PSI* ORAUX 2017 -

Note : la section 1 contient des sujets CCP et ENSAM.
la section 2 contient des sujets Centrale - Supelec.
L'épreuve maths 1 dure 30mn sans préparation, l'épreuve maths 2 dure 30mn avec préparation de 30 mn, et usage de Python. L'une et l'autre ont pour coefficient 12/100 .
la section 3 contient des sujets Mines-Ponts et écoles du même groupe .
la section 4 contient des sujets X-ENS

Les exercices plus difficiles sont indiquées par une ou deux **

1 CCP - ENSAM : -

1.1 CCP **9 RMS**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle.

a) Quel est le rang de la matrice A ?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
c) On revient au cas général. On pose $B = 2A - \text{tr}(A)I_n$. Calculer le déterminant de B.
d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
f) Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

***SOLUTION* :** a) Si on note C la colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, qui est non nulle puisque $A \neq 0$, alors $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C & C & \cdots & C \end{array} \right)$ est une matrice de rang 1 puisque toutes ses colonnes sont égales et que $A \neq 0$. $\boxed{\text{rg}(A) = 1}$

b) En notant $\sigma = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $A^2 = \begin{pmatrix} a_1\sigma & a_1\sigma & \cdots & a_1\sigma \\ a_2\sigma & a_2\sigma & \cdots & a_2\sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n\sigma & a_n\sigma & \cdots & a_n\sigma \end{pmatrix} = \sigma A$

A est une matrice de projection $\iff A^2 = A \iff \sigma A = A \iff (\sigma - 1)A = 0$
$\iff \sigma = 1$

En conclusion, $\boxed{A \text{ est une matrice de projection } \iff \sigma = 1 \iff \text{tr}(A) = 1}$

c) $\det(2A - \text{tr}(A)I_n = \begin{vmatrix} 2a_1 - \sigma & 2a_1 & \cdots & 2a_1 \\ 2a_2 & 2a_2 - \sigma & \cdots & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \cdots & 2a_n - \sigma \end{vmatrix}$

$$\underset{(L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n)}{=} \begin{vmatrix} \sigma & \sigma & \cdots & \sigma \\ 2a_2 & 2a_2 - \sigma & \cdots & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \cdots & 2a_n - \sigma \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2a_2 & 2a_2 - \sigma & \cdots & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_n & 2a_n & \cdots & 2a_n - \sigma \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_n \\ C_2 \longleftarrow C_2 - C_n \\ \vdots \\ C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_n \end{pmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -\sigma & \cdots & 0 & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sigma & 2a_{n-1} \\ \sigma & \sigma & \cdots & \sigma & 2a_n - \sigma \end{vmatrix}_n$$

En développant successivement suivant la première ligne puis la première colonne,

$$\det(2A - \text{tr}(A)I_n = \sigma(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sigma \\ \sigma & \sigma & \cdots & \sigma \end{vmatrix}_{n-1} = -\sigma^2 \begin{vmatrix} -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sigma \end{vmatrix}_{n-2}$$

$\boxed{\det(2A - \text{tr}(A)I_n = (-1)^{n-1}\sigma^n = (-1)^{n-1}\text{tr}(A)^n}$

d) $\boxed{B \text{ est inversible } \iff \det(B) \neq 0 \iff \mathrm{tr}(A) \neq 0}$

e) $B^2 = (2A - \mathrm{tr}(A)I_n)^2 = 4A^2 - 4\mathrm{tr}(A)A + \mathrm{tr}(A)^2 I_n$ Or $A^2 = \mathrm{tr}(A).A$, d'où :

$B^2 = 4\mathrm{tr}(A)A - A4\mathrm{tr}(A)A + \mathrm{tr}(A)^2 I_n = \mathrm{tr}(A)^2 I_n$ donc $\boxed{B^{-1} = \frac{1}{(\mathrm{tr}(A))^2} I_n}$

1.2 CCP **23 RMS**

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes.

a) Que peut-on dire de u ?

b) Montrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ est solution de l'équation (E) : $g^2 = u$, alors tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de g.

c) Combien l'équation (E) admet-elle de solutions ?

SOLUTION **:** a) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

b) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u, supposées distinctes. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, tel que $g^2 = u$.

Alors $g_o u = g_o g^2 = g^3 = g_o^2 g = u_o g$.

Soit x un vecteur propre de u. Il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $u(x) = \lambda_i x$. λ_i étant une valeur propre simple, le sous espace $E_u(\lambda_i)$ est la droite $\mathrm{Vect}(x)$.

$g_o u(x) = g[u(x)] = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)) = u_o g(x)$. L'égalité $u[g(x)] = \lambda_i g(x)$ montre que :

$g(x) \in E_u(\lambda_i) = \mathrm{Vect}(x)$.

Donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \mu x$, ce qui montre que $\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } g}$.

b) Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u (u a été supposé diagonalisable).

La matrice de u dans cette base est $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$tel que $g^2 = u$. d'après la question précédente, $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ sont des vecteurs propres de g. Donc la matrice de g dans la base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est diagonale, de la forme : $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$.

$g^2 = u \iff D^2 = \Delta \iff \forall i, \mu_i^2 = \lambda_i$

• **Premier cas :** Aucune des valeurs propres λ_i de u n'est nulle (ce qui équivaut à supposer que u est inversible puisque $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i)$. Chaque complexe λ_i admet deux racines carrées non nulles opposées dans $\mathbb{C}$, β_i et $-\beta_i$

Donc $D = \begin{pmatrix} \pm\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm\beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm\beta_n \end{pmatrix}$, ce qui donne 2^n solutions.

• **Deuxième cas :** L'une des valeurs propres de u est nulle (par exemple λ_1) (ce qui équivaut à supposer que u est n'est pas inversible).

Alors $\lambda_1 = 0$ admet une seule racine carrée dans $\mathbb{C}$, à savoir $\beta_1 = 0$, et les autres λ_i ont deux racines carrées complexes distinctes comme dans le cas précédent.

Donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm\beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm\beta_n \end{pmatrix}$, ce qui donne 2^{n-1} solutions.

1.3 CCP **26 RMS**

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$< A, B >= \mathrm{tr}({}^t A.B)$,

b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer la distance de M à $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$

c) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel et calculer sa dimension.

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à $\mathcal{H}$.

SOLUTION : a) Voir le cours. L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \text{tr}({}^tA.B) \end{array} \right.$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \forall N \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$,

$< W, N >= \text{tr}({}^tM.N) = \text{tr}(M.N) = \text{tr}({}^t(M.N)) = \text{tr}({}^tN.M) = \text{tr}(-N.M) = -\text{tr}(M.N) = - < M, N >$

donc $< M, N >= 0$, ce qui montre que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, soit encore que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$

De plus, $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp)$, ce qui montre par inclusion et égalité des dimensions que $\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^\perp}$

Par le théorème de la projection, on sait que si M est un vecteur d'un espace euclidien E, et F un sous-espace de E, alors la distance de M à F est : $d(M,F) = \|M - p(M)\|$ où $p(M)$ est le projeté orthogonal de M sur le sous espace F.

La décomposition $M = \underbrace{\dfrac{M + {}^tM}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\dfrac{M - {}^tM}{2}}_{\in A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp}$ montre que le projeté orthogonal de M sur le sous espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$. Donc $d(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \|M - p(M)\| = \left\| \dfrac{M - {}^tM}{2} \right\|$

Lorsque $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M - p(M) = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$d(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \left\| \dfrac{M - {}^tM}{2} \right\|^2 = \dfrac{1}{4}(0 + 1 + 9 + 1 + 0 + 4 + 9 + 4 + 0) = 7$. Donc $\boxed{d(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \sqrt{7}}$

c) • L'application "trace" : $(M \mapsto \text{tr}(M))$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Son noyau } \mathcal{H} \text{ est donc un hyperplan vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ de dimension } n^2 - 1}$

(puisque $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$) .

• Remarquons que $\forall M \in \mathcal{H}$, $< I_n, M >= \text{tr}({}^tI_n.M) = \text{tr}(M) = 0$. Donc $I_n \in \mathcal{H}^\perp$. Puisque $\mathcal{H}$ est un hyperplan, son orthogonal est une droite, qui contienr I_n. C'est donc la droite $\text{Vect}(I_n)$: $\boxed{\mathcal{H}^\perp = \text{Vech}(I_n)}$

• Notons p la projection orthogonale sur le sous espace $\mathcal{H}$ et q la projection orthogonale sur son supplémentaire orthogonal $\text{Vect}(I_n)$. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p(M) + q(M) = M$.

Décomposons le vecteur $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur la somme $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = \mathcal{H} \oplus \text{Vect}(I_n)$:

$$M = \underbrace{\frac{\text{tr}(M)}{n} I_n}_{\in\, Vect(I_n)} + \underbrace{M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n}_{\in \mathcal{H}}$$

donc $p(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$, mais il est plus simple de faire de calcul sur $q(M) = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$

Puisque la décomposition $M = p(M) + q(M)$ est orthogonale, par le théorème de Pythgore,

$\|M\|^2 = \|p(M)\|^2 + \|q(M)\|^2$

$$d(M, \mathcal{H})^2 = \|M - p(M)\|^2 = \|q(M)\|^2 = \left\| \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n \right\|^2 = \left(\frac{\text{tr}(M)}{n} \right)^2 \underbrace{\|I_n\|^2}_{=1+1+\ldots+1=n} = \frac{(\text{tr}(M))^2}{n}$$

En particulier, si $n = 3$ et $M = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{d(J, \mathcal{H}) = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}}$

1.4 CCP **74 RMS**

Soient p dans $]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la géométrique de paramètre p, $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$.

a) Déterminer les lois de U, de V et de (U, V).

b) Déterminer la loi de $U + V$.

c) Calculer $E(U + V)$.

SOLUTION : a) $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $P(X = k) = pq^{k-1}$ avec $q = 1 - p$

Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*, (U = k) = [(X = k) \cap (Y = 1)] \cup [(X = k) \cap (Y = 2)] \cup \cdots \cup [(X = k) \cap (Y = k - 1)]$

$\cup [(X = k) \cap (Y = k)] \cup [(X = 1) \cap (Y = k)] \cup [(X = 2) \cap (Y = k)] \cup \cdots \cup [(X = k - 1) \cap (Y = k)]$

$= \displaystyle\bigcup_{h=1}^{k} [(X = k) \cap (Y = h)] \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} [(X = l) \cap (Y = k)]$

Ces évènements étant deux à deux incompatibles,

$$P(U = k) = \sum_{h=1}^{k} P[(X = k) \cap (Y = h)] + \sum_{l=1}^{k-1} P[(X = l) \cap (Y = k)]$$

Les variables X et Y étant supposées indépendantes,

$$\begin{aligned}
P(U=k) &= \sum_{h=1}^{k} P(X=k)P(Y=h) + \sum_{l=1}^{k-1} P(X=l)P(Y=k)\\
&= \sum_{h=1}^{k} pq^{k-1}pq^{h-1} + \sum_{l=1}^{k-1} pq^{l-1}pq^{k-1}\\
&= p^2q^{k-1}\sum_{h=1}^{k} q^{h-1} + p^2q^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1} q^{l-1} = p^2q^{k-1}\frac{1-q^k}{1-q} + p^2q^{k-1}\frac{1-q^{k-1}}{1-q}\\
&= pq^{k-1}(1-q^k+1-q^{k-1}) \qquad (\text{ car } 1-q=p)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(U=k) = pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})}$$

- $\forall k\in\mathbb{N}^*, (V=k) = \bigcup_{h=k}^{\infty}[(X=k)\cap(Y=h)] \bigcup_{l=k+1}^{\infty}[(X=l)\cap(Y=k)]$

$$P(V=k) = \sum_{h=k}^{\infty} P[(X=k)\cap(Y=h)] + \sum_{l=k+1}^{\infty} P[(X=l)\cap(Y=k)]$$

$$\begin{aligned}
P(V=k) &= \sum_{h=k}^{\infty} P(X=k)P(Y=h) + \sum_{l=k+1}^{\infty} P(X=l)P(Y=k)\\
&= \sum_{h=k}^{\infty} pq^{k-1}pq^{h-1} + \sum_{l=k+1}^{\infty} pq^{l-1}pq^{k-1}\\
&= p^2q^{k-1}\sum_{h=k}^{\infty} q^{h-1} + p^2q^{k-1}\sum_{l=k+1}^{\infty} q^{l-1} = p^2q^{k-1}\left(\frac{q^{k-1}}{1-q}+\frac{q^k}{1-q}\right)\\
&= pq^{k-1}(q^{k-1}+q^k)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(V=k) = pq^{k-1}(q^k+q^{k-1})}$$

- L'évènement $U=\max(X,Y)=k, V=\min(X,y)=h$ est impossible si $k<h$.

  Si $h=k$, $((U,V)=(k,k)) = (X=k)\cap(Y=k)$, et par indépendance,

  $P[(U,V)=(k,k)] = P(X=k)P(Y=k) = p^2q^{2k-2}$

  Si $h<k$, $((U,V)=(k,h)) = [(X=k)\cap(Y=h)]\cup[(X=h)\cap(Y=k)]$, par incompatibilité et indépendance,

  $P[(U,V)=(k,h)] = P(X=k)P(Y=h)+P(X=h)P(Y=k) = p^2q^{k+h-2}+p^2q^{h+k-2} = 2p^2q^{h+k-2}$

  En résumé, $\boxed{\forall (k,h)\in\mathbb{N}^{*\,2}, P[(U,V)=(k,h)] = \begin{cases} 0 \quad si \quad k<h\\ p^2q^{2k-2} \quad si \quad k=h\\ 2p^2q^{h+k-2} \quad si \quad k>h\end{cases}}$

b) Remarquons que $U+V=X+Y$, donc $(U+V)(\Omega) = \{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2\}$

$$\begin{aligned}
\forall k\geqslant 2,\ (U+V=k) &= (X+Y=k)\\
&= (X=1,Y=k-1)\cup(X=2,Y=k-2)\cup\cdots\cup(X=k-1,Y=1)\\
&= \bigcup_{h=1}^{k-1}(X=h,Y=k-h), \quad \text{par incompatibilité et indépendance,}
\end{aligned}$$

$$P(U+V=k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(X=h)P(Y=k-h) = \sum_{h=1}^{k-1} pq^{h-1}pq^{k-h-1} = p^2\sum_{h=1}^{k-1} q^{k-2}$$

$$\boxed{\forall k\geqslant 2, P(U+V=k) = p^2(k-1)q^{k-2}}$$

c) $E(U+V) = \sum_{k=2}^{\infty} kP(U+V=k) = p^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}$

On sait que : $\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et par application deux fois du théorème de dérivation des séries entières, $\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

d'où : $E(U+V) = p^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$ (puisque $p+q=1$) $\boxed{E(U+V) = \frac{2}{p}}$

1.5 CCP **92 RMS**

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B}$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -3\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$

a) Montrer que $E = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E)$.
b) Donner un élément de $\ker(f^2) - \ker(f)$.
c) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
d) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g. Que peut-on en déduire ?

SOLUTION **:** a) Soit $x \in \ker(f^2) \cap \ker(f - 2Id_E)$.

Alors $f^2(x) = 0$ et $f(x) = 2x$. Donc $f^2(x) = 2f(x) = 4x = 0$, ce qui entraîne que $x = 0$, et montre que $\ker(f^2) \cap \ker(f - 2Id_E) = \{0\}$.

Les deux sous espaces $\ker(f^2)$ et $\ker(f - 2Id_E)$ sont en somme directe.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1. Donc $\dim(\mathrm{Im} f^2) = \mathrm{rg}(A^2) = 1$ et par le théorème du rang, $\dim(\ker f^2) = 3 - 1 = 2$.

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ a pour rang 2 (les deux premières colonnes sont égales et la troisième ne leur est pas colinéaire). Donc $\dim(\ker(f - 2Id_E)) = 3 - 2 = 1$.

Ainsi, $\begin{cases} \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E) \subset E \\ \dim(\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E)) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\ker(f - 2Id_E)) = 2 + 1 = 3 = \dim(E) \end{cases}$

donc $\boxed{\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E) = E}$

b) Soit $x \in E$, de vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Alors $A^2.X = 0$ et $A.X = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \neq 0$, donc $x \in \ker f^2$ mais $x \notin \ker f$; $x \in \ker(f^2) - \ker(f)$

c) Pour trouver une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ dans laquelle la matrice de f soit $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il faut rechercher des vecteurs (u, v, w) tels que $\begin{cases} f(u) = 0 \\ f(v) = u \\ f(w) = 2w \end{cases}$

Prenons donc $v \in \ker(f^2) - \ker(f)$, par exemple $v = x$ de vecteur colonne $V = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi, $f^2(v) = 0$ mais $f(v) \neq 0$. Prenons alors $u = f(v)$, de sorte que $f(u) = f^2(v) = 0$.

u a pour matrice colonne $U = A.V = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Prenons enfin pour w un vecteur non nul de $\ker(f - 2Id_E)$, qui vérifie $(A - 2I_3).W = 0$,

c'est à dire $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.W = 0 \qquad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

(u, v) est une base de $\ker(f^2)$, w est une base de $\ker(f - 2Id_E)$, (u, v, w) est donc une base de E .
(puisque $\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E) = E$)

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathscr{B}' = (u, v, w)\ f \text{ a pour matrice : } Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = f$.

Soit $x \in \ker f^2$: $f^2(x) = 0$.

$f^2(g(x)) = g^4_o g(x) = g^5(x) = g_o g^4(x) = g(f^2(x)) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \ker f^2$.

$\ker f^2$ est donc stable par g.

?????????????????????????????

1.6 CCP **101 RMS**

Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, ainsi que $\mathrm{tr}(A) = 8$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

c) Donner une matrice diagonale semblable à A.

d) Déterminer le polynôme caractéristique et l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

SOLUTION **:** a) Le polynôme $X^3-3X^2+2X = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$.

b) Le polynôme annulateur $X(X-1)(X-2)$ a pour racines $0, 1$ et 2. Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, 2\}$.

Mais A est supposée inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.

Mais, puisque A est diagonalisable, si le spectre de A était réduit à $\{1\}$, A serait semblable à la matrice diagonale I_6, dont la trace vaut 6 et non pas 8. Ce cas est donc exclu.

De même, si le spectre de A était réduit à $\{2\}$, A serait semblable à la matrice diagonale $2\,I_6$, dont la trace vaut 12 et non pas 8. Ce cas est lui aussi exclu. Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}}$

c) A est diagonalisable et a pour valeurs propres 1 et 2.

Donc A est semblable à une matrice diagonale du type $diag(\underbrace{1, \cdots, 1}_{p\ fois}, \underbrace{2, \cdots, 2}_{p\ fois})$, avec $\begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant 5 \\ 1 \leqslant q \leqslant 5 \\ p+q = 6 \\ p + 2q = \mathrm{tr}(A) = 8 \end{cases}$

Les deux dernières équations donnent immédiatement : $p = 4$, $q = 2$.

Donc A est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) Le polynôme caractéristique de A est $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2}$ (c'est celui de Δ)

$\boxed{\text{Les polynômes annulateurs de } A \text{ sont les polynômes de la forme } Q(X) = (X-1)(X-2)T(X),\ T(X) \in \mathbb{R}[X]}$

1.7 CCP **109 RMS**

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation : $M^2 + {}^tM = I_n$

a) Montrer que M est diagonalisable.

b) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de M, et que M est inversible.

c) Montrer que M admet un polynôme annulateur de degré 2 , que M est symétrique et de trace nulle.

SOLUTION **:** a) Recherchons un polynôme annulateur de M :

$$\begin{aligned} M^2 + {}^tM = I_n &\implies {}^tM = I_n - M^2 \implies M = I_n - ({}^tM)^2 \\ &\implies M = I_n - (I_n - M^2)^2 \implies M = I_n - (I_n - 2M^2 + M^4) \\ &\implies M = 2M^2 - M^4 \\ &\implies M^4 - 2M^2 + M = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $Q(X) = X^4 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.

$Q(X) = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1)$

$\delta = 1 + 5 > 0$. Le polynôme $X^2 + X - 1$ admet pour racines $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Donc $Q(X) = X(X-1)(X-x_1)(X-x_2)$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$. La matrice M admet un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Supposons que 1 soit valeur propre de M. Alors il existe un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que :

$M.V = 1.V = V$.

Alors $M^2.V = M.V = V$ et ${}^t(M.V) = {}^tV = {}^tV\,{}^tM$

En multipliant l'égalité $M^2 + {}^tM = I_n$ à gauche par ${}^tV$ et à droite par V, on obtient :

$${}^tV.\underbrace{M^2.V}_{=V} + \underbrace{{}^tV\,{}^tM}_{={}^tV}.V = {}^tV.V = \|V\|^2 \implies \|V\|^2 + \|V\|^2 = \|V\|^2 \implies \|V\|^2 = 0 \implies V = 0\ ,$$

ce qui est absurde puisqu'un vecteur propre est par définition non nul.

Donc $\boxed{1 \text{ n'est pas valeur propre de } M}$

• Dès lors, $\underbrace{\chi_M(1)}_{\neq 0} = \det(I_n - 1.M) = \det(I_n - {}^tM) = \det(M^2) = (\det M)^2 \neq 0$.

La relation $\det(M) \neq 0$ entraîne que $\boxed{M \text{ est inversible}}$.

c) On a vu que $Q(M) = M(M - I_n)(M^2 + M - I_n) = 0$

M est inversible (question précédente), de même que $M - I_n$ puisque $\det(M - I_n) = \chi_M(1) \neq 0$

En multipliant la relation précédente à gauche par M^{-1} puis par $(M - I_n)^{-1}$, on obtient :

$M^2+M-I_n=0$, ce qui montre que $\boxed{\text{le polynôme } X^2+X-1 \text{ est un polynôme annulateur de } M}$.

• En soustrayant les deux relations $\begin{cases} M^2+{}^tM-I_n=0 \\ M^2+M-I_n=0 \end{cases}$, on obtient : ${}^tM=M$, ce qui montre que $\boxed{\text{la matrice } M \text{ est symétrique}}$

1.8 CCP **178**

Soit $A\in\mathbb{R}^n$ une matrice colonne non nulle. (n entier $\geqslant 2$)

Montrer que $B=A.A^T$ est diagonalisable.

Déterminer le rang de B. Calculer B^2.

Donner les éléments propres de A. Calculer $\det(I_n+B)$ en fonction du vecteur A.

SOLUTION : $A=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. $\quad B=A.A^T=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$

$$B=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1A & a_2A & \cdots & a_nA\end{array}\right)$$ (matrice carrée définie par blocs colonnes)

Chaque colonne est colinéaire à la colonne A, donc $\operatorname{rg}(B)\leqslant 1$.

La colonne A n'est pas nulle, il existe un indice k tel que $a_k\neq 0$. Alors la colonne a_kA de la matrice B n'est pas nulle, ce qui montre que $\operatorname{rg}(B)\geqslant 1$. Finalement $\boxed{\operatorname{rg}B=1}$

• $B^2=A.A^T.A.A^T=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$

$$=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right).B$$

$$\boxed{B^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right).B=\operatorname{tr}(B).B=\|A\|^2.B}$$

• B est de rang $1<n$. Donc 0 est valeur propre de B. Par ailleurs $\dim(E_0(A))=n-\operatorname{rg}(B)=n-1$. Et puisque B est diagonalisable, $\dim(E_0(A))=\operatorname{ordre}(B)$.

Donc 0 est valeur propre de B d'ordre $n-1$. Reste une dernière valeur propre λ non nulle à déterminer.

Le polynôme $Q(X)=X^2-\operatorname{tr}(B)X=X(X-\operatorname{tr}(B))$ est un polynôme annulateur de B.

Donc $\operatorname{Sp}(B)\subset\{0,\operatorname{tr}(B)\}$. La dernière valeur propre de B ne peut être que $\lambda=\operatorname{tr}(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2=\|A\|^2$.

Donc $\boxed{\operatorname{Sp}(B)=\{0,\operatorname{tr}(B)\}=\{0,\|A\|^2\}}$

Remarque : On peut aussi déterminer la dernière valeur propre par la relation qui donne la somme des valeurs propres d'une matrice : $(n-1)\times 0+\lambda=\operatorname{tr}(B)=\|A\|^2$

• Recherchons les sous-espaces propres. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

$$B.X=0\iff A.A^T.X=0\iff\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\times\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$$

$$\iff\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\times\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right)=0\iff\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right).A=0\iff\sum_{i=1}^n a_ix_i=0$$

$\boxed{\text{Le sous espace propre } E_0(B)=\ker B \text{ est l'hyperplan d'équation } a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0}$

C'est aussi l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ orthogonal au vecteur A.

On sait que les sous-espaces propres d'une matrice réelle symétrique sont deux à deux orthogonaux.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le sous-espace propre de } B \text{ associé à la valeur propre } \mathrm{tr}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0 \\ \text{est donc la droite vectorielle de } \mathbb{R}^n \text{ dirigée par le vecteur } A.\end{array}}$$

• Puisque B est diagonalisable et a 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$, et $\|A\|^2$ pour valeur propre simple, $\boxed{\chi_B(X) = X^{n-1}(X - \|A\|^2)}$

• B est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \det(B) \end{pmatrix}$

$I_n + B$ est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\det(B) \end{pmatrix}$

Deux matrices semblables ayant même déterminant, $\boxed{\det(I_n + B) = 1 + \mathrm{tr}(B) = 1 + \|A\|^2}$

Autre raisonnement : $\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = (-1)^n \det(B - xI_n) = x^{n-1}(x - \|A\|^2)$

Donc $\det(I_n + B) = (-1)^n \chi_B(-1) = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1 - \|A\|^2) = 1 + \|A\|^2$

CCP **181**

Résoudre matriciellement le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = -x - 4y + 4e^t \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

SOLUTION : a) Réduisons la matrice du système $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+1)(x-3) + 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

A admet une unique valeur propre double : $\lambda = 1$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc égale à I_2, ce qui n'est pas le cas.

A n'est donc pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$)

Montrons que A est semblable à la réduite de Jordan $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Considérons l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A : la matrice de g dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

• Recherchons le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$: Soit $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$A.V = 1.V \iff (A - I_2).V = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a + 2b = 0$

Le sous espace propre $E_1(A)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

• Recherchons un second vecteur V_2 tel que la matrice de g dans la base (V_1, V_2) soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il faut et suffit pour cela que $g(V_2) = V_1 + V_2$.

Soit $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $\quad A.V_2 = V_1 + V_2 \iff (A - I_2).V_2 = V_1$

$\iff \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2a - 4b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \iff a + 2b = -1$

On peut prendre pas exemple $(a, b) = (-1, 0)$. Alors $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}' = (V_1, V_2)$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

• Les relations $\begin{cases} A.V_1 = V_1 \\ A.V_2 = V_1 + V_2 \end{cases}$ montrent que la matrice de l'endomorphisme g dans la base $\mathscr{B}'$ est $\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

La formule de changement de base pour un endomorphisme nous permet alors d'écrire :

$R = P^{-1}.A.P$, ou, de manière équivalente : $\boxed{A = P.R.P^{-1}}$

b) Passons à la résolution du système $\mathscr{S}$:

$\mathscr{S}$ est un système différentiel du premier ordre linéaire. Notons $\mathscr{S}_0$ le système homogène associé.

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

X est solution du système homogène $\mathscr{S}_0$ si et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A.X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = P.R.P^{-1}.X(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}.X'(t) = R.P^{-1}.X(t)$ (en multipliant à gauche par la matrice inversible P^{-1})

Intoduisons $Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$, de sorte que $Y'(t) = P^{-1}.X'(t)$ puisque P^{-1} est une matrice constante. Le système équivaut alors à : $Y'(t) = R.Y(t)$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = \alpha(t) + \beta(t) & (1) \\ \beta'(t) = \beta(t) & (2) \end{cases}$ La solution générale de (2) est : $t \mapsto \beta(t) = k_2 e^t$

L'équation (1) s'écrit alors : $\alpha'(t) - \alpha(t) = k_2 e^t$, équation scalaire du premier ordre avec second membre qui a pour solution générale $t \mapsto \alpha(t) = k_2 t e^t + k_1 e^t$

d'où $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 t e^t + k_1 e^t \\ k_2 e^t \end{pmatrix} = k_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_2 t e^t + k_1 e^t \\ k_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \mid V_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_2 t e^t + k_1 e^t \\ k_2 e^t \end{pmatrix}$

$X(t) = (k_2 t e^t + k_1 e^t) V_1 + k_2 e^t V_2 = k_1 \underbrace{e^t V_1}_{X_1(t)} + k_2 \underbrace{(t e^t V_1 + e^t V_2)}_{X_2(t)}$

La solution générale de $\mathscr{S}_0$ est la fonction vectorielle $X = k_1 X_1 + k_2 X_2$

avec $X_1(t) = e^t V_1$ et $X_2(t) = t e^t V_1 + e^t V_2$

• Recherchons une soltion particulière de l'équation complète $\mathscr{S}$ de la forme $X(t) = a(t) X_1(t) + b(t) X_2(t)$:

X est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A.X(t) + \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a'(t)X_1(t) + a(t)X_1'(t) + b'(t)X_2(t) + b(t)X_2'(t) = a(t)A.X_1(t) + b(t)A.X_2(t) + \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a'(t)X_1(t) + b'(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ (simplifications car $X_1' = AX_1$ et $X_2' = AX_2$)

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a'(t)e^t V_1 + b'(t)(t e^t V_1 + e^t V_2) = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a'(t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b'(t) \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en simplifiant par $e^t \neq 0$)

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2a'(t) + (2t-1)b'(t) = 4 \\ -a'(t) - tb'(t) = 0 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} b'(t) = -4 \\ a'(t) = tb'(t) \end{cases}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} b(t) = -4t + c_1 \\ a(t) = -2t^2 + c_2 \end{cases}$ $((c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2)$

$\boxed{\text{La solution générale de } \mathscr{S} \text{ est : } t \mapsto X(t) = (-2t^2 + c_2)X_1(t) + (-4t + c_1)X_2(t)}$

1.9 CCP 182

On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, non nul, tel que $f^3 + f = 0$.

Montrer que f n'est pas inversible. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker f$ sont supplémentaires.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3 - \ker f$, $(f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im} f$. Calculer $\mathrm{tr} f$.

***SOLUTION*:** •. Supposons que f est inversible. En composant l'égalité $f^3 + f = 0$ par f^{-1}, on obtient :

$f^2 + Id = 0$. Alors $f^2 = -Id$, et prenant le déterminant, $\det(f^2) = \det(-Id) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

donc $(\det f)^2 = -1$, ce qui est impossible puisque $\det f$ est un réel.

On a ainsi prouvé par l'absurde que $\boxed{f \text{ n'est pas inversible}}$.

• Puisque $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, le corps de référence est $\mathbb{R}$. Le polynôme $X^3 + X = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f, dont la seule racine réelle est 0. (il possède aussi i et $-i$ comme racines complexes).

Si f est diagonalisable, toute valeur propre de f est un réel, racine de ce polynôme. Donc 0 serait la seule valeur propre de f. Il existerait une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f serait diagonale, avec 0 sur la diagonale. Cette matrice diagonale serait donc la matrice nulle, et f serait l'endomorphisme nul, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

• Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \ker f$: $\exists t \in \mathbb{R}^3,\ x = f(t)$ et $f(x) = 0$.

En composant par f^2, on obtient :

$f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0 = f^2(f(t)) = f^3(t) = -f(t) = -x$, donc $x = 0$.

On ainsi montré que la somme $\mathrm{Im} f \oplus \ker f$ est directe.

Alors, $\dim(\mathrm{Im} f \oplus \ker f) = \underbrace{\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f)}_{formule\ de\ Grassmann} = \dim(\mathbb{R}^3)$ (théorème du rang).

L'inclusion $\mathrm{Im} f \oplus \ker f \subset \mathbb{R}^3$, et l'égalité des dimensions entraînent que $\mathrm{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$

Les sous espaces $\mathrm{Im} f$ et $ker f$ sont donc supplémentaires.

• Soit $x \in \mathbb{R}^3 - \ker f$. $f(x)$ et $f^2(x)$ sont deux vecteurs de $\mathrm{Im} f$.

Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$.

En composant par f, on obtient : $\lambda f^2(x) + \mu f^3(x) = 0$, c'est à dire $\lambda f^2(x) - \mu f(x) = 0$

$$\begin{cases} \lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0 & (\times \lambda) \\ -\mu f(x) + \lambda f^2(x) = 0 & (\times -\mu) \end{cases} \implies (\lambda^2 + \mu^2)\underbrace{f(x)}_{\neq 0} = 0$$

$\implies \lambda^2 + \mu^2 = 0 \quad \implies \lambda^2 = \mu^2 = 0 \quad \implies \lambda = \mu = 0$

$\boxed{\text{Le système } (f(x), f^2(x)) \text{ est donc un système libre de } \mathrm{Im} f. \text{ Donc } \dim(\mathrm{Im} f) \geqslant 2}$

Puisque f n'est pas inversible, $\mathrm{rg} f = \dim(\mathrm{Im} f) \leqslant 2$. Donc $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.

$(f(x), f^2(x))$ est un système libre de deux éléments, dans l'espace $\mathrm{Im} f$ qui est de dimension 2. C'en est donc une base. Ainsi, $\boxed{(f(x), f^2(x)) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$

• Puisque $\mathrm{rg} f = 2$, par le théorème du rang, $\ker f$ est un sous espace de dimension 1. Soit z un vecteur non nul de $\ker f$. Il forme à lui seul une base de $\ker f$.

Puisque $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont suppémentaire, la réunion de la base z de $\ker f$ et de la base $(f(x), f^2(x))$ de $\mathrm{Im} f$ forme une base $(z, (f(x), f^2(x))$ de $\mathbb{R}^3$. Les relations : $\begin{cases} f(z) = 0 \\ f(f(x)) = f^2(x) \\ f(f^2(x)) = f^3(x) = -f(x) \end{cases}$ montrent que la matrice de f dans cette base est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où l'on déduit que $\boxed{\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 0}$

1.10 CCP 189

1- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n\,!} t^n$ et calculer sa somme.

2- Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ a pour fonction génératrice $G_X(t) = \lambda S(t)$ où $\lambda > 0$.

Déterminer λ, puis calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappeler les expressions de $E(X)$ et de $V(X)$ en fonction de la fonction génératrice G_X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

***SOLUTION*:** 1- La série entière $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n\,!} t^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ (immédiat par le critère de d'alembert)

$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)+2n+1}{n\,!} t^n = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n\,!} t^n + 2 \sum_{n=0,1}^{\infty} \frac{n}{n\,!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!}$

$$S(t) = t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,!} t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} = (t^2 + 2t + 1)e^t$$

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = (t^2 + 2t + 1)e^t}$

2- Soit X une variable aléatoire vérifiant : $G_X(t) = \lambda S(t)$.

Alors, $G_X(1) = 1 = \lambda S(1) = 4\lambda e$. Donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{4\,e}}$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \dfrac{1}{4\,e}S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+n+1}{4e\,n\,!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n$, et par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{n^2+n+1}{4e\,n\,!}}$

• On sait que : $\begin{cases} G_X(1) = 1 \\ E(X) = G'_X(1) \\ V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t)(t) = \frac{1}{4\,e}(t^2+2t+1+2t+2)e^t = \dfrac{t^2+4t+3}{4\,e}e^t$

$G''_X(t)(t) = \dfrac{t^2+4t+3+2t+4}{4\,e}e^t = \dfrac{t^2+6t+7}{4\,e}e^t$

d'où $\boxed{E(X) = G'_X(t)(1) = 2}$

$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{14}{4} + 2 - 4 = \frac{3}{2}$ $\quad\boxed{V(X) = \frac{3}{2}}$

1.11 CCP **200**

I) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 est valeur propre .

A est elle diagonalisable ?

II) Domaine de définition et dérivation de la fonction f définie par : $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Conclure.

SOLUTION : I) Remarquons que les colonnes 1, 3 et 4 sont égales, mais non colinéaires à la colonne 2. Donc A est de rang 2. Donc 0 est valeur propre d A et le sous espace propre $E_A(0)$ a pour dimension $4-2=2$.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x-z & -1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x-z & -1 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}}_{=-x^2}$$

$= x(x^2(x-z) - x - x) - x^2 \qquad$ (règle de Sarrus)

$= x^4 - zx^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - zx - 3)$

0 n'étant pas racine du polynôme $X^2 - zX - 3$, elle est valeur propre de A d'ordre 2.

Le polynôme $X^2 - zX - 3$ a pour discriminant $\delta = z^2 + 12 = (z - 2i\sqrt{3})(z + 2i\sqrt{3})$

• Si $z = 2i\sqrt{3}$, alors $X^2 - zX - 3$ a une racine double $\alpha = i\sqrt{3}$. Donc $\alpha = i\sqrt{3}$ est valeur propre double de A.

La matrice $A - i\sqrt{3}I_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est de rang 3.

Donc $\dim(E_\alpha(0)) = 4 - 3 = 1 < ordre(\alpha) = 2$

La matrice A n'est pas diagonalisable.

• Raisonnement et résultat analogue si $z = -2i\sqrt{3}$

• Si $z \in \mathbb{C} - \{2i\sqrt{3}, -2i\sqrt{3}\}$, outre la valeur propre double 0, A possède deux valeurs propres complexes (éventuellement réelles) simples, dont le sous espace propre est de dimension 1. La somme des dimensions des trois sous-espaces propres est $1+1+2=4$ et la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Remarque : Si $z \in \mathbb{R}$, A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

la fonction f définie par : $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

II) La fonction Arcsin est définie et continue sur le segment $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 1 + x^2 \implies |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2} \implies \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$

$\implies -1 < \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$

Par compostion, la fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\frac{1\times\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2-x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \text{Arctan}x + k$

Au point 0, $f(0) = \text{Arcsin}0 = 0 = k$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \text{Arctan } x}$

1.12 CCP **205 RMS**

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{2^n}$

Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

a) Quelle est la probabilité de gagner une partie ?

b) Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

SOLUTION **:** a) Notons U l'évènement : la partie est gagnée.

$U = (N = 2) \cup (N = 4) \cup \cdots = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (N = 2k).$

Par incompatibilité de ces évènements, $P(U) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(N = 2k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^k} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{P(U) = \frac{1}{3}}$

b) Si $N = 2k$, $G = 2k$. Si $N = 2k + 1$, $G = -(2k + 1)$.

$G(\Omega) = (2N^*) \cup [-(2\mathbb{N} + 1)]$ (union des entiers pairs $\geqslant 2$ et des entiers impairs $\leqslant -1$)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(G = 2k) = P(N = 2k) = \dfrac{1}{4^k}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(G = -(2k + 1)) = P(N = 2k + 1) = \dfrac{1}{2^{2k+1}} = \dfrac{1}{2\ 4^k}$

$$E(G) = \sum_{k=1}^{\infty} P(G = 2k) \times 2k - \sum_{k=0}^{\infty} P(G = -2k - 1) \times (2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2\ 4^k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On sait que : $\forall x \in]-1, 1[,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ et par application du théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

d'où : $E(G) = 2 \times \dfrac{1}{4} \sum\limits_{k=0,1}^{\infty} k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} - \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

$$E(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{9} \qquad \boxed{E(G) = -\frac{2}{9}}$$

1.13 CCP **206 RMS**

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

a) Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.

b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

c) On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

a) $X_n(\omega) = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geqslant 2\}$

Si on note *abc*... le tirage dans lequel la première boule tirée est a, la seconde boule tirée est b,la troisième boule tirée est c , etc . . .

pour tout $k \geqslant 2$, $\quad (X_n = k) = \bigcup\limits_{i=1\ldots n,\ j \neq i} \underbrace{a_i\ a_i\ \cdots\ a_i}_{k-1\ fois}\ a_j\ \cdots$

????????????

1.14 CCP **208 RMS**

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les lancers successifs sont indépendants. On note X_k la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au k-ième lancer.

a) Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F associée à X_k.

b) On note Z_n la valeur maximale obtenue au bout de n lancers. Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de F.

c) Déterminer la limite de (F_n) lorsque n tend vers l'infini. La convergence est elle uniforme ?

d) On note Y_n la valeur minimale obtenue au bout de n lancers. Déterminer sa fonction de répartition.

SOLUTION : a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k est la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au k-ième lancer.

Le dé étant supposé équilibré, les six résultats possibles sont équiprobables :

$\forall m \in \{1,2,3,4,5,6\}, P(X_k = m) = \frac{1}{6}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X_k \leqslant x)$

$\forall m \in \{1,2,3,4,5,6\},\ (X_k \leqslant m) = (X_k = 1) \cup (X_k = 2) \cup \cdots \cup (X_k = m)$. Ces évènements étant incompatibles, $P(X_k \leqslant m) = p(X_k = 1) + P(X_k = 2) + \cdots + P(X_k = m) = \frac{m}{6}$

m	1	2	3	4	5	6
$F(m) = P(X_k \leqslant m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Z_n \leqslant m) = (X_1 \leqslant m) \cap (X_2 \leqslant m) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant m)$

Les X_k étant supposées mutuellement indépendantes,

$$F_n(m) = P(Z_n \leqslant m) = P(X_1 \leqslant m)P(X_2 \leqslant m) \times \cdots \times P(X_n \leqslant m) = \left(\tfrac{m}{6}\right)^n = [F(m)]^n$$

c) Si $m \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(m) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{m}{6}\right)^n = 0$

Si $m = 6$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(m) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{6}{6}\right)^n = 1$

Si on note G la fonction limite de la suite de fonctions (F_n), elle est donnée par le tableau suivant :

m	1	2	3	4	5	6
$G(m)$	0	0	0	0	0	1

$\|G - F_n\|^{\infty}_{\{1,2,3,4,5,6\}} = \max\limits_{m\in\{1,2,3,4,5,6\}} |G(m) - F_n(m)| = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (F_n) vers la fonction G.

d) Pour $m = 6$, $P(Y_n \leqslant 6) = 1$ (la valeur minimale obtenue sur n lancers est toujours $\leqslant 6$)

$\forall m \in \{1,2,3,4,5\},\ \overline{(Y_n \leqslant m)} = (Y_n \geqslant m+1) = (X_1 \geqslant m+1) \cap (X_2 \geqslant m+1) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant m+1)$

$P(\overline{Y_n \leqslant m}) = P(X_1 \geqslant m+1)P(X_2 \geqslant m+1) \times \cdots \times P(X_n \geqslant m+1)$ (indépendance des X_k)

$= \left(\dfrac{6-m}{6}\right)^n$

d'où $\boxed{P(Y_n \leqslant m) = 1 - P(Y_n \geqslant m+1) = 1 - \left(\dfrac{6-m}{6}\right)^n}$

1.15 CCP **209**

I- Déterminer la nature des intégrales :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{+\infty} \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

II - Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Avec un minimum de calcul, déterminer les valeurs propres de A et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semplable à A.

Montrer que si une matrice M commute avec D, alors elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

SOLUTION : I -a) La fonction $t \mapsto e^{\sin t}$ est définie et continue sur le fermé $[1, +\infty[$, comme composée des fonctions exponentielle et sinus qui sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est elle aussi définie et continue sur le fermé $[1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{\sin t}}{t}$ est alors définie et continue sur le fermé $[1, +\infty[$ comme produit de deux fonctions qui le sont.

$\forall t \in [1, +\infty[,\ -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, et donc $\dfrac{e^{-1}}{t} \leqslant \dfrac{e^{\sin t}}{t}$. L'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, et par minoration l'intégrale $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$ l'est aussi.

b) La fonction $t \mapsto \sin t\ \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est définie et continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$, comme produit ou composée de fonctions qui le sont.

La fonction $t \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est bornée sur $]0, +\infty[$ et $\sin t \to 0$ quand $x \to 0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin t \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) = 0$.

On peut prolonger la fonction $t \mapsto \sin t\ \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ par continuité au point 0. Elle est alors intégrable sur tout segment de la forme $[0, a], a > 0$

• Étudions la convergence de l'intégrale pour la borne $+\infty$:

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Intégrons par parties comme suit :

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[-\cos t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^b - \int_a^b -\cos t\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) \times \frac{-1}{t^2} dt \\ &= -\cos b\ \sin\left(\frac{1}{b}\right) + \cos a\ \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \int_a^b \frac{1}{t^2}\cos t\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \qquad (*)\end{aligned}$$

$\forall t \in [a, +\infty]$, $\left|\frac{1}{t^2}\cos t\ \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, et on sait que l'intégrale de référence $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

Par majoration, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}\cos t\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est donc absolument convergente.

Puisque $\cos b$ est borné et que $\lim_{b\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{b}\right) = 0$, de la relation (*) on déduit que :

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \cos a\ \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}\cos t\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Cela montre que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge. Et puisque l'intégrale $\int_0^a \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge aussi, par additivité $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \sin t\ \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \text{ est convergente}}$.

II - $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -2 & 4 & x+1 \end{vmatrix}$

En développant suivant la dernière colonne apparait le facteur $(x+1)$, ce qui montre que -1 est valeur valeur propre. En développant suivant la deuxième ligne apparait le facteur $(x-3)$, ce qui montre que 3 est valeur valeur propre. Il reste à calculer une troisième valeur propre λ_3. La trace de la matrice donne la som des valeurs propres : $-1+3+\lambda_3 = \mathrm{tr}(A) = 3$, donc $\lambda_3 = 1$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 3\}$. A, matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distictes dans $\mathbb{R}$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

• Recherchons les sous espaces propres de A :

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) &\iff A.V = -V \iff (A+I_3).V = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a-2b=0 \end{cases} \iff a=b=0 \end{aligned}$$

Donc le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{1}(A) &\iff A.V = V \iff (A-I_3).V = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b=0 \\ a=c \end{cases} \iff a=c \text{ et } b=0. \end{aligned}$$

Donc le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $+1$.

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{3}(A) &\iff A.V = 3V \iff (A-3I_3).V = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a=b \\ a=-2c \end{cases} \iff a=b \text{ et } a=-2c. \end{aligned}$$

Donc le vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $+3$.

• Diagonalisation de A:

$$\boxed{A = P.D.P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

• Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\Delta = (\delta_{i,j}) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale ayant des termes diagonaux deux à deux distincts.

$$\begin{aligned}
M.\Delta = \Delta.M &\iff \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ (M.\Delta)_{i,j} = (\Delta.M)_{i,j} \\
&\iff \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}.\Delta_{k,j} = \sum_{h=1}^{n} \Delta_{i,h}.m_{h,j} \\
&\iff \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ m_{i,j}.\Delta_{j,j} = \Delta_{i,i} m_{i,j} \qquad \text{(les autres termes sont nuls)} \\
&\iff \forall (i,j) \in \{1,2,\cdots,n\}^2,\ m_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0 \\
&\iff \forall i \neq j,\ m_{i,j} = 0 \\
&\iff M \text{ est une matrice diagonale.}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les matrices M qui commutent avec une matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts, sont les matrices diagonales.

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^7 + M + I_3 = A$.

Alors , en multipliant à droite par P et gauche par P^{-1} (action qui est réversible puisque P est inversible)

$$\begin{aligned}
M^7 + M + I_3 = A &\iff P^{-1}.M^7.P + P^{-1}.M.P + P^{-1}.I_3.P = P^{-1}.A.P. \\
&\iff (P^{-1}.M.P)^7 + P^{-1}.M.P + I_3 = \Delta. \\
&\iff N^7 + N + I_3 = \Delta \qquad \text{(en posant } N = P^{-1}.M.P)
\end{aligned}$$

Or, $N^7 + N + I_3 = \Delta \implies N\Delta = N.(N^7 + N + I_3) = N^8 + N^2 + N = (N^7 + N + I_3).N = \Delta.N$

et puisque N et Δ commutent, la matrice N est nécessairement une matrice diagonale :

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R},\ N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

D'où : $M^7 + M + I_3 = A \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^7 + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} a^7 & 0 & 0 \\ 0 & b^7 & 0 \\ 0 & 0 & c^7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^7 + a + 1 = -1 \\ b^7 + b + 1 = 1 \\ c^7 + c + 1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^7 + a + 2 = 0 \\ b^7 + b = 0 \\ c^7 + c - 2 = 0 \end{cases}$$

La fonction $f\ : x \mapsto x^7 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivées $f' : x \mapsto 7x^6 + 1$ est strictement positive.

En $+\infty$, $f(x) \sim x^7$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

En $-\infty$, $f(x) \sim x^7$, donc $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

f est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, une equation du type $f(x) = y$ aura une et une solution dans $\mathbb{R}$, à savoir $x = f^{-1}(y)$. (qu'on ne sait pas toujours calculer)

L'équation $a^7 + a + 2 = 0$ a pour solution évidente $a = -1$ (et unique solution sur $\mathbb{R}$)

L'équation $b^7 + b = 0$ a pour solution évidente $b = 0$

L'équation $c^7 + c - 2 = 0$ a pour solution évidente $c = 1$

Donc $N^7 + N + I_3 = \Delta \iff N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient : $\boxed{M = P.N.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

L'équation n'a qu'une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.16 CCP **210**

I- Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

II - m est un paramètre réel. $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$

Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

Les matrices A_1 et A_2 sont elles diagonalisables ?

Étudier la diagonalisabilité de A_m en général.

SOLUTION : I - En notant $a_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{2^n}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$, ce qui montre par le critère de d'Alembert que la série $\sum a_n$ est convergente.

On sait que : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, et par dérivations successives,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$2n^2+3n+1 = 2n(n-1)+5n+1$

$$\text{donc} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n(n-1)+5n+1)\frac{1}{2^n}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{1}{2^n} + 5\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$S = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{5}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8+10+2 = 20 \qquad \boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2^n} = 20}$$

II - m est un paramètre réel.

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A_n}(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ -2+m & -m+2 & x-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ x-2 & -m+2 & x-m \end{vmatrix} \qquad (C_1 \longleftarrow C_1 + C_3)$$
$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 1 & -m+2 & x-m \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & -m+2 & x-m+1 \end{vmatrix} \qquad (L_3 \longleftarrow L_3 - L_1)$$
$$= (x-2)\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ -m+2 & x-m+1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-2)\left[(x+1)(x-m+1) - m + 2\right]$$
$$\boxed{\chi_{A_m}(x) = (x-2)[x^2+(2-m)x-2m+3)]}$$

- Pour $m=1$, $\chi_{A_1}(x) = (x-2)(x^2+x+1)$.

  Le polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, $\boxed{A_1 \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

  A_1 admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, à savoir 2, j et j^2. $\boxed{A_1 \text{ est donc diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

- Pour $m=2$, $\chi_{A_1}(x) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

  A_2 admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, à savoir -1, 1 et 2. $\boxed{A_1 \text{ est donc diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- Dans le cas général, $\chi_{A_m}(x) = (x-2)[x^2+(2-m)x-2m+3)]$

a) 2 est toujours valeur propre de A_m. Étudions si 2 peut être valeur propre multiple :

Soit $Q_m(X) = X^2+(2-m)X-2m+3$

Remarquons que $Q_m(2) = -4m+11$

2 est valeur propre multiple de A_m si et seulement si $m = \frac{11}{4}$. Dans ce cas, $\chi_{A_m}(x) = (x-2)^2\left(x+\frac{5}{4}\right)$, et 2 est valeur propre double de A_m.

$$A_m - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2-\frac{11}{4} & \frac{11}{4}-2 & \frac{11}{4}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est ni de rang 0, ni de rang 1 (les colonnes C_1 et C_2 sont indépendantes), ni de rang 3 (les colonnes C_1 et C_3 sont liées ; on peut aussi dire que si $A_m - 2I_3$ était de rang 3, 2 ne serait pas valeur propre de A_m)

Par élimination, $\operatorname{rg}(A_m - 2I_3) = 2$, et alors $\dim(E_2(A)) = 3-2 = 1 < ordre(2) = 2$

$\boxed{\text{L'inégalité } \dim(E_2(A_m)) < ordre(2) \text{ entraîne que } A_m \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

b) Étudions si A_m peut avoir d'autres valeurs propres multiples autres que 2.

$\chi_{A_m}(X) = (X-2)[X^2+(2-m)X-2m+3)] = (X-2)Q_m(X)$

Le polynôme $Q_m(X) = X^2+(2-m)X-2m+3$ a pour discriminant :

$\delta = (2-m)^2 + 4(2m-3) = m^2 + 4m - 8$

Le trinôme $m^2 + 4m - 8$ a pour discriminant $\beta = 16 + 32 = 48 = 4\sqrt{3}$.

Il a deux racines réelles $m_1 = \dfrac{-4+4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$ et $m_2 = -2 - 2\sqrt{3}$

Lorsque $m = m_1 = -2 + 2\sqrt{3}$, $Q_m(X)$ a pour racine double $\lambda_1 = \dfrac{m-2}{2} = -2 + \sqrt{3}$

$A_m - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} & 0 & 1 \\ -1 & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 4-2\sqrt{3} & -4+2\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Cette matrice n'est ni de rang 0, ni de rang 1 (les colonnes C_1 et C_2 sont indépendantes), ni de rang 3 (sinon λ_1 ne serait pas valeur propre de A_m)

Par élimination, $\text{rg}(A_m - \lambda_1 I_3) = 2$, et alors $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 3 - 2 = 1 < ordre(\lambda_1) = 2$

donc $\boxed{A_m \text{ n'est pas diagonalisable}}$ (ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

Étude analogue si $m = m_2 = -2 - 2\sqrt{3}$.

c) Étudions le cas où $m \in \mathbb{R} - \{2, m_1, m_2\}$:

$\chi_{A_m}(X) = (X-2)[X^2 + (2-m)X - 2m + 3)] = (X-2)Q_m(X)$

Si $m \in]-\infty, m_2[\cup]m_1, +\infty[$, $\delta = m^2 + 4m - 8 > 0$. $Q_m(X)$ a deux racines réelles, qui sont :

$q_1 = \dfrac{m - 2 + \sqrt{m^2 + 4m - 8}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{m - 2 - \sqrt{m^2 + 4m - 8}}{2}$

$\boxed{A_m \text{ possède alors 3 valeurs propres réelles distinctes, et est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Si $m \in]m_2, m_1[$, $\delta = m^2 + 4m - 8 < 0$. $Q_m(X)$ a deux racines complexes non réelles, qui sont :

$q_1 = \dfrac{m - 2 + i\sqrt{-m^2 - 4m + 8}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{m - 2 - i\sqrt{-m^2 - 4m + 8}}{2}$

$\boxed{A_m \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ car son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{Elle est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ car possède 3 valeurs propres distinctes dans } \mathbb{C}}$.

1.17 CCP **216**

I - n est un entier supérieur ou égal à 3.

On considère une matrice A symétrique réelle telle que : $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$

Etudier les valeurs propres et la diagonalisabilité de A. Que peut-on en conclure ?

SOLUTION : I - La matrice A est symétrique réelle donc $\boxed{\text{diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Le polynôme $Q(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$ est un polynôme annumlateur de A.

Les valeurs propres de A, qui sont toutes réelles sont parmi les racines de $Q(X)$.

Or $Q(X) = X(X^2 + 4X + 5) = X[(X+2)^2 + 1] = X(X + 2 + i)(X + 2 - i)$

Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, -2-i, -2+i\}$, et donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$

La matrice A est semblable à la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Donc $\boxed{A = 0}$

1.18 CCP

Exercice 1 : a) Etudier le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t\sqrt{t}} dt$.

b) Etudier la dérivabilité de f sur l'intérieur de $\mathscr{D}$. Expliciter $f'(x)$.

c) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Conditions sur a et b pour que A soit diagonalisable ?

SOLUTION **: Exercice 1 :** a) Notons H la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{1 - e^{-xt}}{t\sqrt{t}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t) = \dfrac{1 - e^{-xt}}{t\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$

- Etude pour la borne 0 :

$\forall x \neq 0$, $|H(x,t)| = \dfrac{|1 - e^{-xt}|}{t\sqrt{t}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{|x|t}{t\sqrt{t}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de référence)

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-xt}}{t\sqrt{t}} dt$ converge absolument .

Pour $x = 0$, $H(0,t)$ est la fonction nulle, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Etude pour la borne infinie :

Si $x<0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} H(x,t)=\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}dt$ diverge.

Si $x>0$, $\displaystyle |H(x,t)| = \frac{|1-e^{-xt}|}{t\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}}$, et on sait que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge . par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}dt$ est donc absolument convergente. Par additivité, l'intégrale $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}dt$ converge si et seulement si $x \geqslant 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = [0,+\infty[}$

b) - Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $\displaystyle x \mapsto H(x,t) = \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0,+\infty[$).

De plus, $\displaystyle\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{-xt}}{t\sqrt{t}} = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, les fonctions $\displaystyle t \mapsto H(x,t) = \frac{1-e^{-xt}}{t\sqrt{t}}$ et $\displaystyle t \mapsto \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$

(la première fonction a été étudiée avec le domaine de définition, pour la seconde, voir la domination qui suit)

- pour tout $a>0$, $\displaystyle\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$ (fonction inégrable sur $]0,+\infty[$)

d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (théorème de dérivation sous le signe $\int$), on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ \boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt}$$

ceci étant vrai pour tout $a>0$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$

c) Par le changement de variable $u=\sqrt{t},\ t=u^2,\ dt=2udu$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{u}2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}du$$

Par le changement de variable $\sqrt{x}u = v,\ du = \frac{dv}{\sqrt{x}}$,

$$f'(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}du = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{x}}dv = \frac{2}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv}_{integrale\ de\ Gauss} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}}$$

Par primitivation sur **l'ouvert** $]0,+\infty[$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x>0,\ f(x) = 2\sqrt{\pi}\sqrt{x}+c$.

Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\pi\, x}}$

Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A est une matrice triangulaire, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{a,1,2\}$.

• Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, alors $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

• Si $a=1$, alors 1 est valeur propre double.

$A - 1\times I_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour rang 2 si $b \neq 0$, et pour rang 1 si $b=0$.

Donc $E_A(1)$ a pour dimension $3-2=1$ si $b\neq 0$, et $3-1=2$ si $b=0$.

Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b=0}$

• Si $a=2$, alors 2 est valeur propre double.

$A - 2\times I_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rang 1. Donc $\dim(E_A(1)) = 2$ et $\boxed{A \text{ est toujours diagonalisable}}$.

1.19 CCP

$E, <\ ,\ >$ est un espace vectoriel eucidien de dimension $n \geqslant 3$. a et b sont deux vecteurs de E formant un système libre.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & <a,x>b - <b,x>a \end{array} \right.$

1- Montrer que f est un endomorphisme de E.

Déterminer $\ker f$.

2- Montrer qu'il existe une base de E dans la quelle la matrice de f s'écrit par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

3- Déterminer les valeurs propres de f.

f est il diagonalisable ?

SOLUTION **:** 1- $\bullet$ pour tout $(x,y) \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x+\lambda y) = <a, x+\lambda y>b - <b, x+\lambda y>a$

$f(x+\lambda y) = <a,x>b + \lambda <a,y>b - <b,x>a - \lambda <b,y>a$

$= <a,x>b - <b,x>a + \lambda(<a,y>b - <b,y>a) = f(x) + \lambda f(y)$. Donc $\boxed{f \in \mathscr{L}(E)}$

$\bullet$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\iff <a,x>b - <b,x>a = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} <a,x> = 0 \\ <b,x> = 0 \end{array} \right. \text{ car } (a,b) \text{ est un système libre de } E. \\ &\iff x \in (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp} \qquad \text{Donc } \boxed{\ker f = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}} \end{aligned}$$

$\ker f$ est le supplémentaire orthogonal du plan $\mathrm{Vect}(a,b)$. C'est un sous espace de E de dimension $n-2$ où $n = \dim(E)$.

2- (a,b) est une base du plan $\mathrm{Vect}(a,b)$ (puisque (a,b) est par hypothèse une famille libre)

Soit $(e_3, e_4, \cdots, e_n)$ une base de $\ker f$. Puisque $\mathrm{Vect}(a,b)$ et $\ker f$ sont deux sous espaces supplémentaires, $(a, b, e_3, e_4, \cdots, e_n)$ est une base de $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(a,b)$

$f(a) = \|a\|^2 b - <b,a>a$, $\quad f(b) = <a,b>b - \|b\|^2 a$, $\quad \forall i \in \{3, 4, \cdots, n\}$, $f(e_i) = 0$

La matrice de f dans la base $(a, b, e_3, e_4, \cdots, e_n)$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} -<a,b> & -\|b\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \|a\|^2 & <a,b> & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -<a,b> & -\|b\|^2 \\ \|a\|^2 & <a,b> \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

3- $\bullet$ $\ker f = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$, ce qui montre que 0 est valeur propre de f et que $E_f(0) = \ker(f)$ est un sous-espace propre de dimension $n-2$.

$\bullet$ Soit λ un réel **non nul** , et $x \in E - \{0\}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x &\iff <a,x>b - <b,x>a = \lambda x \\ &\implies x = \frac{1}{\lambda}(<a,x>b - <b,x>a) \implies x \in (\mathrm{Vect}(a,b)) \\ &\implies \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha a + \beta b \end{aligned}$$

Reportons dans l'égalité de départ :

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x &\iff <a, \alpha a + \beta b>b - <b, \alpha a + \beta b>a = \lambda(\alpha a + \beta b) \\ &\iff \alpha\|a\|^2 b + \beta <a,b>b - \alpha <a,b>a - \beta\|b\|^2 a = \alpha\lambda a + \beta\lambda b \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha <a,b> - \beta\|b\|^2 = \alpha\lambda & \textit{(composantes sur } a\textit{)} \\ \alpha\|a\|^2 + \beta <a,b> = \beta\lambda & \textit{(composantes sur } b\textit{)} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\lambda + <a,b>) + \beta\|b\|^2 = 0 \\ \alpha\|a\|^2 + \beta(<a,b> - \lambda) = 0 \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S}) \end{aligned}$$

On est en présence d'un système de deux équations aux deux inconnues α et β.

Le déterminant de ce système est : $\delta = \begin{vmatrix} \lambda + <a,b> & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & <a,b> - \lambda \end{vmatrix}$

$\delta = <a,b>^2 - \lambda^2 - \|a\|^2\|b\|^2$

Si $\delta \neq 0$, le système $(\mathscr{S})$ est un systèle de Cramer homogène, dont l'unique solution est le couple $(\alpha, \beta) = (0,0)$. Le seul vecteur de la forme $x = \alpha a + \beta b$ qui vérifie $(x) = \lambda x$ est la vecteur nul. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de f.

Pour que λ soit valeur propre de f il faut que $\delta = 0$, c'est à dire que $\lambda^2 = <a,b>^2 - \|a\|^2\|b\|^2$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $<a,b>^2 \leqslant \|a\|^2\|b\|^2$, donc $<a,b>^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \leqslant 0$ ne peut être le carré d'un réel λ. Sauf si $<a,b>^2 - \|a\|^2\|b\|^2 = 0$, auquel cas les vecteurs a et b doivent être colinéaires (car il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Mais ceci est exclu dès le départ puisque la système (a,b) est supposé libre.

Donc f n'a pas d'autre valeur propre que la valeur propre 0 : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0\}}$.

Et puisque $\dim(E_f(0)) = \dim(\ker(f)) = n - 2 < n$, $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

1.20 CCP

Exercice 1: On considère la série de fonctions suivante: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

Etudier le domaine de définition de la fonction S et sa continuité.

Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire qui suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire pour laquelle, Y sachant que $X = n$, suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y)
2) Déterminer la loi de Y
3 Déterminer la loi de $Z = X - Y$
4) Etudier l'indépendance de X et Y.

SOLUTION **: Exercice 1 :** • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\, n^2}$

Donc la série de fonction $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. En 0, tous les termes de la série sont nuls, elle converge encore. Donc $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La fonction somme S est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut remarquer que S est impaire (car chacun des $u_n(\ )$ l'est).

• Pour la continuité étudions la convergence uniforme ou normale de la série de fonctions.

Soit $a > 0$ quelconque, fixé.

$\forall x \in [a, +\infty[$, $\frac{1}{n(1+nx^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+na^2)}$, donc $\left\| \frac{1}{n(1+nx^2)} \right\|^{\infty}_{x\in[a+\infty[} \leqslant \frac{1}{n(1+na^2)} \leqslant \frac{1}{a^2\, n^2}$

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{a^2\, n^2}$ converge, la majoration qui précède montre la convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions $(x \mapsto \sum \frac{1}{n(1+nx^2)})$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Chaque fonction $v_n : x \mapsto \frac{1}{n(1+nx^2)}$ étant continue sur $[a, +\infty[$, le téhorème de continuité d'une série de fonctions nous permet d'affirmer que la fonction somme, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Puisque $S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions continues. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la somme est continue sur $]0, +\infty[$, et sur $\mathbb{R}^*$ par imparité.

• Etude de la continuité en 0 : $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$

$$u_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$	$1/n$	$+$	0	$-$	
		$\nearrow$	$\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\searrow$	
$u_n(x)$	0				0

donc $\|u_n(\ )\|^{\infty}_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction somme S l'est aussi. $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

• Etude de la dérivabilité :

Chaque fonction $u_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

Soit $[a, b]$ un segment quelconque inclus dans $]0, +\infty[$: $0 < a < b$.

Pour tout $x \in [a, b]$, $a \leqslant x \leqslant b \implies \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{a^2}$

Pour tout $n \geqslant \frac{1}{a^2}, \forall x \in [a, b]$, $n \geqslant \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{1}{x^2} \implies nx^2 \geqslant 1 \implies nx^2 - 1 \geqslant 0$

alors $|u_n'(x)| = \frac{1}{n} \times \frac{nx^2-1}{(1+nx^2)^2} \leqslant \frac{nx^2}{n(1+nx^2)^2} \leqslant \frac{1}{n(1+nx^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+na^2)} \leqslant \frac{1}{a^2 n^2}$

Donc $\forall n \geqslant \frac{1}{a^2}$, $\|u_n'\|^{\infty}_{[a,b]} \leqslant \frac{1}{a^2 n^2}$, ce qui montre que la série des dérivées $\sum u_n'(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et que $\forall x \in [a, b]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2 - 1}{n(1+nx^2)^2}$

ceci étant vrai pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}^*$ par imparité.

Exercice 2 : 1) $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ $\quad X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$(Y|X = n) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k|X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

$P((Y = k) \cap (X = n)) = P((Y = k)|(X = n))P(X = n)$

$$P((X,Y)=(n,k))=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 \quad \text{si } k>n\end{cases}$$

2) $P(Y=k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{P(Y=k|X=n)}_{0\ si\ k>n}P(X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(Y=k|X=n)P(X=n)$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$=p^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^n}{(n-k)!}=p^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m\lambda^{m+k}}{m!}\qquad\text{(par le changement d'indice } m=n-k)$$

$$=(\lambda p)^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m\lambda^m}{m!}=(\lambda p)^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}e^{(1-p)\lambda}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P(Y=k)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\qquad\text{donc}\qquad Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)}$$

3) $Z=X-Y$. $\quad X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $Z(\Omega)=\mathbb{Z}$

Mais on a vu (question 1) que si $k>n, P((X,Y)=(n,k)=0$. Autrement dit, la probabilité de $Y>X$, c'est à dire de $Z<0$, est nulle.

Donc, $\forall m<0,\ P(Z=m)=0$

Soit maintenant $m\geqslant 0$ ($m\in\mathbb{N}$).

Alors $(Z=m)=[(X=m)\cap(Y=0)]\cup[(X=m+1)\cap(Y=1)]\cup\cdots\cup[(X=m+k)\cap(Y=k)]\cup\cdots$

Les événements $(X=m+k)\cap(Y=k)$ étant deux à deux incompatibles,

$$P(Z=m)=\sum_{k=0}^{\infty}P((X=m+k)\cap(Y=k))=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m}{k}p^k(1-p)^{m+k-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+k}}{(m+k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!\,m!}p^k(1-p)^m\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+k}}{(m+k)!}=\frac{e^{-\lambda}(1-p)^m\lambda^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\,p^k}{k!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(1-p)^m\lambda^m}{m!}e^{\lambda p}=e^{\lambda(p-1)}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}$$

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{N},\ P(Z=m)=e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}}\qquad\text{donc}\qquad\boxed{Z\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda(1-p))}$$

4) On a vu que $\forall n,k\in\mathbb{N}, P((X,Y)=(n,k))=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 \quad \text{si } k>n\end{cases}$

Or $P(X=n)\cap(Y=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\times e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}\neq P(X=n)P(Y=k)$.

$\boxed{\text{Les deux variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

1.21 CCP

Exercice 1 : Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Montrer que $\displaystyle\int_0^1(f(t))^2dt\leqslant 4\int_0^1 t^2(f'(t))^2dt$ (formule incorrecte)

Exercice 2 : $(E,<,>)$ est un espace euclidien, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle antisymétrique, et f un endomorphisme de E, de matrice A dans une BON de E.

a) Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique de E

(c'est à dire tel que $\forall(x,y)\in E,\ <f(x),y>=-<x,f(y)>$)

b) Montrer que $\det(A)=(-1)^n\det(A)$

Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que f est de rang pair.

d) On étudie le cas où $n=3$.

Montrer que f est orthogonalement semblable à une matrice du type $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-a\\0&a&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

SOLUTION **:** a) A est la matrice de $f\in\mathscr{L}(E)$ dans le BON $\mathscr{B}$.

Soient x et y deux vecteurs de E, de matrices colones respectives X et Y dans la base $\mathscr{B}$.

La matrice colonne de $f(x)$ relativement à cette base est $A.X$, et la matrice colonne de $f(y)$ est $A.Y$.

$$<f(x),y>={}^t(A.X).Y={}^tX.{}^tA.Y={}^tX.(-A).Y=-{}^tX.(A.Y)=-<x,f(y)>$$

donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } (E)}$

b) $\det(A)=\det({}^tA)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$.

Si n est impair, l'égalité devient $\det(A) = -\det(A)$, soit $\det(A) = 0$.

$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, une matrice antisymétrique n'est jamais inversible.}}$

c) • Si f est inversible, d'après la question précédente, n est nécessairement pair. Mais f étant surjectif, $\mathrm{Im} f = E$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = n$ est pair.

• Etudions le cas général où f n'est pas supposé inversible.

Alors $E = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$

Montrons que $(\ker f)^{\perp}$ est stable par f :

Soit $x \in (\ker f)^{\perp}$. Alors $\forall y \in \ker f,\ < f(x), y >= - < x, \underbrace{f(y)}_{=0} >= 0$

$f(x)$ est orthogonal à tout vecteur y de $\ker f$, donc $f(x) \in (\ker f)^{\perp}$

Ainsi, $(\ker f)^{\perp}$ est stable par f .

On peut alors considérer $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $(\ker f)^{\perp}$: $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\ker f)^{\perp} & \longrightarrow & (\ker f)^{\perp} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

Vérifions que $\mathrm{Im}\widetilde{f} = \mathrm{Im} f$, ce qui entraînera que $\mathrm{rg}(\widetilde{f}) = \mathrm{rg}(f)$

$\forall y \in \mathrm{Im}\widetilde{f}, \exists t \in (\ker f)^{\perp},\ y = \widetilde{f}(t) = f(t)$, donc $y \in \mathrm{Im} f$, ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Im}\widetilde{f} \subset \mathrm{Im} f$

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im} f : \exists t \in E,\ y = f(t)$. $\quad \exists (a, b) \in \ker f \times (\ker f)^{\perp},\ t = a + b$

$y = f(t) = f(a + b) = \underbrace{f(a)}_{=0 \ car\ a \in \ker f} + f(b) = f(b) = \widetilde{f}(b) \qquad$ car $b \in (\ker f)^{\perp}$

donc $y \in \mathrm{Im} f$ ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im}\widetilde{f}$.

Per double inclusion, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\widetilde{f}$ et donc $\mathrm{rg}(\widetilde{f}) = \mathrm{rg}(f)$

Vérifions que $\widetilde{f}$ est inversible, ce qui nous ramènera au premier cas traité :

$\forall x \in \ker \widetilde{f},\ \widetilde{f}(x) = f(x) = 0$ donc $x \in \ker f$.

mais $x \in (\ker f)^{\perp}$ (espace de départ de $\widetilde{f}$), donc $x \in \ker f \cap (\ker f)^{\perp} = \{0\}$

On a ainsi montré que $\ker \widetilde{f} = \{0\}$, ce qui montre que $\widetilde{f}$ est injectif. Mais $\widetilde{f}$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, à savoir $(\ker f)^{\perp}$. Il est donc bijectif, c'est à dire inversible.

D'après la première étude où l'endomorphisme est supposé inversible, appliquée à $\widetilde{f}$ qui l'est,

$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\widetilde{f}) \text{ est pair}}$.

d) On étudie le cas où $n = 3$: D'après la question c), le rang de f est pair

• Si le rang de f est nul, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. a est bien du type demandé.

• Si le rang de f vaut 2, alors $\dim(\ker f) = 1$ (théorème du rang), $\dim((\ker f)^{\perp}) = 2$ et $\ker f \oplus (\ker f)^{\perp} = E$

Soit u un vecteur unitaire de $\ker f$ et (v, w) une BON du plan $(\ker f)^{\perp}$. Alors $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une BON de E puisque $\ker f$ et $(\ker f)^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux.

Soit B la matrice de f dans le base $\mathscr{B}'$.

$f(u) = 0$ (puisque $u \in \ker f$) ce qui donne la première colonne de la matrice B.

On a vu en question c) que $(\ker f)^{\perp}$ était stable par f . Donc $f(v)$ se décompose sur la BON (v, w) suivant la formule : $f(v) =< f(v), v > v+ < f(v), w > w$

Remarquons que $< f(v), v >= - < v, f'v) >$ et donc $< f(v), v >= 0$. Par ailleurs notons $a =< f(v), w >$

Ainsi $f(v) = aw$.

Pour la même raison, $f(w) =< f(w), v > v + \underbrace{< f(w), w >}_{=0} w$ et $< f(w), v >= - < w, f(v) >= -a$.

Ainsi $f(w) = -av$

Les trois relations $\left\{ \begin{array}{l} f(u) = 0 \\ f(v) = aw \\ f(w) = -av \end{array} \right.$ donnent : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

Les deux bases $\mathscr{B}$ (dans laquelle la matrice de f est A) et $\mathscr{B}'$ (dans laquelle la matrice de f est B) étant orthonormales, $\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } B \text{ sont orthogonalement semblables}}$ (il existe $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R}),\ A = P.B.P^{-1}$)

1.22 CCP

Soit n un entier non nul, X une variable aléatoire vérifiant $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k} \qquad (a > 0)$

1- Etablir une relation entre $\dbinom{p}{q}$ et $\dbinom{p-1}{q-1}$, et déterminer a.

2- Calculer $E(X)$

3- Calculer $V(X)$

SOLUTION : 1- Il s'agit de déterminer a pour que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k)$ soit égale à 1.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$ (formule du binôme de Newton)

Par intégration, $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k dt = \int_0^x (t+1)^n = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad \text{(en prenant } x=1)$$

Pour que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = a\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ soit égal à 1, il faut et suffit que $\boxed{a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}}$

2- $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = a\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{k+1}\binom{n}{k} = a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}\right)$

$E(X) = a\left(2^n - \dfrac{1}{a}\right) = 2^n a - 1 = \dfrac{(n+1)2^n}{2^{n+1}-1} - 1 = \dfrac{2^n + n2^n - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{(n-1)2^n+1}{2^{n+1}-1}$

$\boxed{E(X) = \dfrac{(n-1)2^n+1}{2^{n+1}-1}}$

3- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = a\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k+1}\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)-(k+1)+1}{k+1}\binom{n}{k}$

$E(X^2) = a\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}\right]$

Les deux dernières sommes ont déjà été calculées. Pour calculer la première, partons de l'égalité

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (x+1)^n$ et dérivons : $\displaystyle\sum_{k=0,1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(x+1)^{n-1}$

pour $x=1$: $\displaystyle\sum_{k=0,1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

d'où : $E(X^2) = a\left(n2^{n-1} - 2^n + \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\right) = a\left(\dfrac{n^2 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n - 1}{n+1}\right) = \dfrac{n^2 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n - 1}{2^{n+1}-1}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{n^2 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n - 1}{2^{n+1}-1} - \left(\dfrac{n2^n - 2^n + 1}{2^{n+1}-1}\right)^2 = \dfrac{(n+1)4^n - (n^2+3n+2)2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)^2}$

$\boxed{V(X) = \dfrac{(n+1)4^n - (n^2+3n+2)2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)^2}}$

1.23 CCP

On considère une forme linéaire non nulle φ sur un espace vectoriel E et x_0 un vecteur non nul de E.

On pose : $\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)x_0$

1- Montrer que u est un endomorphisme de E.

2- Montrer que 1 est valeur propre de u ; donner la dimension du sous-espace propre associé.

3- Donner une CNS pour que u soit diagonalisable. Indiquer alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

SOLUTION : 1- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u(x) = x + \varphi(x)x_0$ est bien un vecteur de E (c'est la somme de deux vecteurs de E), donc u est bien une application de E dans E.

$u(x+\lambda y) = (x+\lambda y) + \varphi(x+\lambda y)x_0 = x + \lambda y + [\varphi(x) + \lambda\varphi(y)]x_0$ (car φ est linéaire)

$\qquad = (x + \varphi(x)x_0) + \lambda(y + \varphi(y)x_0) = u(x) + \lambda u(y)$

u est bien une application linéaire de E dans E, c'est à dire un endomorphisme de E. $\boxed{u \in \mathscr{L}(E)}$

2- Pour savoir si 1 est une valeur propre de E, il faut étudier s'il existe des vecteurs x non nuls tels que $u(x) = 1 \times x = x$.

Soit $x \in E$. $\quad u(x) = x \iff x + \varphi(x)x_0 = x \iff \varphi(x)x_0 = 0_E \iff \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}} \iff x \in \ker\varphi$

Puisque φ est une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan.

Donc $\boxed{\text{1 est une valeur propre de } \varphi \text{ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan } \ker\varphi}$

Sa dimension est $n-1$, où $n = \dim(E)$.

3- Dans la question précédente on vient de trouver une valeur propre, $\lambda = 1$, avec pour sous-espace propre associé l'hyperplan $\ker\varphi$.

Recherchons s'il existe une (des) valeur(s) propre(s) différente(s) de 1 .

Analyse : Supposons que λ soit une valeur propre autre que 1 : $\exists x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ x + \varphi(x)x_0 = \lambda x\\
&\Longrightarrow\ (\lambda-1)x = \varphi(x)x_0\\
&\Longrightarrow\ x = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1}\,x_0\\
&\Longrightarrow\ x \in \mathrm{Vect}(x_0)\\
&\Longrightarrow\ \exists k \in \mathbb{R},\ x = kx_0 \qquad (k \neq 0 \text{ puisque } x \neq 0)\\
&\Longrightarrow\ (\lambda-1)kx_0 = \varphi(kx_0)x_0\\
&\Longrightarrow\ (\lambda-1)kx_0 = k\varphi(x_0)x_0\\
&\Longrightarrow\ (\lambda-1) = \varphi(x_0) \qquad (k \text{ et } x_0 \text{ sont non nuls})\\
&\Longrightarrow\ \lambda = \varphi(x_0)+1
\end{aligned}$$

donc $\lambda_0 = \varphi(x_0)+1$ est la seule valeur propre possible autre que 1.

Si $\varphi(x_0) = 0$ ($\Longleftrightarrow x_0 \in \ker\varphi$), alors u n'a qu'une seule valeur propre, à savoir $\lambda = 1$. L'unique sous espace propre est de dimension $n-1$, donc u n'est pas diagonalisable.

Synthèse : Supposons que $x_0 \notin \ker\varphi$, c'est à dire que $\varphi(x_0) \neq 0$.

Alors $u(x_0) = x_0 + \varphi(x_0)x_0 = (\underbrace{\varphi(x_0)+1}_{\neq 1})x_0$, donc x_0 est vecteur propre de u, associé à la valeur propre $\varphi(x_0)+1 \neq 1$.

u possède deux sous-espaces propres, l'hyperplan $\ker\varphi$ et la droite $\mathrm{Vect}(x_0)$. La somme de leurs dimensions est $(n-1)+1 = n$, donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

1.24 CCP

Exercice 1 : On définit l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P(X) & \mapsto & P(X+1)\end{array}\right.$

Déterminer la matrice A qui représente φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Justifier que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 2 : On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$

1- Donner le domaine de définition de F.

2- Montrer que les intégrales J_n sont définies, et trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.

Montrer que $J_n = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n+1}n!}$

3- En utilisant un développement en série entière, exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions classiques.

***SOLUTION* : Exercice 1:** On vérifie sans difficulté que φ est une application linéaire : $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]$.

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$

$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \varphi(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j$

La matrice A qui représente φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{k}{0} & \cdots & \binom{n}{0}\\
0 & 1 & 2 & \cdots & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{n}{1}\\
0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{n}{2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k}{k} & \cdots & \binom{n}{k}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \binom{n}{k+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \binom{n}{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Elle est définie par $\boxed{a_{i,j} = \left\{\begin{array}{ll}\binom{j}{i} & \text{si } i \leqslant j\\ 0 & \text{si } i > j\end{array}\right.}$ en convenant de faire varier i et j de 0 à n, comme dans un tableau "`python`" (et non pas de 1 à $(n+1)$ comme on le fait habituellement pour une matrice à $n+1$ lignes et colonnes).

- La matrice A est triangulaire supérieure, avec des 1 sur le diagonale. Son déterminant est donc $\det(A) = 1^{n+1} = 1 \neq 0$. Donc A est inversible.

On peut aussi remarquer que l'endomorphisme $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array} \right.$ vérifie :

$\varphi_o\psi = \psi_o\varphi = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$

Ceci montre que φ est inversible et que son inverse est ψ. La matrice A qui représente φ est donc elle aussi inversible. A^{-1} sera la matrice de l'endomorphisme ψ, inverse de φ. Recherchons donc la matrice de ψ dans la base $\mathscr{B}_0$.

$\forall k \in \{0,1,\cdots,n\},\ \psi(X^k) = (X-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j (-1)^{k-j}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^k\binom{k}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{k-2}\binom{k}{2} & \cdots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k}{k} & \cdots & (-1)^{n-k}\binom{n}{k} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{n-k-1}\binom{n}{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = (b_{i,j})$ est définie par : $\boxed{b_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{j-i}\dbinom{j}{i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{array} \right.}$

Exercice 2 : 1- On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $(t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2})$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ |\cos(xt)e^{-t^2}| \leqslant e^{-t^2}$, et la fonction $(t \mapsto e^{-t^2})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

(majorée par e^{-t} sur $[1,+\infty[$)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ est donc absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\mathscr{D}_F = \mathbb{R}}$

2- • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(t \mapsto t^{2n}e^{-t^2})$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Par croissance comparée entre fonctions exponentielles et puissances, $t^{2n}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par domination, la fonction $(t \mapsto t^{2n}e^{-t^2})$ est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$ est convergente.

• En intégrant par parties, $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt = \underbrace{\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}(-2t)e^{-t^2}dt$

$$J_n = 0 + 2\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+2}}{2n+1}\, e^{-t^2}dt = \frac{2}{2n+1}J_{n+1} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{2}{2n+1}J_{n+1}}$$

• Cette relation s'écrit aussi : $J_n = \dfrac{2n-1}{2}J_{n-1}$

$$J_{n-1} = \frac{2n-3}{2}J_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$J_2 = \frac{3}{2}J_1$$
$$J_1 = \frac{1}{2}J_0$$
$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En multipliant terme à terme on obtient : $J_n = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\times 3\times 1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$

En multipliant haut et bas par $2\times 4\times\cdots\times(2n-2)\times 2n = 2^n n!$, on obtient : $\boxed{J_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}$

3- On sait que $\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n)!}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,+\infty[,\ \cos(xt) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(xt)^{2n}}{(2n)!}$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}dt$$

En posant $u_n(t)=(-1)^n\dfrac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt=\int_0^{+\infty}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}dt=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{-t^2}dt$

$$\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt=\frac{x^{2n}}{(2n)!}J_n=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}=\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!}$$

On reconnait en $\dfrac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!}$ le terme général d'une série exponentielle convergente. On en déduit que la série $\sum\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|dt$ est convergente, et on peut appliquer alors le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur uhn intervalle quelconque.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}J_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\qquad\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}}$$

1.25 CCP

Exercice 1 : On considère une série $\sum a_n$ de termes réels absolument convergente.

1- Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,t^n$?

2- On pose $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,t^n$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}f(t)e^{-t}dt$ est convergente, et égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$

Exercice 2 : On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

1- Calculer son polynôme caractéristique.
2- On suppose que $a>0$. A est elle diagonalisable ?
3- On suppose que $a=0$. A est elle diagonalisable ?
4- On suppose que $a<0$. A est elle diagonalisable ?

Remarque : il sera essentiel au cours de la discussion de bien préciser le corps de référence, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1- La série $\sum a_n$ étant absolument convergente, la suite (a_n) est de limité nulle, et est bornée : $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leqslant M$

alors $\forall t\in\mathbb{R}, \left|\frac{a_n}{n!}\ t^n\right|\leqslant M\frac{|t|^n}{n!}$, et la série exponentielle $\sum\frac{|t|^n}{n!}$ converge pour tout $t\in\mathbb{R}$. Par majoration, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,t^n$ converge absolument pour tout $t\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La série entière } \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,t^n \text{ de la variable } t \text{ a donc un rayon de convergence infini}}$.

2- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in\mathbb{R}$, notons $u_n(t)=\dfrac{a_n}{n!}\,t^ne^{-t}$

Chaque fonction $u_n(\ )$ est continue sur le fermé $[0,+\infty[$ et $|u_n(t)|=\underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ car $t^n=\underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{\frac{t}{2}}\right)$

Puisque la fonction $\left(t\mapsto\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)\right.$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (fonction de référence), par majoration la fonction u_n l'est aussi.

• Notons $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt$, qui existe comme on vient de le voir.

Par intégration par parties, $J_n=\underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0}-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{-t^{n+1}}{n+1}e^{-t}dt=\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}t^{n+1}e^{-t}dt=\frac{J_{n+1}}{n+1}$

$J_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1$, et $\forall n,\ J_n=nJ_{n-1}$ montre par récurrence immédiate que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = n!$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!}\ t^n e^{-t} dt = \frac{|a_n|}{n!} J_n = |a_n|$

Puisque la série $\sum |a_n|$ est supposée convergente, la série numérique $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt$ l'est aussi.

On peut alors appliqué=er le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, et affirmer que:

a) f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)dt\right)$

c'est à dire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\ t^n e^{-t}dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\left(\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}J_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -a & -a \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + (2a+5)x - 4a - 2$

$\boxed{\chi_A(X) = (X-2)(X^2 - 2X + 2a + 1)}$

2- le polynôme $X^2 - 2X + 2a + 1$ a pour discriminant $\delta = 4 - 4(2a+1) = -8a$

• Si $a > 0$, alors $\delta < 0$, le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Mais dans $\mathbb{C}$, A possède trois valers propres distinctes. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

• Si $a = 0$, alors $\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$. 1 est valeur propre double de A.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim(E_A(1)) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1 < ordre(1) = 2$

A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

• Si $a < 0$, alors $\delta > 0$, le polynôme $\chi_A(X)$ a pour racines $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{2+2\sqrt{-2a}}{2} = 1 + \sqrt{-2a}$ et $\lambda_3 = 1 - \sqrt{-2a}$

Si $a = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rang 2.

Donc $\dim(E_A(2)) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1 < ordre(2) = 2$

A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Si $a \in]-\infty, 0[- \{-\frac{1}{2}\}$, A possède trois valeurs propres distincres dans $\mathbb{R}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.26 CCP

Exercice 1 : 1- Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ converge.

2- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t}dt$ est définie.

3- Pour tous n et p entiers naturels, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n (\ln t)^p dt$

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Exercice 2 : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1- Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$. (réponse $(X-1)(X-2)(X-m)$)

2- $m = 3$. Déterminer les sous espaces propres de A. A est elle diagonalisable ?

3- $m = 1$. A est elle diagonalisable ? (non)

4- $m = 2$. A est elle diagonalisable ? (oui)

SOLUTION **: Exercice 1 :** Voir exercice 4.6 page 21 chapître "intégrales" sur le site habituel.

Exercice 2 : $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & x-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ x-2 & 2-m & x-m \end{vmatrix}$ $(\ C_1 \leftarrow C_1 + C_3\ )$.

$\chi_A(x) = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 1 & 2-m & x-m \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 2-m & x-m+1 \end{vmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$

$= (x-2)\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 2-m & x-m+1 \end{vmatrix} = (x-2)[x^2 - (m+1)x + 2m] = (x-2)(x-1)(x-m)$

$\boxed{\chi_A(x) = (X-2)(X-1)(X-m)}$

• Si $m=3$, $\mathrm{Sp}(A)=\{1,2,3\}$. A possède trois valeurs propres distinctes . Elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

• Si $m=1$, $\chi_A(x)=(X-2)(X-1)^2$ $\quad \mathrm{Sp}(A)=\{\underbrace{1}_{double},2\}$

$$A-1\times I_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ est de rang 2.}$$

$\dim(E_A(1))=3-\mathrm{rg}(A-I_3)=3-2=1<ordre(1)=2$

A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

• Si $m=2$, $\chi_A(x)=(X-2)^2(X-1)$ $\quad \mathrm{Sp}(A)=\{1,\underbrace{2}_{double}\}$

$$A-2\times I_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \text{ est de rang 1.}$$

$\dim(E_A(2))=3-\mathrm{rg}(A-2I_3)=3-1=2=ordre(2)$. Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1.27 CCP

Exercice 1 : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n>0$, tel que $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)\geqslant 0$.

1- Soit $f:x\mapsto e^{-x}(P(x)+P'(x)+...+P^{(n)}(x))$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$

2- En déduire que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)+P'(x)+...+P^{(n)}(x)\geqslant 0$

Exercice 2 : Soit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$

1- Montrer que $P(X\leqslant n)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}x^n dx$

2- En déduire un équivalent simple de la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}x^n dx$

3- Soit g_X la fonction génératrice de la variable X. Calculer $g_X(1)$ et $g_X(-1)$. En déduire la probabilité que X soit paire.

4- Soit Y une loi uniforme sur $\{1,2\}$. Quelle est la probabilité que $X.Y$ soit paire ?

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions polynomiales ou exponentielle qui sont $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)&=-e^{-x}(P(x)+P'(x)+...+P^{(n)}(x))+e^{-x}(P'(x)+P''(x)+...+P^{(n+1)}(x))\\ &=e^{-x}(\underbrace{P^{(n+1)}(x)}_{=0}-P(x))=-P(x)e^{-x}\leqslant 0\text{ , puisque }\ \forall x\in\mathbb{R},P(x)\geqslant 0.\end{aligned}$$

La fonction dérivée f' est négative. Elle ne s'annule qu'en les points x_i qui sont racines (multiples car P ne change pas de signe) du polynôme $P(X)$. Ces points sont isolés, et la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. f est donc injective.

Par croissance comparée entre polynôme (fonction puissance) et exponentielle,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

f étant continue, c'est une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

2- Puisque f est décoissante et de limite nulle en $+\infty$, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

et puisque $e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)+P'(x)+...+P^{(n)}(x)=f(x)e^x\geqslant 0$

Exercice 2 : 1- $(X\leqslant n)=(X=0=\cup(X=1)\cup\cdots\cup(X=n)$

Par incompatibilité des évènements, $P(X\leqslant n)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P(X=k)=\sum_{k=0}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Par ailleurs, posons : $J_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}x^n dx$

$$\begin{aligned}\text{Intégrons par parties : } J_n&=\frac{1}{n!}\left[e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\lambda^{+\infty}+\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx\\ &=0-\frac{1}{n!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}x^{n+1}dx\\ &=-e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}+J_{n+1}\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit aussi : $J_n=J_{n-1}+e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ $\qquad J_0=\displaystyle\int_\lambda^{+\infty}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_\lambda^{+\infty}=e^{-\lambda}$

Par sommation telescopique de cette relation, on obtient : $J_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+J_0$

soit, finalement : $J_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

La comparaison de ces deux calculs montre que : $\boxed{P(X \leqslant n) = J_n = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx}$

2- D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n!\ P(X \leqslant n)$

Or $\lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!}$.

3- $g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda\, t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda\, t} = e^{\lambda(t-1)}$

$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

En particulier, $\boxed{g_X(1) = e^0 = 1}$ et $\boxed{g_X(-1) = e^{-2\lambda}}$

• $P(X\ est\ pair) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k) = \frac{1}{2}(g_X(1)+g_X(-1)) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$

4- $(X.Y\ est\ pair) = (X\ est\ pair) \cup ((X\ est\ impair) \cap (Y=2))$

Par incompatibilité, $P(X.Y\ est\ pair) = P(X\ est\ pair) + P((X\ est\ impair)\cap(Y=2))$

Par indépendance des variables X et Y : $P((X\ est\ impair)\cap(Y=2)) = P(X\ est\ impair)P(Y=2)$

d'où : $P(X.Y\ est\ pair) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}) + \left[1-\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})\right].\frac{1}{2} = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}$

1.28 CCP

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & si \quad x \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction g continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge simplement vers une fonction h sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.

SOLUTION **:** Si $x>0,\ f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Si $x=0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Si $x<0,\ f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^3}{nx^2} = x$. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$

La suite de fonctions $(f_n(\ ))$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : x \mapsto x$.

Cette fonction g est polynomiale donc continue, dérivable et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

2- $\forall x>0,\ f'_n(x) = \frac{2nx(1+nx)-n^2x^2}{(1+nx)^2} = \frac{2nx+n^2x^2}{(1+nx)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^2}{n^2x^2} = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = 1$

$\forall x<0,\ f'_n(x) = \frac{3nx^2(1+nx^2)-2n^2x^4}{(1+nx^2)^2} = \frac{3nx^2+n^2x^4}{(1+nx^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2x^4}{n^2x^4} = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = 1$

???????????????????????????

1.29 CCP

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $\varphi \in E^*$, non nullle.

Soit $x_0 \in E - \{0\}$, et u l'application définie par : $\forall x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x)x_0$

1- Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$.

2- Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre E_1 et sa dimension.

3- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$ (on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

1- Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

2- Montrer que $\lim_{n\to\infty}(H_{2n+1} - H_n) = \ln(2)$ avec $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

3- Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$ et déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

SOLUTION **: Exercice 1 :** Voir 1.21

Exercice 2 : 1- $a_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2} = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^3}$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente. Par équivalence, la série $\sum a_n$ l'est aussi.

$$2\text{- } \forall n \geqslant 1,\ H_{2n+1} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right] + \frac{1}{2n+1}$$
$$= \frac{1\ -\ 0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{2n+1} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{2n+1}$$

où $a = 0, \quad b = 1, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, la somme de Riemann $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}dt = \left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \ln 2$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(H_{2n+1} - H_n) = \ln(2)$

$$3\text{- } \forall a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} \iff \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)}$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a = 6$$
$$\iff \begin{cases} 2a+2b+c = 0 \\ 3a+b+c = 0 \\ a = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ 2b+c = -12 \\ b+c = -18 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -24 \end{cases}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6\left(H_n - 1 + \tfrac{1}{n+1}\right) - 24(H_{2n+1} - \tfrac{1}{2}H_n - 1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 24H_n - 24H_{2n+1} - 6 + \frac{6}{n+1} + 24$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty}\left(24H_n - 24H_{2n+1} - 6 + \frac{6}{n+1} + 24\right) = 18 - 24\ln(2)$ $\quad \boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 18 - 24\ln(2)}$

1.30 CCP

Exercice 1 : f est l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Reconnaîre f et donner ses caractéristiques géométriques.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_i = p$

Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

SOLUTION **: Exercice 1 :** On constate que les colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$. La matrice A est donc une matrice orthogonale et f est une isométrie vectorielle.

On calcule le déterminant : $\det(A) = 1$. $\boxed{f \text{ est donc une rotation vectorielle}}$.

On recherche les vecteurs invariants en résolvant l'équation $A.V = V$. On trouve une droite D dont un vecteur directeur est le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On norme ce vecteur en définissant $w_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$

On recherche deux autres vecteurs (w_1, w_2) formant une BON du plan $P = D^{\perp}$.

On prend d'abord $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est clairement orthogonal à w_3 et que l'on norme pour définir :

$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Pour faire en sorte que (w_1, w_2, w_3) soit une BON directe de $\mathbb{R}^3$, le plus simple est de prendre $w_2 = w_3 \wedge w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

On sait que dans la base orthonomée directe (w_1, w_2, w_3) , f a pour matrice : $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Puisque A et R sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme f, elles ont même trace :

$\mathrm{tr}(R) = 2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{tr}(A) = -\frac{2}{3}$, ce qui permet de calculer $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{tr}(A) - 1}{2} = -\dfrac{5}{6}$

On récupère $\sin(\theta)$ par la première colonne de la matrice : $R : \sin(\theta) =< f(w_1), w_2 >= \langle A.w_1, w_2 \rangle = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

les deux conditions $\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = -\dfrac{5}{6} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{11}}{6} \end{array} \right.$ entraînent que $\theta = \pi - \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{11}}{6} = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$

En conclusion , f est la rotaion de l'espace dont l'axe est dirigé et orienté pas le vecteur $w_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \pi - \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{11}}{6} = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$

1.31 CCP

Exercice 1: Soit n un entier naturel non nul et $f_n(x) = \sin(nxe^{-nx^2})$

1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1]$ où $a \in]0, 1]$
3) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $]-1, 1[$
4) Comparer $\lim_{n \to +\infty} f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n'(0)$

Exercice 2: Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$

1) Montrer que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u_o v$, alors et λ est valeur propre de $v_o u$.
2) Si E est de dimension finie, montrer que c'est également vrai pour $\lambda = 0$.
3) Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $E = \mathbb{R}[X]$ et $P \in E$.
On pose $u(P) = P'$ et $v(P)$ la primitive de P qui s'annule en 0.
Déterminer $\ker(u_o v)$ et $\ker(v_o u)$

SOLUTION :

Exercice 2 : 1- Soit $\lambda \neq 0$ est valeur propre non nulle de $u_o v$; il existe $x \in E$, non nul tel que $u_o v(x) = \lambda x$

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda x \neq 0 \Longrightarrow u_o v(x) \neq 0 \Longrightarrow u_o v(x) \neq 0$$

En composant par x : $v_o u_o v(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) \Longrightarrow v_o u(v(x)) = \lambda \underbrace{v(x)}_{\neq 0} \Longrightarrow \lambda$ est valeur propre de $v_o u$.

2- On suppose de plus que E est de dimension fnie.

Supposons que $\lambda = 0$ est valeur propre de $u_o v$. Alors $u_o v$ n'est pas inversible, et $\det(u_o v) = 0$.

$\det(u_o v) = 0 = \det(u).\det(v) = \det(v).\det(u) = \det(v_o u) = 0$. Donc $v_o u$ n'est pas inversible et 0 est valeur propre de $v_o u$

3- Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in E$, on pose $u(P) = P'$ et $v(P)$ la primitive de P qui s'annule en 0.

Soit $P \in E$ et $\mathscr{P}$ la promitive (plynomiale) de P qui s'annule en 0 : $\mathscr{P} = v(P)$.

Alors $u_o v(P) = u[\mathscr{P}] = \mathscr{P}' = P$, donc $u_o v = Id_E$ et $\boxed{\ker(u_o v) = \{0\}}$

Soit $P \in E$. Alors $u(P) = P'$ et $v[u(P)] = v(P')$

$v(P')(x) = \int_0^x P'(t)dt = P(x) - P(0)$. Donc $(v_o u)(P) = P(X) - P(0)$.

Il s'en suit que $\boxed{\ker(v_o u) = \mathbb{R}_0[X]}$

1.32 ENSAM

Exercice d'algèbre :

1- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A^2 = -I_n$, alors n est pair.

2- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $B^2 - B + I_n = 0$, alors n est pair.

3- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $C^3 + C^2 + C = 0$, alors $\mathrm{rg}(C)$ est pair.

Exercice d'informatique :

```
import numpy as np
def LP(n):
    tableau=[i for i in range(0,n+1)]
    for i in range(2,int(np.sqrt(n))):
        for j in range(i**2,n,i):
            tableau[j]=0
    return [p for p in tableau if p>=2]
```

1- Observer et expliquer ce que fait cet algorithme.

2- Ecrire un programme permettant de vérifier que pour tout entier k de 2 à 40, $k(k+1)+41$ est un nombre premier.

3- Ecrire une fonction booléenne "`Tester(p)`" qui teste si, pour tout entier k de 2 à $p-1$, $k(k+1)+p$ est premier.

Déterminer tous les nombres inférieurs ou égaux à 100 qui vérifient cette propriété.

1.33 ENSAM

Exercice d'algèbre : On considère l'application $\varphi :: \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) & \mapsto & X^2(P'(X+1) - P'(X)) \end{cases}$

1- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

2- Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

3- Déterminer les éléments propres de φ.

4- Déterminer une base de $\ker\varphi$.

5- Soit F défini par : $F = X^2\mathbb{R}_2[X] = \{X^2Q(X),\ Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]\}$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, et qu'il est stable par φ.

6- Montrer que $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus \ker\varphi$.

7- φ est il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

1.34 ENSAM

Exercices ENSAM : 30 min exercice informatique et 30 min exercices de mathématiques

Exercice d'informatique

Soient $a, n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse aux couples de nombres tels que le nombre a^n finisse par n :

Exemple : $2^{36} = 68719476736$ finit par 36.

1- Ecrire un programme "`PF(a; n)`" qui renvoit un booléen pour savoir si le couple vérifie la condition.

2- Ecrire un programme "`LF(a;N)`" qui renvoit la liste des entiers inférieurs ou égaux à `N` qui vérifient la condition.

3- Ecrire un programme "`LF2(A,n)`" qui renvoit la liste des entiers inférieurs ou égaux à `A` qui vérifient la condition.

4- Ecrire un programme "`LF3(a,n)`" permettant de calculer le premier entier inférieur ou égal à `n` tel que a^n finisse par a cette fois , en se limitant à 10 secondes (il faut utiliser le module "**time**")

Exercice de mathématiques

Exercice 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[1, n]$

1- Calculer $P([X = Y])$.

2- Soit $S = X + Y$; calculer la loi de S.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n.

Discuter du cas d'égalité.

1.35 ENSAM

Réaliser un code qui convertit un nombre en chaine de caractère et inversement.

Exo de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.36 ENSAM **254 OdT**

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition, et est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

c) Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exprimer f à l'aide de la fonction "exponentielle intégrale" : $E_i : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

SOLUTION **:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}dt$ est continue sur l'intervalle $]-x, +\infty[$

- Si $x > 0$ la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}dt$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$, et est intégrable sur $[0, 1]$.

- Si $x = 0$, $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, et par équivalence en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ diverge. Donc $f(0)$ n'est pas défini.

- Si $x < 0$ la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}dt$ est continue sur $[0, -x[\cup]-x, +\infty[$

$\dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to -x}{\sim} \dfrac{e^{x}}{t+x}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{x+t}dt$ diverge, et par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ diverge aussi. Donc $f(x)$ n'est pas défini.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}dt$ est continue sur $[-x+1, +\infty[$ et la domination

$\dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$ assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-x+1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$

En résumé, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$. $\boxed{\mathscr{D}_f =]0, +\infty[}$

b) Notons $H(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$.

- Pour tout $t \in I =]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J =]0, +\infty[$

$$\text{et } \forall (x,t) \in J \times I,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$$

- Pour tout $x \in J =]0, +\infty[$, les fonctions $t \mapsto H(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ sont continues et intégrables sur I.

- Pour tout $a > 0$, pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{(a+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(a+t)^2}$, fonction intégrable sur I.

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que : $\forall x \in [a, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt$.

Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J =]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in J =]0, +\infty[,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.$$

• Intégrons par parties : $\forall x \in J =]0, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-1}{(x+t)^2}\, e^{-t}dt = \left[\frac{1}{x+t}\, e^{-t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+t}\,(-e^{-t})dt.$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt = -\frac{1}{x} + f(x).$$

Donc f est solution sur l'intervalle $J =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = -\dfrac{1}{x}$

c) $\forall x \in J =]0, +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{1}{x}\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

Cet encadrement montre que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

• La fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation différentielle homogène : (E0) $y' - y = 0$

Par la méthode de variation de la constante, on recherche la solution générale de (E) sous la forme:

$y(x) = \lambda(x)\, e^x$ où λ est une fonction inconnue.

Alors, $\forall x > 0,\ y'(x) = \lambda'(x)\, e^x + \lambda(x)\, e^x$, et en reportant dans l'équation (E), on parvient à :

$\lambda'(x)\, e^x = \dfrac{-1}{x}$ c'est à dire $\lambda'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$

Par majoration par e^{-t}, pour tout $x > 0$, l'intégrale $E_i(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge

$\lambda'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x} = E_i'(x)$, donc $\lambda(x) = E_i(x) + c$ (c constante réelle)

La solution générale de l'équation (E) est donc :

$$x \mapsto y(x) = e^x(E_i(x) + c) = e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + c \right)$$

f est une solution de 5e), donc il existe une constante c telle que :

$$\forall x \in]0, +\infty[f(x) = e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + c \right)$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, nécessiarement, $c = 0$.

Donc $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^x E_i(x)}$

Remarque : On pourrait obtenir ce résultat directement par le changement de variable $u = x + t$, $du = dt$ dans l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$

1.37 ENSAM **263 OdT**

a) Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets S_1, S_2 et S_3 d'un triangle.

A l'origine (étape 0), le mobile est en S_1.

S'il est en S_1 ou en S_3 à l'étape n, il sera en S_2 à l'étape $n + 1$.

S'il est en S_2 à l'étape n, il passe à l'étape suivante en S_1 ou en S_3 avec pour chacun la probabilité $\frac{1}{4}$, et reste en S_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités qu'à l'étape n le mobile soit en S_1, S_2 et S_3 , et T_n le vecteur colonne de composantes a_n, b_n et c_n.

Montrer qu'il existe une matrice M qu'on précisera telle que $T_{n+1} = M.T_n$

Calculer T_n et les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

***SOLUTION* :** La condition à l'origine s'écrit $T_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les trois conditions de passage de l'étape n à l'étape $n + 1$ s'écrivent : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \end{cases}$

soit aussi : $\boxed{T_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} .T_n}$. Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = M^n.T_0$

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & x - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & x \end{vmatrix} = x^2 \left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} x = x^3 - \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x \quad \boxed{\chi_M(X) = X(X-1)\left(X + \tfrac{1}{2}\right)}$$

La matrice M possède trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le calcul de ses vecteurs propres donne pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = P.\Delta.P^{-1} \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P.\Delta^n.P^{-1} = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$\lim_{n \to +\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \text{ d'où : } \boxed{\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1/6 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 2/3 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1/6 \end{cases}}$$

1.38 ENSAM **avec Python**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = a\ ,\qquad v_0 = b \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 6a_n - \frac{7}{2}v_n \end{cases}$$

1- a) Construire une fonction `Calcul_uv_n(a,b,n)` qui prend en paramètres d'entrée a, b et n, et qui retourne les deux listes $[u_0, u_1, \cdots, u_n], [v_0, v_1, \cdots, v_n]$

Calculer u_{10} et v_{10} lorsque $a = 5$ et $b = -7$

Tester le comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque :

- b) $a = 5$ et $b = -7$:
- c) $a = 2$ et $b = 3$:
- d) $a = 3$ et $b = 4$:

2- Avec Python, diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -7/2 \end{pmatrix}$

Faire en sorte que la matrice de passage P soit à coefficients entiers.

3 - Calculer explicitement u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

A quelle(s) condition(s) la suite $u_n)$ converge-t-elle vers 0 ?

A quelle(s) condition(s) les suites $u_n)$ et (v_n) sont elles constantes ?

4- a) Détermier le rayon de convergence et calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

Même question pour la série $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\,!} x^n$

***SOLUTION* :** 1- a) Fonction `Calcul_uv_n(a,b,n)` :

```
def Calcul_uv_n(a,b,n):
    u=[0 for k in range(n+1)]
    v=[0 for k in range(n+1)]
    u[0],v[0]=a,b
    for k in range(n):
        u[k+1]=5*u[k]-3*v[k]
        v[k+1]=6*u[k]-7*v[k]/2
    return u,v
```

Calcul de u_{10} et v_{10} lorsque $a = 5$ et $b = -7$: `print(Calcul_uv_n(5,-7,10))`

`86.919921875            115.8798828125`

b) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 5$ et $b = -7$:

```
print(Calcul_uv_n(5,-7,20))
print(Calcul_uv_n(5,-7,20))
print(Calcul_uv_n(5,-7,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent, la première vers 87, la seconde vers 116.

c) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 2$ et $b = 3$:

```
print(Calcul_uv_n(2,3,20))
print(Calcul_uv_n(2,3,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

d) Comportement limite des suites (u_n) et (v_n) lorsque : $a = 3$ et $b = 4$:

```
print(Calcul_uv_n(3,4,20))
print(Calcul_uv_n(3,4,30))
```

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) soient constantes.

2- Avec Python, diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -7/2 \end{pmatrix}$

Faire en sorte que la matrice de passage P soit à coefficients entiers.

```
[in]import numpy.linalg as alg
    A=np.array([[5,-3],[6,-7/2]])
    L = alg.eig(A)
    print(L)
```

```
[out](array([ 1. ,  0.5]), array([[ 0.6        ,  0.5547002 ],
                                  [ 0.8        ,  0.83205029]]))
```

$\boxed{\text{Les valeurs propres sont 1 et 1/2.}}$

Le premier vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Le second vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0.5547002 \\ 0.83205029 \end{pmatrix}$ vérifie :

```
[in] print( 0.5547002/0.83205029)
[out] 0.6666666746790029
```
Il est proportionnel à $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On prendra donc $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

```
import numpy.linalg as alg
[in] P=np.array([[3,2],[4,3]])
    print(P)
    print(alg.inv(P))
[out][[3 2]
      [4 3]]
    [[ 3. -2.]
     [-4.  3.]]
```
donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Finalement, l'égalité de diagonalisation de A s'écrit : $A = P.\Delta.P^{-1}$, avec $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

3 - Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5u_n - 3v_n \\ 6u_n - \frac{7}{2}v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}}_{=A} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A.X_n$$

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n.X_0$

Le vecteur colonne $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ se décompose sur la base de vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ X_0 = \alpha V_1 + \beta V_2$

alors, $X_n = A^n X_0 = A^n(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha A^n.V_1 + \beta A^n.V_2 = \alpha 1^n.V_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.V_2$

Il s'en suit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n = \alpha V_1 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La suite vectorielle $(X_n) = \left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right)$ converge donc, et $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3\alpha \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha \end{cases}$

La décomposition $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta V_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

permet de calculer α et β :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 3u_0 - 2v_0 \\ \beta = -4u_0 + 3v_0 \end{cases}$$

En conclusion, $\boxed{\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3\alpha = 9u_0 - 6v_0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha = 12u_0 - 8v_0 \end{cases}}$

Vérifications : a) dans le cas où $u_0 = 5,\ v_0 = -7$, $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 9 \times 5 - 6 \times (-7) = 45 + 42 = 87 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\alpha = 12 \times 5 - 8 \times (-7) = 60 + 56 = 116 \end{cases}$

Cela est conforme à l'étude faite avec python.

b) dans le cas où $u_0 = 2,\ v_0 = 3$, $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 9u_0 - 6v_0 = 18 - 18 = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 12u_0 - 8v_0 = 24 - 24 = 0 \end{cases}$

c) dans le cas où $u_0 = 3,\ v_0 = 4$, $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 9u_0 - 6v_0 = 27 - 24 = 3 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 12u_0 - 8v_0 = 36 - 32 = 4 \end{cases}$

4 - $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.V_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d'où les expressions explicites de u_n et v_n : $\begin{cases} u_n = 3\alpha + 2.\beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = 4\alpha + 3.\beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 3\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n = \frac{3\alpha}{1-x} + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{3\alpha}{1-x} + \frac{2\beta}{1-\frac{x}{2}} = \frac{3\alpha}{1-x} + \frac{4\beta}{2-x} = \frac{3\alpha(2-x) + 4\beta(1-x)}{(1-x)(2-x)} = \frac{6\alpha + 4\beta - (3\alpha + 4\beta)x}{(1-x)(2-x)}$$

$$S(x) = \frac{6(3u_0 - 2v_0) + 4(-4u_0 + 3v_0) - (3(3u_0 - 2v_0) + 4(-4u_0 + 3v_0))x}{(1-x)(2-x)}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \frac{2u_0 + 7u_0 - 6v_0)x}{x^2 - 3x + 2}} \qquad (R = 1)$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\,!} x^n = 3\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} + 2\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n\,!} = 3\alpha e^x + 2\beta e^{x/2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = 3(3u_0 - 2v_0)e^x + (-4u_0 + 3v_0)e^{x/2}} \qquad (R = +\infty)$$

1.39 ENSAM

On considère deux variables aléatoires $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p')$ qui suivent chacune une loi de Bernoulli sur un même espace probabilisé.

Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est nulle.

***SOLUTION* :** • Si X et Y sont indépendantes, alors $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, et $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y) = 0$

• Réciproquement, supposons que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, c'est à dire que $E(X.Y) = E(X)E(Y)$

Remarquons que $X.Y$ ne prend que les valeurs 0 et 1, donc suit une loi de Bernoulli.

Alors, $E(X.Y) = P(XY = 1) = P[(X = 1) \cap (Y = 1)]$ (car l'évènement $(XY = 1)$ est $(X = 1) \cap (Y = 1)$)

$$E(X.Y) = E(X)E(Y) = \underbrace{P(X = 1)}_{=p} . \underbrace{P(Y = 1)}_{=p'}$$

donc $P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = P[(X, Y) = (1, 1)] = P(X = 1)P(Y = 1)$, ce qui montre que les évènements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants.

On sait qu'alors leurs contraires $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ le sont aussi, de même que $(X = 1)$ et $(Y = 0)$ et ausi $(X = 0)$ et $(Y = 1)$

Tous les éléments $(X = h), h \in X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $(Y = k), k \in Y(\Omega) = \{0, 1\}$ sont deux à deux indépendants. Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes .

1.40 ENSAM **Hugues BARBIER**

Exercice d'informatique :

1- Enoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.

2- Ecrire une fonction "`lancer()`" qui simule le lancer d'un dé.

3- Ecrire une fonction "`lancers(N)`" qui renvoie une liste `T` tel que "`T[i]` soit la moyenne des "`i` premiers lancers.

4- Tracer l'évolution de `lancers(N)` en fonction de `N`. Commenter.

***SOLUTION* :** 1- Voir cours

2-
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def lancer():
    return rd.randint(1,7)
```

3-
```
def lancers(n):
    ListeLancers=[lancer() for i in range(n)]
    ListeMoyennee=[]
    for i in range(n):
        ListeMoyennee.append(sum(ListeLancers[:i+1])/(i+1))
    return ListeMoyennee
```

On teste :

```
print(lancers(10))
```

4- Tracé de l'évolution de la moyenne des n premier lancers.

```
n=500
plt.clf()
X=[k for k in range(n)]
M=[3.5 for k in range(n)]
Y=lancers(n)
plt.plot(X,Y,X,M)
```

On constate que la moyenne des n premiers lancers se rapproche de l'espérance d'un lancer, à savoir $\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$

2 Centrale - Supelec

2.1 Centrale maths 1

On considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{0}}}}}$

Etablir une relation simple entre u_n et u_{n-1}

Donner un équivalent puis un développement à deux, puis à trois termes de u_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION **:** En élevant au carré la relation $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{0}}}}}$, on obtient :

$$u_n^2 = n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{0}}}}, \text{ soit : } \boxed{u_n^2 = n + u_{n-1}}$$

• Pour tout n, $u_n \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 1$, $u_n^2 = n + u_{n-1} \geqslant n$

Par minoration , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

La relation $u_n^2 = n + u_{n-1} \geqslant n$ entraîne que $u_n \geqslant \sqrt{n}$

• Montrons par récurrence que $u_n \leqslant \sqrt{2n}$.

Pour les premières valeurs de n on a : $u_0 = 0 \leqslant \sqrt{0}$

$$u_1 = \sqrt{1+\sqrt{0}} = 1 \leqslant \sqrt{2}$$
$$u_2 = \sqrt{2+1} \leqslant \sqrt{4} = 2$$
$$u_3 = \sqrt{3+\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{6}$$

La propriété $u_n \leqslant \sqrt{2n}$ est donc vérifiée pour $n = 0, 1, 2, 3$.

Supposons la vérifiée au rang $n-1$: $u_{n-1} \leqslant \sqrt{2(n-1)}$

alors $u_n^2 = n + u_{n-1} \leqslant n + \sqrt{2(n-1)}$

il nous suffit de montrer que $n + \sqrt{2(n-1)} \leqslant 2n$ ou de manière équivalente que $\sqrt{2(n-1)} \leqslant n$

or : $\sqrt{2(n-1)} \leqslant n \iff 2(n-1) \leqslant n^2$

$$\iff 0 \leqslant n^2 - 2n + 2$$
$$\iff 0 \leqslant (n-1)^2 + 1$$

Cette dernière relation étant vérifiée, les précédentes le sont aussi et donc $u_n^2 \leqslant 2n$.

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \sqrt{2n}}$

• Reprenons la relation : $u_n^2 = n + u_{n-1}$.

La majoration $0 \leqslant u_{n-1} \leqslant \sqrt{2(n-1)}$ entraîne que $u_{n-1} = o(n)$, et que $n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$ ou, sous forme de développement : $\boxed{u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})}$

• Recherchons un développement à deux termes en posant $u_n = \sqrt{n} + v_n$, $v_n = o(\sqrt{n})$, et en recherchant un équivalent de v_n:

$$u_n^2 = n + u_{n-1} \implies (\sqrt{n} + v_n)^2 = n + \sqrt{n-1} + v_{n-1}.$$
$$\implies n + 2\sqrt{n}\, v_n + v_n^2 = n + \sqrt{n-1} + v_{n-1}.$$
$$\implies 2\sqrt{n}\, v_n + v_n^2 = \sqrt{n-1} + v_{n-1}.$$
$$\implies v_n(2\sqrt{n} + v_n) = \sqrt{n-1} + v_{n-1}.$$

Compte tenu de la domination $v_n = o(\sqrt{n})$, en prenant un équivalent dans chaque membre, on obtient :

$$\implies v_n(2\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}.$$
$$\implies v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

donc $v_n = \frac{1}{2} + o(1)$ et $\boxed{u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)}$

• Recherchons un développement à trois termes en posant $v_n = \frac{1}{2} + w_n$, $w_n = o(1)$, et en recherchant un équivalent de w_n:

$$v_n(2\sqrt{n} + v_n) = \sqrt{n-1} + v_{n-1} \implies \left(\tfrac{1}{2} + w_n\right)\left(2\sqrt{n} + \tfrac{1}{2} + w_n\right) = \sqrt{n-1} + \tfrac{1}{2} + w_{n-1}$$
$$\implies 2\sqrt{n}\, w_n + w_n + w_n^2 = \underbrace{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}_{\sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}} + \tfrac{1}{4} + w_{n-1}$$
$$\implies w_n(2\sqrt{n} + 1 + w_n) = \sqrt{n-1} - \sqrt{n} + \tfrac{1}{4} + w_{n-1}$$

en prenant des équivalents de chaque coté :

$$\implies 2w_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$
$$\implies w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}$$

Finalement, $\boxed{u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

2.2 Centrale **maths 1**

On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer tous les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

2.3 Centrale **maths 1**

Pour tout réel x, on considère l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$, lorsqu'elle est définie, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$

1- Montrer que la suite (u_n) converge.

2- Déterminer sa limite et la nature de la série $\sum u_n$.

3- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!\,(2k+1)}$

***SOLUTION*:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est positive et continue sur l'intervalle $]0,1]$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ où la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

Par équivalence, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente. $f(x)$ est donc défini pour tout réel x.

• Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$

Pour tout $t \in]0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-nt) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} = 0$

La suite de fonction $g_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$ converge simplement sur l'intervalle $]0,1]$ vers la foncion nulle ω.

$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall t \in]0,1] \end{array}\right\}, |g_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, où la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t) dt = \int_0^1 \omega = 0$, c'est à dire que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2- Par le changement de variable $u = nt$, $dt = \frac{1}{n} du$, on obtient :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^n \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{n}}} \frac{1}{n} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^u \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ est convergente, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \alpha$

d'où : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^u \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ étant divergente, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge}}$ aussi par équivalence.

2- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-nt)^k}{k!} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k n^k t^k}{k!\sqrt{t}}}_{=w_k(t)} dt$

$$\int_0^1 |w_k(t)| dt = \frac{n^k}{k!} \int_0^1 t^{k-1/2} dt = \frac{n^k}{k!} \left[\frac{t^{k+1/2}}{k+1/2}\right]_0^1 = \frac{n^k}{k!(k+1/2)} \leqslant \frac{n^k}{k!} \quad \text{(série exponentielle convergente)}$$

Par majoration, la série $\displaystyle\int_0^1 |w_k(t)| dt$ converge, ce qui permet d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, et d'affirler que : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 w_k(t)\right) dt$

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k n^k t^k}{k!\sqrt{t}}}_{=w_k(t)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 w_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(k+1/2)} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$$

2.4 Centrale **PC 135**

Soient a et T deux réels strictement positifs, et f une fonction $T-$ périodique.

Montrer qu'il existe au plus une valeur du réel λ telle que l'intégrale $J(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

Montrer que si la fonction $G : x \mapsto \int_a^x (\lambda - f(t))dt$ est bornée, alors $J(\lambda)$ converge.
Conclure.

***SOLUTION*:** Soit $x > 0$ et n tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$.

$$\int_T^{nT} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \lambda \int_T^{nT} \frac{dt}{t} - \int_T^{nT} \frac{f(t)}{t} dt$$

(les fonctions intégrées sont continues donc intégrables sur le segment $[T, nT]$

$$\int_T^{nT} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \lambda \ln\left(\frac{nT}{T}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$= \lambda \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^T \frac{f(kT+u)}{kT+u} du \qquad \text{(par le changement de variable } t = u + kT\text{)}$$

Intégrons par parties en prenant la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ comme primitive de f :

$$\forall k \geqslant 1, \int_0^T \frac{f(u)}{kT+u} du = \left[\frac{F(u)}{kT+u}\right]_0^T + \int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du$$

$$= \frac{F(T)}{(k+1)T} + \int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du$$

donc $\displaystyle\int_T^{nT} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \lambda \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{F(T)}{(k+1)T} + \int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right)$

$$= \lambda \ln(n) - \frac{F(T)}{T} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du$$

La fonction F est continue sur le segment $[0, T]$, donc bornée :

$$\forall u \in [0,T], |F(u)| \leqslant \|F\|_{[0,T]}^{\infty} = \sup_{u \in [0,T]} |F(u)| = M_F$$

donc $\forall u \in [0, T]$, $\left|\dfrac{F(u)}{(kT+u)^2}\right| \leqslant \dfrac{M_F}{k^2 T^2}$

Ce dernier majorant étant indépendant de u, on en déduit que $\left\|\dfrac{F(u)}{(kT+u)^2}\right\|_{u \in [0,T]}^{\infty} \leqslant \dfrac{M_F}{k^2T^2}$, ce qui montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(u)}{(kT+u)^2}$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, T]$.

On peut alors écrire : $\displaystyle\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(u)}{(kT+u)^2}\right) du = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right)$, et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right) = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right)$$

Notons α cette intégrale : $\alpha = \displaystyle\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right)$

Reprenons l'égalité : $\displaystyle\int_T^{nT} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \lambda \ln(n) - \frac{F(T)}{T} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \underbrace{\int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du}_{\to \alpha \text{ quand } n \to +\infty}$

Rappelons que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

alors, $\displaystyle\int_T^{nT} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt = \lambda \ln(n) - \frac{F(T)}{T} (\ln(n) + \gamma - 1 + \varepsilon_n) + \int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du$

$$= \left(\lambda - \frac{F(T)}{T}\right) \ln(n) - \frac{F(T)}{T} (\gamma - 1 + \varepsilon_n) + \underbrace{\int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du}_{\to \alpha \text{ quand } n \to +\infty}$$

Le terme $\displaystyle\left[-\frac{F(T)}{T} (\gamma - 1 + \varepsilon_n) + \int_0^T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(u)}{(kT+u)^2} du\right]$ a une limite finie quand $n \to +\infty$, à savoir $\dfrac{F(T)}{T}(1 - \gamma) + \alpha$

Le terme $\left(\lambda - \dfrac{F(T)}{T}\right) \ln(n)$ a une limite infinie, sauf si $\lambda = \dfrac{F(T)}{T}$

Finalement, $\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe au plus une valeur de } \lambda \text{ pour que l'intégrale } \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt \text{ converge,}\\ \text{à savoir lorsque } \lambda = \dfrac{F(T)}{T} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt\end{array}}$

• Supposons que la fonction $G : x \mapsto \int_a^x (\lambda - f(t))dt$ soit bornée.

Intégrons par parties : $\displaystyle\int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}dt = \int_a^x \frac{1}{t}(\lambda - f(t))dt = \left[\frac{G(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{G(t)}{t^2}dt$

$$\int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}dt = \frac{G(x)}{x} - \frac{G(a)}{a} + \int_a^x \frac{G(t)}{t^2}dt$$

G est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geqslant a,\ |G(x)| \leqslant M$

alors : $\left|\frac{G(x)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\left|\frac{G(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{M}{t^2}$, qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente.

On en conclut que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}dt = -\frac{G(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2}dt$, qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ est bien convergente.

• En conclusion, on a montré qu'il existait au plus une valeur de λ pour laquelle l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ était convergente, et que cette valeur était la valeur moyenne de f, $\lambda = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

On a ensuite montré que si la fonction $G : x \mapsto \int_a^x (\lambda - f(t))dt$ était bornée, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ était convergente.

Il reste pour conclure à monter qu'en prenant $\lambda_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$, la fonction $G_0 : x \mapsto \int_a^x (\lambda_0 - f(t))dt$ était bornée.

Soit $x \geqslant a$ et n l'unique entier tel que $nT \leqslant x < (n+1)T \quad (n = \lceil \frac{x}{T} \rceil)$

$$G(x) = \int_a^x (\lambda_0 - f(t))dt = \lambda_0(x-a) - \int_a^x f(t)dt = \frac{f(T)}{T}(x-a) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t)dt - \int_{a+nT}^x f(t)dt$$

$$= \lambda_0(x-a) - \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_a^{a+T} f(u)du}_{=T\ \lambda_0} - \int_{a+nT}^x f(t)dt$$

$$= \lambda_0(x-a) - n\lambda_0 T - \int_{a+nT}^x f(t)dt = \lambda_0(x-a-nT) - \int_{a+nT}^x f(t)dt$$

d'où $|G(x)| \leqslant |\lambda_0|(T+a) + T\|f\|$, ce qui montre que G est bornée.

Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt \text{ est convergente si et seulement si } \lambda = \frac{f(T)}{T}}$.

2.5 Centrale PC 146

On considère une fonction g réelle, continue et périodique de période 1.

Trouver le domaine de définition de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt$

Etudier la limite calculer un équivalent de $G(x)$ aux bornes de ce domaine.

SOLUTION : • g est continue sur $[0, +\infty[$ et de période 1. Elle est donc bornée sur le segment $[0, 1]$ et sur $[0, +\infty[$ par périodicité : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |g(t)| \leqslant M$

Soit $x > 0$. $\forall t \in [0, +\infty[, |g(t)e^{-xt}| \leqslant Me^{-xt}$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ est une intégrale de référence, convergente si et seulement si $x > 0$. Donc par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt$ est absolument convergente si $x > 0$.

Par périodicité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^n g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_0^1 g(k+u)du}_{=\int_0^1 g(u)du} = n\int_0^1 g(u)du$

Si $\int_0^1 g(u)du \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n g(t)dt = \infty$, et l'intégrale $G(0) = \int_0^{+\infty} g(t)dt$ est divergente.

Si $\int_0^1 g(u)du = 0$, alors la fonction $u \mapsto \int_0 g(t)dt$ est périodique non identiquement nulle et n'a pas de limite quad $u \to +\infty$. Dans ce cas l'intégrale $G(0) = \int_0^{+\infty} g(t)dt$ est aussi divergente.

On en conclut que $\boxed{\mathscr{D}_g =]0, +\infty[}$

• Soit $x>0$. $G(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} g(t)e^{-xt}dt=$ (relation de Chasles)

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \underbrace{g(k+u)}_{=g(u)}e^{-x(k+u)}du \quad \text{(changement de variable } t=k+u,\ dt=du)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kx}\underbrace{\int_0^1 g(u)e^{-xu}du}_{independant\ de\ k}=\int_0^1 g(u)e^{-xu}du\quad \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}[e^{-x}]^k}_{serie\ geometrique}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ G(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}\int_0^1 g(u)e^{-xu}du}$$ On sait que $(1-e^{-x})\underset{x\to 0}{\sim}x$

• Etudions $\displaystyle\int_0^1 g(u)e^{-xu}du$ quand $x\to 0$:

Soit (x_n) une suite de réels >0 de limite nulle. Chaque fonction $(h_n)=(u\mapsto g(u)e^{-x_n u})$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$. De plus, $\forall u\in[0,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} g(u)e^{-x_n u}=g(u)$.

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vers la fonction g.

$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\\ \forall u\in[0,1]\end{cases}$ $|h_n(u)|=|g(u)e^{-x_n u}|\leqslant|g(u)|\leqslant M$ où la fonction constante M est intégrable sur le segment $[0,1]$

D'après le théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g(u)e^{-x_n u}du=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(u)du=\int_0^1 g(u)du.$$

Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) de limite nulle, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1 g(u)e^{-xu}du=\int_0^1 g(u)du$

De l'égalité : $G(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}\displaystyle\int_0^1 g(u)e^{-xu}du$, on conclut enfin :

$$\boxed{G(x)=\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}\int_0^1 g(u)du}$$ (si $\int_0^1 g(u)du\neq 0$)

• Par le changement de variable $v=xu$, $dv=xdu$,

$$\forall x>0,\ G(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}\int_0^1 g(u)e^{-xu}du=\frac{1}{1-e^{-x}}\int_0^x g\left(\frac{v}{x}\right)e^{-v}\frac{1}{x}dv=\frac{1}{x(1-e^{-x})}\int_0^x g\left(\frac{v}{x}\right)e^{-v}dv$$

En considérant une suite quelconque (x_n) de réels qui divege vers $+\infty$, étudions $w_n=\displaystyle\int_0^{x_n} g\left(\frac{v}{x_n}\right)e^{-v}dv$

Notons f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases}\forall v\in[0,x_n],\ f_n(v)=g\left(\frac{v}{x_n}\right)e^{-v}\\ \forall v\in]x_n,+\infty[,\ f_n(v)=0\end{cases}$

La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $(v\mapsto g(0)e^{-v})$ (par continuité de la fonction g)

Par la domination $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\\ \forall u\in[0,+\infty[\end{cases}$ $|f_n(u)|\leqslant|Me^{-v}||$ où la fonction $(v\mapsto Me^{-v}$ est intégrable sur l'intervalle $[0+\infty[)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{x_n} g\left(\frac{v}{x_n}\right)e^{-v}dv=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(v)dv=\int_0^{+\infty}g(0)e^{-v}dv=g(0)\left[-e^{-v}\right]_0^{+\infty}=g(0).$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$, il s'en suit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g\left(\frac{v}{x}\right)e^{-v}dv=g(0)$

et puisque $\forall x>0,\ G(x)=\dfrac{1}{x(1-e^{-x})}\displaystyle\int_0^x g\left(\frac{v}{x}\right)e^{-v}dv$ $\boxed{G(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{g(0}{x}}$

2.6 Centrale PSI 159

Montrer la convergence pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ de l'intégrale $f(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$

Etudier la parité de f.

f admet elle une limite en 0?

f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la calculer.

Développer f en série entière en précisant le domaine de validité de ce développement.

SOLUTION : Soit $x\neq 0$. La fonction $g_x : t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est continue sur $]-x,x[$. Elle est paire. Il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale pour la borne x.

$$g_x(t)=\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x+t)(x-t)}}\underset{t\to x^-}{\sim}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(2x)(x-t)}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}}}_{constante}\times\frac{1}{(x-t)^{1/2}}$$

Or on sait que pour tout $\alpha<1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{1/2}}$ converge, et par équivalece, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x g_x(t)dt$ aussi.

Par parité, pour tout $x\neq 0$ fixé, de la fonction $g_x:t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$, on peut affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^0 g_x(t)dt$ converge aussi.

Donc pour tout $x\neq 0$, l'intégrale $f(x)=\displaystyle\int_{-x}^x\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est définie.

Pour $x=0$, $f(0)$ devrait être défini comme $f(0)=\displaystyle\int_0^0\frac{1}{0}dt$, ce qui n'a guère de sens.

Par contre on peut se demander si $f(x)$ admet une limite finie quand $x\to 0$, ce qui permettrait de prolonger f par continuité en 0.

Remarquons que $f(-x)=\displaystyle\int_x^{-x}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)((-x)^2-t^2)}}=\int_{-x}^x\frac{-du}{\sqrt{(1+(-u)^2)(x^2-(-u)^2)}}$ par le changement de variable $u=-t$

$f(-x)=-\displaystyle\int_{-x}^x\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(x^2-u^2)}}=-f(x)$ La fonction f est impaire.

• $\forall x>0,\ f(x)=\displaystyle\int_{-x}^x\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}=2\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}=2\int_0^1\frac{x\,du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(x^2-x^2u^2)}}$
par le changement $t=xu$, $dt=xdu$

$$f(x)=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}$$

Soit (x_n) une suite quelconque de réels strictement positifs, de limite nulle.

$$f(x_n)=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[0,1[,\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ où la fonction $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et écrire que :

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=2(\text{Arcsin}(1)-\text{Arcsin}(0))=\pi$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) positive de limite nulle, $\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=\pi}$.

Par imparité, $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=-\pi$ et on ne peut pas prolonger f en une fonction continue à la fois à gauche et à droite en 0.

• Soit (x_n) une suite quelconque de réels strictement positifs, de limite $+\infty$.

$$f(x_n)=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[0,1[,\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ où la fonction $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et écrire que :

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=2\int_0^1 0\,du=0$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) positive de limite $+\infty$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

• Soit $x>0$. Par le changement de variable $u=\sin\theta$, $du=\cos\theta d\theta$,

$$f(x)=2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{(1+x^2\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+x^2\sin^2\theta}}$$

$$\forall u\in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1+u}}=(1+u)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}u+\frac{\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}}{2}u^2+\cdots+\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-1)}{2}}{n!}u^n+\cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n}}{n!} u^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} u^n$$

donc $f(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \sin^{2n}\theta\, x^{2n}\right) d\theta = 2\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\, x^{2n}\right) d\theta$

(développement en série valable si $|x| < 1$, intervertion série-intégrale valable par convergence normale de la série $\theta \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \sin^{2n}\theta\, x^{2n}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

$$f(x) = 2\left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta d\theta\right) x^{2n}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta d\theta\right) x^{2n}$$

en notant w_n l'intégrale de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$, on obtient le DSE suivant :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} w_{2n}\, x^{2n}}$$

2.7 Centrale PSI 163

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle (E) : $2xy'(x) - 2y(-x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème (E) se ramène à deux équations différentielles du premier ordre, et résoudre le problème (E).

SOLUTION : • Par analyse-synthèse on montre que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}_{fonction\ paire} + \underbrace{\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}}_{fonction\ impaire}$

et que cette décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est la seule possible.

• La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \implies \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f'(-x))$$

et de la même manière, la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire .

• Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui se décompose en somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$ et $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2xf'(x) - 2f(-x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2x(g'(x) + h'(x)) - 2(g(-x) + h(-x)) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2x(g'(x) + h'(x)) - 2(g(x) - h(x)) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{2xg'(x) - 2g(x)}_{paire} + \underbrace{2xh'(x) + 2h(x)}_{impaire} = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{impaire}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 2xg'(x) - 2g(x) = 0 & (E1) \\ 2xh'(x) + 2h(x) = \dfrac{x}{x^2+1} & (E2) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c}\text{par unicité de la décomposition} \\ \text{en partie paire et partie impaire}\end{array}\right)$$

L'équation $(E1)$ a pour solution générale $x \mapsto y(x) = \lambda \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = \lambda \exp(\ln|x|) = \lambda\, x$

L'équation homogène $(E10)$: $xh'(x) + h(x) = 0$ a pour solution générale $x \mapsto y(x) = \lambda \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right) = \lambda \exp(-\ln|x|) = \frac{\lambda}{x}$

On recherche une solution de l'équation complète $(E2)$ par la méthode de variation de la constante, de la forme : $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$. Alors $y'(x) = \dfrac{\lambda'(x)\, x - \lambda(x)}{x^2}$

y est solution de $(E2)$ si et seulement si $2xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$\iff \frac{2\lambda'(x)\, x - 2\lambda(x)}{x} + 2\frac{\lambda(x)}{x} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\iff \lambda'(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} \iff \lambda(x) = \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \mu$$

Une solution particulière de $(E2)$ est $y(x) = \dfrac{1}{4x}\ln(x^2+1)$

2.8 Centrale PSI 164

Montrer que l'équation différentielle (E) : $y'' = (1 + x^4)y$ admet une unique fonction f telle que

$$f(0) = f'(0) = 1.$$

Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{f^2(x)}\right)$ est intégrable sur sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)}$ est solution de (E).

En déduire les solutions de (E) en fonction de la fonction f.

SOLUTION : L'équation différentielle $(E) :\ y'' - (1 + x^4)y = 0$ est une équation du second ordre, linéaire, pour laquelle le coefficient de y'', à savoir 1, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elle admet donc une unique solution f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, qui vérifie les conditions initiales : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

• La relation $f''(x) = (x^4 + 1)f(x)$ entraîne que $f''(0) = 1$. Par continuité f'' reste positive sur un intervalle de la forme $[0, +\alpha[$ (éventuellement $\alpha = +\infty$) .

Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[, f''(x) > 0$. Supposons au contraire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $f''(\beta) = 0$ et considérons $\alpha = \inf\{t \in \mathbb{R}^+,\ f''(t) = 0\}$. Alors $f''(\alpha) = 0$ et $\forall x \in [0, \alpha[, f''(x) > 0$ (justifier)

f' est alors croissante sur l'intervalle $[0, \alpha[$ (puisque sa dérivée est positive).

x	$0 \qquad \alpha \quad +\infty$
$f''(x)$	$1 \quad + \quad 0$
$f'(x)$	$1 \quad \nearrow$
$f(x)$	$1 \quad \nearrow$

Donc $\forall x \in [0, \alpha[,\ f'(x) \geqslant f'(0) = 1 > 0$; donc f est croissante sur l'intervalle $[0, \alpha[$, donc $\forall x \in [0, \alpha[,\ f(x) \geqslant f(0) = 1$. Par continuité au point α, $f(\alpha) \geqslant 1$. Donc $f''(\alpha) = \underbrace{(\alpha^4 + 1)}_{\geqslant 1}\underbrace{f(\alpha)}_{\geqslant 1} \geqslant 1 \neq 0$, ce qui contredit la relation $f''(\alpha) = 0$.

On a ainsi montré par l'absurde que f'' ne s'annulait pas sur $[0, +\infty[$, et que $\forall x \in [0, +\infty[, f''(x) > 0$.

Dès lors, f' est croissante sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) \geqslant f'(0) = 1$.

$\Longrightarrow \forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \geqslant 1 + \int_0^x dt = 1 + x$

f ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{f^2(x)}\right)$ est continue sur le fermé $[0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in [0, +\infty[,\ \frac{1}{f^2(x)} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2}$ où la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}\right)$ est intégrable sur sur $[0, +\infty[$.

Par majoration, la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{f^2(x)}\right)$ est intégrable sur sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f^2(x)}dx$ est bien convergente.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)}$.

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)} - f(x)\frac{1}{f^2(t)} = f'(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)} - \frac{1}{f(x)}.$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = f''(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)} - f'(x) \times \frac{1}{f^2(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f''(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)}.$$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = (1 + x^4)f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)} = (1 + x^4)g(x)$. ce qui montre que g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

• La relation $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)}$ montre que le système (f, g) n'est pas lié. Il constitue dont une base de $\mathscr{S}_{(E)}$, espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont donc les fonctions de la forme : } (x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x) = \left(\lambda + \mu \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f^2(t)}\right) f(x)}$$

2.9 Centrale PSI 165

On considère une suite (x_n) définie par : $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$

Etudier la nature de la série $\sum \frac{1}{x_n}$.

Quel lien y-a-t-il entre x_{n+1} et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$?

Trouver un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

SOLUTION : • La suite (x_n) est définie par : $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \geqslant 0,\ x_n > 0$, et que la suite (x_n) est croissante $(\forall n, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0)$

Deux alternatives se présentent :

- Soit la suite (u_n) converge, vers une limite $L \geqslant x_0 > 0$ (car $\forall n \geqslant 1,\ 0 < x_0 \leqslant x_n$, et on passe à la limite qd $n \to +\infty$)

- Soit la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Dans le premier cas, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L > 0$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{L}$

En passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, on obtient $L = L + \dfrac{1}{L}$, soit $\dfrac{1}{L} = 0$, relation qui n'est vérifiée pour aucun réel L. Ceci élimine la première hypothèse. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$

• On sait que la suite (x_n) a même nature que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$. Cette série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est donc divergente, et puisque $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n}$, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{x_n} \text{ est donc divergente}}$.

• En élevant au carré l'égalité $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, on obtient : $\quad \forall k \geqslant 0,\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + 2 + \frac{1}{x_k^2}$

et en sommant pour $k = 0, 1 \cdots n$, $\boxed{x_{n+1}^2 = x_0^2 + 2(n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}}$ (somme telescopique)

Puisque chacun des termes x_0^2 et $\frac{1}{x_k^2}$ sont positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}^2 \geqslant 2(n+1)$, ou, plus simplement :

$\forall k \geqslant 1,\ x_k^2 \geqslant 2k$ soit aussi : $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{1}{x_k^2} \leqslant \dfrac{1}{2k}$

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2} \leqslant \frac{1}{x_0^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) = O(\ln n) = o(n)$

En reprenant l'égalité $x_{n+1}^2 = \underbrace{x_0^2}_{=O(1)} + 2(n+1) + \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}}_{=o(n)}$, on obtient : $x_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(n+1)$,

soit finalement : $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}}$

2.10 Centrale PSI 170

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives A_0, qui est un puits, A_1 et A_2 qui sont deux positions intermédiaires, et A_3 un second puits.

A l'instant $t = n$:

- si la particule est dans un puits, elle y reste sûrement.
- si elle est an A_1, elle va en A_0 avec une probabilité $p \in [0,1]$ et en A_2 avec la probabilité $1-p$.
- si elle est an A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule à l'intant $t = n$. $x_n(\Omega) = [[0,3]]$.

Ecrire une fonction "Python" qui donne x_{n+1} en fonction de x_n et de p.

Ecrire une fonction renvoyant x_n en fonction de x_0 et de p.

Faire l'histogramme des x_n obtenues sur N essais.

Soir $X_n = \begin{pmatrix} P(x_n=0) \\ P(x_n=1) \\ P(x_n=2) \\ P(x_n=3) \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ indépendant de n telle que $X_{n+1} = A.X_n$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

On suppose désormais $p = \frac{1}{2}$. Diagonaliser A avec Python et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$. Comparer aux résultats obtenus précédemment.

SOLUTION : $(x_n = 0), (x_n = 1), (x_n = 2), (x_n = 3)$ forment un système complet d'évènements, d'où :

$(x_{n+1}=0) = [(x_{n+1}=0)\cap(x_n=0)]\cup[(x_{n+1}=0)\cap(x_n=1)]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=0)\cap(x_n=2)}_{impossible}]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=0)\cap(x_n=3)}_{impossible}]$

$$\begin{aligned} P(x_{n+1}=0) &= P[(x_{n+1}=0)\cap(x_n=0)] + P[(x_{n+1}=0)\cap(x_n=1)] \quad \text{(évènements incompatibles)} \\ &= \underbrace{P[(x_{n+1}=0)|(x_n=0)]}_{=1} P(x_n=0) + \underbrace{P[(x_{n+1}=0)|(x_n=1)]}_{=p} P(x_n=1) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x_{n+1}=0) = P(x_n=0) + pP(x_n=1)}$$

$(x_{n+1}=1) = [\underbrace{(x_{n+1}=1)\cap(x_n=0)}_{impossible}]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=1)\cap(x_n=1)}_{impossible}]\cup[(x_{n+1}=1)\cap(x_n=2)]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=1)\cap(x_n=3)}_{impossible}]$

$$\begin{aligned} P(x_{n+1}=1) &= P[(x_{n+1}=1)\cap(x_n=2)] \\ &= \underbrace{P[(x_{n+1}=1)|(x_n=2)]}_{=p} P(x_n=2) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x_{n+1}=1) = pP(x_n=2)}$$

$(x_{n+1}=2) = [\underbrace{(x_{n+1}=2)\cap(x_n=0)}_{impossible}]\cup[(x_{n+1}=2)\cap(x_n=1)]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=2)\cap(x_n=2)}_{impossible}]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=2)\cap(x_n=3)}_{impossible}]$

$$\begin{aligned} P(x_{n+1}=2) &= P[(x_{n+1}=2)\cap(x_n=1)] \\ &= \underbrace{P[(x_{n+1}=2)|(x_n=1)]}_{=1-p} P(x_n=1) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x_{n+1}=2) = (1-p)P(x_n=1)}$$

$(x_{n+1}=3) = [\underbrace{(x_{n+1}=3)\cap(x_n=0)}_{impossible}]\cup[\underbrace{(x_{n+1}=3)\cap(x_n=1)}_{impossible}]\cup[(x_{n+1}=3)\cap(x_n=2)]\cup[(x_{n+1}=3)\cap(x_n=3)]$

$$\begin{aligned} P(x_{n+1}=3) &= P[(x_{n+1}=3)\cap(x_n=2)] + P[(x_{n+1}=3)\cap(x_n=3)] \quad \text{(évènements incompatibles)} \\ &= \underbrace{P[(x_{n+1}=3)|(x_n=2)]}_{=1-p} P(x_n=2) + \underbrace{P[(x_{n+1}=3)|(x_n=3)]}_{=1} P(x_n=3) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x_{n+1}=3) = (1-p)P(x_n=2) + P(x_n=3)}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} P(x_{n+1}=0) \\ P(x_{n+1}=1) \\ P(x_{n+1}=2) \\ P(x_{n+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_n=0)+pP(x_n=1) \\ pP(x_n=2) \\ (1-p)P(x_n=1) \\ (1-p)P(x_n=2)+P(x_n=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}.X_n$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -p & 0 & 0 \\ 0 & x & -p & 0 \\ 0 & p-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & -p \\ p-1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x^2+p(p-1))$$

$\chi_A(X) = (X-1)^2(X^2+p(p-1))$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $p(p-1) \leqslant 0$, ssi $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Si $p \notin [0,1]$, le polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

- Si $p = 0$, $\chi_A(X) = X^2(X-1)^2$. A possède deux valeurs propres doubles, 0 et 1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois premières colonnes forment un système libre, les deux dernières sont égales, donc $\text{rg}(A) = 3$ et $\dim(E_A(0)) = 4 - 3 = 1 < 2 = ordre(0)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable.

• Si $p = 1$, $\chi_A(X) = X^2(X-1)^2$. A possède deux valeurs propres doubles, 0 et 1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Là encore $\text{rg}(A) = 3$ et $\dim(E_A(0)) = 4 - 3 = 1 < 2 = ordre(0)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable.

Dans tous les cas les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A associés à la valeur propre double 1. Donc $\dim(E_A(1)) = 2$.

• Si $0 < p < 1$, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \underbrace{1}_{double}, -\sqrt{p(1-p)},\ \sqrt{p(1-p)} \right\}$

A possède une valeur propre double égale à 1, avec un sous espace propre associé de dimension 2, et deux valeurs propres simples réelles $-\sqrt{p(1-p)}$ et $\sqrt{p(1-p)}$ associées chacune à une sous espace propre de dimension 1. La somme des dimensions des ous espaces propres étant égale à 4, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

• Finalement, $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } 0 < p < 1}$.

• Pour $p = \frac{1}{2}$, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{ \underbrace{1}_{double}, -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \}$

Une base de vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres sont :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A = P.\Delta.P^{-1}$$

????????????????????????????????? Voir avec Python

2.11 Centrale PC 241 (avec Python)

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(2 - e^{-1/x})$

Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Calculer quelques valeurs de f au voisinage de 0. Que conjecturer ? Le démontrer .

Calculer $xf(x)$ pour $x \in \{10, 100, 1000, 10000\}$.

Conjecturer le comportement de $xf(x)$ au voiinage de $+\infty$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Calculer un équivalent de $f(x)$ en $-\infty$

SOLUTION : Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$f(x)$ est définie si et seulement si $2 - e^{-1/x} > 0 \iff e^{-1/x} < 2 = e^{\ln 2}$

$$\iff \frac{-1}{x} < \ln 2 \quad \text{(par stricte croissance de la fonction exponentielle)}$$

Cette condition est vérifiée si $x > 0$ car alors $\dfrac{-1}{x} < 0 < \ln 2$

Si $x < 0$, $2 - e^{-1/x} > 0 \iff \dfrac{-1}{\ln 2} > x$ (on inverse le sens de l'inégalité en multipliant par x)

Finalement, $\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty, \dfrac{-1}{\ln 2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[}$

• $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{-e^{-1/x}}{x^2(2 - e^{-1/x})} < 0$

La fonction f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty, \frac{-1}{\ln 2}\right[$ et $\left]0, +\infty\right[$

• Tracé de la courbe représentative de la fonction f :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
def f(x):
    return np.log(2-np.exp(-1/x))
X1=np.arange(-5,-1/np.log(2),0.01)
Y1=f(X1)
X2=np.linspace(0.001,5,100)
Y2=f(X2)
plt.figure(1)
plt.plot(X1,Y1)
plt.plot(X2,Y2)
plt.grid()
plt.show()
```

- $f(x) = \ln(2 - e^{-1/x}) = \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}e^{-1/x}\right) = \ln(2) + o\left(e^{-1/x}\right) = \ln(2) + o\left(x^m\right)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

  En comparant avec la formule de Taylor - Young, $f(x) = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^m)$, par unicité des coefficients, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$. La fonction f est une fonction "**plate**" autour du point 0 à droite. On peut resserrer

```
X2=np.linspace(0.001,0.5,100)
Y2=f(X2)
plt.plot(X2,Y2)
plt.grid()
plt.show()
```

- Calcul de $xf(x)$ pour $x \in \{10, 100, 1000, 10000\}$:

```
[in] for k in range(1,5):
[in]     print(10**k*f(10**k))
[out] 0.909028289264
[out] 0.990098929018
[out] 0.999000998918
[out] 0.99990001
```

  Il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1$

  Quand $x \to +\infty$, $\frac{-1}{x} \to 0$ et $2 - e^{-1/x} \to 2 - 1 = 1$

  alors $\ln(2 - e^{-1/x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} (2 - e^{-1/x}) - 1 = 1 - e^{-1/x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

  ce qui montre bien que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1}$ et que $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

- Quand $x \to -\infty$, $\frac{-1}{x} \to 0$ et le calcul précédent est encore valable :

  $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x) = 1}$ et que $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

2.12 Centrale

Maths 1: (30 min sans préparation)

Montrez que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Donnez une base dans laquelle la matrice de l'application dériver $D: P \mapsto P'$ est composé seulement de 0 et 1.

Existence et unicité de Q appartenant à $R[X]$ tel que pour P dans $\mathbb{R}[X]$ on ait: $P - P' = Q$

(Indication de l'examinateur: regardez l'application $h: P \mapsto P - P'$)

Montrez que si $Q \geqslant 0$, alors $P \geqslant 0$.

(Indication de l'examinateur: On pose $g(x) = P(x)e^{-x}$)

Montrez que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples alors Q l'est aussi.

Maths 2: (avec python)

On se propose d'étudier la suite $u_n = n^3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^4 + n^2k^2 + k^4}$

1- Ecrire sur python une fonction $f(n)$ qui renvoie u_n.

Représenter graphiquement 100 puis 1000 puis 10000 points de u_n.

2- Représenter la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 + x^4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

3- a) Montrer que si V_n est l'approximation de $\int_0^1 g(t)dt$ par la méthode des trapèzes qui fait intervenir les points de subdivision $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, alors $\varepsilon_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt - V_n\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{[a,b]}^{\infty}$

b) Calculer l'intégrale de $g(x)$ sur $[0,1]$ par la méthode des trapèzes avec une précision à 10^{-2}.

c) Calculer l'intégrale de $g(x)$ sur $[0,1]$ par la méthode "quad" se trouvant dans la module "scipy" de PYTHON. (on pourra consulter l'aide en ligne sur le site du concours Centrale)

d) Comparez l'intégrale et u_{1000}

4- Trouver a et b tel que $g(x) = \dfrac{ax+b}{1+x+x^2} + \dfrac{-ax+b}{1-x+x^2}$.

En déduire la convergence de (u_n) et calculer sa limite exacte. Comparer avec les calculs approchés de la question 3).

SOLUTION :

Exercice 1 : En observant la matrice de la dérivation D dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$, qui est $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, on remarque qu'en modifiant cette base et en prenant pour nouvelle base $\mathscr{B}' = \left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6} \cdots, \frac{X^n}{n!}\right)$, (c'est à dire $\mathscr{B}' = \left(\frac{X^y}{k!}\right)_{k=0,\ldots,n}$) la matrice de D dans cette seconde base est

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(puisque } D\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}\text{)}$$

L'application $g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sa matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est $N = I_n - M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire inversible puisque son déterminant vaut 1. L'application g_n est donc un isomorphisme linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Considérons alors l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(attention, $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie) .

Montrons qu'elle est injective. Si $P \in \ker g$, alors $P = P'$. Une telle égalité n'est possible que si $P = 0$ car sinon, P et P' ont des degrés différents, et ne peuvent pas être égaux.

Donc $\ker g = \{0\}$ et g est injective.

Montrons que g est surjective. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons q le degré de Q.

L'application g_q est une bijection de $\mathbb{R}_q[X]$ dans lui-même, comme démontré plus haut. Elle est surjectice, et le polynôme Q admet un antécédent $T \in \mathbb{R}_q[X]$. Ainsi $g_q(T) = T - T' = g(T) = Q$.

Q admet donc T pour antécédent par g, ce qui montre que g est surjective.

L'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$ est donc un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

Etant surjective, tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ admet un antécédent :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ Q = g(P) = P - P'$$

• Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x)e^{-x} = P(x)e^{-x} - P'(x)e^{-x} \geqslant 0$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}(P(x)e^{-x}) = -P(x)e^{-x} + P'(x)e^{-x} = -Q(x)e^{-x} \leqslant 0$$

La fonction $x \mapsto P(x)e^{-x}$ est décroissante que $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)e^{-x} = 0$ (par croissance comparée de fonctions puissance et exponentielle) , alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\underbrace{e^{-x}}_{>0} \geqslant 0$ et donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0}$

• Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et P tel que $P - P' = Q$. Supposons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ à racines simples. On peut supposer que P est unitaire, ce qui ne change pas l'hypothèse selon laquelle P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ à racines simples.

Etudions le cas où $p = d^\circ(P)$ **est pair**. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$.

Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les racines de P. D'après le théorème de Rolle, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[,\ P'(y_k) = 0$ (puisque $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ et que P est $\mathcal{C}^1$ sur $[x_k, x_{k+1}]$)

On peut constituer le tableau de signes de P et P' comme suit :

x	$+\infty$		x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	$\cdots$	x_{p-1}	y_{p-1}	x_p		$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$P'(x)$	$-\infty$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\cdots$	$-$	0	$+$	$+$	$+\infty$
$Q(x)=P(x)-P'(x)$	$+\infty$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	$\cdots$	$+$		$-$		$+\infty$

Au point x_k, $(P-P')(x_k)=\underbrace{P(x_k)}_{=0}-P'(x_k)$ est du signe de $-P'(x_k)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $P-P'$ est une fonction continue, elle s'annule entre deux valeurs de la variable qui donnent à $P-P'$ des signes opposés :

$(P-P')(x_1)>0$, $(P-P')(x_2)<0$ donc $P-P'$ possède un zéro $z_1\in]x_1,x_2[$
$(P-P')(x_2)<0$, $(P-P')(x_3)>0$ donc $P-P'$ possède un zéro $z_2\in]x_2,x_3[$

$\vdots$

$(P-P')(x_{p-1})>0$, $(P-P')(x_p)<0$ donc $P-P'$ possède un zéro $z_{p-1}\in]x_{p-1},x_p[$
$(P-P')(x_p)<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(P-P')(x)=+\infty$, donc $P-P'$ possède un zéro $z_p\in]-x_p,+\infty[$

Au terme de ce décompte, le polynôme $Q=P-P'$ possède p zéros distincts dans $\mathbb{R}$. Il est de degré p. Il est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : 1-

```
def f(n):
    L=[1/(n*n*n*n+k*k*n*n+k*k*k*k) for k in range(n+1)]
    return n*n*n*sum(L)
```

Représentation de 100 termes :

```
n=100
X=np.linspace(0,1,n)
Y=g(X)
plt.figure()
plt.plot(X,Y)
```

On changera la valeur de n pour obtenir 1000 ou 10 000 termes. Il semble que la suite (u_n) converge.

2- Définition et graphe de la fonction g :

```
def g(x):
    return 1/(1+x*x+x*x*x*x)
n=100
X=np.linspace(0,1,n)
Y=g(X)
plt.figure()
plt.plot(X,Y)
```

3- a) Calcul de $\int_0^1 g(t)dt$ par la méthode des trapèzes.

Sur un (petit) intervalle $[a,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est approchée par $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Evaluons la différence $\displaystyle\int_a^b f(t)dt-(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Pour cela considérons la fonction $F: x\mapsto F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt-(x-a)\dfrac{f(a)+f(x)}{2}$

Remarquons que $F(a)=0$ et que $F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)dt-(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ est l'erreur à majorer.

$\forall x\in[a,b],\ F'(x)=f(x)-\dfrac{f(a)+f(x)}{2}-(x-a)\dfrac{f'(x)}{2}=\dfrac{f(x)}{2}-\dfrac{f(a)}{2}-(x-a)\dfrac{f'(x)}{2}$

Remarquons que $F'(a)=0$.

$\forall x\in[a,b],\ F''(x)=\dfrac{f'(x)}{2}-\dfrac{f'(x)}{2}-(x-a)\dfrac{f''(x)}{2}=-(x-a)\dfrac{f''(x)}{2}$

donc $|F''(x)|=(x-a)\dfrac{|f''(x)|}{2}\leqslant(x-a)\dfrac{\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}}{2}$

$$\forall x\in[a,b],\ |F'(x)|=\left|\underbrace{F'(a)}_{=0}+\int_0^x F''(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|F''(t)|dt\leqslant(t-a)\frac{\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}}{2}=\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x$$

$$|F'(x)|\leqslant\frac{(x-a)^2}{4}\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}$$

$$\forall x\in[a,b],\ |F(x)|=\left|\underbrace{F(a)}_{=0}+\int_a^x F'(t)dt\right|\leqslant\int_a^x|F'(t)|dt\leqslant\int_a^x\frac{(t-a)^2}{4}\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}=\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}\left[\frac{(t-a)^3}{12}\right]_a^x$$

$$|F(x)|\leqslant\frac{(x-a)^3}{12}\|f''\|_{[a,b]}^{\infty}$$

Donc $\boxed{|erreur| = |F(b)| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12}\|f''\|^{\infty}_{[a,b]}}$

• Partageons le segment $[a,b]$ en n segments de même longueur $\frac{b-a}{n}$ à l'aide des $n+1$ points de subdivision :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0, 1 \cdots, n.$$

La valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est $V_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$

L'erreur commise en approchant $\int_a^b f(t)dt$ par V_n est : $\varepsilon_n = \left|\int_a^b f(t)dt - V_n\right|$

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}\|f''\|^{\infty}_{[a,b]} = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\times n \times \|f''\|^{\infty}_{[a,b]} = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|^{\infty}_{[a,b]}$$

$$\boxed{\varepsilon_n = \left|\int_a^b f(t)dt - V_n\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|^{\infty}_{[a,b]}}$$

• b) D'après la majoration précédente, pour que $\varepsilon_n = \left|\displaystyle\int_a^b g(t)dt - V_n\right| \leqslant 10^{-2}$, il suffit que

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\|g''\|^{\infty}_{[a,b]} \leqslant 10^{-2}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\dfrac{2x+4x^3}{(1+x^2+x^4)^2}$ et $g''(x) = -\dfrac{(2+12x^2)(1+x^2+x^4)^2 - 2(2x+4x^3)^2(1+x^2+x^4)}{(1+x^2+x^4)^4}$

$$g''(x) = -\frac{(2+12x^2)(1+x^2+x^4) - 2(2x+4x^3)^2}{(1+x^2+x^4)^3} = \frac{2(10x^6+9x^4-3x^2-1)}{(1+x^2+x^4)^3}$$

d'où : $\|g''\|^{\infty}_{[0,1]} \leqslant 20+18+6+2 = 46$

pour avoir $\varepsilon_n = \left|\displaystyle\int_a^b g(t)dt - V_n\right| \leqslant 10^{-2}$ il suffit que $\dfrac{46}{12n^2} \leqslant 10^{-2}$, soit $n \geqslant \sqrt{\frac{4600}{12}} = \frac{5}{3}\sqrt{138} \simeq 19,5789$

Il suffira de prendre $n = 20$ dans la méthode des trapèzes pour calculer $\int_0^1 g(t)dt$ avec une précision inférieure ou égale à 10^{-2}.

```
def trapez(h,a,b,n):
    X=np.linspace(a,b,n+1)
    S=(h(a)+h(b))/2
    for k in range(1,n):
        S+=g(X[k])
    return S*(b-a)/n

[in] print(trapez(g,0,1,20))
[out] 0.727964024369
```

donc $\boxed{\int_0^1 g(t)dt \simeq 0.72 \pm 10^{-2}}$.

c) • Calcul approché de cette intégrale par la fonction existant dans PYTHON :

```
[in] import scipy.integrate as int
[in] print(int.quad(g,0,1))
[out] (0.7281029132255818, 1.469241183001229e-14)
```

donc, d'après PYTHON, $\boxed{\int_0^1 g(t)dt \simeq 0.7281029132255818 \pm 10^{-14}}$.

d) • Comparaison avec u_{1000} :

```
[in] print(f(1000))
[out] 0.728769524337
```

4- • $u_n = n^3\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n^4+n^2k^2+k^4} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}+\frac{k^4}{n^4}} = \dfrac{1-0}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$

Cette somme est une somme de Riemann pour la fonction g sur l'intervalle $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

La fonction g étant continue sur ce segment, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(t)dt$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \int_0^1 g(t)dt}$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{ax+b}{1+x+x^2}+\dfrac{-ax+b}{1-x+x^2} = \dfrac{(ax+b)(1-x+x^2)+(-ax+b)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)} = \dfrac{-2ax^2+2bx^2+2b}{(1+x^2-x)(1+x^2+x)}$
$= \dfrac{-2ax^2+2bx^2+2b}{(1+x^2)^2-x^2} = \dfrac{-2ax^2+2bx^2+2b}{1+x^2+x^4}$

Cette expression sera égale à $\dfrac{1}{1+x^2+x^4}$ si et seulement si : $\begin{cases} 2b-2a=0 \\ 2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=b=\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+x^2+x^4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{1+x+x^2}+\dfrac{-x+1}{1-x+x^2}\right)}$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{1+x+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{Arctan}\sqrt{3}-\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$\int_0^1 \frac{x+1}{1+x+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ln(3)+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

Un calcul analogue montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x+1}{1-x+x^2}dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

D'où : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+x^4}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right] = \frac{1}{4}\ln(3)+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}}$

La valeur exacte de la limite de (u_n) est :

$$L = \frac{1}{4}\ln(3)+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

```
[in] Exact= np.log(3)/4+np.pi*np.sqrt(3)/12
[in] print(Exact)
[out] 0.728102913226
```

2.13 Centrale - Supelec

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

On note $\mathcal{C}_f = \{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) / \ g_o f = f_o g\}$

1- $\mathcal{C}_f$ est il un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$?

2- Si f admet trois valeurs propres distinctes, quelle est la dimension de $\mathcal{C}_f$?

3- Si $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$, quelle est la dimension de $\mathcal{C}_f$?

Il y avait encore deux questions dans l'exercice .

SOLUTION ; 1- $\mathcal{C}_f$ est non vide (il contient par exemple l'endomorphisme nul ω, l'endomorphisme indentité, l'endomorphisme f, etc $\cdots$)

Soient $g, h \in \mathcal{C}_f$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

alors $(\lambda g+\mu h)_o f = \lambda g_o f+\mu h_o f = \lambda f_o g+\mu f_o h = f_o(\lambda g+\mu h)$, ce qui montre que $\lambda g+\mu h \in \mathcal{C}_f$.

$\mathcal{C}_f$ est non vide , stable par combinaisons linéaires, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

2- Supposons que f admette trois valeurs propres simples distinctes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Pour tout $i = 1, 2, 3$, considérons un vecteur propre w_i associé à la valeur propre λ_i. Alors $E_f(\lambda_i)$ =Vect(w_i).

(w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Soit $g \in \mathcal{C}_f$. Pour tout $i = 1, 2, 3,\ g_o f(w_i) = g[f(w_i)] = g(\lambda_i w_i) = \lambda_i g(w_i) = f_o g(w_i)$

L'égalité $f_o g(w_i) = \lambda_i g(w_i)$ montre que $g(w_i) \in E_f(\lambda_i)$ =Vect(w_i), c'est à dire qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(w_i) = \mu_i w_i$

La matrice de g dans la base (w_1, w_2, w_3) est de la forme : $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$

Si on note $u_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (w_1, w_2, w_3) est la matrice élémentaire $E_{i,j}$, alors $g = \mu_1 u_{1,1}+\mu_2 u_{2,2}+\mu_3 u_{3,3}$.

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f = \text{Vect}(u_{1,1}, u_{2,2}, u_{3,3}) \text{ est un sous espace de } \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \text{ de dimension } 3}$

3- Supposons que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^3,\ f^2(v) \neq 0$.

Montrons que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est libre :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av+bf(v)+cf^2(v) = 0$.

En composant par f^2, on obtient : $a\underbrace{f^2(v)}_{\neq 0}+b\underbrace{f^3(v)}_{=0}+c\underbrace{f^4(v)}_{=0} = f^2(0) = 0$, donc $a = 0$.

En partant de l'égalité $bf(v)+cf^2(v) = 0$, en composant par f, par un raisonnement analogue, on obtient : $b = 0$.

Reste alors l'égalité $c\underbrace{f^2(v)}_{\neq 0}=0$ qui entraîne que $c=0$.

La famille $(v, f(v), f^2(v))$ est donc libre. Elle est formée de trois vecteurs. C'est donc une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.

• Soit $g \in \mathcal{C}_f$; $g(v)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui se décompose sur la base $(v, f(v), f^2(v))$:
$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ g(x) = av + bf(v) + cf^2(v)$

Soit $h = aId + bf + cf^2$. Montrons que g et h coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v))$

On a déjà : $g(v) = av + bf(v) + cf^2(v) = (aId + bf + cf^2)(v) = h(v)$

$$g(f(v)) = g_o f(v) = f_o g(v) = f[g(v)] = f(av + bf(v) + cf^2(v))$$
$$= af(v) + bf^2(v) + cf^3(v) = (aId + bf + cf^2)(f(v)) = h(f(v))$$
$$g(f^2(v)) = g_o f^2(v) = f^2_o g(v) = f^2[g(v)] = f^2(av + bf(v) + cf^2(v))$$
$$= af^2(v) + bf^3(v) + cf^4(v) = (aId + bf + cf^2)(f^2(v)) = h(f^2(v))$$

Les deux endomorphismes g et h coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v))$ de $\mathbb{R}^3$. Ils sont donc égaux :
$$g = h = aId + bf + cf^2$$

On a ainsi montré que $\mathcal{C}_f = \text{Vect}(Id, f, f^2)$

On vérifie enfin que la famille (Id, f, f^2) est libre. (démonstration analogue à celle qui a montré que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ était libre :

On en conclut que (Id, f, f^2) est une base de $\mathcal{C}_f$ et que $\boxed{\dim(\mathcal{C}_f) = 3}$

2.14 Centrale 1

Exercice 1 : On définit la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-t\sin(x)}\,dx$

Soit (E) l'équation différentielle : $t.y'' + y' - t.y + 1 = 0$

1- Montrer que f est solution de (E)

2- Déterminer les séries entières solution de (E)

3- Calculer $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$

SOLUTION **:** 1- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-t\sin(x)}$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En notant $H(t,x) = e^{-t\sin(x)}$, les majorations :
$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = |-\sin(x)e^{-t\sin(x)}| \leqslant 1 \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t) = |\sin^2(x)e^{-t\sin(x)}| \leqslant 1$$
permettent d'appliquer deus fois le théorème de dérivation sous le signe $\int$:
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = -\int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-t\sin(x)}dx$$
$$f''(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)e^{-t\sin(x)}dx$$

En intégrant par parties :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -\int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-t\sin(x)}dx = -\left(\Big[-\cos x\ e^{-t\sin(x)}\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(x))(-t\cos(x)\ e^{-t\sin(x)}dx\right)$$
$$= -1 + t\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)e^{-t\sin(x)}dx = -1 + t\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))e^{-t\sin(x)}dx$$
$$= -1 + t\left(\int_0^{\pi/2} e^{-t\sin(x)}dx - \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)e^{-t\sin(x)}dx\right)$$
$$= -1 + t(f(x) - f''(x))$$
$$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ tf''(t) + f'(t) - tf(t) + 1 = 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E) : t.y'' + y' - t.y + 1 = 0}$

2- Soit $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Par le théorème de dérivation des séries entières, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et que : $\quad \forall t \in]-R, R[,\ f'(t) = \displaystyle\sum_{k=0,1}^{\infty} ka_k t^{k-1} \quad$ et $\quad f''(t) = \displaystyle\sum_{k=0,1,2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2}$

f est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle (E) si et seulement si :
$$\forall t \in]-R, R[,\ t.f''(t) + f'(t) - t.f(t) + 1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \forall t \in]-R, R[,\ \sum_{k=0,1,2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + \sum_{k=0,1}^{\infty} ka_k t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} + 1 = 0$$

$$\iff \forall t \in]-R,R[,\ \sum_{k=0,1,2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + \sum_{k=0,1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - \sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'-2} t^{k'-1} + 1 = 0 \qquad (k' = k+2)$$

$$\iff \forall t \in]-R,R[,\ a_1 + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k^2 a_k - a_{k-2}\right) t^{k-1} = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = -1 \\ \forall k \geqslant 2,\ k^2 a_k - a_{k-2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = -1 \\ \forall k \geqslant 2,\ a_k = \dfrac{a_{k-2}}{k^2} \end{cases}$$

Pour les indices pairs on obtient : $\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{2^2} \\ a_4 = \dfrac{a_2}{4^2} \\ a_6 = \dfrac{a_4}{6^2} \\ \vdots \\ a_{2n} = \dfrac{a_{2n-2}}{(2n)^2} \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_0 \dfrac{1}{4^n (n!)^2}$

Pour les indices impairs on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = -\dfrac{4^n (n!)^2}{[(2n+1)!]^2}$ (calcul analogue)

En conclusion, les séries entière solutions sont les séries de la forme :

$$\boxed{S(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{[(2n+1)!]^2} x^{2n+1}}$$

Leur rayon de convergence est infini.

3- $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-t\sin(x)}\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\sin(x))^n}{n!} \right) dx$

La majoration $\left| \dfrac{(-t\sin(x))^n}{n!} \right| \leqslant \dfrac{|t|^n}{n!}$ montre la convergence normale, et donc la convergence uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\sin(x))^n}{n!}$ de la variable x sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\sin(x))^n}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{(-t\sin(x))^n}{n!} dx \right)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx \right)$$

Notons $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$ (intégrale de Wallis)

L'égalité $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{(-t)^n}{n!}$ montre que f est développable en série entière, et est solution de l'équation différentielle (E).

Or on vient de trouver TOUTES les séries entière solutions de (E). f est l'une d'entre elles,

donc $f(t) = a_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2} t^{2n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{[(2n+1)!]^2} t^{2n+1}$ où $a_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on peut identifier coefficient à coefficient les deux séries entières suivantes :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{2n}}{(2n)!} t^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$\text{et} \qquad f(t) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2} t^{2n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{[(2n+1)!]^2} t^{2n+1}$$

d'ou : $\boxed{w_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad \text{et} \quad w_{2n+1} = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$

2.15 Centrale

Soients a, b dans $\mathbb{R}$ et $M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1-b & 1-a & a & b \\ -b & a & 1-a & 1+b \\ 0 & -a & -a & 0 \end{pmatrix}$ (matrice rectifiée)

1) Construire une fonction python prenant en entrée deux réels a et b qui retourne la matrice $M(a,b)$

2) Construire une fonction python prenant en entrée deux réels a et b donnant les valeurs propres de $M(a,b)$

Tester avec quelques valeurs de a et b

Que peut on conjecturer sur les valeurs propres de $M(a,b)$

3) Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a,b)$

4) Pour quels a,b la matrice M est elle diagonalisable ?

5) Pour quels a,b la matrice M est elle une matrice de projection ?

6) soit $V_n = (w_n, x_n, y_n, z_n)$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = M(a,b).V_n$$

et (U_n) la suite définie par : $\forall n,\ U_n = \|V_n\|$.

a) Définir une fonction python qui trace U_n pour n dans $[|2,10|]$

b) Conjecturer la limite de (U_n)

c) Déterminer cette limite.

2.16 Centrale maths 1

On munit $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ de l'application $\Phi :\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)dt$

1- Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2- On considère l'application $u : P(X) \mapsto X(X-1)P''(X) + (4X-3)P'(X)$

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il symétrique ?

3- Quelles sont les valeurs propres de u ?

4- ??????????????????????

SOLUTION **:** 1- Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)dt$ est bien définie, comme celle d'une fonction continue sur un segment.

L'application $\Phi :\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)dt$ est symétrique, linéaire à gauche (immédiat) et donc bilinéaire.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] - \{0\}$, la fonction $t \mapsto t^2 P^2(t)$ est continue, positive, et non identiquement nulle. (si elle était identiquement nulle, le polynôme $P(X)$ serait le polynôme nul puisqu'il aurait une infinité de racines, à savoir tous les réels de $]0,1]$). Son intégrale sur [] est donc strictment positive.

Ainsi, $\Phi(P,P) = \int_0^1 t^2 P^2(t) > 0$, ce qui montre que Φ est une forme bilinéaire symétrique définie-positive, c'est à dire un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P'' est de degré $\leqslant n-2$, $X(X-1)P''(X)$ est de degré inférieur ou égal à n, et pour une raison analogue, $(4X-3)P'(X)$ est aussi de degré inférieur ou égal à n.

u est donc une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. De plus u est linéaire (vérification sans difficulté), donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soient P et Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\Phi(u(P),Q) = \int_0^1 t^2[\ t\ (t-1)P''(t) + (4t-3)P'(t)]\ Q(t)dt \qquad (0)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 t^3\ (t-1)Q(t)P''(t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 (4t^3-3t^2)\ Q(t)P'(t)dt}_{I_2} \qquad (0)$$

En intégrant par parties :

$$I_1 = \int_0^1 (t^4-t^3)Q(t)P''(t)dt = \underbrace{\left[(t^4-t^3)Q(t)P'(t)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 [(4t^3-3t^2)Q(t) + (t^4-t^3)Q'(t)]P'(t)dt$$

$$-I_1 = \int_0^1 [(4t^3-3t^2)Q(t) + (t^4-t^3)Q'(t)]P'(t)dt$$

$$= \left[[(4t^3-3t^2)Q(t) + (t^4-t^3)Q'(t)]P(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[(12t^2-6t)Q(t) + 2(4t^3-3t^2)Q'(t) + (t^4-t^3)Q''(t)\right] P(t)$$

$$= P(1)Q(1) - \int_0^1 \left[(12t^2-6t)Q(t) + 2(4t^3-3t^2)Q'(t) + (t^4-t^3)Q''(t)\right] P(t)$$

$$I_1 = -P(1)Q(1) + \int_0^1 \left[(12t^2-6t)Q(t) + 2(4t^3-3t^2)Q'(t) + (t^4-t^3)Q''(t)\right] P(t)dt \qquad (1)$$

$$I_2 = \int_0^1 (4t^3-3t^2)\ Q(t)P'(t)dt = \left[(4t^3-3t^2)\ Q(t)P(t)\right]_0^1 - \int_0^1 [(12t^3-6t)Q(t) + (4t^3-3t^2)Q'(t)]P(t)dt$$

$$I_2 = P(1)Q(1) - \int_0^1 [(12t^3-6t)Q(t) + (4t^3-3t^2)Q'(t)]P(t)dt \qquad (2)$$

En additionnant les relations (1) et (2), on obtient :

$$\text{d'où : } \Phi(u(P),Q) = I_1 + I_2 = \int_0^1 (4t^3-3t^2)Q'(t)P(t)dt + \int_0^1 (t^4-t^3)Q''(t)P(t)dt \qquad (3)$$

En comparant avec l'égalité (0) qui définissait $\Phi(u(P),Q)$, on constate que la formule (3) à laquelle on parvient est la même que la formule (0) dans laquelle les rôles de P et Q ont été échangés.

donc $\Phi(u(P),Q)=\Phi(u(Q),P)=\Phi(P,u(Q))$, ce qui montre que u est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire Φ.

3- Puisque u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X],\Phi$, u est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de u et $P(X)$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. Notons $m\geqslant 0$ le degré de $P(X)$: $P(X)=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+\cdots+a_1X+a_0,\quad a_m\neq 0$

$u(P)=\lambda P \implies X(X-1)P''(X)+(4X-3)P'(X)=\lambda P(X)$

le terme dominant de $X(X-1)P''(X)$ est $m(m-1)a_mX^m$

le terme dominant de $(4X-1)P'(X)$ est $4ma_mX^m$

le terme dominant de $\lambda P(X)$ est λa_mX^m

En identifiant les termes dominants dans les deux membres de l'égalité

$$X(X-1)P''(X)+(4X-3)P'(X)=\lambda P(X), \text{ on obtient :}$$

$$(m(m-1)a_m+4ma_m)X^m=\lambda a_mX^m, \text{ soit, puisque } a_m\neq 0:\ m^2+3m-\lambda=0.$$

Donc $\lambda=m^2+3m.$

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(u)\subset\{0,4,10,18,\cdots,n^2+3n\}}$

2.17 Centrale **maths 1** **30 min sans préparation**

Exercice 1 : n est un entier supérieur ou égal à 2. $\forall\omega\in\mathbb{C}, X(\omega)=\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\\ \vdots\\ \omega^{n-1}\end{pmatrix}$.

1- Soient $\omega_0=1$ et $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

Montrer que la famille $(X(\omega_0),X(\omega_1),\cdots,X(\omega_{n-1}))$ est libre.

2- Soit $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1\end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable.

SOLUTION **: Exercice 1 :** La matrice du système de vecteurs $(X(\omega_0),X(\omega_1),\cdots,X(\omega_{n-1}))$ est :

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-1}\\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_{n-1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Son déterminant est un déterminant de VanderMonde :

$$\det(M)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-1}\\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_{n-1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}_n = W(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1})=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(\omega_j-\omega_i)\neq 0.$$

Il est non nul car les racines n^e de l'unité, $\omega_0=1,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1}$ sont deux à deux distinctes.

Donc $\boxed{\text{la famille } (X(\omega_0),X(\omega_1),\cdots,X(\omega_{n-1})) \text{ est une famille libre}}$.

• Considérons le produit $A.X(\omega)$:

$$A.X(\omega)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\\ \vdots\\ \omega^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1}\\ a_n+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1}\\ a_{n-1}+a_n\omega+a_1\omega^2+\cdots+a_{n-2}\omega^{n-1}\\ \vdots\\ a_2+a_3\omega+a_4\omega^2+\cdots+a_1\omega^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1}\\ \omega(a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1})\\ \omega^2(a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1})\\ \vdots\\ \omega^{n-1}(a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1})\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A.X(\omega)=(a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\cdots+a_n\omega^{n-1})X(\omega)}$$

Cette égalité montre que chaque vecteur $X(\omega_k)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$ est un vecteur propre de la matrice A. Comme on a montré que la famille $(X(\omega_0), X(\omega_1), \cdots, X(\omega_{n-1}))$, qui possède n éléments, était une famille libre de $\mathbb{C}^n$, cette famille est une base de $\mathbb{C}^n$.

On a ainsi exhibé une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A, ce qui montre que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

2.18 Centrale **maths 2** **1h dont 30 min de préparation**

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

1- a) Ecrire un programme qui, pour un n donné, affiche les coefficients $\binom{n}{k}$, pour k variant de 0 à n.

(le programme ne devra pas calculer de factorielles)

b) Calculer les 20 premières valeurs de (u_n). Que peut-on conjecturer ?

2- a) Soit $W_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}}$, pour tout $n \geqslant 4$. Montrer que $W_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

b) Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.

3- Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

a) Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?

b) Calculer un équivalent de $(1-x)f(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

4- Soit $a_n = \dfrac{2^n}{n}$

a) Avec Python, trouver une relation entre $a_{n+1}u_n - a_n u_{n-1}$ et a_{n+1}

b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.19 ENSEA - ENSIIE

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x+t}$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$. De plus $\frac{\ln(t)}{x+t} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\ln(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

La fonction de référence $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant intégrable sur $]0, 1]$, par domination, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x+t}$ l'est aussi.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur l'intervalle }]0, +\infty[}$.

- Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1 + \frac{t}{x}} dt$

Si $x \geqslant 1$, pour tout $t \in [0, 1[$, $\dfrac{1}{1+\frac{t}{x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{x^n}$ (car $0 \leqslant \frac{t}{x} < 1$)

donc $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \ln(t)}{x^n} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} \right) dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_{t \to 0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$

(on intègre sur tout segment de la forme $[a, 1], a > 0$, et on passe à la limite quand $a \to 0$)

En posant $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n \ln t}{x^{n+1}}$, $\displaystyle\int_{]0,1]} |u_n(t)| dt = \frac{1}{x^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ (car $x \geqslant 1$)

La série numérique $\displaystyle\sum \int_{]0,1]} |u_n(t)| dt$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on peut écrire que : $\displaystyle\int_{]0,1]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{]0,1]} u_n(t) dt \right)$

donc $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{]0,1]} (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} dt \right)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \int_{]0,1]} t^n \ln t dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n^2}$$

donc $\boxed{\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n^2}}$

En particulier, $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

$$\boxed{f(1)=-\frac{1}{2}\zeta(2)=-\frac{\pi^2}{12}}$$

• Posons : $\forall (x,t)\in]0,+\infty[\times]0,1], F(x,t)=\dfrac{\ln(t)}{x+t}$

-pour tout $t\in I=]0,1]$, la fonction $x\mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J=]0,+\infty[$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{\ln(t)}{(x+t)^2}$

-pour tout $x\in I=]0,+\infty[$, les fonctions $t\mapsto F(x,t)$ et $t\mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur I

-pour tout $a>0$, $\forall (x,t)\in [a,+\infty[\times]0,1]$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{|\ln(t)|}{(x+t)^2}\leqslant\dfrac{|\ln(t)|}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{a^2}|\ln(t)|$

et la fonction $\varphi : t\mapsto |\ln(t)|$ est intégrable sur $I=]0,1]$

Par application du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (théorème de dérivation sous le signe $\int$), on peut en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et que :

$$\forall x\in [a,+\infty[,\ f'(x)=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^1\frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt$$

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[, \text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\int_0^1\frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt}$

• En intégrant par parties sur le segment $[a,1]$ où a est un réel strictement positif quelconque,

$$\int_a^1\frac{-1}{(x+t)^2}\ln(t)dt=\left[\frac{\ln t}{x+t}\right]_a^1-\int_a^1\frac{1}{(x+t)t}dt=-\frac{\ln a}{x+a}-\frac{1}{x}\int_a^1\frac{x+t-t}{(x+t)t}dt$$
$$=-\frac{\ln a}{x+a}-\frac{1}{x}\int_a^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+t}\right)dt$$
$$=-\frac{\ln a}{x+a}-\frac{1}{x}\left[\ln t-\ln(x+t)\right]_a^1$$
$$=-\frac{\ln a}{x+a}+\frac{1}{x}\ln a+\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{x}\ln(a+x)$$
$$=\frac{a\ln a}{x(x+a)}+\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{x}\ln(a+x)$$

En passant à la limite quand $a\to 0^+$,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\int_0^1\frac{\ln(t)}{(x+t)^2}dt=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

• $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$\Longrightarrow\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\,x\ln(1+x)$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=-\frac{1}{x}\ln x}$$

$$\Longrightarrow\ \exists c\in\mathbb{R},\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=-\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

Pour $x=1$, cette formule donne : $g(1)=2f'1)=-\dfrac{\pi^2}{6}=c$

donc $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=-\frac{\ln^2 x}{2}-\frac{\pi^2}{6}}$

3 Mines - Ponts

3.1 Petites Mines

Exercice 1 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P(X) & \mapsto & P(X+1)-P(X-1)\end{array}\right.$

Déterminer l'image de φ.

Exercice 2 : Soit N une variable aléatoire représentant le nombre d'oeufs pondus pas une poule. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Chaque oeuf a une même probabilité $p\in]0,1]$ d'éclore. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'oeufs éclos.

1- Déterminer la loi (X, N).

2- En déduire la loi de X.

SOLUTION **: Exercice 1 :** Il est clair que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ et est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. $P(X) \in \ker(\varphi) \iff P(X+1) = P(X-1)$

$\iff P(X) = P(X-2)$

$\iff P(X)$ est 2-périodique

$\iff P(X)$ est un polynôme constant (de degré 0)

Donc $\boxed{\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]}$

Si $P(X)$ a pour terme dominant $a_p X^p$, il en est de même des polynômes $P(X+1)$ et $P(X-1)$, et dans la différence $\varphi(P) = P(X+1) - P(X-1)$, ce terme dominant s'élimine. Donc $\boxed{\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}(X)}$.

Par le formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}\varphi) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = (n+1) - 1 = n$.

L'inclusion $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}(X)$ s'accompagne de l'égalité des dimensions. Donc $\boxed{\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}(X)}$

Exercice 2 : N est une variable aléatoire représentant le nombre d'oeufs pondus pas une poule. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Donc $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

Chaque oeuf a une même probabilité $p \in]0, 1]$ d'éclore. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'oeufs éclos.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $(X = k|N = n)$ est l'évènement selon lequel k des n oeufs pondus sont éclos. Cela revient à rechercher la probabilité d'obtenir k succès (éclosion) parmi n tentatives (oeuf pondu). On a affaire à une loi binomiale de paramètres n et p : $P(X = k|N = n) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(en posant $q = 1 - p$)

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

$$P(X = k, N = n) = \underbrace{P(X = k|N = n)}_{=0\ si\ k>n} P(N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Si $k < n,\ P(X = k, N = n) = 0$

Si $k \leqslant n,\ P(X = k, N = n) = P(X = k|N = n).P(N = n) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

$$= \frac{p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \lambda^n}{k!\ (n-k)!}$$

- $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X = k|N = n)}_{=0\ si\ n<k}.P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = k|N = n).P(N = n)$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \lambda^n}{k!\ (n-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^k (1-p)^m e^{-\lambda} \lambda^{m+k}}{k!\ m!} \quad \text{(par le changement d'indice } m = n-k\text{)}$$

$$= \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p)^m \lambda^m}{m!} = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \qquad \boxed{P(X = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}}$$

Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda\, p)}$

3.2 Petites mines

Exercice 1 : On considère la matrice $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1- A est elle diagonalisable ?

2- Montrer que A transforme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en une base orthogonale indirecte.

3- Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A conserve le produit scalaire.

En déduire les valeurs propres de A.

4- Trouver les sous espaces propres de A et la nature de l'endomorphisme associé.

Exercice 2 : f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $F_n(x) = \dfrac{n}{x^n} \displaystyle\int_0^x t^{n-1} f(t) dt$

1- Que dire de F_n si f est paire ? si f est impaire ?

2- Calculer F_n si $f(t) = |t|^\alpha$.

3- ???????????????

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1) et 3) La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Elle est orthogonale car ses colonnes forment un système orthonormal de $\mathbb{R}^3$ (calculs immédiats). Ses valeurs propres ne peuvent être que -1 et 1. $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}}$

2- $\det(A) = -1$ (plusieurs calculs possibles, dont la règle de Sarrus facilement utilisable ici) .

Donc A est la matrice d'une isométrie indirecte. Elle transforme toute base orthonormée directe (dont la base canonique de $\mathbb{R}^3$) en une base orthonormée indirecte.

3- la matrice A étant orthogonale, c'est la matrice d'une isométrie. Elle conserve donc la norme et le produit scalaire.

4- Le calcul des invariants $E_u(1) = \ker(A - I_3)$ de A donne le plan d'équation $x - y - z = 0$ (calculs sans difficulté)

L'autre valeur propre -1 est la droite supplémentaire orthogonale du plan $E_u(1)$. Elle est engendrée par le vecteur $w = (1, -1, -1)$

L'endomorphisme canoniquement associé à A est la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_u(1)$ (réflexion par rapport à ce plan).

3.3 TPE - EIVP

Exercice 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$

1- Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2- Déterminer la limite de la suite (u_n).

3- Pour quels réels α la série $\sum u_n^\alpha$ est elle convergente ?

Exercice 2 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $u(P) = (X - a)P'(X)$

1- Déterminer les éléments propres de u.

2- En déduire les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont divisibles par leur polynôme dérivé.

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1- La fonction f_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. f_n réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ sur lui-même.

Donc le réel 0 admet un unique antécédent par f_n : $\exists u_n \in \mathbb{R}$, unique, tel que $f_n(u_n) = 0$.

Remarquons que $f_n(0) = -2 < 0$ et $f_n(1) = n^2 + n - 2 > 0$, de sorte que $0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) est donc bornée.

2- $\forall n \geqslant 2, f_n(u_n) = nu_n^3 + n^2u_n - 2 = 0$

$\implies nu_n^3 + n^2u_n = 2$

$\implies n^2u_n\left(1 + \frac{u_n^2}{n}\right) = 2$ Or $0 < \frac{u_n^2}{n} \leqslant \frac{1}{n} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n^2}{n} = 0$

En prenant des équivalents dans l'égalité $n^2u_n\left(1 + \frac{u_n^2}{n}\right) = 2$, on obtient :

$$n^2u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \text{ et donc } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \text{ et } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}}$

3- L'équivalence précédente entraîne que : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$

D'où : $\boxed{\text{la série } \sum u_n^\alpha \text{ converge si et seulement si } 2\alpha < 1, \text{ si et seulement si } \alpha < \tfrac{1}{2}}$.

Exercice 2 : u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = (X - a)P'(X)$

1- Soit λ une valeur propre de u, et P un vecteur de $\mathbb{R}[X]$ associé à cette valeur propre:

$u(P) = (X - a)P'(X) = \lambda P(X)$

La fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ associée au polynôme $P(X)$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : (x - a)y'(x) - \lambda y(x) = 0$

Sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, a[$ et $I_2 =]a, +\infty[$ la solution générale de 5e) est de la forme : $x \mapsto \mu \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{t-a} dt\right) = \mu' \exp\left(\lambda \ln|x - a|\right) = \mu'|x - a|^\lambda$

Ces solutions seront polynômiales si et seulement si $\lambda \in \mathbb{N}$.

En conclusion, les valeurs propres sont les nombres entiers naturels : $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{N}}$.

et pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, le sous espace propre associé à la valeur propre λ est la droite de $\mathbb{R}[X]$ engendrée par le polynôme $(X - a)^\lambda$. $\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ E_u(m) = \mathrm{Vect}((X - a)^m)}$

Déterminer les éléments propres de u.

2- En déduire les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont divisibles par leur polynôme dérivé.

3.4 Mines telecom

Exercice 1 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & X.P'(X) + P(X) \end{array} \right.$

Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f .

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 2xy' + 4y = \ln(1+x)$

Trouver une solution de (E) développable en série entière.

Exercice de maths : convergence et calcul d'intégrale impropre (dont je ne me souviens plus l'expression...)

Dernière question: "Que peut-on dire d'une matrice orthogonale triangulaire supérieure ?"

SOLUTION **: Exercice 1 :** On vérifie sans difficulté que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & X.P'(X) + P(X) \end{array} \right.$ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ et est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$: $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Pour en calculer le déterminant et la trace, il faut étudier la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Considérons la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, notons $Q_k(X)$ le monôme X^k.

$f(Q_k) = XQ_k'(X) + Q_k(X) = X \,.\, kX^{k-1} + X^k = (k+1)Q_k$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}_0$ est donc : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$

d'où : $\boxed{\mathrm{tr}(f) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{et} \quad \det(f) = (n+1)!}$

Exercice 2 : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et que :

$\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 2xy' + 4y = \ln(1+x)$ si et seulement si : $\forall x \in]-R, R[,\ x^2 S''(x) + 2xS'(x) + 4S(x) = \ln(1+x)$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ x^2 \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ln(1+x)$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2 \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ln(1+x)$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[\cap]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 4) a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[\cap]-1, 1[,\ 4a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n + 4) a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} 4a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+n+4)} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+n+4)} \end{array} \right.$$

(par unicité ds coeffcients d'une série entière de rayon de convergence non nul)

Il existe une et une seule série entière solution de (E) . Elle est définie par la formule :

$\boxed{S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+n+4)} x^n}$ Son rayon de convergence vaut 1.

Remarque : Par le changement de variable $t = \ln|x|$, l'équation homogène ; (E_0) : $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$ se ramène à l'équation linéaire à coefficients constants : $z''(t) + z'(t) + 4z(t) = 0$, qui a pour solution générale :

$z(t) = \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + \mu \sin\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right] e^{-\frac{t}{2}t}$

3.5 Mines Telecom

Exercice 1 : 1- X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2$.

2- Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.

X, sachant que $Y = m$, suit une loi binomiale de paramètres (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice 2 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\, dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1- Voir cours

2- Voir planche 1.20

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{integrable\ sur\ [0,+\infty[} \qquad \mathscr{D}$$

Par majoration, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

• $\forall t \in [0,1[,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{2+e^{-1}}$

• $\forall t \in]1,+\infty[,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g :

$$x \ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & si \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2+e^{-1}} & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La domination $\mathscr{D}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et d'affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^{+\infty} g(t)dt.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^{+\infty} \underbrace{g(t)}_{=0}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctan} = \frac{\pi}{4} .$$

3.6 Mines

Exercice 1 : 15mn de préparation

$(E, <,>)$ est un espace euclidien et $\|\ \|$ est la norme associée.

1- Soit p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est lipschitzien de rapport 1..

2- p et q sont des projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence :

a) $p_o q = q_o p$

b) $p_o q$ est un projecteur

c) p et q possèdente une base diagonale commune.

Exercice 2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$

Exprimer f en tant que somme de fonctions usuelles.

SOLUTION **: Exercice 1 :** 1- a) Soit p un projecteur orthogonal.

Soit $x \in E$, qu'on décompose sur la somme $\text{Im}(f) \oplus \ker f$: $x = a + b$

Puisque par hypothèse $\text{Im} f \perp \ker f$, d'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

donc $\|p(x)\|^2 = \|a^2 = \|x\|^2 - \|b\|^2 \leqslant \|x\|^2$, ce qui montre que p est lipschitzienne de rapport 1.

1- b) Soit p un projecteur lipschitzien de rapport 1.

Soient $x \in \ker f$ et $y \in \text{Im} f$. Il s'agit de montrer que x et y sont orthogonaux.

Soit p la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(x)$, et $z = p(y)$.

$$y = \underbrace{z}_{\in \text{Im}p = Vect(x)} + \underbrace{(y-z)}_{\in Vect(x)^{\perp}}$$

D'après le théorème de Pythagore, $\|y\|^2 = \|z\|^2 + \|y-z\|^2$.

Mais puisque f est 1-lipschitzien, $\|f(y-z)\|^2 \leqslant \|y-z\|^2$, c'est à dire $\| \underbrace{f(y)}_{=y} - \underbrace{f(z)}_{=0} \|^2 \leqslant \|y-z\|^2$

En reportant dans la première inégalité, $\|y\|^2 = \|z\|^2 + \|y-z\|^2 \geqslant \|z\|^2 + \|y\|^2$, ce qui entraîne que $\|z\|^2 \leqslant 0$, et donc que $\|z\| = 0$ et que $z = 0$.

Donc $p(y) = 0$; $y \in \ker(p) \perp \text{Im}(p) = \text{Vect}(x)$ puisque p est un projecteur orthogonal. Il s'en suit que $x \perp y$, ce qui montre que f est un projecteur orthogonal.

2- p et q sont des projecteurs orthogonaux.

a) Supposons que $p_o q = q_o p$. Alors $(p_o q)^2 = (p_o q)_o(q_o p) = p_o \underbrace{(q_o q)}_{=q}\, {}_o p = (p_o q)_o p = p_o(q_o p) = p_o(p_o q) = p_o q$

donc $p_o q$ est un projecteur.
?????????????????

Exercice 2 : La majoration $\left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ où la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (équivalente à $\frac{1}{t^{1/2}}$ et 0^+, dominée par e^{-t} en $+\infty$) montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$

La domination $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right)\right| = |i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}| \leqslant \sqrt{t}e^{-t}$, où la fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ permet d'appliquer le téhorème de dérivation sous le signe $\int$ et de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = i\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}e^{itx}dt$$

Intégrons par parties :

$$f'(x) = i\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{(-1+ix)t}dt = i\left(\left[\sqrt{t}\,\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}dt\right)$$
$$= \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^\infty \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{i}{2(1-ix)}f(x)$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E)\ :\ y' - \dfrac{i}{2(1-ix)}y = 0}$

C'est une équation du premier ordre linéaire, homogène.

L'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel de dimension 1, dont une base est la fonction $y_0 : x \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{i}{2(1-iu)}du\right)$

$$\int_0^x \frac{i}{2(1-iu)}du = \frac{i}{2}\int_0^x \frac{1+iu}{1+u^2}du = \frac{i}{2}\left(\text{Arctan}x + \frac{i}{2}\ln(1+x^2)\right) = i\frac{\text{Arctan}x}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)$$

$$y_0(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{4}\ln(1+x^2)\right)\exp\left(\tfrac{i}{2}\text{Arctan}x\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}(x)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}(x)\right)}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

3.7 Mines - Ponts **15mn préparation + 45 mn planche**

Exercice 1 : On recherche une fonction f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, telle que : $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$ soit harmonique, c'est à dire de Laplacien nul.

Remarque : pas d'indication de la part de l'examinateur. C'est très calculatoire.

En posant $t = \dfrac{\cos x}{\text{ch}y}$ on aboutit à une équa diff sans problème particulier.

Exercice 2 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

A est symétrique si et seulement si ${}^tA.A = A^2$.

Remarque : Une implication est triviale; pour la deuxième implication, j'ai proposé d'utiliser un produit scalaire, $\Phi(A,B) = \text{tr}({}^tA.B)$, pour montrer que $\|{}^tA - A\| = 0$

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1}\binom{4n}{k} \geqslant \left(\frac{n-1}{n}\right).2^{4n}$.

On pourra utiliser une variable aléatoire.

SOLUTION **: Exercice 1 :** f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $]-1,1[$, à valeurs réelles.

g est une fonction définie par : $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1,1]$ et $\text{ch}(y) \in [1,+\infty[$, de sorte que $\dfrac{\cos x}{\text{ch}t} \in [-1,1]$. De plus, si $y \in \mathbb{R}^*$, alors $\text{ch}y > 1$ et $\dfrac{\cos x}{\text{ch}t} \in]-1,1[$, et $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$ est bien définie.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-\sin x}{\text{ch}y}f'\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-\cos x}{\text{ch}y}f'\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right) + \frac{\sin^2 x}{\text{ch}^2 y}f''\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-\cos x\ \text{sh}y}{\text{ch}^2 y}f'\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\cos x\left[\frac{\text{ch}^3 y - 2\text{sh}^2 y\ \text{ch}y}{\text{ch}^4 y}\right]f'\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right) + \frac{\cos^2 x\ \text{sh}^2 y}{\text{ch}^4 y}f''\left(\frac{\cos x}{\text{ch}y}\right)$$

$$= -\cos x \left[\frac{\mathrm{ch}^2 y - 2\mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^3 y}\right] f'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right) + \frac{\cos^2 x\ \mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^4 y} f''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right)$$

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \left[\frac{-\cos x}{\mathrm{ch} y} - \cos x \frac{\mathrm{ch}^2 y - 2\mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^3 y}\right] f'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right) + \left[\frac{\sin^2 x}{\mathrm{ch}^2 y} + \frac{\cos^2 x\ \mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^4 y}\right] f''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{\mathrm{ch}^3 y} \underbrace{\left[-2\mathrm{ch}^2 y + 2\mathrm{sh}^2 y\right]}_{=-2} f'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right) + \frac{(1-\cos^2 x)\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x(\mathrm{ch}^2 y - 1)}{\mathrm{ch}^4 y} f''\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right)$$

$$= -2\frac{\cos x}{\mathrm{ch}^3 y} f'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\left[(1-\cos^2 x) + \cos^2 x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right)\right]$$

$$= -2\frac{\cos x}{\mathrm{ch}^3 y} f'\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} y}\right) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\left[1 - \frac{\cos^2 x}{\mathrm{ch}^2 t}\right]$$

Quand (x,y) décrit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $t = \dfrac{\cos x}{\mathrm{ch} t}$ décrit $]-1,1[$

$$\Delta f(x,y) = 0 \iff \forall t \in]-1,1[, -2tf'(t) + (1-t^2)f''(t) = 0$$

$$\iff \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\alpha}{1-t^2} \qquad (\alpha \text{ constante réelle})$$

$$\iff \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)$$

$$\iff \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \frac{\alpha}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right) + \beta = \alpha' \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \beta$$

$$\boxed{f(t) = \alpha \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \beta \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ constantes réelles})}$$

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. • Si A est symétrique, alors $\underbrace{{}^tA}_{=A}.A = A^2$.

• Supposons réciproquement que ${}^tA.A = A^2$

On sait que l'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}({}^tA.B) \end{array}\right.$ est le produit scalaire canonique que l'application $A \mapsto \|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA.B)}$ est la norme euclidienne qui lui est associée.

Pour montrer que $A = {}^tA$, il suffit de montrer que $\|A - {}^tA\| = 0$.

$$\|A - {}^tA\|^2 = \mathrm{tr}({}^t(A - {}^tA).(A - {}^tA)) = \mathrm{tr}(({}^tA - A).(A - {}^tA)) = \mathrm{tr}(\underbrace{{}^tA.A - A^2}_{=0} - {}^tA.{}^tA + A.{}^tA)$$

$$= \mathrm{tr}(-{}^t(A^2) + A.{}^tA) = \mathrm{tr}(-{}^t(A^2)) + \mathrm{tr}(A.{}^tA) = -\mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}({}^tA.A) = 0$$

(puisque $\mathrm{tr}({}^tB) = \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(B.A)$)

Donc $\|A - {}^tA\|^2 = 0$, ce qui entraîne que $A = {}^tA$.

Exercice 3 : Il s'agit de montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geqslant \left(\frac{n-1}{n}\right) 2^{4n}$.

On sait que si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\}$, $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

En particulier, si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(4n, \frac{1}{2})$, $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\}$, $P(X=k) = \dbinom{4n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n-k} = \dbinom{4n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} P(X=k) = P(n+1 \leqslant X \leqslant 3n-1) = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} = P(-n+1 \leqslant X - 2n \leqslant n-1) = P(|X-2n| \leqslant n-1)$$

$$= 1 - P(|X-2n| \geqslant n)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

En appliquant cette inégalité à $X \hookrightarrow \mathscr{B}(4n, \frac{1}{2})$ et $\varepsilon = n$, on obtient :

$$P(|X-2n| \geqslant n) \leqslant \frac{4n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{n^2} = \frac{1}{n}$$

(pour une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$)

donc, $\displaystyle\frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} = 1 - P(|X-2n| \geqslant n) \geqslant 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, soit finalement :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geqslant \left(\frac{n-1}{n}\right) 2^{4n}}$$

3.8 Mines Ponts

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la diagonalisibilité des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$:
$T : P \mapsto P(X+1)$ $\quad S : P \mapsto P(1-X)$. $\quad$ Trouver les vecteurs propres.

Exercice 2: On suppose que la série entière de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a un rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que pout tout $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < r < R$, on a $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z_0} d\theta$

SOLUTION **; Exercice 1:** a) Si $P(X)$ a pour terme dominant X^p, $P(X+1)$ a même terme dominant X^p.
Soit λ une valeur propre de P : $P(X+1) = \lambda P(X)$
Le terme dominant de $P(X+1)$ est X^p, celui de $\lambda P(X)$ est λX^p et par unicité, $1 = \lambda$.
Donc la seule valeur propre possible de T est 1.
Recherchons le sous espace propre associé :
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$; $\quad T(P) = 1 \times P \iff P(X+1) = P(X) \iff P \in \mathbb{R}_0[X]$.
Donc $\boxed{1 \text{ est effectivement valeur propre de } T \text{ et } E_T(1) = \mathbb{R}_0[X]}$
T admet un seul sous espace propre, de dimension $1 < \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Donc T n'est pas diagonalisable.

• $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $S_oS(P) = P(1-(1-X)) = P(X)$. Donc $S_oS = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$
S est un projecteur de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$. Il est donc diagonalisable, et son spectre est $\{-1, 1\}$.
Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, et introduisons $Q(X) = P\left(\frac{1}{2} + X\right)$.

$$\begin{aligned}
P \in E_S(1) &\iff S(P) = P \iff P(1-X) = P(X)\\
&\iff P\left(1 - \left(\tfrac{1}{2} + X\right)\right) = P\left(\tfrac{1}{2} + X\right)\\
&\iff P\left(\tfrac{1}{2} - X\right) = P\left(\tfrac{1}{2} + X\right)\\
&\iff Q(-X) = Q(X)\\
&\iff Q \text{ est un polynôme pair}\\
&\iff Q \in \text{Vect}(1, X^2, X^4, \cdots, X^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})\\
&\iff P \in \text{Vect}(1, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^4, \cdots, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E_S(1) = \text{Vect}\left(1, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^2, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^4, \cdots, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)}$

$$\begin{aligned}
P \in E_S(-1) &\iff S(P) = -P \iff P(1-X) = -P(X)\\
&\iff P\left(1 - \left(\tfrac{1}{2} + X\right)\right) = -P\left(\tfrac{1}{2} + X\right)\\
&\iff P\left(\tfrac{1}{2} - X\right) = -P\left(\tfrac{1}{2} + X\right)\\
&\iff Q(-X) = -Q(X)\\
&\iff Q \text{ est un polynôme impair}\\
&\iff Q \in \text{Vect}(X, X^3, X^5, \cdots, X^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1})\\
&\iff P \in \text{Vect}(X - \tfrac{1}{2}, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^3, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^5, \cdots, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + 1)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E_T(-1) = \text{Vect}\left(X - \tfrac{1}{2}, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^3, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^5, \cdots, \left(X - \tfrac{1}{2}\right)^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + 1\right)}$

On remarque que $E_S(1) \oplus E_S(-1) = \text{Vect}\left(1, X - \frac{1}{2}, \left(X - \frac{1}{2}\right)^2, \left(X - \frac{1}{2}\right)^3, \cdots, \left(X - \frac{1}{2}\right)^n\right) = \mathbb{R}_n[X]$, ce qui confirme que S est diagonalisable.

Exercice 2: On suppose que la série entière de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a un rayon de convergence $R > 0$.

Puisque $|z_0| < r < R$, $|re^{i\theta}| = |r| < R$, la série entière est définie au point $re^{i\theta}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z_0} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n}{re^{i\theta} - z_0} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n (re^{i\theta})^{n+1}}{re^{i\theta} - z_0} d\theta$$

$$\underbrace{|re^{i\theta}|}_{=r} = |re^{i\theta} - z_0 + z_0| \leqslant |re^{i\theta} - z_0| + |z_0|$$

$$\begin{aligned}
&\implies |re^{i\theta} - z_0| \geqslant r - |z_0| > 0\\
&\implies \frac{1}{|re^{i\theta} - z_0|} \leqslant \frac{1}{r - |z_0|}\\
&\implies \left\| \frac{a_n (re^{i\theta})^{n+1}}{re^{i\theta} - z_0} \right\|_{\theta \in [0, 2\pi]}^{\infty} \leqslant \frac{r}{r - |z_0|} \times \underbrace{|a_n r^n|}_{serie\ cvgte}
\end{aligned}$$

Cette majoration montre la convergence normale sur $[0, 2\pi]$ de la série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_n (re^{i\theta})^{n+1}}{re^{i\theta} - z_0} d\theta$ de la variable θ. D'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un segment, la convergence uniforme (car normale) permet d'écrire :

$$\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_n(re^{i\theta})^{n+1}}{re^{i\theta}-z_0}d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_nr^{n+1}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{re^{i\theta}-z_0}d\theta$$

Puisque $|z_0|<r$, $\dfrac{1}{re^{i\theta}-z_0}=\dfrac{1}{re^{i\theta}}\times\dfrac{1}{1-\frac{z_0}{re^{i\theta}}}=\dfrac{1}{re^{i\theta}}\times\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{r}\right)^k e^{-i\,k\,\theta}d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{re^{i\theta}-z_0}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{r}\right)^k e^{i(n+1-k)\,\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{r}\right)^k e^{i(n-k)\,\theta}d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{r}\right)^k\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\,\theta}d\theta\qquad(*)$$

La majoration $\left\|\left(\dfrac{z_0}{r}\right)^k e^{i(n-k)\,\theta}\right\|_{\theta\in[0,2\pi]}^{\infty}\leqslant\left(\dfrac{|z_0|}{r}\right)^k$ par une série géométrique de raison $\frac{|z_0|}{r}<1$ montre la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions de la variable θ sur le segment $[0,2\pi]$, et permet l'intervertion $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}$

De plus, $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\,\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi\quad si\quad k=n\\ \left[\frac{e^{i(n-k)\theta}}{n-k}\right]_0^{2\pi}=0\quad si\quad k\neq n\end{cases}$

d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{re^{i\theta}-z_0}d\theta=2\pi\left(\frac{z_0}{r}\right)^n$ (un seul terme est non nul dans la série (*))

et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z_0}d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_nr^{n+1}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{re^{i\theta}-z_0}d\theta$

$$=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}a_nr^{n+1}\left(\frac{z_0}{r}\right)^n=2\pi r\sum_{k=0}^{\infty}a_nz_0^n=2\pi rf(z_0)$$

3.9 Mines - Ponts

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle (E) : $xy''+y'+x.y=0$

1- Rechercher les séries entières solutions et déterminer leur rayon de convergence.

On note J_0 la solution de (E) trouvée telle que $J_0(0)=1$. On note $a>0$ le plus petit zéro positif de la fonction J_0.

2- On cherche une solution y de la forme $y(x)=u(x)J_0(x)$ (justifier ce raisonnement)

Montrer que $xJ_0^2(x).u'(x)$ est constante.

3- Montrer que les solutions de (E) sur $]0,a[$ sont proportionnelles à J_0.

Exercice 2 : 1- Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $T=P^{-1}.M.P$ soit triangulaire supérieure, et vérifie : $\forall j>i,\ |t_{i,j}|\leqslant\varepsilon$

2- Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k, A soit semblable à A_k, et telle que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}A_k=0$

***SOLUTION* : Exercice 1 :** Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et que :

$$\forall x\in]-R,R[,\ S'(x)=\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad\text{et}\quad S''(x)=\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle (E) : $xy''+y'+xy=0$ si et seulement si :

$$\forall x\in]-R,R[,\ x\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\iff\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\iff\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=0,1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n'=2}^{\infty}a_{n'-2}x^{n'-1}=0$$

$$\iff\forall x\in]-R,R[,\ a_1+\sum_{n=2}^{\infty}(n^2a_n+a_{n-2})x^{n-1}=0$$

$$\iff\begin{cases}a_1=0\\ \forall n\geqslant 2,\ n^2a_n+a_{n-2}=0\end{cases}\text{(par unicité des coefficients d'une SE de rayon de convergence non nul)}$$

$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ 4n^2 a_{2n} + a_{2n-2} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ a_{2n} = -\dfrac{a_{2n-2}}{4n^2} \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ a_{2n} = (-1)^n \dfrac{a_0}{4^n (n!)^2} \end{cases}$

Les séries entières solutions sont données par la formule : $S(x) = a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$

Leur rayon de convergence est infini.

2- J_0 est une solution de ce type, qui vérifie $J_0(0) = 1$, c'est à dire $a_0 = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

Puisque $J(0) = 1$, J_0 reste positive sur un intervalle de la forme $[0, a[, a \in \mathbb{R}_+$ ou $a = +\infty$

Si on appelle a le plus petit zéro positif de J_0 (à supposer qu'il existe...) , alors $\forall x \in [0, a[,\ J_0(x) > 0$.

Si y est une solution de (E) sur $[0, a[$, on peut poser : $\forall x \in [0, a[, u(x) = \dfrac{y(x)}{J_0(x)}$ (puisque sur $[0, a[,\ J_0(x) > 0$) de sorte que sur $[0, a[,\ y(x) = J_0(x) u(x)$

$\forall x \in [0, a[,\ y'(x) = J_0'(x) u(x) + J_0(x) u'(x)$

$y''(x) = J_0''(x) u(x) + 2J_0'(x) u'(x) + J_0(x) u''(x)$

y est solution de $(E) \iff xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$

$\iff \forall x \in [0, a[,\ x[J_0''(x)u(x) + 2J_0'(x)u'(x) + J_0(x)u''(x)] + [J_0'(x)u(x) + J_0(x)u'(x)] + xJ_0(x)u(x) = 0$

$\iff \forall x \in [0, a[, \underbrace{[xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)]}_{=0} u(x) + [2xJ_0'(x) + J_0(x)]u'(x) + xJ_0(x)u''(x) = 0$

$\iff \forall x \in [0, a[,\ [2xJ_0'(x) + J_0(x)]u'(x) + xJ_0(x)u''(x) = 0$

Par ailleurs, posons : $\forall x \in [0, a[,\ H(x) = xJ_0^2(x)u'(x)$

alors $\forall x \in [0, a[,\ H'(x) = J_0^2(x)u'(x) + x[2J_0(x)J_0'(x)u'(x) + J_0^2(x)u''(x)]$

$= J_0(x) \underbrace{[J_0(x)u'(x) + 2xJ_0'(x)u'(x) + xJ_0(x)u''(x)]}_{=0} = 0$

Sa dérivée étant nulle, la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)u'(x)$ est constante sur $[0, a[$

Or $H(0) = 0$, donc $\forall x \in [0, a[,\ H(x) = xJ_0^2(x)u'(x) = 0$

x et $J_0(x)$ étant non nuls sur $]0, a[$, on en déduit que $\forall x \in]0, a[,\ u'(x) = 0$. Par continuité, cette égalité est encore vraie aux bornes 0 et a.

Donc $u(x)$ est constant sur $[0, a]$, et l'égalité $y(x) = \underbrace{u(x)}_{constante} J_0(x)$ montre que les solutions de (E) sur $[0, a]$ sont proportionnelles à J_0.

Exercice 2 : 1 - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Soit f l'endomorhisme canoniquement assicié à M : la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

La colonne C_k de cette matrice est $C_k = \begin{pmatrix} m_{1,k} \\ m_{2,k} \\ \vdots \\ m_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui se traduit par la relation :

$$f(e_k) = m_{1,k}e_1 + m_{2,k}e_2 + \cdots + m_{k,k}e_k = \sum_{i=1}^{k} m_{i,k}e_i$$

Considérons la deuxième base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \left(e_1, \frac{e_2}{\alpha}, \frac{e_2}{\alpha^2}, \cdots, \frac{e_n}{\alpha^{n-1}}\right)$ $\quad$ ($\forall i,\ \varepsilon_i = \frac{e_i}{\alpha^{i-1}}$ où α est un réel positif).

$$f(\varepsilon_k) = f\left(\frac{e_k}{\alpha^{k-1}}\right) = \frac{1}{\alpha^{k-1}} f(e_k) = \sum_{i=1}^{k} m_{i,k} \frac{e_i}{\alpha^{k-1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_{i,k}}{\alpha^{k-i}} \frac{e_i}{\alpha^{i-1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_{i,k}}{\alpha^{k-i}} \varepsilon_i$$

$$f(\varepsilon_k) = \frac{m_{1,k}}{\alpha^{k-1}}\varepsilon_1 + \frac{m_{2,k}}{\alpha^{k-2}}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{m_{k-1,k}}{\alpha}\varepsilon_k + m_{k,k}\varepsilon_k$$

La matrice de f dans la seconde base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \frac{m_{1,2}}{\alpha} & \frac{m_{1,3}}{\alpha^2} & \cdots & \frac{m_{1,n}}{\alpha^{n-1}} \\ 0 & m_{2,2} & \frac{m_{2,3}}{\alpha} & \cdots & \frac{m_{2,n}}{\alpha^{n-2}} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \cdots & \frac{m_{3,n}}{\alpha^{n-3}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Chacun des termes au-dessus de la diagonale, de la forme $t_{i,j} = \dfrac{m_{i,j}}{\alpha^{j-i}}$, $(1 \leqslant i < j)$, a une limite nulle quand $\alpha \to +\infty$. Ces termes sont en nombre fini, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour lequel chacun de ces termes est $\leqslant \varepsilon$:

$\forall j > i,\ |t_{i,j}| \leqslant \varepsilon$

Enfin , puisque les matrices M et T représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes, elles sont semblables : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ T = P^{-1}.M.P$

2- Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = 0$.

Le polynôme X^p est un polynôme annulateur de A, dont la seule racine est 0. Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$. Puisque A est une matrice à coefficients complexes, elle admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$. (son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$)

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : A est semblable à une matrice tringulaire du type

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Puisque les valeurs propres d'une matrice tringulaire sont ses termes diagonaux, $\forall i,\ m_{i,i} = 0$,

$$\text{et } M = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & 0 & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M est semblable à la matrice $T_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m_{1,2}}{k} & \frac{m_{1,3}}{k^2} & \cdots & \frac{m_{1,n}}{k^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{m_{2,3}}{k} & \cdots & \frac{m_{2,n}}{k^{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m_{3,n}}{k^{n-3}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par transitivité, A est elle aussi semblable à M.

Chaque coefficient de cette matrice T_k a une limite nulle quand $k \to +\infty$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = 0$

On a ainsi montré que la matrice A était semblable à chaque matrice de la suite (T_k) et que $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = 0$

• Réciproquement, supposons qu'il exite une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, semblables à A, de limite nulle $(\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = 0)$:

Le polynome $\chi_M(X)$ d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice M. C'est donc une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{A_k}(X) = \chi_0(X) = X^n$ (le polynôme caractéristique de la matrice nulle est $\det(xI_n) = X^n$)

Or, A_k et A ont même polynôme caractéristique puisqu'elles sont semblables : $\forall k,\ \chi_{A_k}(X) = \chi_A(X)$

Donc $\chi_A(X) = \lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{A_k}(X) = \chi_0(X) = X^n$

Et par le théorème de Cayley Hamilton, $\chi_A(X) = A^n = 0$, ce qui montre que la matrice A est nilpotente.

3.10 Concours Commun Mines-Ponts **1h dont 10 min de préparation**

Exercice 1 : Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

1- Montrer que f est définie pour tout x appartenant à $I =]0, +\infty[$

Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

2- Trouver des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

3- Montrer que f est intégrable sur I et déterminer $\int_I f$.

Exercice 2 : E est un espace euclidien.

1- Montrer que $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Discuter du cas d'égalité.

2- Soient $U, V \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$ (colonne) telles que : $U.X + V.X = 2X$.

Montrer que $U.X = V.X = X$.

3- Soient $U, V \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $U.M.U^{-1} + V.M.V^{-1} = 2M$.
Montrer que $UM = MU$ et que $VM + MV$.

SOLUTION **: Exercice 1 :** L'application $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, elle est continue sur le fermé $[x, +\infty[$, et est intégrable sur le segment $[x, b]$ pour tout $b \geqslant x$.

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$, et on sait que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par majoration, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi.

Finalement, pour tout $x > 0$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ étant continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$ (intégrale fonction de la borne inférieure)

2- • Equivalent en $+\infty$:

En intégrant par parties : $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t} \times \frac{1}{t}\,dt = \left[-e^{-t} \times \frac{1}{t}\right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} e^{-t} \times \frac{1}{t^2}dt$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$$

Or $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$

L'égalité $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$ entraîne alors : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}}$

• Equivalent en 0 : En intégrant par parties : $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t} \times \frac{1}{t}\,dt = \left[e^{-t} \times \ln(t)\right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} e^{-t}\ln t dt$

$$f(x) = -e^{-x}\ln(x) - \textstyle\int_x^{\infty} e^{-t}\ln t dt$$

L'équivalence $|e^{-t}\ln t| \underset{t\to0}{\sim} |\ln t|$ montre la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt$

($\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt$ a une limite finie quand $x \to 0$, qu'on note $\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt$)

$f(x) = \underbrace{-e^{-x}\ln(x)}_{limite\ infinie} - \underbrace{\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t}\ln t dt}_{limite\ finie}$ Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} -e^{-x}\ln(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln x}$

3- Soient a et b tels que $0 < a < b$.

En intégrant par parties :

$$\textstyle\int_a^b f(x)dx = [xf(x)]_a^b - \displaystyle\int_a^b xf'(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b x\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$$

$$= bf(b) - af(a) + \int_a^b e^{-x}dx = bf(b) - af(a) + e^{-a} - e^{-b}$$

Les équivalents calculés à la question précédente montrent que :

$$bf(b) \underset{b\to+\infty}{\sim} b\frac{e^{-b}}{b} \underset{b\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad af(a) \underset{a\to0}{\sim} -a\ln a \underset{a\to0}{\to} 0$$

donc $\displaystyle\lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = 0 - 0 + 1 - 0 = 1.$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ est convergente et vaut } 1}$.

Exercice 2 : $\|x+y\|^2 = < x+y, x+y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $| < x, y > | \leqslant \|x\|.\|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$

$\leqslant \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2$

$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

En prenant la racine carrée, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Il y a égalité si et seulement si (x, y) est lié et $< x, y > = | < x, y > |$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et $< x, y > \geqslant 0$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et $< x, \lambda x > = \lambda\|x\|^2 \geqslant 0$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \lambda x$

si et seulement si x et y sont positivement liés.

2- Soient $U, V \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$ (colonne) telles que : $U.X + V.X = 2X$.

alors $\|U.X + V.X\| = 2\|X\| \leqslant \|U.X\| + \|V.X\|$

Or U et V étant des matrices orthogonales, $\|U.X\| = \|X\|$ et $\|V.X\| = \|X\|$

donc $\|U.X + V.X\| = 2\|X\| \leqslant \|U.X\| + \|V.X\| = \|X\| + \|X\| = 2\|X\|$

ce qui montre que $\|U.X+V.X\|=\|U.X\|+\|V.X\|$ et entraîne, d'après la question précédente, que $U.X$ et $V.X$ sont positivement liés : il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $U.X=\lambda V.X$

En prenant les normes : $\underbrace{\|U.X\|}_{=\|X\|}=|\lambda|.\underbrace{\|V.X\|}_{=\|X\|}$ donc $|\lambda|=1$ et puisque $\lambda\geqslant 0,\ \lambda=1$

Donc $U.X=V.X$, et puisque $U.X=V.X=2X$, $\boxed{U.X=V.X=X}$

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0\\ \forall n\geqslant 1,\ a_{2n}=(-1)^n\dfrac{a_0}{4^n(n!)^2}\end{cases}$$

Montrer que $U.X=V.X=X$.

3- Soient $U,V\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $U.M.U^{-1}+V.M.V^{-1}=2M$.

Montrer que $UM=MU$ et que $VM+MV$.

3.11 Mines **93**

I - Que dire d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel de dimension finie E tel que $u^2=-Id_E$ et qui admet un hyperplan stable ?

II - On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui admet une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right)\geqslant\dfrac{1}{E(X)}$ et étudier le cas d'égalité.

SOLUTION : I - Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E de dimension finie n tel que $u^2=-Id_E$ et qui admet un hyperplan stable $\mathcal{H}$.

alors $\det(u^2)=\underbrace{(\det(u))^2}_{\geqslant 0}=\det(-Id_E)=(-1)^n$, donc n est pair.

Soit $\widetilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathcal{H}$. Pour tout $x\in\mathcal{H},\widetilde{u}^2(x)=u^2(x)=-x$, donc $\widetilde{u}^2=-Id_{\mathcal{H}}$.

En appliquant le même calcul à $\widetilde{u}$, on obtient :

$\det(\widetilde{u}^2)=\underbrace{(\det(\widetilde{u}))^2}_{\geqslant 0}=\det(-Id_{\mathcal{H}})=(-1)^{n-1}$, donc $n-1$ est pair.

n ne pouvant être à la fois pair et impair, un tel endomorphisme u n'existe pas.

II - On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui admet une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right)\geqslant\dfrac{1}{E(X)}$ et étudier le cas d'égalité.

On sait que sur $\mathscr{L}^2$, espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ réelles de carré sommable, l'application

$$\Phi:\begin{cases}\mathscr{L}^2\times\mathscr{L}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ ((u_n),(v_n)) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n\end{cases}\quad\text{est un produit scalaire.}$$

$$E(X).E\left(\frac{1}{X}\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\frac{1}{X}=\frac{1}{n}\right)\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(X=n)\right)$$

En posant $u_n=\sqrt{nP(X=n)}$ et $v_n=\sqrt{\frac{1}{n}P(X=n)}$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n\right)^2=\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}P(X=n)\right)^2}_{=1}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(X=n)\right)$$

donc $\boxed{1\leqslant E(X).E\left(\dfrac{1}{X}\right)}$

• Il y a égalité dans cette inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les vecteurs $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ forment un système lié dans $\mathscr{L}^2$, si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sqrt{nP(X=n)}=\lambda v_n=\lambda\sqrt{\tfrac{1}{n}P(X=n)}$$

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall n\geqslant 1,\ nP(X=n)=\frac{\lambda^2}{n}P(X=n)$

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall n\geqslant 1,\ (n^2-\lambda^2)P(X=n)=0$

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\forall n\geqslant 1,\ (n-\lambda)P(X=n)=0$

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\forall n\geqslant 1,\ \begin{cases}n=\lambda\\ \text{ou}\\ P(X=n)=0\end{cases}$

$\iff$ X ne prend qu'une seule valeur λ entière. $(X(\Omega)=\{\lambda\},\ \lambda\in\mathbb{N}^*$, X est une v.a. constante$)$

3.12 Mines 98

I - Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et sa transposée sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II - Rechercher les séries entières solutions de l'équation différentielle (E) : $xy'' - (x+3)y' + 3y = 0$

Quelles sont les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions initiales : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$?

Quelle est la dimension des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Commentaires ?

SOLUTION : I - $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -2 \\ -2 & x-1 & -3 \\ -3 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & -3 & -2 \\ x-6 & x-1 & -3 \\ x-6 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$

$$\chi_A(x) = (x-6)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & x-1 & -3 \\ 1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\chi_A(X) = (X-6)(X^2+3X+3)}$

Le trinôme $Q(X) = X^2 + 3X + 3$ a pour discriminant $\delta = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

il a pour racines $\lambda_2 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_A(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle possède 3 valeurs propres complexes distinctes :

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{6, \lambda_2, \lambda_3\}$

Il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, $A = P.\underbrace{\mathrm{diag}(6, \lambda_2, \lambda_3)}_{\Delta}.P^{-1}$. P est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à la matrice Δ

En transposant cette égalité, on obtient : $A^T = (P.\Delta.P^{-1})^T = (P^{-1})^T.\Delta^T.P^T = (P^T)^{-1}.\Delta.P^T$, ce qui montre que A^T est elle aussi semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à la matrice Δ.

Par transitivité, cela montre que A et A^T sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

ATTENTION, on n'a pas prouvé que A et A^T étaient semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P.A^T.P^{-1}$

$\Longrightarrow A.P = P.A^T$

$\Longrightarrow A.(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2).A^T$ où les matrices P_1 et P_2 sont les parties réelle et imaginaire de la matrice P ; $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\Longrightarrow \begin{cases} A.P_1 = P_1.A^T \\ A.P_2 = P_2.A^T \end{cases}$ (en identifiant les parties réelle et imaginaire)

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C},\ A.(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2).A^T$

Or l'application $g\ :\ x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ est une application polynômiale de la variable x, qui n'est pas identiquement nulle puisque $g(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$. Elle n'a donc qu'un nombre fini de racines, et il existe un réel t tel que $g(t) = \det(P_1 + tP_2) \neq 0$

La matrice $S = P_1 + tP_2$ est réelle (puisque P_1, P_2 et t le sont), et inversible puisque son déterminant, $g(t)$ n'est pas nul.

Par combinaison linéaire des égalités $\begin{cases} A.P_1 = P_1.A^T \\ A.P_2 = P_2.A^T \end{cases}$, on obtient $A.(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2).A^T$

et puisque $S = P_1 + tP_2$ est inversible, $A.S = S.A^T$ entraîne que $A = S.A^T.S^{-1}$, $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{A \text{ et } A^T \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

II - Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Par le théorème de dérivation des séries entières on peut affirmer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et que:

$$\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \text{ et } \ S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si

$\forall x \in]-R, R[,\ xS''(x) - (x+3)S'(x) + 3S(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - (x+3)\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1) - 3(n+1)]a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n-3)a_{n+1}-(n-3)a_n]x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0\ x^n$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n-3)[(n+1)a_{n+1}-a_n] = 0$ (par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}-\{3\},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a_1 = a_0 & (n=0) \\ a_2 = \frac{a_1}{2} & (n=1) \\ a_3 = \frac{a_2}{3} & (n=2) \\ \forall n \geqslant 4, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_1 = a_0 \\ a_2 = \frac{a_0}{2} \\ a_3 = \frac{a_0}{6} \\ a_5 = \frac{a_4}{5} \\ a_6 = \frac{a_5}{6} \\ \forall n \geqslant 4, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \forall n \in \{1,2,3\},\ a_n = \dfrac{a_0}{n!} \\ \forall n \geqslant 4,\ a_n = \dfrac{4!\ a_4}{n!} = \dfrac{24}{n!}\ a_4 \end{array}\right.$$

$$\iff S(x) = a_0\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) + 24\ a_4 \sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

En conclusion, les séries entières solutions de (E) sont les fonctions de la forme:

$$\boxed{S(x) = a_0\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) + 24\ a_4 \sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

En remarquant que $e^x = \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\right) + \displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, on peut donner comme base des séries entières solutions de (E) les deux fonctions : $S_1(x) = e^x,\ S_2(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$

•. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$:

f est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ et solution de (E) sur $]0,+\infty[$, donc il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = a\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) + b\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = c\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) + d\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

La condition $f(0) = 0$ entraîne $a = c = 0$

et alors, quelque soient c et d la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ est dérivable et de dérivée nulle en 0.

Donc les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient les conditions initiales $\left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{array}\right.$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \left\{\begin{array}{c} b\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ si } x<0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ d\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ si } x>0 \end{array}\right.$

Elles forment un espace de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

• Les solutions de (E) sur R forment un espace de dimension 3, dont une base est formée des fonctions :

$$f_0 : x \mapsto 1+x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6} \qquad f_1 : x \mapsto \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } x>0 \end{array}\right. \qquad f_2 : x \mapsto \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ si } x>0 \end{array}\right.$$

3.13 Mines **PSI 104**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{b}\binom{n}{k}k^3$

***SOLUTION*:** L'idée est de partir de l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{b}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{b}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = (1+x)^n$, et par dérivations successives, de passer à $\displaystyle\sum_{k=0}^{b}\binom{n}{k}kx^{k-1}$ etc . . .

Partons de l'égalité polynomiale : $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{b} \binom{n}{k} X^k$

Par dérivation, et multiplication par X : $\quad nX(X+1)^{n-1} = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} kX^k$

Par une nouvelle dérivation, $\quad n[(X+1)^{n-1} + (n-1)X(X+1)^{n-2}] = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^2 X^{k-1}$

$$n(X+1)^{n-2}[(X+1)+(n-1)X] = n(X+1)^{n-2}(nX+1) = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^2 X^{k-1}$$

en multipliant par X :

$$nX(X+1)^{n-2}(nX+1) = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^2 X^k$$

par dérivation :

$$n[(X+1)^{n-2}(nX+1) + X(n-2)(X+1)^{n-3}(nX+1) + nX(X+1)^{n-2}] = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^3 X^{k-1}$$

$$n(X+1)^{n-3}[(X+1)(nX+1) + X(n-2)(nX+1) + nX(X+1)] = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^3 X^{k-1}$$

$$n(X+1)^{n-3}[(n+n(n-2)+n)X^2 + (n+1+n-2+n)X+1] = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^3 X^{k-1}$$

$$n(X+1)^{n-3}[n^2X^2 + (3n-1)X+1] = \sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^3 X^{k-1}$$

En remplaçant X par 1, $\boxed{\sum_{k=0,1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = n2^{n-3}(n^2+3n) = n^2(n+3)2^{n-3}}$

3.14 Mines PSI **106 augmenté**

E est un espace euclidien.

1- a) Soient x et y deux vecteurs propres d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ de f. Montrer que $x+y$ n'est pas vecteur propre de f.

b) Rechercher les endomorphismes f de E qui commutent avec tous les projecteurs orthogonaux de rang 1.

2- a) Rechercher les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E.

b) Rechercher les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes diagonalisables de E.

c) Rechercher les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes inversibles de E.

d) Rechercher les endomorphismes de E qui commutent avec toutes les réflexions de E.

e) Rechercher les endomorphismes de E qui commutent avec toutes les isométries de E.

3- a) Rechercher les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) Rechercher les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

c) Rechercher les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

NOTE : on pourra traiter les questions 2 et 3 et leurs sous-questions dans l'ordre que l'on veut.

***SOLUTION*:** 1- a) Soient x et y deux vecteurs propres d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ de f : $f(x) = \lambda x \qquad f(y) = \mu y$

Supposons que $x+y$ soit un vecteur propre de f : il existe alors $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+y) = \nu(x+y)$.

Donc $f(x+y) = \nu(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda x + \mu y$

$$\Longrightarrow (\lambda-\nu)x + (\mu-\nu)y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda - \nu = 0 \\ \mu - \nu = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu,$$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

(car x et y, associés à des valeurs propres distinctes, forment une famille libre)

Donc $x+y$ n'est pas vecteur propre de f.

b) Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tout projecteur orthogonal de rang 1.

Soit x un vecteur quelconque de E, non nul. Soit alors g le projecteur orthogonal sur la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ engendrée par x. Puisque par hypothèse f commute avec g, $f(\underbrace{g(x)}_{=x}) = g(f(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$, puisque g projette sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

On vient ainsi de prouver que tout vecteur de E est vecteur propre de f. Et les vecteurs de E sont associés à la même valeur propre, sinon, si deux vecteurs x et y étaient associés à des valeurs propres différentes, alors $x+y$, qui n'est pas nul, ne serait pas vecteur propre de f d'après la question a).

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$. f est donc une homothétie. Réciproquement, il est immédiat de vérifier que toute homothétie de E (c.a.d de la forme λId) commute avec tout endomorphisme de E

2 - a) Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E. Alors f commute en particulier avec tout projecteur orthogonal de rang 1. Donc f est une homothétie d'après la question précédente.

b) Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes diagonalisables de E. Puisque tout projecteur est diagonalisable, f commute en particulier avec tout projecteur orthogonal de rang 1. Donc f est une homothétie d'après la question 1-b)

3 - a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors f, endomorphisme canoniquement associé à A, commute avec tout endomorphisme de E. On en déduit par la question 2-a) que f est une homothétie de E, et que sa matrice A est de la forme $\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

3 - b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui commute avec toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors A commute avec toute matrice de la forme $I_n + E_{i,j}$ car une telle matrice a pour déterminant 1 si $i \neq j$, et 2 si $i = j$, donc est inversible :

$$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ A.(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j}).A$$
$$\Longrightarrow \forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ A + A.E_{i,j} = A + E_{i,j}.A$$
$$\Longrightarrow \forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ A.E_{i,j} = E_{i,j}.A$$

Donc A commute avec toute matrice élémentaire $E_{i,j}$. Par linéarité, A commute avec toute combinaison linéaire de ces matrices, c'est à dire avec toue matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'en suit par la question 3-a) que A est une matrice d'homothétie.

2 - c) En utilisant le même lien matrice-endomorphisme qu'en la question 3-a), on transpose aux endomorphismes la propriété 3-b) établie pour les matrices, et on en déduit que si f commute avec tout endomorphisme inversible de E, alors f est une homothétie vectorielle.

2 - d) Rappelons qu'une réflexion s d'un espace euclidien est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $\mathcal{H}$. Si $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$ est une base de $\mathcal{H}$ et (e_n) une base de la droite $\mathcal{H}^{\perp}$, la matrice de s dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{H}^{\perp}$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(I_n - A)$

Soit f un endomorphisme de E qui commute avec toutes les réflexions de E. La relation $B = \dfrac{1}{2}(I_n - A)$ montre que f commute avec tout projecteur orthogonal de rang 1. f est donc une homothétie d'après 1-b)

2 - e) Soit f un endomorphisme qui commute avec toutes les isométries vectorielles. Alors f commute en particulier avec toutes les réflexions, et est donc une homothétie d'après 2-d).

3 - c) En transposant ce dernier résultat aux matrices, puisque les matrices orthogonales sont les matrices d'une isométrie dans une BON, si la matrice A commute avec toutes les matrices orthogonales, son endomorphisme canoniquement assiocié commute avec toutes les isométries et est donc une homothétie.

Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices orthogonales sont donc les matrices d'homothéties, de la forme λI_n.

3.15 Mines PSI 110

E On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ qui suivent une loi loi de Bernoulli de même paramètre $p \in]0,1[$: $\forall i,\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On définit $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U.\,{}^tU \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$

Déterminer les lois de $R = \mathrm{rg}(M)$ et de $T = \mathrm{tr}(M)$.

Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

***SOLUTION*:**

$$\bullet\ M = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2X_1 & \cdots & X_nX_1 \\ X_1X_2 & X_2^2 & \cdots & X_nX_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1X_n & X_2X_n & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1U & X_2U & \cdots & X_nU \end{array} \right)$$

Les colonnes de M sont toutes colinéaires à la colonne U. Donc $R = \mathrm{rg}(M) \in \{0, 1\}$
Ainsi $R(\Omega) = \{0, 1\}$. R suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = P(R = 1)$.
Plus précisément, $R = 0$ ssi $U = 0$, ssi $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$.
$P(R = 0) = P[(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)] = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \cdots P(X_n = 0)$
(puisque $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes).
$P(R = 0) = (1 - p)^n$
$q = P(R = 1) = 1 - P(R = 0) = 1 - (1 - p)^n$
Donc $\boxed{R \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - (1 - p)^n)}$. R suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

• $T = \mathrm{tr}(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad (X_i = X_i^2$ puisque $\forall \omega \in \Omega, X_i(\omega) = 0$ ou $X_i(\omega) = 1)$.
Donc $T(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.
Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, $T = k \iff k$ variables X_i parmi les n possibles prennent la valeur 1, et les $n - k$ restantes la valeur 0. Donc $P(T = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. $\quad \boxed{T \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$.
T suit une loi binomiale de paramètres n et p.

• $M^2 = U.\,{}^tU.U.\,{}^tU = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$

Or $\ {}^tU.U = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = (T)$
M est une matrice de projection si et seulement si $M^2 = M \iff (T) = (1)$

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ soit une matrice de projection est donc } P(T = 1) = \binom{n}{1} p(1 - p)^{n-1} = np(1 - p)^{n-1}}$$

4 X - ENS: -

4.1 X - ENS PSI

I) Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ pour tout n entier naturel.
Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1 - x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)^2}$
Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{x(x + 1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x + 1} + \dfrac{c}{(x + 1)^2}$ et donner la valeur de J.
On admettra que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

II) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$
On considère deux endomorphismes inversibles f et g d'un espace vectoriel E. Soit λ une valeur propre de $f_o g$. On note E_λ le sous espace propre de $f_o g$ associé à le valeur propre λ et F_λ le sous espace propre de $g_o f$ associé à le valeur propre λ.
Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.
En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.
Montrer que si $f_o g$ est inversible, $g_o f$ l'est aussi.
Trouver deux matrices carrées X et Y telles que $X.Y$ soit diagonalisable mais pas $Y.X$.

***SOLUTION*:** I) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur le semi-ouvert $]0, 1]$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$. La fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ estprolongeable par continuité en 0. Elle est alors intégrale sur le segment $[0, 1]$ comme fonction continue sur ce segment.
Pour $n = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx$ est convergente (intégrale de référence ; on peut justifier la convergence de l'intégrale pour la borne 0 par la domination $|\ln(x)| \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$)
Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• En intégrant par parties, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n + 1}\ln(x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^n}{n + 1} dx = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n + 1)^2}$

Cette intégration par parties sur une intégrale impropre en la borne 0 est validée par la limite finie du crochet en 0 quand $x \to 0$. Donc $\boxed{\int_0^1 x^n \ln(x)dx = -\dfrac{1}{(n+1)^2}}$

- La fonction $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est continue sur l'ouvert $]0,1[$.

  Pour la borne 0, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$

  et pour la borne 1, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$

  On peut donc prolonger la fonction $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur ce segment . $\boxed{\text{L'intégrale } J = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx \text{ est bien définie}}$.

- On sait que : $\forall x \in [0,1[, \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, donc $\forall x \in]0,1[, \ln(x)\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln(x)}{n}$

  En posant $u_n(x) = \dfrac{x^n \ln(x)}{n}$, l'étude précédente montre que $u_n(\ )$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

  $\int_0^1 u_n(x)dx = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$

  La fonction u_n est négative sur l'intervalle $]0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 |u_n(x)|dx = -\int_0^1 u_n(x)dx = \frac{1}{n(n+1)^2}$

  En résumé, - chaque u_n est continue et intégrable sur l'intervalle $]0,1]$,

  - la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle $]0,1]$,
  - la série numérique $\sum \int_0^1 |u_n(x)|dx$ converge,

  par le théorème d'intégration terme à terme des séries entières, on peut affirmer que :

  $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$, c'est à dire : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}}$

- Soient a, b et c des réels.

  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx}{x(x+1)^2} = \dfrac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2}$

  d'où : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

  donc $\boxed{\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}}$

- Alors, $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

  or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ (somme telescopique)

  et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$

  finalement $J = 1 - \left(\dfrac{\pi^2}{6} - 1\right)$ $\boxed{J = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}}$

II) • Supposons que A est inversible.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\chi_{A.B}(x) &= \det(xI_n - A.B) = \det(xA.A^{-1} - A.B) = \det(A.(xA^{-1} - B)) = \det(A).\det(xA^{-1} - B)\\ &= \det(xA^{-1} - B)\det(A) = \det(xA^{-1}.A - B.A) = \det(xI_n - B.A) = \chi_{B.A}(x)\end{aligned}$$

Les polynômes $\chi_{A.B}(X)$ et $\chi_{B.A}(X)$ coïncident en une infinité de valeurs, en tout point de $\mathbb{K}$. Ils sont donc égaux. $\boxed{\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)}$

- Dans le cas général où A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons M_n la matrice $A - \frac{1}{n}I_n$.

  La matrice M_n est inversible sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de n

  $(\det(M_n) = \det(A - \frac{1}{n}I_n) = \chi_A(\frac{1}{n}) \neq 0$ sauf si $\frac{1}{n}$ est valeur propre de $A)$

  Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, M_n$ est inversible.

  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, et que $M_n = A - \frac{1}{n}I_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = A$.

  D'après l'étude précédente, puisque M_n et inversible, $\forall n \geqslant n_0, \chi_{M_n.B}(X) = \chi_{B.M_n}(X)$. Puisque l'application det est continue comme fonction polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi_{M_n.B}(X) = \chi_{A.B}(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} \chi_{B.M_n}(X) = \chi_{B.A}(X)$

Donc $\boxed{\forall A, B, \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)}$

• Soit $x \in g(E_\lambda) : \exists t \in E_\lambda,\ x = g(t)$.
alors $g_of(x) = g_of(g(t)) = g[\underbrace{f_og(t)}_{=\lambda t}] = g(\lambda t) = \lambda g(t) = \lambda x$, ce qui montre que $x \in F_\lambda$. On a ainsi montré que $\boxed{g(E_\lambda) \subset F_\lambda}$

Par symétrie des rôles de f et de g, on a aussi $\boxed{f(F_\lambda) \subset E_\lambda}$

• L'inclusion $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ entraîne que $f[g(E_\lambda)] \subset f(F_\lambda)$
Remarquons que si λ est une valeur propre **non nulle** d'un endomorphisme h, associée au sous espace propre $E_\lambda(h)$, alors $h(E_\lambda(h)) = E_\lambda(h)$
En appliquant ce résultat à g_of, on peut écrire : $f[g(E_\lambda)] = f_og(E_\lambda) = E_\lambda$
d'où : $f[g(E_\lambda)] = E_\lambda \subset f(F_\lambda) \subset E_\lambda$, et par double inclusion, $f(F_\lambda) = E_\lambda$
En passant aux dimensions, $\dim(E_\lambda) = \dim(f(F_\lambda)) \leqslant \dim(F_\lambda)$
En échangeant les rôles de f et g, on parvient aussi à l'inégalité $\dim(F_\lambda) \leqslant \dim(E_\lambda)$, et par double inégalité,
$\boxed{\dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)}$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversibles. Montrer que si $A.B$ est diagonalisable, $B.A$ l'est aussi.
Considérons les endomorphismes f et g respectivement associés aux matrices A et B.
Supposons que $A.B$ soit diagonalisable. Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ le spectre de $A.B$, qui est aussi le spectre de f_og. Puisque $A.B$ et $B.A$ ont même polynôme caractéristique, elles ont même spectre. Donc $\mathrm{Sp}(B.A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\} = \mathrm{Sp}(g_of)$
Réintroduisons E_λ le sous espace propre de f_og associé à le valeur propre λ et F_λ le sous espace propre de g_of associé à le valeur propre λ.

Puisque $A.B$, et donc f_og est diagonalisable, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}) = n$

Mais d'après l'étude qui précède, $\dim(E_{\lambda_k}) = \dim(F_{\lambda_k})$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(F_{\lambda_k}) = n$, ce qui montre que g_of et $B.A$ sont diagonalisables.

Remarque : Ce résultat ne vaut que pour des matrices inversibles, comme le montre la question qui suit.
Soient $X = E_{1,2}$ et $Y = E_{1,1}$
alors $\boxed{X.Y = E_{1,2}.E_{1,1} = 0 \text{ est diagonalisable, } Y.X = E_{1,1}.E_{1,2} = E_{1,2} \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

4.2 X - ESPCI PC 61 - 69

I) Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq M$ et $M^2 = M^3 \neq 0$.

II) Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) > 0$ et $A^{-1} = {}^tA$.
Montrer qu'il existe une vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $A.X = X$.

***SOLUTION*:** II) Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) > 0$ et $A^{-1} = {}^tA$.
Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est un polynome unitaire de degré 3.
Donc $\chi_A(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ De même, $\chi_A(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$
Donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(a) < 0$ et il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(b) > 0$
la fonction χ_A étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(c) = 0$
Donc la matrice A admet au moins une valeur propre réelle, c. Donc il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, non nul tel que $A.X = cX$. En trasposant, ${}^tX.{}^tA = c.{}^tX$, et en multiplian terme à terme,

$${}^tX.\underbrace{{}^tA.A}_{=I_3}.X = c^2.{}^tX.X \implies {}^tX.X = c^2\ {}^tX.X \implies \|X\|^2 = c^2 \underbrace{\|X\|^2}_{\neq 0} \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

A est une matrice réelle, qui a au moins une valeur propre réelle. Plusieurs cas sont possibles :

a) A possède une seule valeur propre réelle c et deux valeurs propres complexes conjuguées λ et $\overline{\lambda}$.
Dans ce cas, $\det(A) = c\,.\,\lambda.\overline{\lambda} = c\,|\lambda|^2 > 0 \implies c > 0$. Donc $c = 1$.

b) A possède trois valeurs propres réelles, chacune valeur absolue égale à 1. Autrement dit, ces valeurs propres réelles ne peuvent être que 1 ou -1. Le cas où -1 serait valeur propre triple est exclu, car alors $\det(A) = (-1)^3$ vaudrait -1. Donc 1 est valeur propre de A.

Dans tous les cas, $+1$ est valeur propre de A. Dès lors A possède un vecteur propre $X \in \mathbb{R}^n$ associé à cette valeur propre, qui vérifie donc l'égalité $\boxed{A.X = 1.X = X}$

Remarque : La matrice A est une matrice orthogonale.

***SOLUTION*:** I) • Analyse :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq M$ et $M^2 = M^3 \neq 0$.
Le polynôme $X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est un polynôme annulateur de M. Donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 1\}$.

Si M est diagonalisable, alors M est semblable à une matrice diagonale de la forme $\Delta = \text{diag}(0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1)$

Mais puisque $\Delta^2 = \Delta$, $M^2 = M$. La matrice M ne doit donc pas être diagonalisable.

Pour éviter que $M^2 = 0$, il suffit que 1 soit valeur propre. En effet, il existe alors un vecteur colonne V non nul tel que $M.V = 1.V = V$, et alors $M^2.V = 1^2.V = V \neq 0$, ce qui assure que $M^2 \neq 0$.

Prenons donc une matrice de dimension 3-3 (ou plus) qui a un 1 sur la diagonale, des 0 partout alleurs sur la diagonale, un 1 dans le sous-bloc carré contenant les 0 diagonaux. Soit $M = E_{n,n} + E_{1,n-1}$

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq M$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^2 \neq 0$

Plus généralement, si $M = E_{n,n} + E_{1,n-1}$,

alors, si $n \geqslant 3$, $M^2 = (E_{n,n} + E_{1,n-1})^2 = E_{n,n}^2 + E_{n,n}.E_{1,n-1} + E_{1,n-1}E_{n,n} + E_{1,n-1}^2 = E_{n,n} \neq M$.

et $M^3 = E_{n,n}.(E_{n,n} + E_{1,n-1}) = E_{n,n} = M^2 \neq 0$

4.3 X - ESPCI PC 68

La durée de vie d'une ampoule électrique comptée en années est représentée par une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{2^n}$

Si l'ampoule fonctionne toujours au bout de n années, quelle est la durée moyenne pendant laquelle elle fonctionnera encore ?

***SOLUTION*:** Notons $Y = X - n$ la durée pendant laquelle l'ampoule fonctionnera encore, sachant qu'elle a déjà fonctionné n années. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$P(X \geqslant n+1) = P\left(\bigcup_{k \geqslant n+1} (X = k)\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

$$P(Y = k | X \geqslant n+1) = P(X = n+k | X \geqslant n+1) = \frac{P((X = n+k) \cap (X \geqslant n+1))}{P(X \geqslant n+1)}$$

$$= \frac{P(X = n+k)}{P(X \geqslant n+1)} = \frac{\frac{1}{2^{n+k}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^k}$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(Y = k | X \geqslant n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

On sait que $\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, et par le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{k=0,1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ et en multipliant par } x : \quad \forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{k=0,1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

En particulier, au point $x = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$ Donc $\boxed{E(Y) = 2}$

4.4 ENS Cachan

$A, B \subset \Omega$. On veut montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$

1- On suppose que $A \cup B = \Omega$ et que A et B sont incompatibles.
Démontrer l'inégalité et étudier le cas d'égalité.

2- Démontrer l'inégalité lorsque A et B sont incompatibles.

3- On considère l'application $h : (x, y, z) \mapsto x(1 - x - y - z) - yz$
et l'ensemble $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \text{ et } x + y + z \leqslant 1\}$
Soit F la frontière de W.

a) Tracer l'ensemble F.

b) Trouver un encadrment optimal de h sur W.

c) Montrer que $|h(x, y, z)| \leqslant 1/4$

d) Démontrer l'inégalité en introduisant les trois évènements :

$$\begin{cases} E_x = A \cap B \\ E_y = A - E_x \\ E_z = B - E_x \end{cases}$$

4.5 ENS Cachan

Ex 1

Partie 1 q une fonction continue et strictement positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle : $(E) : \ y'' - q(x).y = 0$

On veut montrer qu'il existe des solutions non uniformemement nulles et bornées sur $\mathbb{R}$

Soit f une solution de (E) non uniformément nulle

1) montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$

2) montrer qu'on peut supposer que $f'(a) > 0$

3) mq pour tout $x \geqslant a, f'(x) \geqslant f'(a)$

4) Conclure

Partie 2 A et B sont deux variables aléatoires suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

Quelle est la probabilité pour que les solution de l'équation différentielle $Y'' + (A(w) - 1).Y' + B(w).Y = 0$ tendent toutes vers 0 quand t tend vers l'infini.

Exercice subsidiaire

La matrice A=[[1,-2,3],[0,1,-2],[0,0,1]]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est elle le carré d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?