j & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$

Ceci se traduit par le code python suivant :

```
def f(n,i,j):
    if i%2==0:
        r=i*n+j+1
    if i%2==1:
        r=(i+1)*n-j
    return r
```

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit une matrice $n - n$ emplie de zeros, puis on remplace tous les coefficients $M_{i,j}$ par `f(n,i,j)` :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import matplotlib.pyplot as plt

def M(n):
    Mat=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            Mat[i,j]=f(n,i,j)
    return Mat
```

3.
```
for k in range(1,15):
      print("rang de M",k,"=",alg.matrix_rank(M(k)))
```

4. On constate que $\text{rg}(M(1)) = 1$, et que $\forall n \geqslant 2,\ \text{rg}(M(n)) = 2$

Par exemple, pour $n = 4$, $M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$

Par les opérations $\begin{cases} C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \longleftarrow C_4 - C_1 \end{cases}$, $M(4)$ devient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 16 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Les colonnes C_2, C_3, C_3 sont colinéaires à C_2 . Donc $\text{rg}(M(4)) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$

Le même type de raisonnement se généralise à $M(n)$. Donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \text{rg}(M(n)) = 2}$

5. Tracé des points de coordonnées $(k, \text{tr}(M(k)))$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

```
n=100
X=np.linspace(1,n,n)
Y=[np.trace(M(int(k))) for k in X]
print(X)
print(Y)
plt.figure(1)
plt.clf
plt.plot(X,Y,'o')
plt.show()
```

Pour $n = 1000$, le calcul est trop long pour être mené à terme par Python.

6.
```
for n in range(1,101):
     print("n=",n,"trace/n3=",np.trace(M(n))/n**3)
```

Il semble que pour n pair, $\dfrac{\operatorname{tr}(M(n))}{n^3} = \dfrac{1}{2}$, et que plus généralement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{tr}(M(n))}{n^3}\right) = \frac{1}{2}$

7. Ce résultat entraînerait que $\quad \operatorname{tr}(M(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{2}$

8. Supposons n pair. Alors $\operatorname{tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} M[i,i]$

$\operatorname{tr}(M) = (M[0,0]+M[2,2]+M[4,4]+\cdots+M[n-2,n-2]) + (M[1,1]+M[3,3]+M[5,5]+\cdots+M[n-1,n-1])$

$\operatorname{tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} M[2i,2i] + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} M[2i+1,2i+1] = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (2i(n+1)+1) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} ((2i+2)n-(2i+1))$

Notons $p = \frac{n}{2}$ qui est entier puisque n est pair

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M) &= 2(n+1)\sum_{i=0}^{p-1} i + \sum_{i=0}^{p-1} 1 + \sum_{i=0}^{p-1} ((2n-2)i + (2n-1)) \\
&= 2(n+1)\times\frac{(p-1)p}{2} + p + (2n-2)\times\frac{(p-1)p}{2} + p(2n-1) \\
&= (n+1)(p-1)p + (n-1)(p-1)p + 2pn \\
&= 2np(p-1) + 2pn = 2np^2 = 2n\left(\tfrac{n}{2}\right)^2 = \tfrac{n^3}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, alors } \operatorname{tr}(M) = \dfrac{n^3}{2}}$

Calcul analogue si n est impair. Ces deux résultats permettent alors de prouver l'équivalence pressentie dans la question précédente.

3.15 Centrale 2 Oral 2015-Sujet 2 (Algèbre) * :

1. a) Importer la fonction `fsolve` du sous-module `optimize` du module `scipy`, puis entrer le code suivant et l'expliquer.

```
def f(x):
    return [2*x[0]**2+3*x[1] -11,3*x[0] -2*x[0]*x[1] -2]
sol1 = fsolve(f, [0,0])
sol2 = fsolve(f, [1,1])
sol3 = fsolve(f, [2,1])
print(sol1, sol2, sol3)
```

b) Dans cette question, on considère la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice S_1 symétrique réelle à valeurs propres positives, et une matrice orthogonale U_1 telles que $A_1 = U_1 S_1$.

Si les résultats obtenus sont des flottants on pourra les multiplier par la racine carrée d'un nombre premier inférieur à 10 pour obtenir des valeurs exactes.

2. Soit n un entier au moins égal à 2, et $A \in GL_n(\mathbb{R})$

a) Montrer qu'il existe un couple (U,S) où U est orthogonale et S symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $A = US$.

On pourra commencer par établir l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice D diagonale à coefficients stritement positifs telles que ${}^tP({}^tA.A)P = D^2$

b) En déduire que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe deux matrices orthogonales V et W et une matrice diagonale telles que $V.A.W = D$

c) Donner de telles matrices (V_1, W_1 et D_1) pour la matrice A_1 définie ci-dessus.

Pour chacune de ces matrices on donnera si possible les valeurs exactes et des valeurs décimales approchées raisonnables des coefficients.

SOLUTION : 1-

```
[in] def f(x):
         return [2*x[0]**2+3*x[1] -11,3*x[0] -2*x[0]*x[1] -2]
     sol1 = fsolve(f, [0,0])
     sol2 = fsolve(f, [1,1])
     sol3 = fsolve(f, [2,1])
     print(sol1, sol2, sol3)
[out] [-0.5  3.5] [ 2.  1.] [ 2.  1.]
```

Commentaire : Ce programme consiste en la résolution du système : $\left\{\begin{array}{l} 2x_0^2+3x_1-11=0 \\ 3x_0-2x_0x_1-2=0 \end{array}\right.$

aux inconnues $x[0]=x_0$ et $x[1]=x_1$

Le programme donne deux solutions : $(x_0,x_1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ et $(x_0,x_1)=(2,1)$

(il est immédiat de vérifier que ces deux couples sont bien solutions : $\left\{\begin{array}{l} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{7}{2}-\frac{22}{2}=0 \\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{2}-2=0 \end{array}\right.$)

L'aide en ligne nous apprend que cette résolution s'effectue suivant un algorithme approché, à partir d'une valeur initiale des inconnues x_0 et x_1, à l'image de la méthode de Newton. Suivant les valeurs initiales de cet algorithme, on peut obtenir des solutions différentes lorsqu'il en existe plusieurs.

Dans l'exemple étudié, ces valeurs initiales sont les couples $(0,0)$, $(1,1)$ ou $(2,1)$. On remarque que les deux derniers choix initiaux aboutissent au même résultat, à savoir le couple $(x_0,x_1)=(2,1)$, alors que le premier choix initial aboutit à une autre solution, le couple $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

b) $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Analyse : Soient S_1 une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives, et U_1 une matrice orthogonale telles que $A_1=U_1S_1$.

Alors ${}^tA_1.A_1={}^tS_1.\underbrace{{}^tU_1.U_1}_{=I_2}.S_1={}^tS_1.S_1=S_1^2$

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

[in] A=np.array([[1,1],[0,1]])
     S2=np.dot(np.transpose(A),A)
     print(S2)
[out] [[1 1]
       [1 2]]
```

En notant $S_1=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $S_1^2={}^tA_1.A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0^2+x_1^2 & x_0x_1+x_1x_2 \\ x_0x_1+x_1x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x_0^2+x_1^2=1 \\ x_0x_1+x_1x_2=1 \\ x_1^2+x_2^2=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x_0^2+x_1^2-1=0 \\ x_0x_1+x_1x_2-1=0 \\ x_1^2+x_2^2-2=0 \end{array}\right.$$

Résolvons ce système en adaptant la résolution de la première question, avec des conditions initiales différentes :

```
[1n] def equa(x):
         return [x[0]**2+x[1]**2-1, x[0]*x[1]+x[1]*x[2]-1,x[1]**2+x[2]**2-2]
     sol1 = fsolve(equa, [0,1,1])
     sol2 = fsolve(equa, [1,1,0])
     sol3 = fsolve(equa, [1,0,1])
     print(sol1, sol2, sol3)
[out] [0.  1.  1.] [  2.07792221e-14   1.00000000e+00   1.00000000e+00]
                   [ 0.89442719  0.4472136   1.34164079]
```

Les deux premières solutions fournies sont la même, $(x_0,x_1,x_2)=(0,1,1)$ compte tenu des approximations. Cela donne $S_1=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. S_1 est bien une matrice symétrique réelle, mais le produit de ses valeurs propres vaut $\det(S_1)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$. Donc une valeur propre est positive, l'autre négative.

Cette matrice $S_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne répond pas aux critères demandés.

La troisième solution `[ 0.89442719  0.4472136   1.34164079]` semble plus compliquée.

Suivant l'indication donnée dans le texte, multiplions ces flottants par "**la racine carrée d'un nombre premier inférieur à 10**" pour obtenir des valeurs exactes : dans l'intervalle donné, on multipliera successivement la solution trouvée par $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ pour voir si le résultat se simplifie :

```
[in] print(np.sqrt(3)*sol3)
     print(np.sqrt(5)*sol3)
     print(np.sqrt(7)*sol3)
[out] [1.54919334  0.77459667  2.32379001]
      [ 2.  1.  3.]
      [ 2.36643191  1.18321596  3.54964787]
```

Ce test montre que la 3^e solution vérifie : $\sqrt{5}\times(x_0,x_1,x_2)=(2,1,3)$, et donc que $(x_0,x_1,x_2)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

et que $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cette fois $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(S_1) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 0$ et $\lambda_1.\lambda_2 = \det(S_1) = \frac{6-1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 0$

Donc $\boxed{S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

• L'égalité $A_1 = U_1 S_1$ entraîne alors : $U_1 = A_1.(S_1)^{-1}$

Pour faire un calcul exact, on n'introduira le facteur $\sqrt{5}$ qu'en fin de calcul :

```
[in] S=np.array([[2,1],[1,3]])
     U=np.dot(A,alg.inv(S) )
     print('S=',S)
     print('U=',U)
[out] S = [[2 1]
           [1 3]]
      U = [[0.4  0.2]
           [-0.2  0.4]]
```

$$\boxed{U_1 = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

2. a) La matrice $S_2 = {}^tA.A$ est symétrique (immédiat), à valeurs propres strictement positives : en effet, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tA.A)$, $\exists V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tA.A.V = \lambda.V$.

alors, ${}^tV.{}^tA.A.V = {}^t(A.V).(A.V) = \|A.V\|^2 = \lambda.{}^tV.V = \lambda \underbrace{\|V\|^2}_{>0}$, donc $\lambda = \dfrac{\|A.V\|^2}{\|V\|^2} > 0$

Elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale :

$\exists P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\exists D_2$ diagonale, $S_2 = P.D_2.P^{-1} = P.D_2.{}^tP$, ce qui équivaut à écrire :

$D_2 = {}^tP.S_2.P = {}^tP.{}^tA.A.P$

D_2 est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (strictement, car D_2 est inversible puisque A l'est par hypothèse) : $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Soit alors $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, de sorte que $D^2 = D_2$

On a bien alors : $\boxed{{}^tP.{}^tA.A.P = D_2 = D^2}$

• Posons alors $S = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$. (de sorte que $S^2 = P.D^2.{}^tP = P.D_2.{}^tP = S_2$)

S est une matrice symétrique (immédiat), à valeurs propres strictement positives (car ce sont les valeurs propres de D)

Posons ensuite $U = A.S^{-1}$ (S est bien inversible car, ses valeurs propres étant strictement positives, 0 n'en n'est pas valeur propre). Par cette égalté, $\boxed{A = U.S}$.

Il reste à vérifier que U est bien une matrice orthogonale :

${}^tU.U = {}^t(A.S^{-1}).A.S^{-1} = ({}^tS)^{-1}\,{}^tA.A.S^{-1} = S^{-1}.\,{}^tA.A.S^{-1}$ (S est symétrique)

${}^tU.U = S^{-1}.\,S_2.S^{-1} = S^{-1}.\,S^2.S^{-1} = I_n$ Donc $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

Finalement, on a bien trouvé une matrice U orthogonale, une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telles que $\boxed{A = U.S}$.

b) Puisque $S = P.D.{}^tP$, $A = U.S = U.P.D.{}^tP$, donc $\underbrace{(UP)^{-1}}_{=V}.\,A.\underbrace{P}_{=W} = D$

et $V.A.W = D$ où $V = (UP)^{-1}$ et $W = P$ sont des matrices orthogonales (comme produit et inverse de matrices orthogonales)

c) On suit étape par étape le processus des questions 2.a) et 2.b) : (avec des vérifications au fur et à mesure)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A=np.array([[1,1],[0,1]])
S2=np.dot(np.transpose(A),A)
print("S2=",S2)
```

```
P=alg.eig(S2)[1]
print("verif0=",np.dot(P,np.transpose(P)))
print("P=",P)
D2=alg.inv(P).dot(S2).dot(P)
print("D2=",D2)

D=np.array([[np.sqrt(D2[0,0]),0],[0,np.sqrt(D2[1,1])]])
print("D=",D)
print(np.dot(D,D))
S=P.dot(D).dot(alg.inv(P))
print("S=",S)
print("Scarré=",np.dot(S,S))
U=np.dot(A,alg.inv(S))
Verif1=np.dot(U,np.transpose(U))
print("verif1=",Verif1)
print("verif2=",np.dot(U,S))

V=np.dot(U,P)
print("V=",V)
print("verif3=",np.dot(V,np.transpose(V)))
W=np.transpose(P)
print("W=",W)
print("verif4=",np.dot(W,np.transpose(W)))
```

On trouve finalement : $D_1 = \begin{pmatrix} 0.61803399 & 0 \\ 0 & 1.61803399 \end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix} -0.52573111 & -0.85065081 \\ 0.85065081 & -0.52573111 \end{pmatrix}$ $\quad W_1 = \begin{pmatrix} -0.85065081 & 0.52573111 \\ -0.52573111 & -0.85065081 \end{pmatrix}$

3.16 Centrale 2 Oral 2015-Sujet 3 (Analyse)

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

1. Avec le logiciel, créer un tableau b tel que pour tout $(i,j) \in [[0,12]]^2$ on ait : $\begin{cases} b_{i,j} = \dbinom{i}{j} & \text{si } j \leqslant i \\ b_{i,j} = 0 & \text{si } j > i \end{cases}$

2. On note $e = \exp(1)$, et pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\sum_k u_{n,k}$ est convergente.

On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ sa somme.

b) Calculer les valeurs exactes de A_0 et de A_1.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer A_{n+1} en fonction de $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$

d) En déduire les valeurs exactes de a_n pour $n \in [[0,12]]$

3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$

a) Montrer que cette série entière a un rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Pour tout $x \in]-R,R[$, on note : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$

b) Donner une représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène que l'on précisera.

d) En déduire une expression de $f(x)$ sans le signe de sommation, et une nouvelle représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

<u>**SOLUTION**</u> **:** 1. On commence par écrire une fonction `binom(n,p)` qui retourne $\dbinom{n}{p}$ si $p \leqslant n$ et 0 sinon.

On utilise la formule : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n}{1} \times \dfrac{n-1}{2} \times \dfrac{n-2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n-p+1}{p}$

On construit ensuite le tableau demandé en initilisant un tableau 13×13 rempli de zéros, puis en remplaçant $b_{i,j}$ lorsque $j \leqslant i$ par $\dbinom{i}{j}$

(pour cette formule, les quotients succcessifs sont bien des entiers)

```
import numpy as np
def binom(n,p):
    if p>n:
        resultat=0
    else:
        resultat=1
        for k in range(1,p+1):
            resultat=(resultat*(n-k+1))//k
    return resultat

b=np.zeros((12,12))
for i in range(12):
    for j in range(i+1):
        b[i,j]=binom(i,j)
print(b)
```

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \dfrac{(k+1)^n}{(k+1)!} \times \dfrac{k!}{k^n} = \dfrac{1}{k+1}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

D'après le critère de d'Alembert, on peut affirmer que la série à termes positifs $\sum_k u_{n,k}$ converge.

b) $\boxed{A_0 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$

$A_1 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \qquad \boxed{A_0 = A_1 = e}$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n+1,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!}$ (terme nul pour $k=0$)

$A_{n+1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+1)^{n+1}}{(h+1)!}$ (par le changement d'indice $k = h+1$)

$A_{n+1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+1)^n}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i\right)$ On a une somme de $n+1$ série, n étant fixe.

donc $A_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\binom{n}{i}\frac{h^i}{h!}\right) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h^i}{h!}\right)}_{A_i}$ (car $\binom{n}{i}$ ne dépend pas de k)

Finalement, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ A_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A_i}$.

d) La formule précédente, appliquée pour $n=1$ donne : $A_2 = \binom{1}{0}A_0 + \binom{1}{1}A_1 = e + e = 2e$

Pour =n=2, $A_3 = \binom{2}{0}A_0 + \binom{2}{1}A_1 + \binom{2}{2}A_2 = e + 2e + 2e = 5e$

Pour =n=3, $A_4 = \binom{3}{0}A_0 + \binom{3}{1}A_1 + \binom{3}{2}A_2 + \binom{3}{3}A_3 = e + 3e + 6e + 5e = 15e$

On constate que tous ces coefficients sont des multiples entiers de $e = \exp(1)$.

Mais si on souhaite faire le **calcul exact** avec Python jusqu'à A_{12} par la formule de récurrence précédente, Python ne nous fournira que des résultats **décimaux approchés** (en utilisant l'approximation $e \simeq 2.71828182846$), et pas des résultats exacts.

Pour remédier à ce problème, il suffit de mettre le réel e en facteur, et calculer les entiers qui donnent A_n comme un multiple de e. Ces entiers suivent la même relation de récurrence que les A_n, mais il faut partir des relations $A_0 = 1,\ A_1 = 1$ (et pas $A_0 = A_1 = e$)

```
A=[0 for k in range(13)]
A[0],A[1]=1,1

for n in range(1,12):
    for i in range(n+1):
        A[n+1]+=binom(n,i)*A[i]
print(A)
[out] [1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597]
```

Ce qui donne : $\boxed{A_0 = e,\ A_1 = e,\ A_2 = 2e,\ A_3 = 5e,\ A_4 = 15e,\ A_5 = 52e,\ A_6 = 203e,\ \cdots, A_{12} = 4213597e}$

3. a) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}x^n$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{A_n}{n!} \leqslant 1$.

Cette relation est vérifiée pour $n = 0, 1, 2$, d'après les caluls de la question précédente.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rand n.

Alors $\dfrac{A_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A_i = \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n}\dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}A_i = \dfrac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\dfrac{1}{(n-i)!}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\dfrac{A_i}{i\,!}}_{\leqslant 1}$

$$\frac{A_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{n+1}\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 1}_{\leqslant n+1} \leqslant 1$$

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{A_n}{n!} \leqslant 1}$

• Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\left|\dfrac{A_n}{n!}x^n\right| \leqslant |x|^n$ et la série $\sum x^n$ converge absolument (car $|x| < 1$)

Par majoration, la série entière $\sum \frac{A_n}{n!}x^n$ converge absolument pour tout x de module < 1. On en conclut que $\boxed{\text{son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1}}$.

b) ?????????????

c) $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n = \frac{A_0}{0!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (par décalage d'indice)

D'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A_i\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}A_i\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A_i\,x^i}{i!} \times \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}\right)$$

En notant $u_i = \dfrac{A_i\,x^i}{i!}$ et $v_j = \dfrac{x^j}{j!}$, on reconnait l'expression $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ qui est le terme général d'indice n du produit de Cauchy des suites (u_n) et (v_n).

Or la série $\displaystyle\sum_i \frac{A_i\,x^i}{i!}$ converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$, et a pour somme $f(x)$; la série $\displaystyle\sum_j \frac{x^j}{j!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, et a pour somme e^x.

D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, on peut affirmer que:

$$f'x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\ v_{n-i}\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} v_j\right) = f(x).e^x$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution sur l'intervalle }]-R, R[\text{ de l'équation différentielle } (E) :\quad y' - e^x\,y = 0}$

d) La solution générale de (E) est : $x \mapsto y(x) = \lambda \exp(\int e^x dx) = \lambda e^{(e^x)}$
La valeur au point 0 donne la relation : $f(0) = \frac{A_0}{0!} = e = \lambda e^1 = e$

donc $\lambda = 1$ et $\boxed{\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = e^{(e^x)}}$

3.17 Centrale 2 Oral 2015-Sujet 4 (Analyse) * :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction polynomiale $P_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{t^i}{i!}$ et on s'intéresse aux racines de ce polynôme

1.a) Donner à l'écran des représentations graphiques de P_n sur des intervalles adaptés pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Que constate-t-on quant aux racines réelles de P_n suivant l'entier n ?

b) Mettre en oeuvre la méthode de Newton (ou méthode de la tangente) pour la recherche d'une valeur décimale approchée d'une solution réelle de l'équation $P_n(t) = 0$.
Déterminer ainsi les éventuelles racines réelles de cette équation pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) Représenter toutes les racines complexes de P_n dans les cas où $n \in \{3, 5, 8, 15\}$

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_{2k} n'a pas de racine réelle et P_{2k+1} a une seule racine réelle, qu'on notera r_k.

d) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\quad -(2k+1) < r_k < -1$

e) Etudier la monotonie de la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

SOLUTION : 1-a) Pour les tracés, on fera plusieurs tentatives de façon à ce que les graphes ne soient pas trop écrasés.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def fact(n):
    f=1
    for k in range(1,n+1):
        f*=k
    return f

def P(n,t):
    S=1
    for i in range(1,n+1):
        S+=t**i/fact(i)
    return S

plt.figure(1)
plt.clf()
X=np.linspace(-5,2,101)
Y2=P(2,X)
Y3=P(3,X)
Y4=P(4,X)
Y5=P(5,X)
Y6=P(6,X)
Y7=P(7,X)
plt.grid()
plt.plot(X,Y2,X,Y3,X,Y4,X,Y5,X,Y6,X,Y7)
plt.legend(['n=2','n=2','n=4','n=5','n=6','n=7'], loc='best')
plt.ylim(-5, 5)
plt.show()
```

On constate que les polynômes d'indices pairs n'ont pas de racines réelles, et les ceux d'indices impairs semblent avoir une unique racine négative.

b) Voir le cours

c) On aura recours aux fonctions polynomiales de `numpy` et aux calculs sur les complexes. (voir l'aide "polynômes" et "Analyse numérique" disponibles pour les candidats sur le site du concours "centrale")

```
from numpy.polynomial import Polynomial as poly

def Ppoly(n):
    ListeCoef=[1/fact(k) for k in range(n+1)]
    return poly(ListeCoef)

Racines=Ppoly(15).roots()
X=[]
Y=[]
for k in range(len(Racines)):
    X.append(Racines[k].real)
    Y.append(Racines[k].imag)
plt.figure(2)
plt.clf
plt.plot(X,Y, color='r', linestyle='None',marker='o')
plt.grid()
plt.show()
```

2-a) D'après le théorème de d'Alembert Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, non constant, est scindé dans $\mathbb{C}$. Le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i\,!}$ est donc scindé dans $\mathbb{C}[X]$

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i\,!} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{X^i}{i\,!}, \text{ donc, en dérivant, } P_n'(X) = 0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i\,!} = P_{n-1}(X)$$

(par décalage d'indice)

Montrons que les racines de $P_n(X)$, dans $\mathbb{C}$, sont toutes simples.

Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit racine multiple de $P_n(X)$. Alors α est aussi racine de $P_n'(X) = P_{n-1}(X)$

donc $\begin{cases} 1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\alpha^n}{n!}=0 \\ \quad \text{et} \\ 1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}=0 \end{cases}$ et par différence, $\dfrac{\alpha^n}{n!}=0$, qui entraîne que $\alpha=0$

Donc seul 0 peut être racine multiple de $P_n(X)$. Mais $P_n(0)=1$. Donc $P_n(X)$ n'a aucune racine multiple. Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_n \text{ est scindé sur } \mathbb{C}, \text{ à racines simples.}}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+,\ P_n(x)=1+\underbrace{\dfrac{x}{1\,!}+\dfrac{x^2}{2\,!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}}_{\geqslant 0}\geqslant 1$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ P_n(x)\neq 0$. $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ P_n \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{R}_+.}$

c) Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $k=0$, $P_{2k}(X)=P_0(X)=1$ n'a pas de racine réelle.

Supposons désormais $k\geqslant 1$. Supposons que P_{2k} admette au moins une racine réelle. D'après la question précédente, les racines de P_{2k} sont nécessairement <0. P_{2k} est un polynôme de degré $2k$, il admet un nombre fini de racines. Soit α la plus grande de ces racines négatives de P_{2k} ; $P_{2k}(\alpha)=0$ et $\forall x\in]\alpha,+\infty[, P_{2k}(x)\neq 0$

alors $P'_{2k}(\alpha)=P_{2k-1}(\alpha)=\underbrace{P_{2k}(\alpha)}_{=0}-\underbrace{\dfrac{\alpha^{2k}}{(2k)!}}_{>0}<0$

Puisque $P'_{2k}(\alpha)<0$, la fonction P_{2k} est décroissante sur un voisinage α :

x	α
$P'_{2k}(x)$	$-$
$P_{2k}(x)$	$\searrow$ 0 $\searrow$

Donc il existe $\beta\in]\alpha,+\infty[, P_{2k}(\beta)<P_{2k}(\alpha)=0$

Puisque l'indice dominant est pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k}(x)=+\infty$.

Les trois conditions : $P_{2k}(\beta)<0$, $\lim\limits_{+\infty} P_{2k}=+\infty$, et la continuité de la fonction polynôme P_{2k} entraînent par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $\gamma\in]\beta,+\infty[$ tel que $P_{2k}(\gamma)=0$

Cela contredit le caractère maximal de la racine α.

On a ainsi prouvé par l'absurde que $\boxed{\text{le polynôme } P_{2k}(X) \text{ n'admet pas de racine réelle}}$.

• Puisque P_{2k} n'a pas de racine réelle, il garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, par exemple, celui de $P_{2k}(0)=1$.

D'après la question qui précède, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P_{2k+1}(x)=P_{2k}(x)>0$

La fonction P_{2k+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc injective, et s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Mais le degré dominant du polynôme est impair, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2k+1}(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2k+1}(x)=+\infty$.

Puisque la fonction P_{2k+1} prend des valeurs positives et des valeurs négatives, étant continue, elle s'annule quelque part sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Donc $\boxed{P_{2k+1} \text{ admet une et une seule racine réelle}}$.

d) La calcul de $P_{2k+1}(-1)$ peut se faire en regroupant les termes deux par deux :

$$P_{2k+1}(-1)=\underbrace{1-\frac{1}{1}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}_{>0}+\underbrace{\frac{1}{24}-\frac{1}{120}}_{>0}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}}_{>0}>0$$

Dans la somme $P_{2k+1}(-(2k+1))=\displaystyle\sum_{p=0}^{2k+1}\frac{(-2k-1)^p}{p!}$, en regroupant chaque terme d'indice pair avec son suivant, on obtient :

$$\frac{(-2k-1)^{2p}}{(2p)!}+\frac{(-2k-1)^{2p+1}}{(2p+1)!}=\frac{(2k+1)^{2p}}{(2p)!}-\frac{(2k+1)^{2p+1}}{(2p+1)!}=\frac{(2k+1)^{2p}}{(2p)!}\underbrace{\left[1-\frac{2k+1}{2p+1}\right]}_{<0} \quad (\text{car } 2p+1\leqslant 2k+1)$$

par sommation, $P_{2k+1}(-(2k+1))<0$.

Les deux conditions : $P_{2k+1}(-(2k+1))<0$, $P_{2k+1}(-1)>0$ et la continuité de la fonction P_{2k+1} entraînent par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'une racine de P_{2k+1} sur l'intervalle $]-(2k+1),-1[$. Or P_{2k+1} n'admet qu'une racine, r_k sur $\mathbb{R}$, c'est donc elle. Donc $\boxed{r_k\in]-(2k+1),-1[}$

e) $P_{2k+3}(r_k)=\underbrace{P_{2k+1}(r_k)}_{=0}+\dfrac{r_k^{2k+2}}{(2k+2)!}+\dfrac{r_k^{2k+3}}{(2k+3)!}=\dfrac{r_k^{2k+2}}{(2k+2)!}\left[1+\dfrac{r_k}{2k+3}\right]$

or $1+\dfrac{r_k}{2k+3}>0$ car $-(2k+3)<-(2k+1)<r_k<0)$

donc $P_{2k+3}(r_k)>0=P_{2k+3}(r_{k+1})$, et puisque la fonction P_{2k+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $r_k<r_{k+1}$. $\boxed{\text{La suite } (r_k) \text{ est donc décroissante}}$

3.18 Centrale 2 Oral 2015-Sujet 6 (Probabilités) *

Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \cdots, U_n$. Pour tout $j \in [[0,n]]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une successsion de tirages d'une boule avec remise selon le procédé suivant :

– au premier tirage, on tire une boule de l'urne U_n.

– à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule j ($j \in [[0,n]]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j.

– on continue alors les tirages avec la même règle : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k^e tirage et on note le numero j de la boule tirée. Le $(k+1)^e$ tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numero tiré lors du k^e tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.

Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k=0) \\ P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ \vdots \\ P(X_k=n) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k.

1. a) La matrice A est elle diagonalisable ?

b) Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite B dont on précisera brièvement la nature géométrique.

c) Ecrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.

d) En utilisant la fonction `linalg.eig` du module `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

2. Ecrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages. (on pourra utiliser la fonction `randint` du module `random` de Python)

Tester plusieurs fois avec $n = 10$, $n = 100$, $n = 100$ et $k = 50$.

3. a) Pour tout $j \in [[0,n]]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains nombres $P(X = i)$ pour i dans $[[0,n]]$

b) En déduire la relation : $W_{k+1} = A.W_k$ puis une expression de W_k en fonction de A et de W_0.

c) Ecrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n, qui engendre le vecteur W_0, calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.

Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$

4. a) Déterminer la matrice $C \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $C.W_k = E(X_k)$.

b) Calculer le produit $C.A$ en fonction de C.

c) pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et de n.

Ce résultat est il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?

SOLUTION : 1.a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$ est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n+1}$

A, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, possède n valeurs propre distinctes dans $\mathbb{R}$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) A est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P.\Delta.P^{-1}$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P.\Delta^k.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 1^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \end{pmatrix}.P^{-1}$, et par continuité du produit matriciel, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} = B}$

On remarque que

$$B^2 = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}.P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^2.P^{-1}$$

$$= P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} = B \qquad \boxed{\text{Donc } B \text{ est une matrice de projection}}\ .$$

c)
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def matriceA(n):
    M=np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n+1):
        for j in range(i,n+1):
            M[i,j] = 1/(j+1)
    return M
```

d)
```
import numpy.linalg as alg

n=9
EP=alg.eig(matrice(n))
print("EP=",EP)
print("EP1=",EP[1])
V1=[EP[1][k][0] for k in range(n)]
print("V1=",V1)
```

On remarque, et on vérifie immédiatement par le calcul, qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Puisque $\text{rg}(A - I_n) = n-1$, ($n-1$ lignes échelonnées non nulles) la dimension de $E_A(1)$ est $n-(n-1) = 1$.

$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite Vect}(V_1)}$

2.
```
def tirages(k,n):

    X=[0 for x in range(k+1)]
    X[0]=n
    for i in range(0,k):
        X[i+1]=rd.randint(0,X[i]+1)
    return(X)
```

On teste la fonction :
```
print(tirages(30,10))
print(tirages(30,100))
print(tirages(30,1000))
```

3.a) Soit $j \in [[0, n]]$

$$(X_{k+1} = j) = [(X_{k+1} = j) \cap (X_k = j)] \cup [(X_{k+1} = j) \cap (X_k = j+1)] \cup [(X_{k+1} = j) \cap (X_k = j+2)] \cup \cdots$$
$$\cdots \cup [(X_{k+1} = j) \cap (X_k = n)]$$

Car $(X_{k+1}=j)$, c'est à dire le $(k+1)^e$ a sorti le numero j n'est possible que s'il s'effectuait dans une urne $U_k,\ k\geqslant j$, pour qu'elle contienne bien une boule numérotée j.

alors $P(X_{k+1}=j)=P[(X_{k+1}=j)\cap(X_k=j)]+P[(X_{k+1}=j)\cap(X_k=j+1)]+\cdots+P[(X_{k+1}=j)\cap(X_k=n)]$ (évènements incompatibles)

$$P(X_{k+1}=j)=P[(X_{k+1}=j)|(X_k=j)]P(X_k=j)+P[(X_{k+1}=j)|(X_k=j+1)]P(X_k=j+1)+\cdots$$
$$\cdots+P[(X_{k+1}=j)|(X_k=n)]P(X_k=n) \quad \text{(probabilités conditionnelles)}$$

$$P(X_{k+1}=j)=\sum_{i=j}^{n}P[(X_{k+1}=j)|(X_k=i)]P(X_k=i)$$

$(X_{k+1}=j)|(X_k=i)$ est l'évènement par lequel le $(k+1)^e$ tirage donne j sachant que le k^e tirage a donné i. Cela signifie que l'on a tiré une boule dans l'urne d'indice i, qui contient $i+1$ boules. La probabilité que le numero j sorte est donc $\frac{1}{i+1}$ (il y a $i+1$ boules dans l'urne U_i)

donc $\boxed{P(X_{k+1}=j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i+1}P(X_k=i)}$

b) Considérons le produit $A.W_k=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13&\cdots&\frac{1}{n+1}\\0&\frac12&\frac13&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&0&\frac13&\ddots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\frac{1}{n+1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P(X_k=0)\\P(X_k=1)\\P(X_k=2)\\\vdots\\P(X_k=n)\end{pmatrix}$

La ligne d'indice j de cette matrice colonne est :

$$l_j=0\times P(X_k=0)+0\times P(X_k=1)+0\times P(X_k=2)+\cdots+\tfrac{1}{j+1}P(X_k=j)+\cdots+\tfrac{1}{n+1}P(X_k=n)$$

$$l_j=\frac{1}{j+1}P(X_k=j)+\cdots+\frac{1}{n+1}P(X_k=n)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i+1}P(X_k=i)=P(X_{k+1}=j)$$

Donc pour tout j, la ligne d'indice j de la matrice colonne $A.W_k$ est la ligne d'indice j de la matrice W_{k+1}.

donc $\boxed{W_{k+1}=A.W_k}$

Il s'en suit par une récurrence immédiate que $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ W_k=A^kW_0}$

c)
```
def W(k,n):
    A=matriceA(n)
    VV0=np.array([[0] for x in range(n)]+[[1]])
    return np.dot(alg.matrix_power(A,k),VV0)

print(W(20,10))
print(W(20,100))
```

4.a) $X_k(\Omega)=[[0,n]]$

$$E(X_k)=\sum_{j=0}^{n}jP(X_k=j)=(0\ ,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots,n)\times\begin{pmatrix}P(X_k=0)\\P(X_k=1)\\P(X_k=2)\\\vdots\\P(X_k=n)\end{pmatrix}=C\times W_k$$

avec $C=(0\ ,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots,n)\in\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$

b) $C.A=(0\ ,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots,n)\times\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13&\cdots&\frac{1}{n+1}\\0&\frac12&\frac13&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&0&\frac13&\ddots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\frac{1}{n+1}\end{pmatrix}=\left(0,\frac12,\frac{1+2}{3},\frac{1+2+3}{4},\cdots,\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+1}\right)$

or $\dfrac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2(k+1)}=\dfrac{k}{2}$, donc $C.A=\left(0,\frac12,\frac22,\frac32,\cdots,\frac n2\right)=\frac12C$ $\boxed{C.A=\dfrac12\ C}$

c) $E(X_{k+1})=C\ .\ W_{k+1}=C.A.W_k$ (d'après la question 4.a)

$=\frac12\ C.W_k=\frac12E(X_k)$ (car $C.A=\frac12\ C$) $\boxed{E(X_{k+1})=\frac12E(X_k)}$

d) $W_0=\begin{pmatrix}P(X_0=0)\\P(X_0=1)\\\vdots\\P(X_0=n-1)\\P(X_0=n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ (car $X_0=n$)

Par récurrence immédiate, l'égalité $E(X_{k+1})=\frac12E(X_k)$ entraîne que $E(X_k)=\frac{1}{2^k}E(X_0)$

$$E(X_k) = \frac{1}{2^k}E(X_0) = \frac{1}{2^k}E(X_0) = \frac{1}{2^k}C.W_0 = \frac{1}{2^k}(0\ ,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots, n) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{n}{2^k}$$

$$\boxed{E(X_k) = \frac{n}{2^k}}$$

4 X - ENS -

4.1 ENS Cachan - G.R.

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $d \in [[1, n]]$, $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ une famille libre de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\text{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_d)$

On définit : $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_d) = |\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_d)|$

On définit $X = \{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mu(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_d)) = \mu(x_1, x_2, \cdots, x_d)\}$

1) Justifier le bien fondé de la définition de μ (i.e. μ est indépendant de la BON choisie)

2) Montrer que les éléments de X sont inversibles.

3) Montrer que X contient les isométries vectorielles.

4) Trouver toutes les symétries de X pour $d \in [[1, n-1]]$

5) Montrer que X est l'ensemble des isométries vectorielles. (pour $d \in [[1, n-1]]$?????)

4.2 X - ENS - 287 :

On considère la suite de fonctions (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)}$

a) Etudier le domaine de définition et la continuité de U_n.

Montrer que $\forall n \geqslant 2, \forall x,\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$.

En déduire que U_n est une fonction polynomiale, dont on précisera le degré. On notera $U_n(X)$ le polynôme associé. Calculer $U_0(X)$ et $U_1(X)$.

SOLUTION : La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$.

$\sin(\text{Arccos}x)$ et $\sin((n+1)\text{Arccos}x)$ sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$

$\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}x \in]0, \pi[$, donc $\sin(\text{Arccos}x) \neq 0$ et $U_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)}$ est défini.

Pour $x = \pm 1$, $\text{Arccos}(x) \in \{0, \pi\}$, $\sin(\text{Arccos}x) = 0$ et $U_n(x)$ n'est pas défini.

Donc U_n est définie et continue (comme quotient de deux fonctions continues) sur $]-1, 1[$

• $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = \dfrac{\sin((n+1)\text{Arccos}x) + \sin((n-1)\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)}$

$$= \frac{\sin(n\text{Arccos}x)\cos(\text{Arccos}x) + \cos(n\text{Arccos}x)\sin(\text{Arccos}x))}{\sin(\text{Arccos}x)}$$

$$+ \frac{\sin(n\text{Arccos}x)\cos(\text{Arccos}x) - \cos(n(\text{Arccos}x))\sin(\text{Arccos}x))}{\sin(\text{Arccos}x)}$$

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2\frac{\sin(n\text{Arccos}x)\cos(\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)} = 2x\frac{\sin(n\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)} = 2xU_n(x)$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[,\ U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x)}$

• $\forall x \in]-1, 1[, U_0(x) = \dfrac{\sin(\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)} = 1, \quad U_1(x) = \dfrac{\sin(2\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)} = 2\dfrac{\sin(\text{Arccos}x)\cos(\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)} = 2x$

Ce qui montre que U_0 et U_1 sont des fonctions polynomiales et que $\boxed{U_0(X) = 1,\ \ U_1(X) = 2X}$

La relation $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ permet alors de montrer par récurrence que chaque fonction U_n est un fonction polynomiale, dont le terme de degré dominant est $2^n X^n$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[,$ $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2x \end{vmatrix}_n = U_n(x)$

En développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2x \end{vmatrix}_n = 2x \begin{vmatrix} 2x & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2x & -1 \\ 0 & \ldots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{n-1} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2x & -1 \\ 0 & \ldots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant le dernier déterminant suivant la première ligne, on obtient finalement : $\Delta_n = 2x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

Par ailleurs, $U_0(X) = 1,\ \ U_1(X) = 2X,\ \ U_2(X) = 2XU_1(X) - U_0(X) = 4X^2 - 1$

$$\Delta_1 = |2x|_1 = 2x,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2x \end{vmatrix}_2 = 4x^2 - 1$$

La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence linéaire à deux pas que la suite $(U_n(x))_{n\geqslant 0}$, et les mêmes conditions initiales : $\left\{\begin{array}{l} \Delta_1 = U_1(x) \\ \Delta_2 = U_2(x) \end{array}\right.$

Par une récurrence sans difficulté, on en déduit alors que $\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x \in]-1,1[,\ \Delta_n = U_n(x)}$

c) On munit l'espace $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx$ et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

Calculer $\langle U_n, U_m\rangle$ pour $m, n \in \mathbb{N}$

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \langle U_n, U_m\rangle = \int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sin((n+1)\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)}\frac{\sin((m+1)\text{Arccos}x)}{\sin(\text{Arccos}x)}\sqrt{1-x^2}dx$$

On sait que $\forall x \in [-1,1], \sin(\text{Arccos}x) = \sqrt{1-x^2}$,

donc $\langle U_n, U_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin((n+1)\text{Arccos}x)\sin((m+1)\text{Arccos}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Par le changement de variable $\theta = \text{Arccos}(x),\ x = \cos\theta,\ dx = -\sin\theta d\theta$

$$\langle U_n, U_m\rangle = \int_{\pi}^{0} \frac{\sin((n+1)\theta)\sin((m+1)\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \sin((n+1)\theta)\sin((m+1)\theta)d\theta$$

Les relations $\left\{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array}\right.$ donnent par différence :

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

d'où : $\langle U_n, U_m\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin((n+1)\theta)\sin((m+1)\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta) - \sin((m+n+2)\theta)d\theta$

- Si $n = m$, $\langle U_n, U_n\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} 1 - \sin((2n+2)\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$
- Si $n \neq m$, $\langle U_n, U_m\rangle = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} - \dfrac{\sin((n+m+2)\theta)}{n+m+2}\right]_0^{\pi} = 0$

d) Déterminer pour la norme $\|\ \|$ la meilleure approximation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ par un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Le système de vecteurs $(V_0, V_1, V_2) = \left(\frac{U_0}{\|U_0\|}, \frac{U_1}{\|U1\|}, \frac{U_2}{\|U_2\|}\right)$ forme une base orthonormale de $F_2 = \mathbb{R}_2[X]$.

On sait que $\inf\limits_{g\in F_2} \|f-g\| = \|f - p(f)\|$ où $p(f)$ est le projeté orthogonal de f sur F_2 , et que :

$$p(f) = < V_1, f > V_1 + < V_2, f > V_2 + < V_2, f > V_2$$
$$= \left\langle \tfrac{U_0}{\|U0\|}, f\right\rangle \tfrac{U_0}{\|U0\|} + \left\langle \tfrac{U_1}{\|U1\|}, f\right\rangle \tfrac{U_1}{\|U1\|} + \left\langle \tfrac{U_2}{\|U2\|}, f\right\rangle \tfrac{U_2}{\|U2\|}$$
$$= \tfrac{1}{\|U0\|^2}\langle U_0, f\rangle U_0 + \tfrac{1}{\|U_1\|^2}\langle U_1, f\rangle U_1 + \tfrac{1}{\|U_2\|^2}\langle U_2, f\rangle U_2$$

Or $\|U_0\|^2 = < U_0, U_0 > = \|U_1\|^2 = \|U_2\|^2 = \frac{\pi}{2}$

$$< U_0, f > = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$< U_1, f > = \int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx = 0 \quad \text{(fonction impaire)}$$

$$< U_2, f > = \int_{-1}^{1}(4x^2-1)(1-x^2)dx = \int_{-1}^{1}(-4x^4+5x^2-1)dx = \left[-\frac{4}{5}+\frac{5}{3}-1\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{15}$$

$$p(f) = \tfrac{1}{\|U0\|^2}\langle U_0, f\rangle U_0 + \tfrac{1}{\|U_1\|^2}\langle U_1, f\rangle U_1 + \tfrac{1}{\|U_2\|^2}\langle U_2, f\rangle U_2$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{3}U_0 + 0\times U_1 - \frac{4}{15}U_2\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{15}(4X^2-1)\right)$$

La meilleure approximation de la fonction f, au sens de la norme $\|\ \|$, par un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ est $p(f) = \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{16}{15}X^2 + \dfrac{8}{5}\right)$

4.3 ENS 295 *

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$

1- Déterminer le domaine de définition (réel) de f.

2- Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

3- Trouver un équivalent de f en 0.

4- Montrer que le graphe de f admet pour axe de symétrie la droite Δ d'équation : $x = 1/2$.

5- Déterminer la borne inférieure de f.

SOLUTION : 1- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$ (elle est même définie et continue sur $[0, +\infty[$ si $x \leqslant 0$)

$\dfrac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$, donc g_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x < 1$

$\dfrac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$, donc g_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $1 + x > 1 \iff x > 0$

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f =]0, 1[}$

4- Par le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{1}{u^2}du$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \int_{+\infty}^0 \frac{-u^x du}{u^2(1+\frac{1}{u})} = \int_0^{+\infty} \frac{u^x du}{u(u+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(u+1)} = f(1-x)$$

On en conclut que $\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet pour axe de symétrie la droite } \Delta \text{ d'équation : } x = 1/2}$.

2- Notons H la fonction $\begin{cases}]0,1[\times]0,+\infty[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto \quad \dfrac{1}{t^x(1+t)} = \dfrac{e^{-x\ln t}}{1+t} \end{cases}$

• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x, t)$ est continue sur $]0, 1[$.

• Soit $[a, b]$ un segment quelconque, inclus dans le domaine $]0, 1[$.

$\forall x \in [a, b],\ < a \leqslant x \leqslant b < 1$

$\forall t \in]0, 1],\ \ln(t) \leqslant 0 \implies b\ln(t) \leqslant x\ln(t) \leqslant a\ln(t)$

$$\implies 0 \leqslant \frac{e^{-a\ln t}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-x\ln t}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-b\ln t}}{1+t} = \frac{1}{t^b(1+t)}$$

$\forall t \in [1, +\infty[,\ \ln(t) \geqslant 0 \implies a\ln(t) \leqslant x\ln(t) \leqslant b\ln(t)$

$$\implies 0 \leqslant \frac{e^{-b\ln t}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-x\ln t}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-a\ln t}}{1+t} = \frac{1}{t^a(1+t)}$$

Soit φ la fonction définie par : $\begin{cases} \forall t \in]0,1],\ \varphi(t) = \frac{1}{t^b(1+t)} \\ \forall t \in [1, +\infty[,\ \varphi(t) = \frac{1}{t^a(1+t)} \end{cases}$

φ est bien intégrable sur $]0, 1]$ car $b < 1$, et intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $a > 0$, donc intégrable sur $]0, +\infty[$

• D'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (th. de continuité sous le signe $\int$), on peut affirmer que f est continue sur le segment $[a, b]$.

Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b] \subset]0, 1[$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est continue sur }]0,1[}$

3. $\forall x \in]0, 1[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

Intuitivement, quand $x \to 0$, on peut penser que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$ va tendre vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ va "tendre vers" l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$ qui est "infinie" (intégrale divergente)

L'équivalent d'une somme d'un terme borné et d'un terme qui tend vers $+\infty$ est donné par le terme qui tend vers l'infini. On peut donc penser que $f(x)$ sera équivalent à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ quand $x \to +\infty$. Ce qui précède n'est pas une preuve, mais une explication de la démarche qui suit :

• Posons donc : $\forall x > 0,\ h(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ quand $x \to +\infty$.

Cette intégrale est bien définie pour tout $x > 0$ (immédiat).

$$\forall x > 0,\ h(x) + h(x+1) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^x} + \frac{1}{t^{x+1}}\right) \frac{dt}{1+t}$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{t}{t^{x+1}} + \frac{1}{t^{x+1}}\right) \frac{dt}{1+t} = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt = \left[\frac{t^{-x}}{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

donc, $\forall x>0,\ h(x)+h(x+1)=\dfrac{1}{x}$

- Par la même démarche qu'en question 2. , on montre que h est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

  Quand $x\to 0^+,\ h(x)=\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to+\infty}-\underbrace{h(x+1)}_{\to h(1)}\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}$

  (on saurait calculer $h(1)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt$ par décomposition en éléments simples, mais cela est inutile)

- Revenons enfin à $f(x)$: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+1}\frac{dt}{t^x(1+t)}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)}}_{h(x)\sim 1/x}$

$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right],\ \forall t\in]0,1],\ 0<x\leqslant\frac{1}{2}$ et $-\ln(t)>0\quad\Longrightarrow\quad 0<-x\ln(t)\leqslant-\frac{1}{2}\ln(t)$

$\Longrightarrow\quad 0<\frac{e^{-x\ln(t)}}{1+t}\leqslant-\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(t)}}{1+t}$

$\Longrightarrow\quad 0<\displaystyle\int_0^{+1}\frac{dt}{t^x(1+t)}\leqslant\underbrace{\int_0^{+1}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)}}_{constante\ independante\ de\ x}$

(on saurait calculer la constante $\displaystyle\int_0^{+1}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)}=\int_0^{+1}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}=\frac{\pi}{2}$

par le changement de variable $u=\sqrt{t}$, mais c'est inutile ici)

Cet encadrement, valable pour $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$, montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+1}\frac{dt}{t^x(1+t)}$ est bornée quand $x\to 0^+$

On en conclut finalement que $\boxed{f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}}$

5. En reprenant les notations de la question 2., pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto H(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, et $\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)=-\ln(t)\frac{e^{-x\ln t}}{1+t}=\frac{-\ln t}{t^x(1+t)}$

- Pour tout $x\in]0,1[$, les fonctions $t\mapsto H(x,t)$ et $t\mapsto\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$.
Soit $[a,b]$ un segment quelconque, inclus dans le domaine $]0,1[$.

En posant : $\begin{cases}\forall t\in]0,1],\ \psi(t)=\frac{|\ln t|}{t^b(1+t)}\\ \forall t\in[1,+\infty[,\ \psi(t)=\frac{\ln t}{t^a(1+t)}\end{cases}$, par un calcul analogue à la question 2, on vérifie que ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et que : $\quad\forall x\in[a,b],\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\psi(t)$

- D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, et que : $\quad\forall x\in[a,b],\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt.$

  Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]\subset]0,1[$, on en déduit que $\boxed{f\text{ est de classe }\mathcal{C}^1\text{ sur }]0,1[}$

- $\forall x\in]0,1[,\ f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt=-\int_0^{1}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt.$

  Le changement de variable $t=\frac{1}{u},\quad dt=-\frac{du}{u^2}$ dans la première intégrale donne :

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\int_{+\infty}^{1}\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)^x\left(1+\frac{1}{u}\right)}\times\frac{-du}{u^2}-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt.\\ &=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{1-x}(1+t)}dt-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x(1+t)}dt=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^{1-x}}-\frac{1}{t^x}\right)\frac{\ln t}{(1+t)}dt.\\ &=\int_1^{+\infty}\left(\frac{t^x-t^{1-x}}{t}\right)\frac{\ln t}{(1+t)}dt=\int_1^{+\infty}t^x(1-t^{1-2x})\frac{\ln t}{t(1+t)}dt.\end{aligned}$$

Pour tout $t\in[1+\infty[,\ t^x\dfrac{\ln t}{t(1+t)}\geqslant 0$, le signe de l'intégrale sera déterminé par celui de $1-t^{1-2x}$

- Si $0<x<\frac{1}{2}$, $1-2x>0$, donc $1-t^{1-2x}<0$ puisque $t\in[1,+\infty[$, et $f'(x)<0$.
  La fonction f est donc décroissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$
- Si $\frac{1}{2}<x<1$, $1-2x<0$, donc $1-t^{1-2x}>0$ puisque $t\in[1,+\infty[$, et $f'(x)>0$.
  La fonction f est donc croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de f, $m = \inf_{]0,1[} f = f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$

Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $dt = 2udu$,

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^1 \frac{2u\,du}{u(1+u^2)} = 2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = 2[\text{Arctan}(t)]_0^1 = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\inf_{]0,1[} f = \frac{\pi}{2}}$$

4.4 ENS 296 Demi-dérivée ** :

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on lui associe sa demi-primitive, qui est la fonction définie par : $Jh_f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on lui associe sa demi-dérivée, qui est la fonction définie par : $Dh_f(x) = \dfrac{d}{dx}[Jh_f(x)]$

a) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer que $\forall x > 0$, $Jh_f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}}dt$

Montrer que Jh_f est continue sur $]0, +\infty[$, et prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$

b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer que$Jh_f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que $(JH_f)'(x) = Jh_{f'}(x) + \dfrac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$

c) Soit $f : x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$. Calculer $Jh_f(x)$

d) Soit $f : x \mapsto x^{n+1/2}$ où $n \in \mathbb{N}$. Calculer $Jh_f(x)$

e) En déduire les relations suivantes pour toute fonction polynôme f : $Jh(Jh_f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et que $Dh(Jh)(f) = f$

SOLUTION : a) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ est continue sur $[0, x[$. Par ailleurs, f est continue sur le segment $[0, x]$, et donc bornée sur ce segment : $\exists M_x \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in [0, x], |f(u)| \leqslant M_x$.

Donc, $\forall t \in [0, x[, \left|\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\right| \leqslant \frac{M_x}{\sqrt{x-t}}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-t}}$ est une fonction de référence intégrable sur le semi-ouvert $[0, x[$. Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ est donc intégrable sur $[0, x[$, et l'intégrale $Jh_f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$ est absolument convergente.

La fonction Jh_f est définie (au moins) sur $]0, +\infty[$.

• Par le changement de variable affine $u = x - t$, $du = -dt$,

$$Jh_f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^0 \frac{f(x-u)}{\sqrt{u}}(-du) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(x-u)}{\sqrt{u}}du$$

• On sait étudier la continuité ou la dérivabilité de fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^x h(t)dt$ ou $x \mapsto \int_a^b H(x,t)dt$

Dans aucune des deux formules qui définissent $Jh_f(x)$, on n'a une expression ni de de l'une ni de l'autre forme. Il nous faut essayer de se ramener à l'une ou l'autre des situations que l'on vient de décrire :

Procédons au changement de variable affine $u = xt$, $du = xdt$ dans la dernière expression :

$$Jh_f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(x-u)}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{xt}}xdt = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Notons $H(x,t) = \dfrac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}$. Pour tout $t \in]0, 1]$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$

Soit $a > 0$ quelconque, fixé. $\forall (x,t) \in [0,a]\times]0,+1]$, $|H(x,t)| \leqslant \dfrac{\|f\|_{[0,a]}^\infty}{\sqrt{t}}$ où la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f\|_{[0,a]}^\infty}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$. D'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 H(x,t)dt = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt$ est continue sur l'intervalle $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, elle est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors la fonction produit $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \times \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt = Jh_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Cette expression, valable aussi en $x = 0$ permet de définir $Jh_f(0)$ par la formule :

$$Jh_f(0) = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^1 \frac{f(0)}{\sqrt{t}}dt}_{est\ bien\ definie} = 0$$

La fonction Jh_f ainsi prolongée est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Notons encore $H(x,t) = \dfrac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}$. Pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$, et $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{(1-t)f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, les fonctions $(t \mapsto H(x,t))$ et $(t \mapsto \frac{\partial H}{\partial x}(x,t))$ sont continues et intégrables sur $]0,1]$

Soit $a > 0$ quelconque, fixé. $\forall (x,t) \in [0,a] \times]0,+1]$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{\|f'\|^{\infty}_{[0,a]}}{\sqrt{t}}$ où la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f'\|^{\infty}_{[0,a]}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (dérivation sous le signe $\int$), on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 H(x,t)dt = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,a]$, et a pour dérivée $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^1 \frac{(1-t)f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt = \int_0^1 \frac{f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt - \int_0^1 t\frac{f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Par dérivation d'un produit, la fonction $Jh_f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \times \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $(Jh_f)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \times \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^1 \frac{f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt - \int_0^1 t\frac{f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt\right)$

$$(Jh_f)'(x) = \frac{1}{2x}\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt}_{=Jh_f(x)} + \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f'(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt}_{=Jh_{f'}(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{t}\, f'(x(1-t))dt$$

$$(Jh_f)'(x) = \frac{1}{2x}Jh_f(x) + Jh_{f'}(x) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{t}\, f'(x(1-t))dt \qquad (*)$$

Par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\, f'(x(1-t))dt = \left[\sqrt{t}\,\frac{f(x(1-t))}{-x}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{f(x(1-t))}{x}dt$

$$\int_0^1 \sqrt{t}\, f'(x(1-t))dt = -\frac{f(0)}{x} + \frac{1}{2x}\underbrace{\int_0^1 \frac{f(x(1-t))}{\sqrt{t}}dt}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}Jh_f(x)} = -\frac{f(0)}{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}Jh_f(x)$$

En reportant ce dernier calcul dans la relation (*), on obtient :

$$(Jh_f)'(x) = \frac{1}{2x}Jh_f(x) + Jh_{f'}(x) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{f(0)}{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}Jh_f(x)\right)$$

Finalement, $\boxed{\forall x > 0,\ (JH_f)'(x) = Jh_{f'}(x) + \dfrac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}}$

c) Dans cette question, $f : x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

$$Jh_f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(x-xt)^n}{\sqrt{t}}dt = \frac{x^n\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}dt$$

Par le changement de variable $t = u^2$, $dt = 2udu$,

$$Jh_f(x) = 2\frac{x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(1-u^2)^n}{u}udu = 2\frac{x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u^2)^n du$$

puis par le changement de variable $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta d\theta$

$$Jh_f(x) = 2\frac{x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2\theta)^n(-\sin\theta d\theta) = 2\frac{x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\ d\theta$$

$$Jh_f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}W_{2n+1}x^{n+1/2} \qquad \text{où } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Finalement, $\boxed{Jh_f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{n+1/2} = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{\sqrt{\pi}\,(2n+1)!}x^{n+1/2}}$

d) Dans cette question, $f : x \mapsto x^{n+1/2}$ où $n \in \mathbb{N}$.

$$Jh_f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{f(x-xt)}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(x-xt)^{n+1/2}}{\sqrt{t}}dt = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1/2}}{\sqrt{t}}dt$$

Par le changement de variable $t = u^2$, $dt = 2udu$,

$$Jh_f(x) = 2\frac{x^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u^2)^{n+1/2}du$$

puis par le changement de variable $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta d\theta$

$$Jh_f(x) = 2\frac{x^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}\theta\ d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}W_{2n+2}x^{n+1} \qquad \text{où } W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Finalement, $\boxed{Jh_f(x) = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\sqrt{\pi}\, x^{n+1}}$

e) Il est clair que l'application $f \mapsto Jh_f$ est linéaire :

$$\forall x>0,\ Jh_{f+\lambda g}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)+\lambda g(t)}{\sqrt{x-t}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}}dt = Jh_f(x)+\lambda Jh_g(x)$$

de sorte que $Jh_{f+\lambda g} = Jh_f + \lambda Jh_g$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons f la fonction $(x \mapsto x^n)$ et g la fonction $(x \mapsto x^{n+1/2})$.

D'après la question c),$Jh_f = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{\sqrt{\pi}\ (2n+1)!} g$, donc, par linéarité, $Jh(Jh_f) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{\sqrt{\pi}\ (2n+1)!} Jh_g$

et d'après la question d), qui nous donne Jh_g, pour tout $x>0$,

$$Jh(Jh_f)(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{\sqrt{\pi}\ (2n+1)!} \times \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\ \sqrt{\pi}\ x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x t^n dt = \int_0^1 f(t)dt$$

Donc pour toute fonction monomiale $f : (x \mapsto x^n)$, on a montré que $Jh(Jh_f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

Par linéarité cette formule sera vraie pour toute combinaison de monômes, c'est à dire pour tout polynôme :

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}[X],\ \forall x>0,\ Jh(Jh_f)(x) = \int_0^x f(t)dt}$$

- Rappelons que par définition, $Dh_g(x) = \frac{d}{dx}(Jh_g(x))$.

alors $Dh(Jh_f)(x) = \dfrac{d}{dx}\left[Jh(Jh(f)\right](x) = \dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = f(x)$ donc $\boxed{\forall f \in \mathbb{R}[X],\ Dh(Jh_f) = f}$

4.5 ENS 303

On considère une suite de n convertisseurs numériques destinés à transmettre des données. Ils sont placés en série et fonctionnent de manière indépendante.

Chaque convertisseur restitue correctement le bit qu'on lui fournit avec une probabilté $p \in]0,1[$, et renvoie le bit opposé avec la probabilité $q = 1-p$.

On noté X_k le bit en sortie du k^e convertisseur, X_0 étant le bit en entrée de chaine.

On pose $A_k = \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=0) \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n\}$

a) Déterminer une relation matricielle entre A_k et A_{k+1}.

b) En déduire la probabilité pour que le bit initial soit correctement rendu en sortié du n^e convertisseur.

Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$? Interprétation ?

SOLUTION : a) $(X_{n+1}=1) = [(X_{n+1}=1)\cap(X_k=1)] \cup [(X_{n+1}=1)\cap(X_k=0)]$, puisque le système $\{(X_k=1),(X_k=0)\}$ est un système complet d'évènements.

donc $P(X_{n+1}=1) = P[(X_{n+1}=1)\cap(X_k=1)] + P[(X_{n+1}=1)\cap(X_k=0)]$ (évènements incompatibles)

$$P(X_{n+1}=1) = \underbrace{P[(X_{n+1}=1)|(X_k=1)]}_{=p} P(X_k=1) + \underbrace{P[(X_{n+1}=1)|(X_k=0)}_{=1-p} P(X_k=0)]$$

(probabilités conditionnelles

$$\boxed{P(X_{n+1}=1) = pP(X_k=1)+qP(X_k=0)}$$

De même, $P(X_{n+1}=0) = P[(X_{n+1}=0)\cap(X_k=1)] + P[(X_{n+1}=0)\cap(X_k=0)]$ (évènements incompatibles)

$$P(X_{n+1}=1) = \underbrace{P[(X_{n+1}=0)|(X_k=1)]}_{=1-p} P(X_k=1) + \underbrace{P[(X_{n+1}=0)|(X_k=0)}_{=p} P(X_k=0)]$$

$$\boxed{P(X_{n+1}=0) = qP(X_k=1)+pP(X_k=0)}$$

Ces deux relations s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=0) \end{pmatrix}, \text{ soit aussi : } \boxed{A_{k+1} = M.A_k \text{ où } M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}}$$

b) Cette dernière relation entraîne que $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\},\ A_k = M^k.A_0$

La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable. $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-p & -q \\ -q & x-p \end{vmatrix} = (x-p)^2 - q^2$

$\chi_M(x) = (x-p-q)(x-p+q) = (x-1)(x-p+q.$ Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1, p-q\}}$

En posant $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M.V_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ p+q \end{pmatrix} = V_1$

Donc V_1 est une base de la droite sous espace propre de M associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

La matrice M étant symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = p-q$ est la droite dirigée par le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Le vecteur $A_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=1) \\ P(X_0=0) \end{pmatrix}$ se décompose sur la base de vecteurs propres (V_1, V_2) :

il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A_0 = \alpha V_1 + \beta V_2$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(X_0=1)=\alpha+\beta \\ P(X_0=0)=\alpha-\beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=\frac{1}{2}[P(X_0=1)+P(X_0=0)] \\ \beta=\frac{1}{2}[P(X_0=1)-P(X_0=0)] \end{array} \right.$$

$A_0=\alpha V_1+\beta V_2 \Longrightarrow A_k=M^k.A_0=M^k(\alpha V_1+\beta V_2)=\alpha M^k.V_1+\beta M^k.V_2$

$A_k=\alpha\lambda_1^k.V_1+\beta\lambda_2^k.V_2=\alpha V_1+\beta(p-q)^k.V_2$

$$A_n=\begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=0) \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underbrace{[P(X_0=1)+P(X_0=0)]}_{=1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}[P(X_0=1)-P(X_0=0)](p-q)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_n=\begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=0) \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}[P(X_0=1)-P(X_0=0)](p-q)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finalement, $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P(X_n=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[P(X_0=1)-P(X_0=0)](p-q)^n \\ P(X_n=0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[P(X_0=1)-P(X_0=0)](p-q)^n \end{array} \right.}$ (*)

• On recherche la probabilité de l'évènement $(X_n=X_0)$

$(X_n=X_0)=[(X_n=1)\cap(X_0=1)]\cup[(X_n=0)\cap(X_0=0)]$

$P(X_n=X_0)=P[(X_n=1)\cap(X_0=1)]+P[(X_n=0)\cap(X_0=0)]$ (évènements incompatibles)

$\qquad =P[(X_n=1)|(X_0=1)]P(X_0=1)+P[(X_n=0)|(X_0=0)]P(X_0=0)$

Si on sait que $X_0=1$, alors $P(X_0=1)=1$ et d'après les relations (*), $P(X_n=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n$

Si on sait que $X_0=0$, alors $P(X_0=1)=0$ et d'après les relations (*), $P(X_n=0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n$

d'où : $P(X_n=X_0)=\underbrace{P[(X_n=1)|(X_0=1)]}_{=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n}P(X_0=1)+\underbrace{P[(X_n=0)|(X_0=0)]}_{=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n}P(X_0=0)$

$$P(X_n=X_0)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\right]P(X_0=1)+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\right]P(X_0=0)$$
$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\right]\underbrace{[P(X_0=1)+P(X_0=0)]}_{=1}$$

La probabilité pour que le bit initial soit correctement rendu en sortie du n^e convertisseur est :

$\boxed{P(X_n=X_0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n}$

Cette probabilité tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n\to+\infty$: pour n grand, il y a autant de chances que le bit de départ soit correctement transmis que le contraire. Autrement dit, la message d'arrivée n'a aucune fiabilité par rapport au message de départ transmis.

4.6 X - ENS 923 :

a) Determiner la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ quand n tend vers $+\infty$

b) Determiner la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$ quand n tend vers $+\infty$

SOLUTION : a) • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann pour la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$, partagé en n segments égaux. Puisque f est continue sur $[0,1]$, elle a pour limite $\int_0^1 f(t)dt$ quand n tend vers $+\infty$: $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2}$

• Autre méthode : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}-\ln n-\gamma-\varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$$
$$=\ln(2)+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(2)$$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k+1)-\ln(n+k))$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)=\ln(2n+1)-\ln(n+1)$$

$$=\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(2) \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)=\ln 2}$$

4.7 Centrale MP maths 2 - 2015 sujet 3 (algèbre)

Les questions qui utilisent Python sont indiquées par le signe `[P]`. Une question marquée `[P ?]` signifie qu'on peut utiliser Python, mais qu'il sera éventuellement demandé des explications mathématiques complémentaires.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle "**centro-tranposée**" de A la matrice $\widehat{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\widehat{a}_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$

On appelle "**centro-tranposition**" l'application $A \mapsto \widehat{A}$.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = n+1-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par exemple (si $n = 4$), on a $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, alors $\widehat{A} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1-a) `[P]` Ecrire une fonction, sur le modèle `def J(n) . . .` renvoyant la matrice J_n.

b) `[P]` Ecrire une fonction `randMatrix(n,p)` renvoyant une matrice pseudo-aléatoire de taille $n \times p$, à coefficients dans l'intervalle d'entiers $[[0, 100[[$

Utiliser cette fonction pour conjecturer le rapport entre J_n et l'application $A \mapsto \widehat{A}$

Justifier mathématiquement le résultat conjecturé.

c) `[P]` Ecrire une fonction, sur le modèle `def centro : . . .` d'argument la matrice A, et renvoyant la matrice $\widehat{A}$.

2-a) Montrer que l'application $A \mapsto \widehat{A}$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \widehat{(AB)} = \widehat{A}\widehat{B}$, et que $\forall (A,B) \in GL_n(\mathbb{R})^2,\ \widehat{(A^{-1})} = (\widehat{A})^{-1}$

c) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \widehat{({}^tA)} = {}^t(\widehat{A})$.

On peut dire que la centro-transposition commute avec la transposition.

d) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(\widehat{A}) = \det(A)$.

3- On définit : $\mathcal{C}_n^+ = \begin{cases} \mathcal{C}_n^+ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \widehat{A} = A\} \\ \mathcal{C}_n^- = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \widehat{A} = -A\} \end{cases}$

a) Montrer que $\mathcal{C}_n^+$ et $\mathcal{C}_n^-$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{C}_n^+) \oplus (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{C}_n^-) \oplus (\mathcal{A}_n \cap \mathcal{C}_n^+) \oplus (\mathcal{A}_n \cap \mathcal{C}_n^-)$

Préciser la dimension des sous-espaces de cette somme directe. (distinguer suivant la parité de n)

c) Ecrire une fonction, sur le modèle "`def decomp(A) : . . .` " d'argument une matrice A, et qui revoie le quadruplet des composantes de A suivant la décomposition précédente. Donner un exemple non trivial.

4- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n la matrice d'ordre $2n$ définie par blocs comme suit : $Q_n = \begin{pmatrix} I_n & -J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix}$

a) `[P]` Ecrire une fonction, sur le modèle `def Q(n): . . .` renvoyant Q_n.

b) Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{2}} Q_n$ est orthogonale.

c) Soit M une matrice de $\mathcal{C}_n^+$, définie par blocs d'ordre n sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

Déterminer une relation entre D et A d'une part, entre Cet B d'autre part.

Former $N = \dfrac{1}{2}\,{}^tQ_n.M.Q_n$. En déduire que $\det(M) = \det(A + BJ_n).\det(A - BJ_n)$

5- `[P?]` Etudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 6 & -9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

<u>SOLUTION</u> : 1.a)
```
def J(n):
    M=np.zeros((n,n))
    for i in range(0,n):
        M[i,n-1-i]=1
    return M
```
On teste la fonction : `print(J(5))`

b)
```
import numpy.random as rd
```

```
def randMatrix(n,p):
    M=np.zeros((n,p))
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            M[i,j]=rd.randint(100)
    return M
```

On teste la fonction : `N=randMatrix(3,3)`
`print(N)`

• On peut tester divers produits comme $J \times A,\ A \times J,\ J \times A \times J, \cdots$

```
N=randmatrix(3,3)
print(N)
print(np.dot(np.dot(J(3),N),J(3)))
```

Il semble que $J \times A \times J$ donne $\widehat{A}$.

c)
```
def centro(A):
    n=A.shape[0]        (on récupère la dimension de la matrice A)
    return np.dot(np.dot(J(n),A),J(n))
```

2.a) On vérifie que l'application $\Phi: A \mapsto \widehat{A} = J.A.J$ est linéaire (aucune difficulté).
C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_o\Phi(A) = J.(J.A.J).J = J^2.A.J^2 = A$ puisque $J^2 = I_n$
Donc $\Phi_o\Phi = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Φ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est donc inversible, et égal à son propre inverse. C'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \widehat{A.B} = J.A.B.J = J.A.(\underbrace{J.J}_{=I_n}).B.J = (J.A.J).(J.B.J) = \widehat{A}.\widehat{B}$

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, appliquons cette relation avec $B = A^{-1}$: $\underbrace{\widehat{A.A^{-1}}}_{=\widehat{I_n}=I_n} = \widehat{A}.\widehat{A^{-1}}$

donc $\widehat{A}.\widehat{A^{-1}} = I_n$, ce qui montre que $\boxed{\widehat{(A^{-1})} = (\widehat{A})^{-1}}$

c) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ B = {}^tA = (b_{i,j}),\ C = \widehat{A} = (c_{i,j}),\ D = \widehat{({}^tA)} = (d_{i,j}),\ E = {}^t(\widehat{A}) = (e_{i,j})$
Alors, puisque $D = \widehat{({}^tA)} = \widehat{B},\ \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ d_{i,j} = b_{n+1-i,n+1-j} = a_{n+1-j,n+1-i}$
et puisque $E = {}^t(\widehat{A}) = {}^tC,\ \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ d_{i,j} = c_{j,i} = a_{n+1-j,n+1-i}$
Puisque leurs coefficients respectifs sont tous égaux, $\boxed{{}^t(\widehat{A}) = \widehat{({}^tA)}}$

d) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(\widehat{A}) = \det(J.A.J) = \det(J).\det(A).\underbrace{\det(J)}_{=1} = \det A$

3.a) $\mathscr{C}_n^+ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \widehat{A} = A\}$, $\mathscr{C}_n^- = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \widehat{A} = -A\}$
$\forall A \in \mathscr{C}_n^+ \cap \mathscr{C}_n^-$, $\widehat{A} = A$ et $\widehat{A} = -A$, donc $A = -A$ et $A = 0$.
Ce qui montre que $\mathscr{C}_n^+ \cap \mathscr{C}_n^- = \{0\}$, c'est à dire que $\boxed{\text{la somme } \mathscr{C}_n^+ + \mathscr{C}_n^- \text{ est directe}}$.

• $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = \underbrace{\dfrac{M+\widehat{M}}{2}}_{\in\mathscr{C}_n^+} + \underbrace{\dfrac{M-\widehat{M}}{2}}_{\in\mathscr{C}_n^-}$, donc $\mathscr{C}_n^+ \oplus \mathscr{C}_n^- = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre bien que $\mathscr{C}_n^+$ et $\mathscr{C}_n^-$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $(A,B,C,D) \in (\mathscr{S}_n \cap C_n^+) \times (\mathscr{S}_n \cap C_n^-) \times (\mathscr{A}_n \cap C_n^+) \times (\mathscr{A}_n \cap C_n^-)$ tels que $A+B+C+D = 0$.
alors $\underbrace{A+B}_{\in\mathscr{S}_n} = \underbrace{-(C+D)}_{\in\mathscr{A}_n} \implies \begin{cases} A+B=0 \\ C+D=0 \end{cases}$ puisque $\mathscr{S}_n \cap \mathscr{A}_n = \{0\}$

$\underbrace{A}_{\in\mathscr{C}_n^+} + \underbrace{B}_{\in\mathscr{C}_n^-} = 0 \implies A = B = 0$ puisque $\mathscr{C}_n^+ \cap \mathscr{C}_n^- = \{0\}$, et $C = D = 0$ pour la même raison.

On a ainsi montré que $\boxed{\text{la somme } (\mathscr{S}_n \cap C_n^+) + (\mathscr{S}_n \cap C_n^-) + (\mathscr{A}_n \cap C_n^+) + (\mathscr{A}_n \cap C_n^-) \text{ est directe}}$.

• Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = \underbrace{\dfrac{M+{}^tM}{2}}_{\in\mathscr{S}_n} + \underbrace{\dfrac{M-{}^tM}{2}}_{\in\mathscr{A}_n}$, puis :

$$\frac{M+{}^tM}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{M+{}^tM}{2} + \frac{\widehat{M}+{}^t\widehat{M}}{2}\right)}_{\in\mathscr{C}_n^+} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{M+{}^tM}{2} - \frac{\widehat{M}+{}^t\widehat{M}}{2}\right)}_{\in\mathscr{C}_n^-}$$

et $\quad \dfrac{M-{}^tM}{2} = \dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\dfrac{M-{}^tM}{2}+\dfrac{\widehat{M}-{}^t\widehat{M}}{2}\right)}_{\in\mathscr{C}_n^+} + \dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\dfrac{M-{}^tM}{2}-\dfrac{\widehat{M}-{}^t\widehat{M}}{2}\right)}_{\in\mathscr{C}_n^-}$

La décomposition

$M=\dfrac{1}{4}(M+{}^tM+\widehat{M}+{}^t\widehat{M})+\dfrac{1}{4}(M+{}^tM-\widehat{M}-{}^t\widehat{M})+\dfrac{1}{4}(M-{}^tM+\widehat{M}-{}^t\widehat{M})+\dfrac{1}{4}(M-{}^tM-\widehat{M}+{}^t\widehat{M})$

est bien une décomposition de la matrice M sur $(\mathscr{S}_n\cap C_n^+)\oplus(\mathscr{S}_n\cap C_n^-)\oplus(\mathscr{A}_n\cap C_n^+)\oplus(\mathscr{A}_n\cap C_n^-)$, ce qui montre finalement que : $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=(\mathscr{S}_n\cap C_n^+)\oplus(\mathscr{S}_n\cap C_n^-)\oplus(\mathscr{A}_n\cap C_n^+)\oplus(\mathscr{A}_n\cap C_n^-)}$

- Si n est pair, $\dim(\mathscr{S}_n\cap C_n^+)=\dim(\mathscr{S}_n\cap C_n^-)=\dim(\mathscr{A}_n\cap C_n^+)=\dim(\mathscr{A}_n\cap C_n^-)=\frac{n^2}{4}$
(si n est pair, n^2 est bien divisible par 4)
- Dans le cas où $n=3$, ces 4 dimensions sont respectivement 4, 2, 1 et 2.

Si n est impair, ???????????

c)
```
def decomp(A):
    A1=(A+np.transpose(A)+centro(A)+np.transpose(centro(A)))/4
    A2=(A+np.transpose(A)-centro(A)-np.transpose(centro(A)))/4
    A3=(A-np.transpose(A)+centro(A)-np.transpose(centro(A)))/4
    A4=(A-np.transpose(A)-centro(A)+np.transpose(centro(A)))/4
    return(A1,A2,A3,A4)
```

Application sur un exemple non trivial :

```
N=randmatrix(3,3)
print("N=", N)
print('A1=',decomp(N)[0])
print('A2=',decomp(N)[1])
print('A3=',decomp(N)[2])
print('A4=',decomp(N)[3])
```

4.a)
```
def Q(n):

    M=np.eye(2*n)
    for i in range(n):
        M[2*n-1-i,i]=1
    for i in range(n,2*n):
        M[2*n-1-i,i]=-1
    return M
```

On teste le programme : `print(Q(4))`

b) Soit $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}Q_n$.

Alors ${}^tR.R=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -J_n\\ J_n & I_n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n & J_n\\ -J_n & I_n\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n+J_n^2 & J_n-J_n\\ J_n-J_n & J_n^2+I_n\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & 0\\ 0 & 2I_n\end{pmatrix}=I_{2n}$

Donc $\boxed{R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}Q_n \text{ est une matrice orthogonale}}$

c) Soit $M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C}_{2n}^+ &\iff \widehat{M}=M \iff J_{2n}MJ_{2n}=M\\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & J_n\\ J_n & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & J_n\\ J_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} J_nC & J_nD\\ J_nA & J_nB\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & J_n\\ J_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} J_nDJ_n & J_nCJ_n\\ J_nBJ_n & J_nA.J_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} \widehat{D} & \widehat{C}\\ \widehat{B} & \widehat{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\widehat{D}=A\\ \widehat{C}=B\\ \widehat{B}=C\\ \widehat{A}=D\end{cases} \iff \begin{cases}\widehat{D}=A\\ \widehat{C}=B\end{cases}
\end{aligned}$$

donc, $\boxed{M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathscr{C}_{2n}^+ \iff \begin{cases}\widehat{D}=A\\ \widehat{C}=B\end{cases}}$

c) $N=\frac{1}{2}\,{}^tQ_n.M.Q_n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & J_n\\ -J_n & I_n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_n & -J_n\\ J_n & I_n\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + J_n\widehat{B} + BJ_n + J_n\widehat{A}J_n & -AJ_n - J_n\widehat{B}J_n + B + J\widehat{A} \\ -J_nA + \widehat{B} - J_nBJ_n + \widehat{A}J_n & J_nAJ_n - \widehat{B}J_n - JB + \widehat{A} \end{pmatrix}$$

Compte tenu des égalités : $J_n\widehat{B} = J_n.J_n.B.J_n = B.J_n$ et $\widehat{A}.J_n = J_n.A.J_n.J_n = J_nA$, on obtient :

$$N = \begin{pmatrix} A + B.J_n & 0 \\ 0 & \widehat{A} - J_nB \end{pmatrix}$$

La matrice N est diagonale par blocs, donc : $\det(N) = \det(A + B.J_n).\det(\widehat{A} - J_nB)$

$$\det(N) = \det(A + B.J_n).\det(J_n.A.J_n - J_nB)$$
$$= \det(A + B.J_n).\underbrace{\det(J_n)}_{=1}.\det(A.J_n - B) = \det(A + B.J_n).\det(A.J_n^2 - B.J_n)$$
$$= \det(A + B.J_n).\det(A - B.J_n)$$

$det(N) = \det(\frac{1}{2}\,{}^tQ_n.M.Q_n) = \det({}^tR.M.R) = \det(M)$ puisque le déterminant de la matrice orthogonal R vaut ± 1, de même que le déterminant de sa transposée.

Finalement, $\boxed{\det(M) = \det(N) = \det(A + B.J_n).\det(A - B.J_n)}$

```
5. import numpy.linalg as alg
[in] M=np.array([[4,1,-9,6],[3,2,-4,1],[1,-4,2,3],[6,-9,1,4]])
     print(alg.eigvals(M))
[out] [-4.  2.  6.  8.]
```

La matrice M, de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, admet 4 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

4.8 Centrale MP maths 2 - 2015 sujet 4 (analyse)

Dans cet exercice on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E) : (1-x)^3y'' - y = 0$$

On note f l'unique solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

1.a) Justifier l'existence de cette fonction.

b) En utilisant la méthode d'Euler, tracer une approximation du graphe de f sur $[0,\ 0.9]$

2.a) Justifier que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, 1[,\ \mathbb{R})$

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Etablir que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence reliant a_{n+2}, a_{n+1}, a_n et a_{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$.

c) Calculer alors a_n pour tout $n \in [[0, 20]]$.

d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$

e) Qu'en déduit-on en ce qui concerne la fonction f ?

3. Que peut on dire du signe de f sur $[0, 1[$, et de ses variations ?

4. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $\quad f(x) \geqslant x + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)}{(1-t)^3}dt$

Calculer cette dernière intégrale.

Que peut-on en déduire concernant le comportement de f en 1^- ?

SOLUTION : 1.a) L'équation différentielle $(E) : (1-x)^3y'' - y = 0$ est une équation du second ordre linéaire, de la forme :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Les fonctions a, b, c sont continues sur $]-\infty, -1[$. La fonction $x \mapsto a(x) = (1-x)^3$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty, -1[$

D'après le théorème de Cauchy - Lipschitz, pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$, il existe une et une seule solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ qui vérifie les conditions initiales : $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_1 \end{cases}$

Donc il existe une et une seule solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ qui vérifie les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

1- b) Soit $X = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$ en n segments égaux : $x_k = x_0 + k\frac{b-a}{n}$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

```
import numpy as np
X = np.linspace(a,b,n+1)
```

Soit $V(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} f(x_{k+1}) \\ f'(x_{k+1}) \end{pmatrix} = V(x_{k+1}) = V(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} V'(t)dt$$

$$= V(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} dt = V(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{pmatrix} f'(t) \\ \frac{f(t)}{(1-t)^3} \end{pmatrix} dt$$

En notant pour tout k, $y_0[k] = f(x_k)$, $y_1[k] = f'(x_k)$, les égalités :

$$\begin{cases} f(x_{k+1}) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)dt \\ f'(x_{k+1}) = f'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(t)}{(1-t)^3}dt \end{cases}$$

où $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)dt = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ peut être approché par $(x_{k+1} - x_k)f'(x_k) = hf'(x_k)$

ce qui se traduit par les instructions :

```
y0[k+1] = y0[k] + h * y1[k]
y1[k+1] = y1[k] + h * y0[k]/(1-X[k])**3
```

à mettre dans une boucle :

Rédaction du programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a,b=0,0.9
n=901
h=(b-a)/n
X=np.linspace(a,b,n)
Y0=np.ones((n))
Y1=np.ones((n))
Y0[0],Y1[0] =0,1
for k in range(n-1):
    Y0[k+1]=Y0[k]+h*Y1[k]
    Y1[k+1]=Y1[k]+h*Y0[k]/(1-X[k])**3
plt.figure(1)
plt.plot(X,Y0)
plt.show()
```

2- a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ puisqu'elle est solution de l'équation diférentielle (E) d'ordre 2.

La relation (E) : $f(x) = (1-x)^3 f''(x)$, qui équivaut à $f''(x) = \dfrac{f(x)}{(1-x)^3}$, montre que f'' est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ comme produit de deux fonctions de de classe $\mathcal{C}^2$ (f et $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$). f est donc de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

Le report dans l'égalité $f''(x) = \dfrac{f(x)}{(1-x)^3}$ montre que f'' est de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, c'est à dire que f est de classe $\mathcal{C}^6$ sur cet intervalle.

En réïtérant le procédé, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

b) En posant $u(x) = (1-x)^3$, de sorte que

$$u'(x) = -3(1-x)^2, \qquad u''(x) = 6(1-x), \qquad u'''(x) = -6,$$

et en dérivant $(n-2)$ fois l'égalité $f(x) = u(x)f''(x)$, par la formule de Leibniz, on obtient :

$$f^{(n-2)}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} u^{(k)}(x) f''^{(n-2-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

seules les dérivées $u^{(k)}(x)$ pour $k \leqslant 3$ sont non nulles :

$$f^{(n-2)}(x) = u(x)f^{(n)}(x) + (n-2)u'(x)f^{(n)}(x) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}u''(x)f^{(n-2)}(x) + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}u'''(x)f^{(n-3)}(x)$$

$$f^{(n-2)}(x) = (1-x)^3 f^{(n)}(x) - 3(n-2)(1-x)^2 f^{(n-1)}(x) + 3(n-2)(n-3)(1-x)f^{(n-2)}(x) \\ -(n-2)(n-3)(n-4)f^{(n-3)}(x)$$

En prenant $x = 0$,

$$f^{(n-2)}(0) = f^{(n)}(0) - 3(n-2)f^{(n-1)}(0) + 3(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(0) - (n-2)(n-3)(n-4)f^{(n-3)}(0)$$

En utilisant la relation : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, qui s'écrit aussi : $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, on obtient :

$$(n-2)!a_{n-2} = n!\, a_n - 3(n-2)(n-1)!a_{n-1} + 3(n-2)(n-3)(n-2)!a_{n-2} - (n-2)(n-3)(n-4)(n-3)!a_{n-3}$$

En simplifiant par $(n-2)!$,

$$a_{n-2} = n(n-1)a_n - 3(n-2)(n-1)a_{n-1} + 3(n-2)(n-3)a_{n-2} - (n-3)(n-4)a_{n-3}$$

soit aussi : $n(n-1)a_n - 3(n-2)(n-1)a_{n-1} + [3(n-2)(n-3) - 1]a_{n-2} - (n-3)(n-4)a_{n-3} = 0$, et en remontant les indices de deux unités,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 3n(n+1)a_{n+1} + [3n(n-1) - 1]a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} = 0}$$

c) Pour calculer a_n pour tout $n \in [[0,20]]$, on initialise $a_0 = \dfrac{f(0)}{0!} = 0, \quad a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} = 1, \quad a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$

où $f''(0)$ est calculé à partir de la relation : $(1-x)^3 f''(x) = f(x)$: $\quad f''(0) = f(0) = 0$

donc $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 0)$

Puis, pour $k = 1, 2, 3, \cdots, 18$, on calcule $a_3, a_4, \cdots, a_{20}$ par la relation :

$$\forall k \geqslant 1, \ a_{k+2} = \frac{3k(k+1)a_{k+1} - [3k(k-1)-1]a_k + (k-1)(k-2)a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$$

```
[in] a=[0 for k in range(21)]
     a[0]=0
     a[1]=1
     a[2]=0
     for k in range(1,19):
        a[k+2]=(3*k*(k+1)*a[k+1]-(3*k*(k-1)-1)*a[k]+(k-1)*(k-2)*a[k-1])/(k+2)/(k+1)
     print(a)
[out] [0, 1, 0, 0.16666666666666666, 0.25, 0.30833333333333335, 0.35833333333333334,
       0.4061507936507937, 0.4544642857142858, 0.5045993165784834, 0.557291666666667,
       0.6129990630511468, 0.6720407823272413, 0.7346647952420531, 0.8010819345584982,
       0.8714840959909385, 0.9460543091569584, 1.0249724937660165, 1.1084188457101745,
       1.1965758834511895, 1.2896297189711758]
```

d) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $|a_n| \leqslant 4^n$

Les calculs précédents montrent qu'elle est vérifiée pour $n = 0, 1, \ 2$.

Supposons la vérifiée jusqu'au rang $k+1$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors,} \quad |a_{k+2}| &= \left| \frac{3k(k+1)a_{k+1} - [3k(k-1)-1]a_k + (k-1)(k-2)a_{k-1}}{(k+1)(k+2)} \right| \\
&\leqslant \frac{3k(k+1)|a_{k+1}| + [3k(k-1)-1]|a_k| + (k-1)(k-2)|a_{k-1}|}{(k+1)(k+2)} \\
&\leqslant \frac{3k(k+1)4^{k+1} + [3k(k-1)-1]4^k + (k-1)(k-2)4^{k-1}}{(k+1)(k+2)} \\
&\leqslant [3k(k+1) \times 16 + [3k(k-1)-1] \times 4 + (k-1)(k-2)] \times \frac{4^{k-1}}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Or, $\left\{ \begin{array}{c} k(k+1) \leqslant (k+1)(k+2) \\ 3k^2 - 3k - 1 \leqslant 3(k+1)(k+2) \\ (k-1)(k-2) \leqslant (k+1)(k+2) \end{array} \right.$, donc : $|a_{k+2}| \leqslant (48+12+1)4^{k-1} \leqslant 64 \times 4^{k-1} = 4^{k+2}$

On a ainsi établi par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ |a_k| \leqslant 4^k}$

e) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ est la série de Taylor de la fonction f au point 0.

La majoration $\left| \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant |4x|^n$ montre qu'elle converge absolument si $|4x| < 1$, c'est à dire si $|x| < \frac{1}{4}$.

C'est une série entière de rayon supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Mais on ne sait pas, pour le moment, si la somme de la série de Taylor est égale à $f(x)$.

• Recherchons donc les séries entières solutions de l'équation différentielle (E) et des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = 0 \\ S'(0) = 1 \end{array} \right.$$

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on peut affirmer que :

$$\forall x \in]-R, R[\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}, \ \text{ et } \ S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

S est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-R, R[\ (1-x)^3 S''(x) - S(x) = 0 \iff (1 - 3x + 3x^2 - x^3) \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n b_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^n - \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) b_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\begin{aligned}
\iff & (2b_2 + 6b_3 x + 12 b_4 x^2) - 6b_2 x - 18 b_3 x^2 + 6 b_2 x^2 - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} [(n+2)(n+1) b_{n+2} - 3n(n+1) b_{n+1} + 3n(n-1) b_n - b_n - (n-1)(n-2) b_{n-1}] x^n = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 2b_2 - b_0 = 0 & (1) \\ 6b_3 - 6b_2 - b_1 = 0 & (2) \\ 12b_4 - 18b_3 + 5b_2 = 0 & (3) \\ \forall n \geqslant 3,\ (n+2)(n+1)b_{n+2} - 3n(n+1)b_{n+1} + 3n(n-1)b_n - b_n - (n-1)(n-2)b_{n-1} = 0 & (4) \end{cases}$$

Les conditions initiales $\begin{cases} S(0) = 0 \\ S'(0) = 1 \end{cases}$, et les relations (1), (2) et (3) imposent : $\begin{cases} b_0 = S(0) = 0 \\ b_1 = S'(0) = 1 \\ b_2 = \frac{1}{2}b_0 = 0 \\ b_3 = \frac{1}{6}b_1 = \frac{1}{6} \\ b_4 = \frac{1}{12}(18b_3 - 5b_2) = \frac{1}{4} \end{cases}$

On remarque alors que $\begin{cases} b_0 = 0 = a_0 \\ b_1 = 1 = a_1 \\ b_2 = 0 = a_2 \\ b_3 = \frac{1}{6} = a_3 \\ b_4 = \frac{1}{4} = a_4 \end{cases}$, et que

$$\forall n \geqslant 3,\ (n+2)(n+1)b_{n+2} - 3n(n+1)b_{n+1} + [3n(n-1) - 1]b_n - (n-1)(n-2)b_{n-1} = 0$$

La suite (b_n) vérifie les mêmes conditions initiales sur les premiers termes, et la même relation de récurrence que la suite (a_n). On peut en conclure que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n$.

La série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est donc l'unique série entière entière solution de l'équation différentielle (E) et des condtions initiales $\begin{cases} S(0) = 0 \\ S'(0) = 1 \end{cases}$. Son rayon de convergence est $R \geqslant \frac{1}{4}$.

Par unicité sur cet intervalle d'une solution de (E) vérifiant ces conditions initiales, on peut affirmer que : $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ f(x) = S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Donc $\boxed{f \text{ est développable en série entière sur l'intervalle } \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\text{ au moins}}$.

3. Montrons que $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geqslant 0$

Tout d'abord remarquons que puisque $f'(0) = 1$ que f' est continue, f' restera positive sur un certain voisinage de 0 : $\exists a \in]0,1[,\ \forall x \in [0,a],\ f'(x) > 0$.

Alors f est strictement croissante sur $[0,a[$: $\forall x \in [0,a],\ f(x) > f(0) = 0$

x	0	a
$f'(x)$	1	$+$
		$\nearrow$ $+$
$f(x)$	0	$+$

Montrons que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1[$. Raisonnons par l'absurde : sinon, il existerait $b \in]0,1[,\ f(b) < 0$. Par continuité de la fonction f et le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $c \in]0,1[,\ f(c) = 0$

Soit $C = \{c \in]0,1[,\ f(c) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

C est une partie fermée de $\mathbb{R}$ comme image réciproque de la partie fermée $\{0\}$ par l'application continue f. Donc C admet un plus petit élément, qu'on notera encore c. Ainsi, $f(c) = 0$ et $\forall x \in]0,c[, f(c) > 0$

La relation $f''(x) = \dfrac{f(x)}{(1-x)^3}$ montre alors que f'' est positive sur $]0,c[$, donc que f' est croissante sur $[0,c]$, et puisque $f'(0) = 1$, $\forall x \in [0,c],\ f'(x) \geqslant 1$. Donc $f(c) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^c \underbrace{f'(t)}_{\geqslant 1} dt \geqslant 1 \times c = c > 0$

Ceci est contradictoire avec l'égalité $f(c) = 0$.

On a ainsi montré par l'absurde que $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geqslant 0}$

Il s'ensuit que f'' est positive sur $[0,1[$ (par la relation $f''(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^3}$), donc que f' est croissante sur cet intervalle, donc supérieure ou égale à 1 puisque $f'(0) = 1$, et que f est croissante.

4. • Pour tout $x \in [0,1[$, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 1, sur le segment $[0,x]$ s'écrit :

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + x\underbrace{f'(0)}_{=1} + \int_0^x \frac{(x-t)^1}{1!} f''(t)dt = x + \int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(1-t)^3}dt \qquad (\text{car } f''(t) = \tfrac{f(t)}{(1-t)^3})$$

On a vu à la question précédente que $\forall t \in [0,1[,\ f'(t) \geqslant f'(0) = 1$,

ce qui entraîne que $f(t) = \underbrace{f(0)}_{=1} + \int_0^t \underbrace{f'(u)}_{\geqslant 1} du \geqslant \int_0^t du = t$

donc $$\boxed{f(x) = x + \int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(1-t)^3}dt \geqslant x + \int_0^x \frac{(x-t)t}{(1-t)^3}dt}$$

• Pour calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)t}{(1-t)^3}dt$ décomposons la fonction polynomiale en t, $R(t) = \dfrac{(x-t)t}{(1-t)^3}$ en fonction de 1, $(1-t)$ et $(1-t)^2$:

$$(x-t)t = xt - t^2 = -(1-t)^2 - 2t + 1 + xt$$
$$= -(1-t)^2 + (x-2)t + 1 = -(1-t)^2 + (2-x)(1-t) + 1 - 2 + x = -(1-t)^2 + (2-x)(1-t) - 1 + x$$

donc $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)t}{(1-t)^3}dt = \int_0^x \frac{-(1-t)^2+(2-x)(1-t)-1+x}{(1-t)^3}dt$

$\displaystyle= \int_0^x \left(\frac{-1}{1-t}+\frac{2-x}{(1-t)^2}+\frac{x-1}{(1-t)^3}\right)dt$

$\displaystyle= \left[\ln(1-t)+\frac{2-x}{1-t}+\frac{x-1}{2(1-t)^2}\right]_0^x = \ln(1-x)+\frac{2-x}{1-x}+\frac{x-1}{2(1-x)^2}-2+x-\frac{x-1}{2}$

$\displaystyle= \ln(1-x)+\frac{x(x-2)}{2(x-1)}$

- $\displaystyle\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geqslant x + \int_0^x \frac{(x-t)t}{(1-t)^3}dt = x + \underbrace{\ln(1-x)}_{\longrightarrow -\infty\ qd\ x\to 1^-} + \underbrace{\frac{x(2-x)}{2(1-x)}}_{\sim \frac{1}{2(1-x)}\longrightarrow +\infty}$

Par croissance comparée entre fonctions puissance et logarithme, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} x+\ln(1-x)+\frac{x(x-2)}{2(x-1)} = +\infty$

et par minoration, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$

4.9 Centrale MP maths 2 - 2015 sujet 5 (probabilités)

Un pion se trouve à l'instant 0 sur la case 0 d'un parcours linéaire dont les cases sont numérotées par les entiers consécutifs. A chaque étape, il avance d'un nombre strictement positif aléatoire de cases. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre de cases dont il avance à la $n-$ième étape. Ainsi, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ est sa position à l'instant n, avec $S_0 = 0$ par convention. On suppose que les variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes. On note par conséquent :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ f_i = P(Y_n = i) \quad \text{et} \quad f : t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$$

respectivement la loi et la fonction génératrice de Y_n. Par hypothèse, f_i ne dépend pas de n, et $f_0 = 0$

1. Dans cette question, on suppose que $Y_n - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on choisit un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire une fonction en python prenant en argument les paramètres p et k et simulant l'expérience jusqu'à ce que le pion dépasse (au sens large) la position k. La fonction renverra 1 si le point a atterri sur la case k et 0 s'il l'a dépassée sans s'y arrêter.

Pour simuler une loi de Bernoulli, on pourra utiliser le volet probabilité de l'aide documentaire.

b. Pour un entier k assez grand et des valeurs de p de votre choix, calculer sur une centaine d'essais la proportion de tentatives pour lesquelles le pion atteint la position k exactement. Comparer avec $\dfrac{1}{E(Y_1)}$.

Pour tout entier k, on note $E_k = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}(S_n = k)$ et $u_k = P(E_k)$

Ainsi, u_k est la probabilité que que la pion passe par la case k lors de son parcours.

2. Soient j et k tels que $1 \leqslant j \leqslant k$. Démontrer que que $P(E_k \cap (Y_1 = j)) = f_j.u_{k-j}$.
3. En déduire que $u_k = f_k\ u_0 + f_{k-1}\ u_1 + \cdots + f_1\ u_{k-1}$

On note u la fonction génératrice de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $u : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$

4. Justifier que u est bien définie sur $]-1,1[$, et que : $\forall x \in]-1,1[,\ u(t) = \dfrac{1}{1-f(t)}$
5. En déduire l'expression de u, celle de u_k en fonction de k, et enfin la limite de cette suite dans les deux cas suivants :

a) Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p ;

b) $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p, comme à la question 1.

Déterminer par ailleurs $E(Y_1)$ dans les deux cas. Que remarque-t-on ?

SOLUTION : 1. `import numpy.random as rd`

```
def AtteintJuste(p,k):
    S=0
    while S<k:
        Y=rd.binomial(1,p)+1
        S+=Y
    if S==k:
```

```
        resultat=1
    else:
        resultat=0
    return resultat

print("*****************")
p=0.5
N=1000
k=101
Compteur=0
for k in range(N):
    Compteur+=AtteintJuste(p,k)
print(Compteur/N)
```

2. Soient j et k tels que : $1 \leqslant j \leqslant k$

$$E_k \cap (Y_1 = j) = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S_n = k) \right) \cap (Y_1 = j)$$

Remarquons que puisque $k \geqslant 1$ et que $S_0 = 0$, l'évènement $(S_0 = k)$ est vide, donc

$$\begin{aligned} E_k \cap (Y_1 = j) &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n = k) \right) \cap (Y_1 = j) \\ &= \left((S_1 = k) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (S_n = k) \right) \cap (Y_1 = j) \\ &= ((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (S_n = k) \cap (Y_1 = j) \right) \end{aligned}$$

Lorsque $Y_1 = j$, $\quad (S_n = k) \iff (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = k) \iff (Y_2 + \cdots + Y_n = k - j)$

donc $\begin{aligned} E_k \cap (Y_1 = j) &= ((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (Y_2 + \cdots + Y_n = k - j) \cap (Y_1 = j) \right) \\ &= \left((Y_1 = k) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (Y_2 + \cdots + Y_n = k - j) \right) \cap (Y_1 = j) \end{aligned}$

Par incompatibilité des évènements $(S_n = k)$ quand n varie (du fait que chaque Y_i est strictement positif, si $m \neq n$, alors $S_m \neq S_n$ et les évènements $(S_m = k)$ et $(S_n = k)$ sont incompatibles),

$$P(E_k \cap (Y_1 = j)) = P((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) + \sum_{n=2}^{\infty} P\left((Y_2 + \cdots + Y_n = k - j) \cap (Y_1 = j)\right)$$

Les variables aléatoires Y_i étant supposées indépendantes, Y_1 et $(Y_2 + \cdots + Y_n)$ le sont, et donc

$$P\left((Y_2 + \cdots + Y_n = k - j) \cap (Y_1 = j)\right) = P(Y_2 + \cdots + Y_n = k - j) P(Y_1 = j)$$

et puisque les Y_i suivent la même loi et sont indépendants,

$$P\left(Y_2 + \cdots + Y_n = k - j\right) = P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = k - j\right) = P(S_{n-1} = k - j)$$

alors, $\begin{aligned} P(E_k \cap (Y_1 = j)) &= P((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) + \sum_{n=2}^{\infty} P\left(S_{n-1} = k - j\right) \underbrace{P(Y_1 = j)}_{=f_j} \\ &= P((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) f_j \end{aligned}$

• Si $1 \leqslant j = k$, alors $(Y_1 = k) \cap (Y_1 = j) = (Y_1 = j)$

$$\begin{aligned} P(E_k \cap (Y_1 = j)) &= \underbrace{P(Y_1 = j)}_{=f_j} + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) f_j \\ &= f_j \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) \right) \end{aligned}$$

On peut remplacer le 1 par $P(S_0 = k - j)$ puisque $k = j$ et que $(S_0 = 0)$ est un évènement certain

$$\begin{aligned} P(E_k \cap (Y_1 = j)) &= f_j \left(P(S_0 = k - j) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) \right) = f_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) \right) \\ &= f_j \; P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S_n = k - j) \right) = f_j \; P(E_{k-j}) = f_j \; u_{k-j} \end{aligned}$$

• Si $1 \leqslant j < k$, $(Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)$ est un évènement impossible : $P((Y_1 = k) \cap (Y_1 = j)) = 0$

$$P(E_k \cap (Y_1 = j)) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_n = k - j\right) f_j$$

A cette somme, on peut rajouter $P(S_0 = k - j)$ qui est nul car l'évènement $(S_0 = k - j)$ est impossible lorsque $k \neq j$ puisque S_0 vaut toujours 0.

donc $P(E_k \cap (Y_1 = j)) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k - j) f_j$

$$= f_j \ P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S_n = k - j)\right) = f_j \ P(E_{k-j}) = f_j \ u_{k-j}$$

Dans les deux cas, on a montré que $\boxed{P(E_k \cap (Y_1 = j)) = f_j \ u_{k-j}}$ lorsque $1 \leqslant j \leqslant k$

• Lorsque $1 \leqslant k < j$, remarquons que :

$$E_k \cap (Y_1 = j) = \bigcup_{n=0}^{\infty} ((S_n = k) \cap (Y_1 = j))$$

$$= \underbrace{[(S_0 = k)]}_{impossible} \cap (Y_1 = j) \cup [(S_1 = k) \cap (Y_1 = j)] \cup \cdots \cup [(S_n = k) \cap (Y_1 = j)] \cup \cdots$$

$(S_0 = k)$ est impossible puisque $S_0 = 0$ et $k \geqslant 1$

Pour $n \geqslant 1$, $(S_n = k) \cap (Y_1 = j)$ est impossible car $S_n \geqslant Y_1$ puisque S_n contient Y_1 dans la somme qui le définit, et que $k < n$

donc, $\boxed{\text{lorsque } 1 \leqslant k < j,\ E_k \cap (Y_1 = j) = \emptyset}$.

3. Puisque le système $\bigcup_{j=1}^{\infty} (Y_1 = j)$ est un système complet d'évènements,

$$u_k = P(E_k) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_k \cap (Y_1 = j)$$

On vient de voir juste ci-dessus que $E_k \cap (Y_1 = j) = \emptyset$ lorsque $1 \leqslant k < j$.

Tous les termes $P(E_k \cap (Y_1 = j))$ sont nuls lorsque $j > k$. Ne restent donc dans la somme que les indices j inférieurs ou égaux à k :

$$u_k = P(E_k) = \sum_{j=1}^{k} P(E_k \cap (Y_1 = j) = \sum_{j=1}^{k} f_j \ u_{k-j} = f_1 u_{k-1} + f_2 u_{k-2} + \cdots + f_{k-1} u_1 + f_k u_0$$

$$\boxed{u_k = f_k u_0 + f_{k-1} u_1 + \cdots + f_2 u_{k-2} + f_1 u_{k-1} = \sum_{j=1}^{k} f_j \ u_{k-j}}$$

• Remarquons que $u_0 = P(E_0) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S_n = 0)\right) = P\left((S_0 = 0) \cup \underbrace{(S_1 = 0) \cup \cdots \cup (S_n = 0) \cup \cdots}_{vides}\right)$

$\boxed{u_0 = P(S_0 = 0) = 1}$ puisque $(S_0 = 0)$ est un évènement certain.

4. La fonction génératrice u est définie par : $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$

$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k = P(E_k) \leqslant 1$, donc pour tout $x \in]-1, 1[, 0 \leqslant |u_k x^k| \leqslant |x^k|$

La série géométrique $\sum |x^k|$ converge puisque $|x| < 1$. Par majoration, la série $\sum u_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$.

$\forall t \in]-1, 1[,\ u(t) = \underbrace{u_0}_{=1} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k t^k$

L'égalité $u_k = f_k u_0 + f_{k-1} u_1 + \cdots + f_2 u_{k-2} + f_1 u_{k-1}$ n'a de sens que si $k \geqslant 1$.

$\forall t \in]-1, 1[,\ u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_{k-i}\right) t^k$

Puisque $f_0 = 0$, ce qui est logique puisque $P(Y_1 = 0) = 0$, on peut rajouter le terme $f_0 u_k$ dans la somme finie : $u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} f_i t^i \ u_{k-i} t^{k-i}\right)$

On reconnait dans la somme $\sum_{i=0}^{k} f_i t^i \ u_{k-i} t^{k-i}$ le terme d'indice k du produit de Cauchy des deux suites $(f_i t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(u_i t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ (*)

Ces deux séries ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 .

On sait qu'alors, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} f_i t^i \ u_{k-i} t^{k-i}\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} f_i t^i\right) \left(\sum_{i=0}^{k} u_i t^i\right)$

Le terme d'indice 0 de la série produit est $f_0 u_0 = 0$.

Or, dans l'égalité (*), le terme constant vaut 1. Il nous faut donc rajouter cette cosntante 1 dans le calcul de $u(t)$: $\quad u(t) = 1 + \left(\sum_{i=0}^{k} f_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} u_i t^i\right) = 1 + f(t)u(t)$

En transposant : $\quad u(t)(1-f(t)) = 1$, et donc $\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ u(t) = \dfrac{1}{1-f(t)}}$

La majoration stricte $|f(t)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} f_k \underbrace{|t|^k}_{<1} < \sum_{k=0}^{\infty} f_k = 1$ assure que $f(t) \neq 1$, et qu'on peut bien diviser par $1-f(t)$ qui n'est jamais nul.

5.a) Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p : $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_1 = k) = f_k = pq^{k-1}$ $\quad$ (en posant $q = 1-p$)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} t^k = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qt)^k = \frac{p}{q} \times qt \sum_{k=0}^{\infty}(qt)^k = \frac{pt}{1-qt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{pt}{1-qt}}$$

$$u(t) = \frac{1}{1-f(t)} = \frac{1}{1-\frac{pt}{1-qt}} = \frac{1-qt}{1-qt-pt} = \frac{1-qt}{1-t} \qquad \boxed{u(t) = \frac{1-qt}{1-t}}$$

$$u(t) = \frac{1-qt}{1-t} = (1-qt)\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k - q\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k - q\sum_{k=1}^{\infty} t^k = 1 + (1-q)\sum_{k=1}^{\infty} t^k$$

$$\boxed{u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p\, t^k}$$

Par identification (unicité) des coefficients de cette série entière, $\boxed{u_0 = 1 \text{ et } \forall k \geqslant 1,\ u_k = p}$

- Puisque $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p),\ E(Y_1) = \dfrac{1}{p}$. $\qquad$ Donc, $\dfrac{1}{E(Y_1)} = p$. $\qquad$ Par ailleurs, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = p$

  On remarque que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \dfrac{1}{E(Y_1)}}$

5.a) $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $Y_1 - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

$Y_1(\Omega) = \{1,2\} \qquad P(Y_1 = 1) = q = 1-p, \quad P(Y_1 = 2) = p$ et $\forall k \geqslant 3,\ P(Y_1 = k) = 0$

$$\boxed{f(t) = qt + pt^2} \qquad \boxed{u(t) = \frac{1}{1-f(t)} = \frac{1}{1-qt-pt^2} = \frac{-1}{pt^2+qt-1}}$$

Le polynôme $Q(t) = pt^2 + qt - 1$ s'annule pour $t = 1$ $\quad$ (car $p + q = 1$)

Il est donc divisible par $(t-1)$: $\quad Q(t) = pt^2 + qt - 1 = (t-1)(pt+1)$

$$u(t) = -\frac{1}{(t-1)(pt+1)} = -\frac{(pt+1)-p(t-1)}{(t-1)(pt+1)} \times \frac{1}{1+p} = \frac{-1}{1+p}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{p}{1+pt}\right]$$

$$u(t) = \frac{1}{1+p}\left[\frac{1}{1-t} + \frac{p}{1+pt}\right] = \frac{1}{1+p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k + p\sum_{k=0}^{\infty}(-pt)^k\right)$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{1+p}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^k p^{k+1}\right) t^k} \quad \text{Par unicité des coefficients,} \quad \boxed{u_k = \frac{1+(-1)^k p^{k+1}}{p+1}}$$

- Puisque $Y_1 - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p),\ E(Y_1) = 1 + p$. $\qquad$ Donc, $\dfrac{1}{E(Y_1)} = \dfrac{1}{p+1}$. $\qquad$ Par ailleurs, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \dfrac{1}{p+1}$

  Là encore, on remarque que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \dfrac{1}{E(Y_1)}}$

4.10 ENSAM avec Python

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = a\ , \quad v_0 = b \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 6a_n - \frac{7}{2}v_n \end{cases}$$

1- a) Construire une fonction `Calcul_uv_n(a,b,n)` qui prend en paramètres d'entrée a, b et n, et qui retourne les deux listes $[u_0, u_1, \cdots, u_n], [v_0, v_1, \cdots, v_n]$

Calculer u_{10} et v_{10} lorsque $a = 5$ et $b = -7$

Tester le comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque :

- b) $a = 5$ et $b = -7$:
- c) $a = 2$ et $b = 3$:
- d) $a = 3$ et $b = 4$:

2- Avec Python, diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -7/2 \end{pmatrix}$

Faire en sorte que la matrice de passage P soit à coefficients entiers.

3 - Calculer explicitement u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.
En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).
A quelle(s) condition(s) la suite $u_n)$ converge-t-elle vers 0 ?
A quelle(s) condition(s) les suites $u_n)$ et (v_n) sont elles constantes ?

4- a) Détermier le rayon de convergence et calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

Même question pour la série $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\,!} x^n$

SOLUTION : 1- a) Fonction `Calcul_uv_n(a,b,n)` :

```
def Calcul_uv_n(a,b,n):
    u=[0 for k in range(n+1)]
    v=[0 for k in range(n+1)]
    u[0],v[0]=a,b
    for k in range(n):
        u[k+1]=5*u[k]-3*v[k]
        v[k+1]=6*u[k]-7*v[k]/2
    return u,v
```

Calcul de u_{10} et v_{10} lorsque $a = 5$ et $b = -7$: `print(Calcul_uv_n(5,-7,10))`

```
86.919921875            115.8798828125
```

b) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 5$ et $b = -7$:

```
print(Calcul_uv_n(5,-7,20))
print(Calcul_uv_n(5,-7,20))
print(Calcul_uv_n(5,-7,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent, la première vers 87, la seconde vers 116.

c) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 2$ et $b = 3$:

```
print(Calcul_uv_n(2,3,20))
print(Calcul_uv_n(2,3,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

d) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 3$ et $b = 4$:

```
print(Calcul_uv_n(3,4,20))
print(Calcul_uv_n(3,4,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) soient constantes.

2- Avec Python, diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -7/2 \end{pmatrix}$

Faire en sorte que la matrice de passage P soit à coefficients entiers.

```
[in]import numpy.linalg as alg
    A=np.array([[5,-3],[6,-7/2]])
    L = alg.eig(A)
    print(L)
[out](array([ 1. ,  0.5]), array([[ 0.6        ,  0.5547002 ],
                                  [ 0.8        ,  0.83205029]]))
```

$\boxed{\text{Les valeurs propres sont 1 et } 1/2.}$

Le premier vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Le second vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0.5547002 \\ 0.83205029 \end{pmatrix}$ vérifie :

```
[in] print( 0.5547002/0.83205029)
[out] 0.6666666746790029
```

Il est proportionnel à $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On prendra donc $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

```
import numpy.linalg as alg
[in] P=np.array([[3,2],[4,3]])
    print(P)
    print(alg.inv(P))
[out][[3 2]
```

```
  [4 3]]
[[ 3. -2.]
 [-4.  3.]]
```
donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Finalement, l'égalité de diagonalisation de A s'écrit : $A = P.\Delta.P^{-1}$, avec $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

3 - Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5u_n - 3v_n \\ 6u_n - \frac{7}{2}v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}}_{=A} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A.X_n$$

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n.X_0$

Le vecteur colonne $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ se décompose sur la base de vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ X_0 = \alpha V_1 + \beta V_2$

alors, $X_n = A^n X_0 = A^n(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha A^n.V_1 + \beta A^n.V_2 = \alpha 1^n.V_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.V_2$

Il s'en suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \alpha V_1 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La suite vectorielle $(X_n) = \left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right)$ converge donc, et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha \end{cases}$

La décomposition $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta V_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

permet de calculer α et β :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 3u_0 - 2v_0 \\ \beta = -4u_0 + 3v_0 \end{cases}$$

En conclusion, $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\alpha = 9u_0 - 6v_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha = 12u_0 - 8v_0 \end{cases}}$

Vérifications : a) dans le cas où $u_0 = 5,\ v_0 = -7$, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9 \times 5 - 6 \times (-7) = 45 + 42 = 87 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha = 12 \times 5 - 8 \times (-7) = 60 + 56 = 116 \end{cases}$

Cela est conforme à l'étude faite avec python.

b) dans le cas où $u_0 = 2,\ v_0 = 3$, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9u_0 - 6v_0 = 18 - 18 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 12u_0 - 8v_0 = 24 - 24 = 0 \end{cases}$

c) dans le cas où $u_0 = 3,\ v_0 = 4$, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9u_0 - 6v_0 = 27 - 24 = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 12u_0 - 8v_0 = 36 - 32 = 4 \end{cases}$

4 - $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.V_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d'où les expressions explicites de u_n et v_n : $\begin{cases} u_n = 3\alpha + 2.\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = 4\alpha + 3.\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 3\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n = \frac{3\alpha}{1-x} + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{3\alpha}{1-x} + \frac{2\beta}{1-\frac{x}{2}} = \frac{3\alpha}{1-x} + \frac{4\beta}{2-x} = \frac{3\alpha(2-x) + 4\beta(1-x)}{(1-x)(2-x)} = \frac{6\alpha + 4\beta - (3\alpha + 4\beta)x}{(1-x)(2-x)}$$

$$S(x) = \frac{6(3u_0 - 2v_0) + 4(-4u_0 + 3v_0) - (3(3u_0 - 2v_0) + 4(-4u_0 + 3v_0))x}{(1-x)(2-x)}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ S(x) = \frac{2u_0 + 7u_0 - 6v_0)x}{x^2 - 3x + 2}} \qquad (R = 1)$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\,!} x^n = 3\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n\,!} = 3\alpha e^x + 2\beta e^{x/2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = 3(3u_0 - 2v_0)e^x + (-4u_0 + 3v_0)e^{x/2}} \qquad (R = +\infty)$$