Oraux 2010

CCP

Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' + y = 0$

1- Rechercher les séries entières solutions. On exprimera les coefficients à l'aide de factorielles, et on précisera le rayon de convergence.

2- On considère une série entière f solution de (E), telle que $f(0) = 1$

a) Déterminer les variations de f sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, 2]$. Calculer $f'(0)$. Cohérence ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Conséquence géométrique ?

SOLUTION :

1- Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

On sait que S est infiniment dérivable sur $]-R, R[$ et que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

• S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R, R[,\ xS''(x) + S'(x) + S(x) = 0$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0,1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

(changement d'indice $n' = n - 1$ dans la première somme)

$$\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_n) x^n = 0$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)^2 a_{n+1} + a_n = 0$$

(par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul)

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}$$

• $a_1 = -\dfrac{a_0}{1^2}$

$a_2 = -\dfrac{a_1}{2^2}$

$a_3 = -\dfrac{a_2}{3^2}$

$\cdots\cdots$

$a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{n^2}$

Par une récurrenece immédiate (ou en multipliant tem à terme ces égalités,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(n!)^2}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{les séries entières solutions de l'équation différentielle } (E) \text{ sont les fonctions de la forme : } S(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}}$$

Leur rayon de convergence est infini (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$)

2- a) • L'unique série entière solution de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ est donnée par l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!\ n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n!\ (n+1)!}$

$\forall x \in]-\infty, 0],\ f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,(n+1)!} \leqslant 0 \quad (\text{car } -x \geqslant 0)$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc décroissante sur }]-\infty, 0].}$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!\,(n+1)!} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \ldots..$

Notons $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!\,(n+1)!}$

Lorsque $x \in]0, 2]$, la suite $(u_n(x))$ est alternée, et de limite nulle (on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ par convergence de la série exponentielle)

$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|}{n(n+1)}$

Lorsque $|x| \leqslant 2$ et $n \geqslant 1, n(n+1) \geqslant 2$ et donc $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leqslant 1$, c'est à dire $|u_{n+1}(x)| \leqslant |u_n(x)|$

Par ailleurs, lorsque $x \in [0, 2]$, il est clair que $|u_1(x)| = \frac{|x|}{2} \leqslant |u_0(x)| = 1$

La suite $(|u_n(x)|)$ est donc décroissante lorsque $x \in [0, 2]$. La série $\sum u_n(x)$vérifie alors le critre de Leibniz des séries alternées. On sait qu'alors sa somme, $f(x)$ a même signe que son premier terme -1.

Donc $\forall x \in [0, 2], f'(x) \leqslant 0.$ $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur l'intervalle } [0, 2].}$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!\,(n+1)!}$, en particulier, $f'(0) = -1$, ce qui est compatible avec les variations de f précédemment étudiées.

b) $\forall x \in]-\infty, 0],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-x)^n}{(n!)^2}}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{n=0}^{2} \frac{(-x)^n}{(n!)^2} = 1 + (-x) + \frac{x^2}{4}$

donc, par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$

- $\forall x \in]-\infty, 0],\ \frac{f(x)}{-x} \geqslant \frac{1}{(-x)} + 1 + \frac{(-x)}{4}$

et là encore, par minoration $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{(-x)} = +\infty$, et donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.}$

Le graphe de f présente une branche parabolique en $-\infty$

CCP

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 > 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{n+1}{x_n}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant n + 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant x_1 + n - 1$

c) Etdudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{x_n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{x_n}$

SOLUTION :

a) Une récurrence immédiate permet de montrer que x_n est défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'égalité $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{x_n} > 0$ montre que la suite (x_n) est strictement croissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n, x_n \geqslant n + 1$

La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ admet son minimum sur $]0, +\infty[$ pour $x = 1$ (voir le signe de la dérivée), et qui vaut 2. Donc $x_1 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geqslant 2$. La relation est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons que $x_n \geqslant n + 1$. Montrer que $x_{n+1} \geqslant n + 2$ équivaut à prouver que $x_n + \frac{n+1}{x_n} \geqslant n + 2$ ou encore que $x_n^2 - (n + 2)x_n + (n + 1) \geqslant 0$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - (n + 2)X + (n + 1)$ a pour discriminant $\delta = (n + 2)^2 - 4(n + 1) = n^2$ et a pour racines $\alpha_1 = \frac{n+2+n}{2} = n + 1$ et $\alpha_2 = \frac{n+2-n}{2} = 1$

Par hypothèse de récurrence, $x_n \geqslant n + 1$, x_n est à l'extérieur des racines α_1 et α_2, donc $Q(x_n) \geqslant 0$, ce qui entraîne que $x_{n+1} \geqslant n + 2$

La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant n + 1$ est ainsi montrée par récurrence.

b) Les relation $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{n+1}{x_n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant n + 1$ entraînent que $x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{n+1}{n+1} = x_n + 1$

Ajoutons ces relations :

$x_2 \leqslant x_1 + 1$
$x_3 \leqslant x_2 + 1$

$\dots\dots\dots$
$x_n \leqslant x_{n-1}+1$
on obtient $x_n \leqslant x_1+n-1$

c) Les inégalités précédentes montrent que $n+1 \leqslant x_n \leqslant x_1+n-1$ d'où l'on déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

L'équivalence $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ montre que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

• La suite (x_n) étant croissante (voir a)), la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est décroissante et de limite nulle.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{x_n}$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées. Elle est donc convergente.

CCP

Exercice 1 : Pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}\ln\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$

Soit $a>0$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse a aux courbes représentatives des fonctions f_λ sont concourantes en un point $M(a)$ que l'on déterminera.

Exercice 2 : A tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on associe la fonction qu'on notera $f(P)$ telle que $x \mapsto e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$

1- Déterminer le domaine de défintion de la fonction $f(P)$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $f(P)$ est une fonction polynômiale (que l'on confondra dans la suite avec le polynôme associé)

Montrer que f est un endomorphime de $\mathbb{C}[X]$.

2- Déterminer le noyau de f.

f est elle un isomorphisme vectoriel de $\mathbb{C}[X]$?

3- Déterminer le spectre de f.

SOLUTION :

Exercice 1 : Un point $M\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ appartient à la tangente $\mathcal{D}_\lambda(a)$ au point a à la courbe représentative de f_λ si et seulement si : $\quad Y-f_\lambda(a)=f'_\lambda(a)(X-a)$

$\forall x>0,\ f'_\lambda(x)=\dfrac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}\ln\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ln\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)+\dfrac{1}{1+x^2}$

$M\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right. \in \mathcal{D}_\lambda(a) \iff Y-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}(X-a)$

• **Analyse :**

Si un point $M\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ appartient à toutes les tangentes aux points d'abscisse a, alors, en particulier, M appartient à la tangente $\mathcal{D}_a(a)$ de la courbe f_a (courbe pour laquelle on a pris $\lambda=a$)

donc $Y-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{a}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{a}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}(X-a)$

soit : $Y=\dfrac{X-a}{1+a^2}$ soit encore $X=(1+a^2)Y+a$

Puisque $M\in\mathcal{D}_\lambda(a)$ pour tout λ,

$\forall\lambda>0,\ Y-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}(X-a)$

$\implies Y-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)}Y \quad$ (car $X-a=(1+a^2)Y$)

$\implies -\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{(1+a^2)}Y \quad$ (Y se simplifie de chaque coté)

$\implies Y=\frac{a}{a^2-1}$ et $X=(1+a^2)Y+a=\frac{2a^3}{a^2-1}$

On a montré à ce stade, qu'il y a au plus un point commun à toutes les tangentes aux courbes des fonctions f_λ au point a, et qui est $M\left|\begin{array}{l}X=\frac{2a^3}{a^2-1}\\Y=\frac{a}{a^2-1}\end{array}\right.$

• **Synthèse :** Il reste encore à montrer que ce point $M\left|\begin{array}{l}X(a)=\frac{2a^3}{a^2-1}\\Y(a)=\frac{a}{a^2-1}\end{array}\right.$ appartient bien à toutes les tangentes $\mathcal{D}_\lambda(a)$, quel que soit λ

Soit $\mathcal{D}_\lambda(a)$ l'une ce ces tangentes. Elle a pour équation :

$Y-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}(X-a)$

or $Y(a)-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)$

et $\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}(X(a)-a)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}\left(\frac{2a^3}{a^2-1}-a\right)=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)^2}\left(\frac{a^3+a}{a^2-1}\right)$

$=\frac{(1-a^2)\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+(1+a^2)}{(1+a^2)}\left(\frac{a}{a^2-1}\right)=-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)+\frac{a}{a^2-1}=Y(a)-\frac{a}{1+a^2}\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)$

Le point $M \left| \begin{array}{l} X(a) = \frac{2a^3}{a^2-1} \\ Y(a) = \frac{a}{a^2-1} \end{array} \right.$ appartient bien à toutes les tangentes au points d'abscisses a aux courbes représenatives des fonction f_λ

Exercice 2 :

1- Soit $a_m X^m$ le terme dominant de $P(X)$ et notons $u_n = \dfrac{P(n)}{n!}$

alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{\frac{P(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{P(n)}{n!}}\right| = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{P(n+1)}{P(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{a_m(n+1)^m}{a_m n^m} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est donc infini et la fonction $f(P)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• Considérons la suite de polynômes (Q_n) tels que :

$Q_0 = 1$
$Q_1 = X$
$Q_2 = X(X-1)$

et pour tout entier k, $Q_k = X(X-1)(X-2)...(X-k+1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_k(n)}{n!}x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{Q_k(n)}{n!}x^n$ car $Q_k(0) = Q_k(1) = ... = Q_k(k-1) = 0$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n!}x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-k)!} = x^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = x^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^k e^x$$

donc $\boxed{f(Q_k)(x) = e^{-x}\, x^k\, e^x = x^k}$

• L'application f est une application linéaire, de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (vérification immédiate)

Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$. S'il est de degré m, il se décompose sur la base $(Q_0, Q_1, ..., Q_m)$ de $\mathbb{C}_m[X]$. (dire pourquoi c'est bien une base)

donc $\exists (a_0, a_1, ..., a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(X)$

alors, par linéairité, $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k f(Q_k) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$

L'application f est bien une application linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même, c'est à dire un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2- Soit $P \in \ker f$. Comme dans la question précédente, on peut écrire $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(X)$

et $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k = 0$. Donc $\forall k, a_k = 0$ et donc $P = 0$

$\boxed{\text{On en déduit que } \ker f = \{0\} \text{ et que } f \text{ est injective.}}$

• L'égalité $f\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ montre que $f(\mathbb{C}_m[X]) \subset \mathbb{C}_m[X]$

Le sous espace $\mathbb{C}_m[X]$ est stable par f, on peut considérer l'endomorphisme f_m induit par f sur $\mathbb{C}_m[X]$.

Il est injectif, car f l'est. Il est donc bijectif puisque $\mathbb{C}_m[X]$ est de dimension finie. Soit $R \in \mathbb{C}[X]$, et soit m le degré de R. Puisque f_m est surjectif, R admet un antécédent $P \in \mathbb{C}_m[X]$ par f_m, qui est aussi un antécédent de R par f. f est donc surjective. C'est une bijection linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même, c'est à dire un isomorphisme liéaire de $\mathbb{C}[X]$.

Remarque : Tout polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit sous la forme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ où m est son degré.

Les calculs de la première question ont montré que $f\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k Q_k\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = R(X)$

R admet donc pour antécédent le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k Q_k$, ce qui montre que f est surjective.

3- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

$\exists P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}, f(P) = \lambda P$.

Soit m le degré de P et décomposons P dans la base $(Q_0, Q_1, ..., Q_m)$: $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(X)$

Chaque polynôme Q_k est unitaire, et de degré k. Le terme dominant de P est donc $a_m X^m$

Mais $f(P) = f\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ a pour terme dominant $a_m X^m$

En regardant les termes dominants de l'égalité $f(P) = \lambda P$, qui sont $a_m X^m$ pour le terme de gauche, et $\lambda a_m X^m$ pour le terme de droite, on en déduit que nécessairement, $\lambda = 1$.

1 est donc la seule valeur propre possible de f. $\quad \mathrm{Sp}(f) \subset \{1\}$

L'égalite $f(1) = 1$ (où 1 est considéré comme un polynôme de degré 0) montre que 1 est valeur propre de f

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1\}}$

CCP

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle (E) :

$$2x(x+1)y' - (x-1)y = x+1$$

Calculer les solutions de (E) sur $]-1,0[$, sur $]0,+\infty[$, puis sur $]-1,+\infty[$.

SOLUTION :

Exercice 1 : (E) est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, dont l'équation homogène associée est (E_0) : $\underbrace{2x(x+1)}_{a(x)}\ y' \underbrace{-(x-1)}_{b(x)}y = 0$

La fonction a est définie et continue sur $I_1 =]-1,0[$ et sur $I_2 =]0,+\infty[$, et ne s'annule pas sur ces intervalles. La fonction b est définie et continue sur I_1 et sur I_2. •

Résolution de (E_0) :

$$\int \frac{-b(x)}{a(x)}dx = \int \frac{x-1}{2x(x+1)}dx = \int \frac{2x-(x+1)}{2x(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x}\right)dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x|$$

Sur I_1 et sur I_2, la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = \lambda e^{\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x|} = \lambda \frac{|x+1|}{\sqrt{|x|}} = \lambda \frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

Résolution de (E) :

Pour x dans I_1 ou I_2, notons $y_0(x) = \frac{x+1}{\sqrt{|x|}}$ et appliquons la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution particlière y_1 de l'équation complète (E).

Pour cela, on recherche y_1 de la forme $y_1(x) = \lambda(x)y_0(x)$ où λ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I_1 ou I_2 :

$\forall x \in I_k, y_1'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$

y_1 est solution de (E) sur I_k si et seulement si :

$$\forall x \in I_k,\ 2x(x+1)(\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)) - (x-1)\lambda(x)y_0(x) = 1+x$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ 2x(x+1)\lambda'(x)y_0(x) = 1+x$$
$$\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2xy_0(x)} = \frac{\sqrt{|x|}}{2x(x+1)}$$

Posons $\varepsilon = -1$ lorsque $x \in I_1 =]-1,0[$ et $\varepsilon = +1$ lorsque $x \in I_2 =]0,+\infty[$, de sorte que, dans les deux cas, $x = \varepsilon|x|$ (et aussi $|x| = \varepsilon x$)

alors, $\lambda'(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2x(x+1)} = \frac{\sqrt{|x|}}{2\varepsilon|x|(x+1)} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|x|}(x+1)}$

Sur l'intervalle $I_1 =]-1,0[$:

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(x+1)}$$

On a affairé à une intégrale abélienne du première espèce.

On l'intègre par le changement de variable $u = \sqrt{-x}$, $\quad x = -u^2$, $\quad dx = -2udu$

$$\lambda(x) = -\int \frac{1}{2\sqrt{-x}(x+1)}dx = -\int \frac{-2udu}{2u(1-u^2)} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|$$

donc une solution particulière de (E) sur I_1 est :

$$y_1(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| \frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}$$

et la solution générale de (E) est :

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + Ay_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| \frac{(x+1)}{\sqrt{-x}} + A\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}} \quad \text{où } A \text{ est une constante réelle.}}$$

Sur l'intervalle $I_2 =]0,+\infty[$:

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

C'est encore une intégrale abélienne du première espèce.

On l'intègre par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, $\quad x = u^2$, $\quad dx = 2udu$

$$\lambda(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2udu}{2u(1+u^2)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arctan}(u) = \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$$

donc une solution particulière de (E) sur I_2 est :

$$y_1(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$$

et la solution générale de (E) est :

$$\boxed{y(x)=y_1(x)+Ay_0(x)=\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\text{Arctan}(\sqrt{x})+A\frac{(x+1)}{\sqrt{x}} \quad \text{où } A \text{ est une constante réelle.}}$$

• Recherchons les solutions de (E) sur l'intervalle $]-1,+\infty[$:

Soit f une telle solution. Alors elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et est solution de (E) sur I_1 et sur I_2 : donc il existe $A\in\mathbb{R},\forall x\in I_1=]-1,0[,\ f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}+A\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}=\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|+A\right)$

et il existe $B\in\mathbb{R},\forall x\in I_2=]0,+\infty[,\ f(x)=\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\text{Arctan}(\sqrt{x})+B\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}=\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\left(\text{Arctan}\sqrt{x}+B\right)$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|+A\right)=A$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}=+\infty$ donc, pour que $f(x)$ ait une limite finie quand $x\to 0^-$, il FAUT que $A=0$.

Réciproquement, si $A=0$, $f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|\underset{x\to 0^-}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}-1\right)$

$$f(x)\underset{x\to 0^-}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{-x}}\left(\frac{(1+\sqrt{-x})-(1-\sqrt{-x})}{1-\sqrt{-x}}\right)=\frac{1}{1-\sqrt{-x}}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}1$$

En posant $f(0)=1$, la fonction prolongée sera continue à gauche en 0.

Par ailleurs, si $B\neq 0$, $f(x)=\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\left(\text{Arctan}\sqrt{x}+B\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{B}{\sqrt{x}}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\infty$

Donc, pour que f soit continue à droite en 0, il FAUT que $B=0$.

Réciproquement, si $B=0$, $f(x)=\frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\left(\text{Arctan}\sqrt{x}\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

donc, dans ce cas, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=1=f(0)$ et la fonction f est aussi continue à droite en 0. Elle est donc continue en 0.

Pour l'instant, on a montré qu'il y avait une seule solution possible de (E) sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, la fonction f définie par :

$$\boxed{\begin{cases}\forall x\in I_1=]-1,0[,\ f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{\sqrt{-x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|\\ f(0)=1\\ \forall x\in I_2=]0,+\infty[,\ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}\text{Arctan}\sqrt{x}\end{cases}}$$

On a vérifié que f ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

Il resterait encore à vérifier que f est dérivable en 0

CCP

Exercice 1 : Etant donnés $(a_1,a_2,...,a_n)$ et $(b_1,b_2,...,b_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$,

étudier les matrices orthogonales de la forme $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \dots & 0\\ b_1 & 0 & a_2 & & \vdots\\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & a_n\\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

On précisera le nombre de solutions trouvées.

Exercice 2 : Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

SOLUTION :

Exercice 1 :

Rappelons qu'une matrice réelle A est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si ses lignes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

• **Analyse :**

Supposons que la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \dots & 0\\ b_1 & 0 & a_2 & & \vdots\\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & a_n\\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0\end{pmatrix}$ soit orthogonale.

alors, sa première colonne est unitaire, donc $b_1=\pm1$, sa première ligne est unitaire, donc $a_1=\pm1$,

La deuxième colonne est unitaire, donc $a_1^2+b_2^2=1$, donc $b_2=0$ puisque $a_1^2=1$

La deuxième ligne est unitaire, donc $b_1^2+a_2^2=1$, donc $a_2=0$ puisque $b_1^2=1$

La troisième colonne est unitaire, donc $a_2^2+b_3^2=1$, donc $b_3=\pm1$ puisque $a_2=0$

La troisième ligne est unitaire, donc $b_2^2+a_3^2=1$, donc $a_3=\pm1$ puisque $b_2=0$

et par récurrence, on montre que tous les a_i et b_i d'indices pairs sont nuls, tous les a_i et b_i d'indices impairs valent ± 1.

- Si $n = 2p$ est pair, on aboutit donc aux égalités $a_n = a_{2p} = 0$, et $b_n = b_{2p} = 0$, ce qui est incompatible avec la condition que les dernières ligne et colonne doivent être unitaires.

Donc, si n est pair, il n'existe aucune matrice orthogonale du type étudié.

- Si $n = 2p - 1$ est pair, on aboutit donc aux égalités $a_n = a_{2p-1} = \pm 1$, et $b_n = b_{2p-1} = \pm 1$, ce qui est compatible avec la condition que les dernières ligne et colonne doivent être unitaires.

• **Analyse :**

On a vu que si n est pair, il n'existe aucune matrice orthogonale du type étudié.

Supposons que n soit impair, $n = 2p - 1$.

Alors, d'après l'analyse, A est nécessairement une matrice diagonale par blocs, de la forme

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2p}(\mathbb{R}) \text{ où les } B_i \text{ sont des matrices 2-2 de la forme } \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire que pour tout $i, B_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

En examinant les colonnes d'une telle matrice, on voit clairement qu'elles sont unitaires (car chaque colonne ne contient qu'un seul terme non nul, égal à ± 1) et deux à deux orthogonales (car les termes non nuls sont décalés d'une colonne à l'autre). Les matrices du type indiqué sont donc solutions.

Il y a $2^{2p} = 2^{n+1}$ matrices orthogonales du type étudié.

Exercice 2 :

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ Le rayon de convergence est infini. (immédiat par le ctitère de d'Alembert)

$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + ...$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$

S est la solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y' + y = e^x$

qui vérifie les conditions initiales : $\begin{cases} S(0) = 1 \\ S'(0) = 0 \end{cases}$

On résoud cette équation différentielle, soit "à la main" (équadiff. du second ordre linéaire à coeff. constants et second membre exponentiel)

>equadif:=diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+y(x)=exp(x);
s:=dsolve({equadif, y(0)=1, D(y)(0) =0},y(x));

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

CCP

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ x \ln x\ y' - (1 + x^2 \ln x)y = e^{\frac{x^2}{2}}$

Exercice 2 : $E = \mathbb{R}_2[X]$. Lorsque $P(X) = \sum_{k=0}^{2} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{2} b_i X^i$, $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_i b_i$

1- Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$

2 - On définit $\mathcal{H} = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$

a) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel de E, et que le système $((X - 1), (X - 1)^2)$ en est une base.

b) Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{H}$

c) Calculer le projeté de X sur $\mathcal{H}$

d) Calculer $d(X, \mathcal{H})$

SOLUTION :

Exercice 1 : (E) est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, dont l'équation homogène associée est $(E_0)\ :\ \underbrace{x \ln x}_{a(x)}\ y' \underbrace{-(1 + x^2 \ln x)}_{b(x)} y = 0$

La fonction a est définie et continue sur $]0, +\infty[$, et s'annule en 1. La fonction b est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On fera l'étude des solutions sur $I_1 =]0, 1[$ et sur $I_2 =]1, +\infty[$.

• Résolution de (E_0) :

$$\int \frac{-b(x)}{a(x)}dx = \int \frac{1+x^2\ln x}{x\ln x}dx = \int \left(\frac{1}{x\ln x}+x\right)dx = \ln|\ln x| + \frac{x^2}{2}$$

Sur I_1 et sur I_2, la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} = \lambda e^{\ln|\ln x| + \frac{x^2}{2}} = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}|\ln x| = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}}\ln x$$

• Résolution de (E) : Notons $y_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\ln x$ et appliquans la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution particlière y_1 de l'équation complète (E).

Pour cela, on recherche y_1 de la forme $y_1(x) = \lambda(x)y_0(x)$ où λ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I_1 ou I_2 :

$\forall x \in I_k, y_1'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$

y_1 est solution de (E) sur I_k si et seulement si :

$$\forall x \in I_k, x\ln x\ (\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)) - (1+x^2\ln x)\lambda(x)y_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\iff \forall x \in I_k, x\ln x\ \lambda'(x)y_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x\ln x\ y_0(x)} = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

$$\iff \forall x \in I_k,\ \lambda(x) = \frac{-1}{\ln x}$$

d'où $y_1(x) = \lambda(x)y_0(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} + cte$

une solution particulière de (E) est : $y_1(x) = -e^{\frac{x^2}{2}}$

$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est : } y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}\ln x - e^{\frac{x^2}{2}},\ \ \lambda \in \mathbb{R}}$

Exercice 2 : 1- On vérifie sans difficulté que φ est bilineaire et symétrique.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{2} a_i X^i \in \mathbb{R}_2[X]$. $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{2} a_i^2 \geqslant 0$

L'égalité $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{2} a_i^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0$ entraîne que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ donc que $P = 0$

φ est donc une forme bilineaire et symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire sur (E)

2 - a) L'application g définie sur (E) par : $\forall P \in E, g(P) = P(1)$ est une forme linéaire (vérification de la linéarité sans difficulté)

Alors $\mathcal{H} = \ker g$ est un sous espace de (E). On sait même que c'est un hyperplan de (E).

Donc $\dim(E) = 3 - 1 = 2$

Les polynômes $X-1$ et X^2-1 sont clairement dans $\mathcal{H}$ (ils s'annulent au point 1). Ils ne sont pas colinéaires, donc ils forment un système libre, qui possède 2 éléments. Ils forment donc une base de $\mathcal{H}$ puisque $\dim(\mathcal{H}) = 2$.

b) Orthogonalisons la base $((X-1),(X-1)^2)$ par le procédé de Schmitt :

$$\begin{cases} Q_1(X) = X-1 \\ Q_2(X) = (X^2-1) + \alpha Q_1 \end{cases}$$

$$\varphi(Q_1,Q_2) = 0 = \varphi(Q_1,(X^2-1)+\alpha Q_1) = \varphi(Q_1,(X^2-1)) + \alpha\varphi(Q_1,Q_1)$$

$$= \varphi(X-1,X^2-1) + \alpha\varphi(X-1,X-1) = 1 + 2\alpha \text{ donc } \alpha = -\frac{1}{2}$$

et $Q_2(X) = (X^2-1) + \alpha Q_1 = X^2 - 1 - \frac{1}{2}(X-1) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$

Il reste à normer les vecteurs obtenus :

$$\|Q_1\| = \sqrt{\varphi(Q_1,Q_1)} = \sqrt{\varphi(X-1,X-1)} = \sqrt{2}$$

$$\|Q_2\| = \sqrt{\varphi(Q_2,Q_2)} = \sqrt{\varphi(X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{2}, X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{2})} = \sqrt{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$\boxed{\text{Une base orthonormée de } (E) \text{ est } (U_1,U_2) = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}(X-1)\ ,\ \sqrt{\tfrac{2}{3}}(X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{2}))}$

c) Puisque (U_1,U_2) est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, le projeté orthogonal de X est :

$$p(X) = \varphi(U_1,X)U_1 + \varphi(U_2,X)U_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(X-1)) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}(X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{2})\right)$$

$$p(X) = \tfrac{1}{2}(X-1) - \tfrac{1}{3}(X^2-\tfrac{1}{2}X-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3}X^2 + \tfrac{2}{3}X - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{3}(X^2-2X+1)$$

$\boxed{p(X) = -\tfrac{1}{3}(X^2-2X+1)}$

d) $d(X,\mathcal{H}) = \|X - p(X)\| = \|X + \frac{1}{3}(X^2-2X+1)\| = \|\frac{1}{3}(X^2+X+1)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{d(X,\mathcal{H}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}}$

CCP

Exercice 1 : Etudier $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$

Exercice 2 : A et B sont deux matrices carrées réelles d'ordre n. A possède n valeurs propres distinctes.

a) Montrer que $A.B = B.A \iff$ tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

b) Montrer que $A.B = B.A \iff \exists(\alpha_0, \alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ B = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$

SOLUTION :

Exercice 1 : Posons $\forall n \geqslant 2, \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

$\forall n \geqslant 2, \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = xe^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$

$n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = xe^{-x}$

La suite de fonctions $(u_n(\ ))_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur le segment $[0,1]$ vers la fonction $g : x \mapsto xe^{-x}$

• La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave, car sa dérivée seconde ,$u \mapsto \frac{-1}{(1+u)^2}$ est négative sur $]-1, +\infty[$

La courbe représentative de la fonction se situe en dessous de sa tangente en tout point.

donc $\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leqslant u$

On en déduit que $\forall n \geqslant 2, \forall x \in [0,1],\ \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant -\frac{x}{n}$

$\Longrightarrow \forall n \geqslant 2, \forall x \in [0,1],\ n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant -x$

$\Longrightarrow \forall n \geqslant 2, \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant xe^{-x}$

La fonction $x \mapsto xe^{-x}$ étant intégrable sur le segment $[0,1]$ car continue, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(u_n(\ ))_{n\geqslant 2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx$$

En intégrant par parties, $\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$

Finalement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}}$

Exercice 2 : A et B sont deux matrices carrées réelles d'ordre n. A possède n valeurs propres réelles distinctes.

a) Puisque $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres réelles distinctes, A est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont simples, et chaque sous espace propre est de dimension 1.

• Soit V un vecteur propre de A, associé à une certaine valeur propre λ : $V \in \mathbb{R}^n - \{0\}, A.V = \lambda V$

alors $A.B.V = B.A.V = B.\lambda V = \lambda B.V$

L'égalité $A.(B.V) = \lambda(B.V)$ montre que $B.V$ appartient au sous-espace propre $E_A(\lambda)$, qui est une droite vectorielle, engendrée par V.

Donc $\exists \mu \in \mathbb{R},\ B.V = \mu V$, ce qui montre que $\boxed{V \text{ est un vecteur propre de la matrice } B.}$

Voir paragraphe 5, ex 3.1 chapitre "diagonalisation", en passant aux endomorphismes associés

CCP **30mn préparation + 30 mn au tableau**

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont elles semblables ?

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{1+k^2}$

1- $\sum u_k$ converge-t-elle ?

2- On pose $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

SOLUTION :

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que A et B ont même rang (égal à 2), même trace (égale à 0), même déterminant (nul), mais cela ne suffit pas pour affirmer que ces deux matrices sont semblables.

Notons respectivement f et g les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et B.

Si $e_1, e_2, e_3, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors :

$f(e_1) = f(e_2) = 0,\ f(e_3) = e_2\ f(e_4) = e_3$

cela entraîne que $f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0,\ f^2(e_3) = f(e_2) = 0,\ f^2(e_4) = f(e_3) = e_2$

$g(e_1) = g(e_3) = 0,\ g(e_2) = e_1\ g(e_4) = e_3$

cela entraîne que $g^2(e_1) = g^2(e_3) = 0,\ g^2(e_2) = g(e_1) = 0,\ g^2(e_4) = f(e_3) = 0$

L'application g et par conséquent la matrice B sont nilpotentes d'ordre 2, l'application f ne l'est pas, et la matrice B non plus. A et B ne peuvent donc pas être la matrice du même endomorphisme dans deux bases différentes.

$\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables.}}$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{1+k^2}$

1- L'équivalence $u_k = \dfrac{1}{1+k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ montre que la série $\sum u_k$ converge.

2- On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{1+(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+k^2}$

$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+k^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

$$\Longrightarrow u_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant u_k$$

$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant u_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1) \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n) = \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

de là on déduit que $\sum |a_n x^n|$ converge si et seulement si $\sum |\frac{x^n}{n}|$ converge. Les deux séries entières ont même rayon de convergence, à savoir 1

CCP

Exercice 1 : On définit une fonction f par l'égalité : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$

Etudier le domaine de définition de f et calculer $f(x)$

Exercice 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

Calculer son polynôme caractéristique.

A quelle condition sur ce polynôme est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?.

SOLUTION :

Exercice 1 : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n = x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + 4x^4 + \frac{x^5}{5} + ...$

C'est une série entière, qui diverge grossièrement pour $x = 1$. Son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1.

La série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 (et pour somme $-\ln(1-x)$). Elle converge donc absolument pour tout x tel que $|x| < 1$

La série entière $\sum nx^n$ a pour rayon de convergence 1 (c'est x multiplié par la dérivée de la série $\sum x^n$ dont le rayon vaut 1). Elle converge donc absolument pour tout x tel que $|x| < 1$

Finalement, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$, comme somme des deux précédentes. Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1. En fin de compte, ce rayon vaut 1.

Puisque la série diverge grosièrement en -1 et en 1, son domaine de définition est $\boxed{\mathscr{D}_f =]-1, 1[}$

• $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=0,1}^{+\infty} 2k\, x^{2k}$

Rappelons que $\forall x \in]-1, 1[, \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2k}=-\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x^2}{(1-x)^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Par ailleurs, $\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ et par application du théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=0,1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad \sum_{k=0,1}^{+\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}kx^{2k}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$$

Finalement, $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}$

Exercice 2 : $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{pmatrix}$

$\chi_A(X)=X^3-cX^2-bX-a$ (calcul immédiat)

Notons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes)

On sait que $\dim(E_A(\lambda_i))=3-\text{rg}(A-\lambda_iI_3)$

Or $A-\lambda_iI_3=\begin{pmatrix}-\lambda_i&1&0\\0&-\lambda_i&1\\a&b&c-\lambda_i\end{pmatrix}$ est de rang 2 car les deux dernières colonnes sont linéairement indépendantes. Donc $\dim(E_A(\lambda_i))=1$

Chaque sous espace propre est de dimension 1. La somme des dimensions des sous espaces propres est donc égale au nombre de valeurs propres distinctes. A est diagonalisable si et seulement si la somme de ces dimensions est égale à 3, c'est à dire si et seulement si $\chi_A(X)$ admet 3 racines distinctes.

$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ si et seulement si } \chi_A(X) \text{ et } {\chi_A}'(X) \text{ n'ont pas de racine commune.}}$

CCP

Exercice 1 : Pour tout entier naturel n, on définit $a_n=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

1- Montrer que $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$

2- Montrer que la série $\sum(-1)^na_n$ converge.

3- Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_k=\int_0^1\frac{2}{3+t^2}dt+2(-1)^n\int_0^1\frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2}dt$

En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^ka_k$

Exercice 2 : $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y=2x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminer la matrice de la symétrie orthognale par rapport à $\mathcal{D}$ dans la base canonique.

SOLUTION :

Exercice 1 : 1- Pour tout entier n, la fonction $u_n:t\mapsto\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ est polynomiale donc continue et intégrable sur le segment $[0,1]$. Chaque terme a_n est donc défini.

$\forall t\in[0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}u_n(t)=0$ (suite géométrique de raison <1)

et $\lim_{n\to+\infty}u_n(1)=1$

La suite de fonctions $(u_n(\ ))$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $v:t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0,1[\\1&\text{si } t=1\end{cases}$

La domination : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,1],|u_n(x)|\leqslant 1$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1u_n(t)dt=\int_0^1v(t)dt=0$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}a_n=0}$

2- La suite $((-1)^na_n)$ est alternée et de limite nulle.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |a_{n+1}|-|a_n|=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}dt-\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt=\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\left(\frac{1+t^2}{2}-1\right)dt$$

$$=\int_0^1\underbrace{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)}_{\leqslant 0}dt\leqslant 0$$

La suite $(|(-1)^na_n|)$ est donc décroissante.

La sréie $\sum(-1)^na_n$ satisfait au critère de Leibniz des séries alternées. Elle converge donc.

3- Pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^k\right) dt$

en rappelant que si $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, $1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \int_0^1 \frac{1-\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1+t^2}{2}}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}}dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1+t^2}{2}}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}dt + 2(-1)^n \int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2}dt$$

La majoration $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2}dt \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt = u_{n+1}$ et le résultat de la première question permettent d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2}dt\right) = 0$

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Exercice 2 : Le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. est un vecteur unitaire de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$.

En prenant $v = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la couple (u, v) forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. (muni de sa structure euclidienne canonique)

Notons s la symétrie orthognale par rapport à $\mathcal{D}$. Dans la base (u, v), la matrice de s est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1 = (u, v)$ est $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Puisque P est une matrice orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$

D'après la formule de changement de base, la matrice de s dans l la base $\mathcal{B}_0$ est :

$A = P.B.P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{La matrice de } s \text{ dans la base canonique } \mathcal{B}_0 \text{ est : } A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

Centrale - Supelec **maths 1**

Exercice 1 : (u_n) est une suite réelle de limite nulle. a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c \neq 0$

Montrer que : $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum(au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2})$ converge

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\text{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{x}{\text{Arctan}(nx)}dx\right)^n$

SOLUTION :

Exercice 1 : (u_n) est une suite réelle de limite nulle. a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c \neq 0$

Si la série $\sum u_n$ converge, les séries $\sum u_{n+1}$ et $\sum u_{n+2}$ convergent aussi, et par combinaison linéaire, $\sum(au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2})$ converge également.

Réciproquement, supposons que la série $\sum(au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2})$ converge

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(au_k + bu_{k+1} + cu_{k+2}) = a\sum_{k=0}^{n}u_k + b\sum_{k=0}^{n}u_{k+1} + c\sum_{k=0}^{n}u_{k+2} = a\sum_{k=0}^{n}u_k + b\sum_{k=1}^{n+1}u_k + c\sum_{k=2}^{n+2}u_k$$

$$= (a+b+c)\sum_{k=0}^{n}u_k - bu_0 + bu_{n+1} - cu_0 - cu_1 + cu_{n+1} + cu_{n+2}$$

donc $\displaystyle(a+b+c)\sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{k=0}^{n}(au_k + bu_{k+1} + cu_{k+2}) + bu_0 + cu_0 + cu_1 - bu_{n+1} - cu_{n+1} - cu_{n+2}$

Puisque par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ a bien une limite finie quand $n \to +\infty$, et qui vérifie :

$$(a+b+c)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty}(au_k + bu_{k+1} + cu_{k+2}) + bu_0 + cu_0 + cu_1$$

On a bien prouvé la convergence de la série $\sum u_n$

Exercice 2 : • $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{\text{Arctan}(x)} - \dfrac{2x}{\pi} = \dfrac{2x\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)\right)}{\pi\text{Arctan}(x)} = \dfrac{2x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\pi\text{Arctan}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x\frac{1}{x}}{\pi\frac{\pi}{2}} = \dfrac{4}{\pi^2}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\text{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}}$$

• Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{\text{Arctan}(nx)}dx = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\frac{u}{n}}{\text{Arctan}(u)}\frac{du}{n} = \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{u}{\text{Arctan}(u)}du$$

Le résultat de la question précédente s'écrit aussi :

$$\frac{u}{\text{Arctan}(u)} = \frac{2u}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} + \alpha(u) \text{ avec } \lim_{u\to+\infty}\alpha(u) = 0$$

donc $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{\text{Arctan}(nx)}dx = \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\left(\frac{2u}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} + \alpha(u)\right)du = \frac{1}{n^2}\left[\frac{u^2}{\pi} + \frac{4u}{\pi^2}\right]_{n\pi}^{2n\pi} + \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\alpha(u)du$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{3n^2\pi^2}{\pi} + \frac{4n\pi}{\pi^2} + \int_{n\pi}^{2n\pi}\alpha(u)du\right) = 3\pi + \frac{4}{n\pi} + \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\alpha(u)du$$

Puisque $\lim\limits_{u\to+\infty}\alpha(u) = 0$,

$$\left|\int_{n\pi}^{2n\pi}\alpha(u)du\right| \leqslant \int_{n\pi}^{2n\pi}|\alpha(u)|du \leqslant \int_{n\pi}^{2n\pi}\sup_{t\in[n\pi,+\infty[}|\alpha(t)|du = n\pi.\sup_{t\in[n\pi,+\infty[}|\alpha(t)| = o(n)$$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sup\limits_{t\in[n\pi,+\infty[}|\alpha(t)|) = 0$)

ainsi, $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x}{\text{Arctan}(nx)}dx = 3\pi + \frac{4}{n\pi} + \frac{1}{n^2}o(n) = 3\pi + \frac{4}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

• Notons $u_n = \left(\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x}{\text{Arctan}(nx)}dx\right)^n$

d'après la calcul qui précède, $u_n = \left(\dfrac{1}{3\pi}\left(3\pi + \dfrac{4}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)^n = \left(1 + \dfrac{4}{3n\pi^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

$\ln(u_n) = n\ln\left(1 + \dfrac{4}{3n\pi^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{4}{3n\pi^2} = \dfrac{4}{3\pi^2}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \dfrac{4}{3\pi^2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{4}{3\pi^2}} = \exp\left(\dfrac{4}{3\pi^2}\right)}$

Centrale - Supelec avec MAPLE

On note $E = \mathbb{C} \cup \infty$ où ∞ représente un élément n'appartenant pas à $\mathbb{C}$.

L'application f est définie sur E par :

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} \text{ si } z \notin \{-i,\infty\}\ ,\ f(-i) = \infty,\ f(\infty) = 1$$

Calculer $f_o f$ et $f_o f_o f$

Déterminer l'image par f de $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Déterminer l'image par f de $\Delta \cup \{\infty\}$ où Δ est la droite d'équation $y = 1$

Déterminer l'image par f de $\mathcal{D} \cup \{\infty\}$ où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x = 0$

SOLUTION :

Lorsque z est complexe, $f(z)$ est défini si et seulement si $z \neq -i$

$$f(z) = -i \iff \frac{z-i}{z+i} = -i \iff z - i = -i(z+i) \iff z(1+i) = 1+i \iff z = 1$$

• $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i, 1\}, f(z) \in \mathbb{C} - \{-i\},\ f(f(z))$ est défini et $f(f(z)) = \dfrac{\frac{z-i}{z+i} - i}{\frac{z-i}{z+i} + i}$

$$f(f(z)) = \frac{z - i - i(z+i)}{z - i + i(z+i)} = \frac{z(1-i) + 1 - i}{z(1+i) - 1 - i} = \frac{(1-i)(z+1)}{(1+i)(z-1)} = \frac{(1-i)^2(z+1)}{2(z-1)} = -i\,\frac{z+1}{z-1}$$

$f(f(-i)) = f(\infty) = 1$ et $f(f(1)) = f(-i) = \infty$

• $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i, 1\}, f(f(z)) = -i \iff \frac{z+1}{z-1} = 1 \iff z - 1 = z + 1$, ce qui est impossible, donc $f(f(f(z)))$ est bien défini.

et dans ce cas, $f(f(f(z))) = f\left(-i\ \frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{-i\ \frac{z+1}{z-1} - i}{-i\ \frac{z+1}{z-1} + i} = \frac{(z+1)+(z-1)}{(z+1)-(z-1)} = z$

par ailleurs, $f^3(-i) = f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$

$f^3(1) = f(\infty) = 1$ et $f^3(\infty) = f(-i) = \infty$

Finalement, $\forall z \in E,\ f(f(f(z))) = z$

Remarque : cette propriété montre que f est une bijection de E sur E et que $f^{-1} = f^2$

- Soit $z \in U$. $\exists t \in]-\pi, \pi], z = e^{it}$

$$f(z) = \frac{e^{it} - i}{e^{it} + i} = \frac{(e^{it} - i)(e^{-it} - i)}{(e^{it} + i)(e^{-it} - i)} = \frac{1 - i(e^{it} + e^{-it}) - 1}{1 - i(e^{it} - e^{-it}) + 1} = \frac{-i(2\cos t)}{2 - i(2i\sin t)} = -i\frac{\cos t}{1 + \sin t}$$

Donc $f(z)$ est un imaginaire pur, $f(z) \in i\mathbb{R}$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\cos t}{1 + \sin t}$ est 2π- périodique, on peut restreindre son étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, g'(t) = \frac{-\sin t(1 + \sin t) - \cos^2(t)}{(1 + \sin t)^2} = \frac{-1 - \sin t}{(1 + \sin t)^2} = \frac{-1}{1 + \sin t} < 0$$

La fonction g est continue et décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Pour étudier la limite en $-\frac{\pi}{2}$, faisons le changement de variable $t = -\frac{\pi}{2} + u$

$$\frac{\cos t}{1 + \sin t} = \frac{\cos(u - \frac{\pi}{2})}{1 + \sin(u - \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(u)}{1 - \cos(u)} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{u}{\frac{u^2}{2}} = \frac{2}{u} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$$

On en déduit que $\lim\limits_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} g(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to \frac{3\pi}{2}^-} g(t) = +\infty$

g induit une bijection continue et décroissante de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

L'image de U par l'application f est donc l'ensemble des imaginaisres purs $i\mathbb{R}$

Remarque : autre calcul (solution due à Valentin N. auquel devront être réversés les droits d'auteur)

$\forall z \in U$. $\exists t \in]-\pi, \pi], z = e^{it}$

$$f(z) = \frac{e^{it} - i}{e^{it} + i} = \frac{e^{it} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{it} + e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{i\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{2i\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = i\ \tan\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Quand t décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$,

$\frac{t}{2}$ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}$ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ décrit $\mathbb{R}$.

Et puisque $f(z) = i\ \tan\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$, l'image de U par l'application f est donc l'ensemble des imaginaisres purs $i\mathbb{R}$

- Soit $z \in \Delta \cup \{\infty\}$

Si $z \in \Delta$, z est de la forme $x + i$ où x est un réel quelconque.

alors $f(z) = f(x + i) = \dfrac{x}{x + 2i} = \dfrac{x(x - 2i)}{x^2 + 4} = \dfrac{x^2}{x^2 + 4} - i\dfrac{2x}{x^2 + 4}$

Utilisons MAPLE pour le tracé de la courbe de paramétrisation $t \mapsto M(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \frac{t^2}{t^2+4} \\ y(t) = \frac{2t}{t^2+4} \end{array}\right.$

plot([t*t/(t*t+4),-2*t/(t*t+4),t=-infinity..infinity],scaling=constrained);

Elle nous incite à penser que l'image étudiée est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$

Prouvons le par le calcul : $\left(\frac{x^2}{x^2+4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)^2 = \frac{x^4}{(x^2+4)^2} - \frac{x^2}{x^2+4} + \frac{1}{4} + \frac{4x^2}{(x^2+4)^2}$

$$= \frac{4x^4 - 4x^2(x^2 + 4) + (x^2 + 4)^2 + 16x^2}{4(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{4}$$

Donc l'image de Δ par f est incluse dans le cecle $\mathcal{C}$ de centre $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, l'étude des variations de la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \frac{t^2}{t^2+4} \\ y(t) = \frac{2t}{t^2+4} \end{array}\right.$ montre que l'image est le cercle en entier, point $B(1, 0)$ exclu.

Mais, puisque $f(\infty) = 1$, $\boxed{\text{l'image de } \Delta \cup \{\infty\} \text{ par } f \text{ est le cercle } \mathcal{C} \text{ en entier.}}$

- Soit $z \in \mathcal{D} \cup \{\infty\}$

Si $z \in \mathcal{D} - \{-i\}$, z est de la forme iy où y est un réel quelconque.

$$f(z) = f(iy) = \frac{iy - i}{iy + i} = \frac{y - 1}{y + 1} = \frac{y + 1 - 2}{y + 1} = 1 - \frac{2}{y + 1}$$

Quand y décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\frac{2}{y+1}$ décrit $\mathbb{R}^*$ et $f(iy)$ décrit $\mathbb{R} - \{1\}$

Si $z = -i$, $f(z) = f(-i) = \infty$, si $z = \infty$, $f(z) = 1$

Finalement, $\boxed{\text{l'image de } \mathcal{D} \cup \{\infty\} \text{ par } f \text{ est l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des réels en entier.}}$

Centrale-Supelec **avec MAPLE**

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels la série de terme général

$u_n = (n^7 + 3n^6)^{1/7} - \sqrt[3]{P(n)}$ soit convergente.

Déterminer le polynôme pour lequel la convergence est la plus rapide, et donner alors un équivalent du reste.

SOLUTION :

$(n^7+3n^6)^{1/7} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Pour que la différence $(n^7+3n^6)^{1/7} - \sqrt[3]{P(n)}$ ne soit pas de limite infinie, il faut que $\sqrt[3]{P(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ pour compenser. Il faut donc que P soit de degré 3 et de terme dominant X^3, c'est à dire qu'il soit de la forme X^3+aX^2+bX+c

>asympt((n^7+3*n^6)^(1/7)-(n*n*n+a*n*n+b*n+c)^(1/3),n,2);

$$\frac{3}{7}-\frac{a}{3}+\frac{\left(-\frac{27}{49}-\frac{b}{3}+\frac{a^3}{9}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ce développement asymptotique montre qu'il faut $\dfrac{3}{7}-\dfrac{a}{3}=0$ soit $a=\dfrac{9}{7}$ pour que u_n ait une limite nulle (condition nécessaire de convergence de la série)

Remplaçons a par $\frac{9}{7}$et relançons le calcul précédent :

asympt((n^7+3*n^6)^(1/7)-(n*n*n+9/7*n*n+b*n+c)^(1/3),n,3);

$$\frac{\left(-\frac{18}{49}-\frac{b}{3}\right)}{n}+\frac{\left(\frac{306}{343}-\frac{c}{3}+\frac{2b}{7}\right)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Si $-\dfrac{18}{49}-\dfrac{b}{3}\neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(-\frac{18}{49}-\frac{b}{3}\right)}{n}$ et la série diverge.

Il faut donc que $\dfrac{18}{49}+\dfrac{b}{3}=0$ c'est à dire que $b=-\dfrac{54}{49}$ pour que la série converge.

Remplaçons b par $-\frac{54}{49}$ et relançons le calcul précédent :

asympt((n^7+3*n^6)^(1/7)-(n*n*n+9/7*n*n-54/49*n+c)^(1/3),n,3);

$$\frac{\left(\frac{198}{343}-\frac{c}{3}\right)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

dans tous les cas, on a $u_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum u_n$ converge.

En résumé,

$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } P \text{ est de la forme } P(X)=X^3+\frac{9}{7}X-\frac{54}{49}X+c}$

• Le dernier calcul montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(\frac{198}{343}-\frac{c}{3}\right)}{n^2}$ si $\frac{198}{343}-\frac{c}{3}\neq 0$ c'est à dire si $c\neq\frac{594}{343}$

mais que $u_n=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $c=\frac{594}{343}$

$\boxed{\text{La convergence sera la plus rapide si et seulement si } P(X)=X^3+\frac{9}{7}X-\frac{54}{49}X+\frac{594}{343}}$

Reprenons le calcul de développement asymptotique avec $c=\frac{594}{343}$:

asympt((n^7+3*n^6)^(1/7)-(n*n*n+9/7*n*n-54/49*n+594/343)^(1/3),n,4);

Le calcul montre qu'alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2673}{2401\,n^3}$

• Le théorème de sommation des restes de deux séries positives convergentes équivalentes permet d'affirmer, puisque que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2673}{2401\,n^3}$, on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2673}{2401}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$

(voir le corrigé "Suites et séries numériques" section 0.8 page 21)

Puis la méthode de comparaison séries-intégrales permet de montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2(n+1)^2}$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2673}{4802\,n^2}}$

Centrale maths I

Exercice 1 : $E=\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$

A toute fonction $f\in E$, on associe la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(0)=f(0) \\ \forall x>0,\ g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \end{cases} \quad \text{on note alors } g=u(f)$$

1- Montrer que $u\in\mathcal{L}(E)$

2- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

3- Montrer que u induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ diagonalisable.

SOLUTION :

Exercice 1 : 1- En tant que primitive d'une fonction continue, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. En tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'<u>ouvert</u> $]0,+\infty[$. (sur l'ouvert seulement à cause du terme $\frac{1}{x}$) Elle est en particulier continue sur cet ouvert.

Pour $x \in [0,+\infty[$, notons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. On vient de dire que F était $\mathcal{C}^1$ sur le fermé $[0,+\infty[$.

$\forall x > 0, g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$ (car $F(0) = 0$)

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0)$

On a ainsi montré que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = f(0) = g(0)$, ce qui montre que g est continue au point 0, et finalement sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$.

Donc $g \in E$.

- On vérifie sans dificulté que u est linéaire. u est donc un endomorphisme de E : $u \in \mathcal{L}(E)$

2- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ tels que $g = u(f) = \lambda f$

alors $\begin{cases} g(0) = f(0) = \lambda f(0) & (1) \\ \forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x) & (2) \end{cases}$

- Si $\lambda = 0$, les conditions deviennent :

$\begin{cases} g(0) = f(0) = \lambda f(0) = 0 & (1) \\ \forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0 & (2) \end{cases}$

La condition (2) entraîne : $\forall x > 0,\ \int_0^x f(t)dt = 0$, et par dérivation, $\forall x > 0,\ f(x) = 0$,
la condtion (1) entraînant que $f(0) = 0$
f est nécessairement la fonction nulle ω, ce qui montre que 0 n'est pas valeur propre de u.

- Si $\lambda \neq 0$, la condition (2) entraîne : $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{\lambda\, x}\int_0^x f(t)dt$, ce qui montre que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit defonctions dérivables.

En dérivant (2) écrite sous la forme $\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, on obtient :
$\forall x > 0,\ f(x) = \lambda(f(x) + xf'(x))$
$\Longrightarrow \forall x > 0,\ (1-\lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$
donc f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(*)$: $\lambda x y' + (\lambda - 1)y = 0$
C'est une équation du premier ordre, linéaire, à coefficients constants, qui a pour solution générale :

$y(x) = Ae^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = A\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

Pour que $y(x)$ ait une limite finie quand $x \to 0^+$, il faut que $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda-\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2} \geqslant 0$, c'est à dire que $\lambda \in]0,1]$.

- Lorsque $\lambda \in]0,1[$, alors $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} A.\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = 0$

mais la condition (1) : $f(0) = \lambda f(0)$ entraîne que $f(0) = 0$ puisque $\lambda \neq 1$. la fonction

$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ A.\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ est alors continue sur $[0,+\infty[$ et appartient à E.

- Lorsque $\lambda = 1$, toute fonction constante h vérifie $u(h) = h$

En conclusion,

Sp$(u) =]0,1]$
- si $\lambda \in]0,1[$, le sous espace associé à λ est la droite vectorielle engendrée par la fonction f_λ :

$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

- si $\lambda = 1$, le sous espace associé est la droite vectorielle formée des fonctions constantes.

3- Lorsque f est la fonction polynomiale $x \mapsto x^m$, soit $g = u(f)$

alors $\begin{cases} g(0) = f(0) = 0 & (\text{si } m > 0) \\ \forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^m dt = \frac{x^m}{m+1} \end{cases}$

donc, $g(x \mapsto x^m) = x \mapsto \frac{x^m}{m+1}$ (on vérifie que la formule est encore vraie pour $m = 0$)

Par linéarité, et en confondant un polynôme avec la fonction polynôme associée, par linéarité de u,

$$u\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^k.$$

Ceci montre que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u, et que $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formé de vecteurs propres de $\widetilde{u}$, endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Sp$(\widetilde{u}) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}\}$. $\widetilde{u}$ est donc diagonalisable.

Centrale - maths I

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$

SOLUTION : • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur l'ouvert $]0,1[$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}(t\ln t) = 0$, on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 0$.

Elle est donc intégrable sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$

Par ailleurs, $f(t) = \dfrac{t\ln t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t-1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t}}$

f est donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$, tout comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$

Par additivité, la fonction f est intégrable sur le semi-ouvert $[0,1[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$ est bien définie.

• La présence du terme différentiel tdt et de t^2 nous incite dans un premier temps à diminuer le degré des calculs par le changement de variable $u = t^2$:

$tdt = \frac{1}{2}du$

$$\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\ln\sqrt{u}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln u}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}du$$

Nous allons intégrer par parties pour faire disparaitre le logarithme, ce qui oblige à se placer sur un segment sur lequel la fonction "ln" est de classe $\mathcal{C}^1$, on ne peut pas garder la borne inférieure 0 pour cela.

De même pour l'autre facteur, $\dfrac{1}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}$, qui n'est pas continue au point 1, et qui oblige à changer la borne supérieure.

• Soient a et b tels que $0 < a < b < 1$, et $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{\ln u}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}du$

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{1}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}\ln u\, du = \left[2\frac{1}{(1-u)^{\frac{1}{2}}}\ln u\right]_a^b - 2\int_a^b \frac{1}{u\sqrt{1-u}}du$$

La dernière intégrale est une intégrale abélienne du premier type : on l'intègra par le changement de variable $v = \sqrt{1-u}$, $u = 1-v^2$, $du = -2vdv$

$$\int_a^b \frac{1}{u\sqrt{1-u}}du = \int_{\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-b}} \frac{-2v}{v(1-v^2)}dv = -2\int_{\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-b}} \frac{1}{1-v^2}dv = \int_{\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-b}} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)dv$$

$$= \left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-b}} = \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-b}}{1+\sqrt{1-b}}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}}\right)$$

$$I(a,b) = 2\left(\frac{\ln b}{\sqrt{1-b}} - \frac{\ln a}{\sqrt{1-a}}\right) - 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-b}}{1+\sqrt{1-b}}\right) + 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}}\right)$$

Quand $b \to 1$, $\dfrac{\ln b}{\sqrt{1-b}} \underset{b\to 1}{\sim} \dfrac{b-1}{\sqrt{1-b}} = -\sqrt{1-b} \longrightarrow 0$

On peut passer à la limite dans l'égalité qui précède, pour $a > 0$ fixé, lorsque $b \to 1^-$:

$$I(a,1) = \frac{-2\ln a}{\sqrt{1-a}} + 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}}\right) = \frac{-2\ln a}{\sqrt{1-a}} + 2\ln(1-\sqrt{1-a}) - 2\underbrace{\ln(1+\sqrt{1-a})}_{\to \ln 2}$$

$$\frac{-2\ln a}{\sqrt{1-a}} + 2\ln(1-\sqrt{1-a}) = \frac{-2\ln a}{\sqrt{1-a}} + 2\ln\left(\frac{1-(1-a)}{1+\sqrt{1-a}}\right)$$

$$= \frac{-2\ln a}{\sqrt{1-a}} + 2\ln a - 2\ln(1+\sqrt{1-a}) = 2\ln a\left(\frac{\sqrt{1-a}-1}{\sqrt{1-a}}\right) - 2\ln(1+\sqrt{1-a})$$

Rappelons que $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$ donc $\sqrt{1-a} - 1 \underset{a\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}a$

$$2\ln a\left(\frac{\sqrt{1-a}-1}{\sqrt{1-a}}\right) \underset{a\to 0}{\sim} -a\ln a \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{a\to 0} I(a,1) = -4\ln 2$

On avait $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln u}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{4}I(0,1)$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt = -\ln(2)}$

Centrale - maths II

Exercice 1 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et E_θ l'équation : $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

1 - Résoudre l'équation E_θ

2- Montrer que l'ensemble des solutions, quand θ décrit $\mathbb{R}$, est formé de deux cercles centrés sur l'axe des imaginaires purs.

SOLUTION :

Exercice 1 : 1- L'équation E_θ : $z^2-2e^{i\theta}z+1=0$ est une équation du second degré.

Son discriminant est : $\Delta=4e^{2i\theta}-4=4e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=4e^{i\theta}\,2i\sin(\theta)=8\sin\theta\,e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

- Si $\sin\theta\geqslant 0, z=2e^{i\theta}\pm\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2}=e^{i\theta}\pm\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$
- Si $\sin\theta\leqslant 0$, alors $\sin\theta=(-\sin\theta)\,e^{-i\pi}$ et $\Delta=8(-\sin\theta)\,e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$

 alors $z=e^{i\theta}\pm\sqrt{-2\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$

2- Si $\sin\theta\geqslant 0$, les solutions sont :

$z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$ et $z_2=e^{i\theta}-\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

or $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}=1+i$

d'où $z_1=e^{i\theta}+\sqrt{\sin\theta}\,e^{i\frac{\theta}{2}}(1+i)=e^{i\theta}+\sqrt{\sin\theta}(1+i)(\cos(\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{\theta}{2})$

$z_1=\cos\theta+i\sin\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{\theta}{2})+i\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

d'où $\mathrm{Re}(z_1)=\cos\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

$\mathrm{Im}(z_1)=\sin\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

L'image du complexe $z_1(\theta)$ dans le plan est $M_1\left|\begin{array}{l} x_1(\theta)=\cos\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})\right)\\ y_1(\theta)=\sin\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})\right)\end{array}\right.$

Soit $\Omega\left|\begin{array}{l}0\\ \omega\end{array}\right.$ un point de l'axe des imaginaires.

$OM_1^2=x_1^2+(y_1-\omega)^2$

$OM_1^2=\left[\cos\theta+\sqrt{\sin\theta}(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))\right]^2+\left[\sin\theta+\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})\right)-\omega\right]^2$

$=[\cos^2\theta+\sin\theta(\underbrace{\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})}_{=1}-\underbrace{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}_{=\sin\theta})+2\cos\theta\sqrt{\sin\theta}(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))]$

$+\left[\sin^2\theta+\sin\theta\left(\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})+2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\right)+\omega^2\right.$

$+2\sin\theta\sqrt{\sin\theta}\left(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})\right)-2\omega\sqrt{\sin\theta}(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))-2\omega\sin\theta$

$=1+\sin\theta-\sin^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta$

$+2\sqrt{\sin\theta}\left(\cos\theta\cos(\frac{\theta}{2})-\cos\theta\sin(\frac{\theta}{2})+\sin\theta\cos(\frac{\theta}{2})+\sin\theta\sin(\frac{\theta}{2})\right)$

$+\omega^2-2\omega\sqrt{\sin\theta}(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))-2\omega\sin\theta$

En utilisant les formules :

$\cos\theta\cos(\frac{\theta}{2})+\sin\theta\sin(\frac{\theta}{2})=\cos(\theta-\frac{\theta}{2})=\cos(\frac{\theta}{2})$

$\sin\theta\cos(\frac{\theta}{2})-\cos\theta\sin(\frac{\theta}{2})=\sin(\theta-\frac{\theta}{2})=\sin(\frac{\theta}{2})$, on obtient :

$$\boxed{OM_1^2=1+2\sin\theta-2\omega\sin\theta+\omega^2+2\sqrt{\sin\theta}\left[(1-\omega)\cos(\frac{\theta}{2}+(1-\omega)\sin(\frac{\theta}{2}\right]}$$

On remarque alors, que si on prend $\omega=1$, soit $\Omega\left|\begin{array}{l}0\\ 1\end{array}\right.$, on obtient :

$OM_1^2=1+1=2$

Lorque $\sin\theta\geqslant 0$ ($\Longleftrightarrow$ $\theta\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$), les solutions du type $z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$ ont leur image située sur le cerche de centre $\Omega\left|\begin{array}{l}0\\ 1\end{array}\right.$ et de rayon $\sqrt{2}$

Un calcul analogue doit être fait dans le deuxième cas.

Centrale :

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par la donnée de ses trois premiers termes et de la relation de récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N},; u_{n+3}=\frac{1}{2}(u_{n+2}+u_n)$

a) Tester avec MAPLE la convergence de la suite (u_n). Peut on conjecturer son comportement asymptotique en fonction de u_0,u_1,u_2 ?

b) Montrer que la suite (u_n) converge et calculer la limite en fonction de (u_0,u_1,u_2)

SOLUTION :

a) >**n:=20;u[0]:=u0;u[1]:=u1;u[2]:=u2;**

for i from 0 to n do u[i+3]:=(u[i]+u[i+2])/2 od;

Pour y voir plus clair, on peut aussi essayer un calcul décimal approché :

Digits:=30; for i from 0 to n do u[i+3]:=(u[i]+u[i+2])/2.0 od;

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix}$

alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A.X_n$

donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n.X_0$

with(linalg):A:=matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,1/2,0,1/2]);

ep:=eigenvects(A);

La matrice A a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}, \lambda_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}$

Elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Soit (V_1, V_2, V_3) une base de vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ se décompose sur cette base :

$\exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ X_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3$

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n(aV_1 + bV_2 + cV_3) = aA^nV_1 + bA^nV_2 + cA^nV_3 = a\lambda_1^nV_1 + b\lambda_2^nV_2 + c\lambda_3^nV_3$

or $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_3^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = aV_1$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = aV_1$, il nous faut trouver aV_1, c'est à dire la première composante de $X_0 = aV_1 + bV_2 + cV_3$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

en l'écrivant compsante par composante, cela revient à résoudre le système

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{V_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{V_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{V_3} \iff \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = u_0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = u_1 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 = u_2 \end{cases}$$

A:=transpose(matrix([seq(op(ep[j][3]),j=1..3)]));

X0:=vector([u0,u1,u2]);

linsolve(A,X0);

on obtient $a = \frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = aV_1 = \left(\frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et, en prenant la première composante, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{4}u_0 + \dfrac{1}{4}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2}$

Centrale - Supelec avec MAPLE

Nature de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 4x$

Donner les équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ qui sont parallèles à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y = 2$

Avec MAPLE, tracer sur une même figure le cercle $\mathcal{C}$ et les droites solutions.

SOLUTION :

• $x^2 + y^2 = 4x \iff x^2 + y^2 - 4x = 0 \iff (x-2)^2 + y^2 = 4$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2,0)$ et de rayon $R = 2$.

• Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x = 0$

La normale en un point $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ a pour composantes $\overrightarrow{Grad}\,F(x_0,y_0) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 - 4 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 \end{array} \right.$

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y = 2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right.$

La tangente en un point $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{Grad}\,F(x_0,y_0)$ et $\overrightarrow{n}$ sont liés, $\iff \begin{vmatrix} 2x_0 - 4 & 3 \\ 2y_0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 4x_0 - 3y_0 - 8 = 0$

Un point $M_0(x_0,y_0)$ du plan appartient à $\mathcal{C}$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point est parallèle à $\mathcal{D}$ si et seulement si : $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 = 0 \\ 4x_0 - 3y_0 - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 = \frac{4x_0 - 8}{3} \\ 9x_0^2 + (4x_0 - 8)^2 - 36x_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 = \frac{4x_0 - 8}{3} \\ 25x_0^2 - 100x_0 + 64 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_0 = \frac{4}{5} \text{ ou } \frac{16}{5} \\ y_0 = \frac{4x_0 - 8}{3} \end{cases} \iff (x_0,y_0) = (\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$ ou $(x_0,y_0) = (\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$

• Un point $M(x,y)$ apartient à la tangente en $M_0(x_0,y_0)$ au cercle si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$, $\iff \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{n} = 0 \iff 3(x - x_0) + 4(y - y_0) = 0$

Les droites recherchées sont donc Δ_1 , d'équation $3(x - \frac{4}{5}) + 4(y + \frac{8}{5}) = 0 \iff 3x + 4y + 4 = 0$

et Δ_2 , d'équation $3(x - \frac{16}{5}) + 4(y - \frac{8}{5}) = 0 \iff 3x + 4y - 16 = 0$

• **>with(plots);**

implicitplot({x*x+y*y-4*x=0, 3*x+4*y+4=0, 3*x+4*y-16=0},x=-8..8, y=-8..8, scaling=constrained);

Centrale - Supelec avec MAPLE

La matrice $A=\begin{pmatrix} -8 & 1 & 5\\ 2 & -3 & -1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

Sa transposée ${}^tA$ l'est elle ?

Trouver les droites stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A

Montrer que le plan $\mathcal{P}$, d'équation $ax+by+cz=0$, est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. En déduire tous les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

SOLUTION :

• **>with(linalg):A:=matrix(3,3,[-8,1,5,2,-3,-1,-4,1,1]);**
eigenvects(A); $\quad [-2,1,\{[1,1,1]\}],[-4,2,\{[1,-1,1]\}]$

-4 est valeur propre double, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

La transposée ne l'est pas non plue. En effet, si une matrice A est diagonalisable, une égalité du type $A=P.\Delta.P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale, donne par transposition ${}^tA={}^tP^{-1}.\Delta.{}^tP$ et montre que ${}^tA$ l'est aussi.

• Une droite vectorielle $F=\mathrm{Vect}(a)$ est stable par f si et seulement si $f(a)\in F$, si et seulement si a est vecteur propre de f.

Il existe donc deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ stables par f, respectivement engendrées par les vecteurs $a_1=(1,1,1)$ et $a_2=(1,-1,1)$

• Supposons que $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ soit vecteur propre de ${}^tA$: $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ {}^tA.\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow (a\quad b\quad c).A=\lambda(a\quad b\quad c)$

Soit $V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{P}:\quad ax+by+cz=(a\quad b\quad c).\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$

$f(V)=A.\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$

$ax'+by'+cz'=(a\quad b\quad c)\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=(a\quad b\quad c).A.\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\lambda(a\quad b\quad c).\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$

donc $f(V)\in\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ est stable par f.

• Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ est stable par f.

voir Ex 6.2 page 38 chapitre "diagonalisation"

Centrale - Supelec

Montrer que les droites perpendiculaires à la directrice d'une parabole, se réfléchissent toutes sur celle-ci en passant par son foyer.

SOLUTION :

• Soient $\mathscr{D}$ la directrice et F le foyer de la parabole $\mathscr{P}$

Prenons pour origine du plan le milieu O du bi-point formé de F et du projeté K de F sur $\mathscr{D}$. Soit $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ le repère orthonormé formé d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et d'un vecteur perpendiculaire.

Dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, F a pour coordonnées $\left(0,\frac{p}{2}\right)$, $\mathscr{D}$ a pour équation $y=-\frac{p}{2}$ où p est le paramètre, c'est à dire la distance entre foyer et directrice.

Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan, et $H\left(x,-\frac{p}{2}\right)$ son projeté sur $\mathscr{D}$

$\overrightarrow{FM}\left|\begin{matrix} x\\ y-\frac{p}{2}\end{matrix}\right.\qquad \overrightarrow{HM}\left|\begin{matrix} 0\\ y+\frac{p}{2}\end{matrix}\right.$

$M\in\mathscr{P}\iff FM^2=HM^2\iff x^2+(y-\frac{p}{2})^2=(y+\frac{p}{2})^2$

$\iff x^2+y^+-py+\frac{p^2}{4}=y^++py+\frac{p^2}{4}\iff x^2=2py$

$\boxed{M\in\mathscr{P}\iff x^2=2py\iff y=\frac{x^2}{2p}}$

• Soit Δ une droite perpendiculaire à la directrice $\mathscr{D}$. Elle a une équation du type $x=a$, et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{j}$. Elle coupe la parabole $\mathscr{P}$ en un point $Q(a,\frac{a^2}{2p})$.

La parabole admet pour paramétrisation : $x \mapsto M \left| \begin{array}{c} x \\ y(x) = \frac{x^2}{2p} \end{array} \right.$

Le vecteur tangent au point M est dirigé par $\frac{d\overrightarrow{M}}{dx} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{x}{p} \end{array} \right.$ ou, en le normant, par le vecteur $\overrightarrow{\tau} \left| \begin{array}{c} \frac{p}{\sqrt{x^2+p^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} \end{array} \right.$

un vecteur normal unitaire est $\overrightarrow{\nu} \left| \begin{array}{c} -\frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} \\ \frac{p}{\sqrt{x^2+p^2}} \end{array} \right.$

Au point $Q(a, \frac{a^2}{2p})$, les vecteurs tangent et normal unitaires sont :

$\overrightarrow{\tau} \left| \begin{array}{c} \frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+p^2}} \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{\nu} \left| \begin{array}{c} -\frac{a}{\sqrt{a^2+p^2}} \\ \frac{p}{\sqrt{a^2+p^2}} \end{array} \right.$

La matrice de la réflexion par rapport à la droite dirigée par la normale $\overrightarrow{\nu}$, dans la base $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu})$ est $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu})$ est $P = \frac{1}{\sqrt{a^2+p^2}} \begin{pmatrix} p & -a \\ a & p \end{pmatrix}$

Dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la matrice de la réflexion par rapport à la droite dirigée par la normale $\overrightarrow{\nu}$ est:

$$A = P.B.P^{-1} = \frac{1}{a^2+p^2} \begin{pmatrix} p & -a \\ a & p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p & a \\ -a & p \end{pmatrix}$$

($P^{-1} = {}^tP$ puisque P est une matrice orthogonale)

$$A = \frac{1}{a^2+p^2} \begin{pmatrix} -p & -a \\ -a & p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p & a \\ -a & p \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+p^2} \begin{pmatrix} a^2-p^2 & -2ap \\ -2ap & p^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a^2-p^2}{a^2+p^2} & -\frac{2ap}{a^2+p^2} \\ -\frac{2ap}{a^2+p^2} & \frac{p^2-a^2}{a^2+p^2} \end{pmatrix}$$

La droite Δ donne par réflexion sur la parabole une droite dirigée par l'image de son vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ par la réflexion que l'on vient de calculer. Il suffit de lire la deuxième colonne de la matrice A :

$$r(\overrightarrow{j}) = -\frac{2ap}{a^2+p^2} \overrightarrow{i} + \frac{p^2-a^2}{a^2+p^2} \overrightarrow{j}$$

Le calcul du vecteur $\overrightarrow{FQ} \left| \begin{array}{c} a \\ \frac{a^2}{2p} - \frac{p}{2} \end{array} \right.$ permet de vérifier que $\overrightarrow{FQ} = -\frac{a^2+p^2}{2p} r(\overrightarrow{j})$

Ainsi la droite Δ se réflechit sur la parabole selon une droite passant par le foyer.

Centrale - Supelec

f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et décroissante, admettant une limite finie en $+\infty$

Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = f$ sont bornées.

SOLUTION :

• L'équation différentielle homogène associée à est (E_0) : $y'' + y = 0$

La solution générale de (E_0) est de la forme : $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

• Recherchons une solution particulière de l'équation complète (E) par la méthode de variation des constantes: $y(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$ où A et B sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant de plus la relation :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0$

Notons désormais C la fonction cosinus et S la fonction sinus :

$y = AC + BS \qquad y' = \underbrace{A'C + B'S}_{=0} - AS + BC \qquad y'' = -AC - BS - A'S + B'C$

y est solution de $(E) \iff y'' + y = f \iff -A'S + B'C = f$

On obtient le système : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0 \\ -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = f(x) \end{cases}$

qui donne : $A'(x) = -f(x)\sin(x) \qquad B'(x) = f(x)\cos(x)$

On peut ainsi prendre $A(x) = -\int_0^x f(t)\sin(t)dt$ et $B(x) = -\int_0^x f(t)\cos(t)dt$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions dénies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$y(x) = \left(\lambda - \int_0^x f(t)\sin(t)dt\right)\cos(x) + \left(\mu + \int_0^x f(t)\cos(t)dt\right)\sin(x)$

• Pour montrer que toute solution y de cette forme est bornée, il suffit de montrer que les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(t)dt$ et $x \mapsto \int_0^x f(t)\cos(t)dt$ le sont.

La fonction f est par hypothèse continue, monotone, et admet une limite finie L en $+\infty$

En posant $\alpha(x) = f(x) - L$, la fonction α est continue sur $\mathbb{R}_+$, monotone, de limite nulle en $+\infty$

$\int_0^x f(t)\sin(t)dt = \int_0^x (L+\alpha(t))\sin(t)dt = L(1-\cos(x)) + \int_0^x \alpha(t)\sin(t)dt$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n = E(\frac{x}{2\pi})$ de sorte que $2n\pi \leqslant x \leqslant 2(n+1)\pi$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \alpha(t)\sin(t)dt &= \int_0^{2n\pi} \alpha(t)\sin(t)dt + \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \alpha(t)\sin(t)dt\right) + \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\int_0^\pi \alpha(u+k\pi)\sin(u+k\pi)du\right) + \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&\qquad \text{(par le changement de variable } t = u+k\pi) \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \left((-1)^k \int_0^\pi \alpha(u+k\pi)\sin(u)du\right) + \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \left(\int_0^\pi (\alpha(u+2h\pi) - \alpha(u+(2h+1)\pi))\sin(u)du\right) + \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt
\end{aligned}$$

Plaçons nous dans le cas où α est décroissante (et donc positive, puisque de limite nullle)

Pour tout h et pour tout $u \in [0,\pi]$, $0 \leqslant \alpha(u+2h\pi) - \alpha(u+(2h+1)\pi)$, donc

$0 \leqslant \int_0^\pi (\alpha(u+2h\pi) - \alpha(u+(2h+1)\pi))\sin(u)du$

et $\int_0^x \alpha(t)\sin(t)dt \geqslant \int_{2n\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \geqslant \int_{2n\pi}^x \underbrace{\alpha(t)}_{\leqslant \alpha(0)} \underbrace{\sin(t)}_{\geqslant -1} dt \geqslant -\alpha(0)(x-2n\pi)$

$\int_0^x \alpha(t)\sin(t)dt \geqslant -\alpha(0)(2(n+1)\pi - 2n\pi) = -2\pi\alpha(0)$

Par ailleurs, en considérant $m \in \mathbb{N}$ tel que $(2m+1)\pi \leqslant x \leqslant (2m+3)\pi$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \alpha(t)\sin(t)dt &= \int_0^{(2m+1)\pi} \alpha(t)\sin(t)dt + \int_{2(m+1)\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \alpha(t)\sin(t)dt\right) + \int_{2(m+1)\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left(\int_0^\pi \alpha(u+k\pi)\sin(u+k\pi)du\right) + \int_{(2m+1)\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&\qquad \text{(par le changement de variable } t = u+k\pi) \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left((-1)^k \int_0^\pi \alpha(u+k\pi)\sin(u)du\right) + \int_{(2m+1)\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt \\
&= \int_0^\pi \alpha(u)\sin(u)du - \sum_{k=0} \left(\int_0^\pi (\alpha(u+(2h+1)\pi) - \alpha(u+(2h+2)\pi))\sin(u)du\right) + \int_{(2m+1)\pi}^x \alpha(t)\sin(t)dt
\end{aligned}$$

??????????????????????????

Centrale - Supelec

Soit f une fonction réelle bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Montrer que $X = \{x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\}$ est une partie fermée et non vide de $\mathbb{R}$.

Trouver une fonction f telle que X ne soit pas bornée.

Montrer que si X est borné, f' a pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$

SOLUTION :

• Si X est vide, la fonction f'' est continue sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule pas. Elle est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$.

Supposons par exemple que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$

La fonction f' est alors croissante sur $\mathbb{R}$. Soient $m = \inf_{x\in\mathbb{R}} f'(x)$ (éventuellement $-\infty$) et $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} f'(x)$ (éventuellement $+\infty$)

On a nécessairement $m < 0$ ou $M > 0$ (le cas ($m \geqslant 0$ et $M \leqslant 0$) entraîne clairement que $m = M = 0$, la fonction f' est constante et f'' est nulle)

Supposons par exemple que $M > 0$

alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0, f'(x) \geqslant \frac{M}{2}$

donc $\forall x \geqslant x_0, f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt \geqslant f(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M}{2}dt = f(x_0) + (x-x_0)\frac{M}{2}$, ce qui entraîne que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et la fonction f n'est pas bornée. Raisonnement analogue si $m < 0$

L'hypothèse que f'' ne s'annule pas aboutit ainsi à une contradiction. Donc elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{X \text{ n'est pas vide}}$

• Le singleton $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

$X = \{x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\} = (f'')^{-1}(\{0\})$ est l'image reciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f''. c'est donc un fermé de $\mathbb{R}$.

• La fonction "sinus" est bien bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour cette fonction $X = \pi\mathbb{Z}$ n'est pas borné.

• Supposons que X est borné.

alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f'' n'a pas de racine sur $[x_0, +\infty[$. Etant continue, f'' garde un signe constant et la fonction f' est donc monotone sur cet intervalle. elle admet une limite en $+\infty$, éventuellement infinie.

Si cette limite n'est pas nulle, f' a le signe de cette limite sur $[x_1, +\infty[$, avec minoration en valeur absolue par un réel non nul, et l'égalité $f(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f'(t)dt$ permet alors de montrer que $\lim\limits_{+\infty} f' = \infty$, ce qui contredit l'hypothèse que f est bornée.

donc $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$

Centrale - Supelec

Etudier les convergences simple et uniforme de la série de fonctions $u_n, n \in \mathbb{N}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt$$

Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et calculer $S(x)$

SOLUTION :

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et prolongeable par continuité en 0. Elle est donc continue sur tout segment $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et intégrable sur ces segments.

Chaque fonction u_n est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

• Lorsque $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $\dfrac{e^{-xt}\sin(t)}{t}$ est du signe de $\sin(t)$, c'est à dire est positif si n est pair, est négatif si n est impair.

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite alternée.

Pour tout $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x)| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}\right| dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t}dt = \ln((n+1)\pi) - \ln(n\pi) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$

Pour tout $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \left|\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt\right| - \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt\right|$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}\sin((n+1)\pi+u)}{(n+1)\pi+u}du\right| - \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-x(n\pi+v)}\sin(n\pi+v)}{n\pi+v}dv\right|$$

(par les changements de variables respectifs $t = (n+1)\pi + u$ et $t = n\pi + v$)

$$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \int_0^{\pi} \frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}\sin(u)}{(n+1)\pi+u}du - \int_0^{\pi} \frac{e^{-x(n\pi+v)}\sin(v)}{n\pi+v}dv$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}}{(n+1)\pi+u} - \frac{e^{-x(n\pi+u)}}{n\pi+v}\right)\sin(u)du \leqslant 0$$

(car $e^{-x((n+1)\pi+u)} \leqslant e^{-x(n\pi+u)}$ et $(n+1)\pi + u \geqslant n\pi + u$)

La suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, de limite nulle, et décroissante en valeur absolue. Elle vérifie le critère de Leibniz des séries alternées. $\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n(\ ) \text{ converge donc simplement sur } \mathbb{R}_+}$

• Notons $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

Puisque la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère des séries alternées, on peut affirmer que $|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |r_n(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ (d'après un calcul effectué plus haut)

donc $\|r_n\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |r_n(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} = 0$ et $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum u_n(\ ) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+}$

• Notons $G(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\sin(t)}{t}$ si $x \in \mathbb{R}_+$ et $t > 0$

et $G(x, 0) = 1$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1],\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin(t)$

Pour tout $n > 0$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$ et intégrable sur ce segment car continue.

- pour tout $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, la fonction $x \mapsto G(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$, et intégrable,

- pour tout $t \in [n\pi,(n+1)\pi]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [n\pi,(n+1)\pi]$, $\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = |-e^{-xt}\sin(t)| \leqslant 1$, fonction constante intégrable sur $[n\pi,(n+1)\pi]$,

d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on en déduit que chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n'(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -e^{-xt}\sin(t)dt$

• - La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $\mathbb{R}$,

- chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

- Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt$ est absolument convergente (la fonction $t \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $|e^{-xt}\sin(t)| \leqslant e^{-xt}$, $x > 0$)

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k'(x) = -\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+1)\pi} e^{-xt}\sin(t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt$

La série de fonctions $\sum u_n'(\ )$ converge simplement sur $]0,+\infty[$

de plus, pour tout $a > 0$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| = \left|\int_{(n+1)\pi}^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt\right| \leqslant \int_{(n+1)\pi}^{+\infty} |e^{-xt}\sin(t)|dt \leqslant \int_{(n+1)\pi}^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=(n+1)\pi}^{t\to+\infty}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leqslant \frac{e^{-x(n+1)\pi}}{x} \leqslant \frac{e^{-a(n+1)\pi}}{a}$$

donc $\displaystyle\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'\right\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} = \|r_n'\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|r_n(x)| \leqslant \frac{e^{-a(n+1)\pi}}{a}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|r_n'\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} = 0$

La série des fonctions dérivées converge uniformément sur $[a,+\infty[$

On en déduit que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et comme cela est vrai pour tout $a >$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

De plus, $\forall x > 0,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt$

$$S'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt = -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{it}dt\right) = -\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$$

$S'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$

En intégrant, $S(x) = -\mathrm{Arctan}(x) + cste$

On montrer encore que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$, ce qui permet d'affirmer que :

$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ S(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})}$

On étend ensuite l'égalité au point 0 par contnuité :

$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ S(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)}$

Ce qui montre que $\boxed{S(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

Centrale - Supelec

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n.

Etudier la suite (x_n) et donner un développememnt asymptotique de x_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

• Soit f la fonction définie sur $I =]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$

$\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, elle est continue, c'est une bijection de $I =]0,+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{0^+} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[=]-\infty,+\infty[$

Elle admet une bijection réciproque f^{-1}, qui est une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, n$ admet un antécédent unique par f, qu'on peut appeler x_n :

$x_n + \ln(x_n) = n \iff f(x_n) = n \iff x_n = f^{-1}(n)$

• La fonction réciproque f^{-1} a le même sens de variation que f, c'est à dire est croissante, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$

alors $n = f(x_n) = x_n + \ln(x_n) \overset{n\to+\infty}{\sim} x_n$ donc $x_n \overset{n\to+\infty}{\sim} n$ ce qui s'écrit aussi comme le développement au premier ordre suivant : $\boxed{x_n = n + o(n)}$

• Posons alors $x_n = n + a_n$ où $a_n = o(n)$ et recherchons un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$

$n = f(x_n) = x_n + \ln(x_n) = n + a_n + \ln(n + a_n)$

$\Longrightarrow a_n = -\ln(n + a_n) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$

donc $a_n = -\ln(n) + o(\ln(n))$, ce qui donne le développement au second ordre suivant :

$\boxed{x_n = n - \ln(n) + o(\ln n)}$

• Posons alors $x_n = n - \ln(n) + b_n$ où $b_n = o(\ln(n))$ et recherchons un équivalent de b_n lorsque $n \to +\infty$

$n = f(x_n) = x_n + \ln(x_n) = n - \ln(n) + b_n + \ln(n - \ln(n) + b_n)$

donc $b_n = -\ln(n - \ln(n) + b_n) + \ln(n) = -\ln\left(\frac{n-\ln(n)+b_n}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{b_n}{n}\right)$

$\Longrightarrow b_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, ce qui donne le développement au second ordre suivant :

$\boxed{x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$ (en utilisant $\ln(1+u) \overset{u\to 0}{\sim} u$)

Centrale - Supelec

E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ sont tels que :

$f_o g_o f = f$ (1) et $g_o f_o g = g$ (2)

Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E, puis que f, g, $g_o f$ et $f_o g$ ont même rang.

SOLUTION :

• Rappelons que $\mathrm{rg}(g_o f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g_o f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$

(la première inégalité est une conséquence de l'inclusion $\mathrm{Im}(g_o f) \subset \mathrm{Im}(g)$, la seconde de l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g_o f)$ et du théorème du rang)

Cette même formule donne aussi : $\mathrm{rg}(f_o g) \leqslant \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(f_o g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$

L'inégalité (1) , $f = (f_o g)_o f = f_o(g_o f)$ entraîne que $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f_o g)$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g_o f)$

L'inégalité (2) , entraîne de la même façon que $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f_o g)$ et $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(g_o f)$

Ainsi, $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(g_o f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f_o g) \leqslant \mathrm{rg}(g)$

donc $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g_o f) = \mathrm{rg}(f_o g)$ et par symétrie des hypothèses portant sur f et g, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f_o g) = \mathrm{rg}(g_o f)$

On a bien montré finalement que $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f_o g) = \mathrm{rg}(g_o f)}$

• Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(g)$;

$\exists t \in F,\ x = g(t)$ et $f(x) = 0$

alors $x = g(t) \underbrace{=}_{(2)} g_o f_o \underbrace{g(t)}_{=x} = g[f(x)] = g(0) = 0$

donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et la somme $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ est directe.

Pour des raisons symétriques, la somme $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$ l'est aussi.

$\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g) \subset E$ et $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(f) \subset F$

Si l'inclusion $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g) \subset E$ est stricte, alors $\dim(\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) < \dim(E)$

La deuxième inclusion donne : $\dim(\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$

L'addition de ces deux inégalités, dont l'une est stricte donne :

$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) < \dim(E) + \dim(F)$, ce qui est absurde, car d'après le théorème du rang, le premier membre est égal exactement à $\dim(E) + \dim(F)$

L'inclusion $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g) \subset E$ n'est donc pas stricte, autrement dit, c'est une égalité.

Finalement, $\boxed{\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E}$

Centrale - Supelec

Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n}{n^2+x^2}$ et sa limite en 0.

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)\, e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt$

SOLUTION :

• Notons $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}, u_n(x)$ est défini pour tout entier naturel n .

La suite $(u_n(x))$ est alternée (puisque $\frac{n}{n^2+x^2} \geqslant 0$) , et de limite nulle (puisque $|u_n(x)| \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$)

Soit m un entier strictement positif ; pour tout x

$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \frac{n+1}{(n+1)^2+x^2} - \frac{n}{n^2+x^2} = \frac{(n+1)(n^2+x^2) - n((n+1)^2+x^2)}{((n+1)^2+x^2)(n^2+x^2)} = -\frac{n^2+n-x^2}{((n+1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$

est du signe de $-(n^2+n-x^2)$, donc est négatif si $n \geqslant m$ et $x \in [-m, m]$

La suite $(|u_n(x)|)$ est donc décroissante pour $n \geqslant m$ pour tout $x \in [-m, m]$.

La série $\{u_n(x)\}_{n\geqslant m}$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées. Elle est donc convergente, et si $r_n(x)$ désigne son reste d'ordre n, $|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{n+1}{(n+1)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$

donc $\sup_{x\in[-m,m]} |r_n(x)| = \|r_n\|_{[-m,m]}^{\infty} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \|r_n\|_{[-m,m]}^{\infty} = 0$

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant m} u_n(\quad)$ converge uniformément sur le segment $[-m,m]$.

Chaque fonction $u_n\ :\ x \mapsto (-1)^n \dfrac{n}{n^2+x^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-m,m]$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la somme de la série, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{n}{n^2+x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-m,m]$.

Ceci étant vrai pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

• Pour tout $n\in\mathbb{N}^*, u_n(x) = (-1)^n \dfrac{n}{x^2+n^2} = (-1)^n \dfrac{n}{(x+in)(x-in)} = \dfrac{(-1)^n}{2i}\dfrac{(x+in)-(x-in)}{(x+in)(x-in)}$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2i}\left(\frac{1}{x-in} - \frac{1}{x+in}\right) = \frac{(-1)^n\, i}{2}\left(\frac{1}{x+in} - \frac{1}{x-in}\right)$$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ u_n'(x) = \dfrac{(-1)^n\, i}{2}\left(\dfrac{-1}{(x+in)^2} - \dfrac{-1}{(x-in)^2}\right)$

$$u_n''(x) = \frac{(-1)^n\, i}{2}\left(\frac{2}{(x+in)^3} - \frac{2}{(x-in)^3}\right)$$

$$u_n'''(x) = \frac{(-1)^n\, i}{2}\left(\frac{-6}{(x+in)^4} - \frac{-6}{(x-in)^4}\right)$$

et, par récurrence immédiate, $\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbb{N}^*,\ u_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, i}{2}(-1)^p\left(\dfrac{p\,!}{(x+in)^{p+1}} - \dfrac{p\,!}{(x-in)^{p+1}}\right)}$

• Pour tout $p\geqslant 1$, $\left|\dfrac{1}{(x+in)^{p+1}}\right| = \left|\dfrac{(x-in)^{p+1}}{(x^2+n^2)^{p+1}}\right| \leqslant \dfrac{(|x|+n)^{p+1}}{(n^2)^{p+1}}$

$\forall x\in[-m,m]$, $\left|\dfrac{1}{(x+in)^{p+1}}\right| \leqslant \dfrac{(m+n)^{p+1}}{(n^2)^{p+1}}$ et par une majoration du même type pour le terme conjugué, on déduit que :

$$\|u_n^{(p)}\|_{[-m,m]}^{\infty} \leqslant p\,!\frac{(m+n)^{p+1}}{(n^2)^{p+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} p\,!\frac{1}{n^{p+1}}$$

Pour tout $p\geqslant 1$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de la forme $[-m,m]$. Par application itérée du théorème de dérivation des séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout entier p sur tout segment $[-m,m]$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• De la formule $1+z+z^2+z^3+...+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$, valable pour tout complexe différent de 1, on obtient :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-z)^{n-1} + \frac{(-z)^n}{1+z}$$

$$\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-e^{-t})^k + \frac{(-e^{-t})^n}{1+e^{-t}}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{-kt} + \frac{(-1)^n e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = \int_0^{+\infty}\cos(xt)\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{-kt} + \frac{(-1)^n e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\right)dt$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-kt}dt + (-1)^n\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}dt$$

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-kt}dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-kt}e^{-ixt}dt\right) = \mathrm{Re}\ \left(\textstyle\int_0^{+\infty}e^{-(k+ix)t}dt\right) = \mathrm{Re}\left[-\frac{e^{-(k+ix)t}}{k+ix}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{k+ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{k-ix}{k^2+x^2}\right) = \frac{k}{k^2+x^2}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+x^2} + (-1)^n\underbrace{\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}dt}_{w_n} \qquad (*)$$

$$|w_n| = \left|\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\cos(xt)\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\right|dt \leqslant \textstyle\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}dt = [-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}]_{t=0}^{t\to+\infty}$$

$|w_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

En passant à la limite dans l'égalité $(*)$ on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+x^2}$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = f(x)}$

Mines

Exercice 1 : $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ et $f_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que :

$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ f_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}$

L'endomorphisme f_σ est il diagonalisable ?

Exercice 2 : Etude de la solution maximale de l'équation différentielle : $y' = xy\sin(x)$ assortie de la condition initiale : $y(0) = \frac{3\pi}{2}$

Exercice 3 : Pour n entier $\geqslant 3$, $P_n(X) = X^n - nX + 1$

1- Montrer que P_n admet deux racines positives, α_n et β_n . $(\alpha_n \leqslant \beta_n)$

2- Etudier la suite (β_n)

SOLUTION :

Exercice 1 : Soit $\sigma, s \in \mathscr{S}_n$

$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ f_\sigma \,_o f_s(e_k) = f_\sigma(e_{s(k)}) = e_{\sigma(s(k))} = f_{\sigma_o s}(e_k)$

donc $f_\sigma \,_o f_s = f_{\sigma_o s}$

par récurrence, il s'ensuit que pour tout entier m, $f_{\sigma^m} = (f_\sigma)^m$

• Toute permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$ peut se décomposer en produit de cycles de supports disjoints ;

$\sigma = c_1 \,_o c_2 \,..._o c_p$. Ces cercles ont pour longueurs respectives $l_1, l_2, ..., l_p$, et pour chacun de ces cycles, $c_k{}^{l_k} = I$ (application identité)

En considérant $q = l_1 l_2 ... l_p$, $\sigma^q = c_1{}^q \,_o c_2{}^q ... \,_o c_p{}^q = I$ (car ces cycles commutent)

donc $(f_\sigma)^q = f_{\sigma^q} = f_I = Id_E$

Le polynôme $X^q - 1$ est un polynôme annulateur de f_σ, il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines sont simples (ce sont les q racines q^e de l'unité)

Ce qui nous permet d'affirmer que $\boxed{\text{l'endomorphisme } f_\sigma \text{ est il diagonalisable}}$

Exercice 3 : Pour n entier $\geqslant 3$, $P_n(X) = X^n - nX + 1$, $P_n'(X) = n(X^{n-1} - 1)$

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction polynômiale P_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, donc injective. Elle est continue, prend des valeurs positives ($f(0) = 1$) et de valeurs négatives ($f(1) = 2 - n < 0$), donc s'annule sur ce segment, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc un unique réel $\alpha_n \in [0, 1]$ tel que $P_n(\alpha_n) = 0$.

Raisonnement analogue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

• On sait que $\beta_n \in [1, +\infty[$ et que $P_n(\beta_n) = \beta_n^n - n\beta_n + 1 = 0$.

donc $\beta_n^n + 1 = n\beta_n \geqslant n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n^n = +\infty$ et la constante 1 est négligeable devant cet infiniment grand.

donc $\beta_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\beta_n$

$\Longrightarrow n\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + \ln(\beta_n)$

On remarque que $P_n(2) = 2^n - 2n + 1 = 2 \times 2 \times ... \times 2 - (2 + 2 + ... + 2) + 1 > 0$ et donc $1 \leqslant \beta_n \leqslant 2$

$\ln(\beta_n)$ est donc borné et négligeable devant $\ln n$

d'où : $n\ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

$\Longrightarrow \ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = e^0 = 1$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1}$

Enfin, $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\beta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n - 1$

donc $\beta_n = 1 + (\beta_n - 1) = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ $\boxed{\beta_n = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$

TPE

Exercice 1 : On considère deux suites réelles positives (a_n) et (b_n) telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = a > 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n)^n = b > 0$

Soit $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ tel que $p+q=1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(pa_n+qb_n)^n$

Exercice 2 : Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2+{}^tA=I_n$

A est elle diagonalisable ?

SOLUTION :

Exercice 1 : • Remarquons d'abord que

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=a>0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(a_n)=\ln(a)$ (par continuité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$)

$\implies \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(a_n)=0$ (car $\ln(a_n)=\dfrac{1}{n}(n.\ln(a_n))$)

$\implies \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$ (par continuité de la fonction exponentielle au point 0)

Même résultat pour la suite (b_n).

• Notons $u_n=(pa_n+qb_n)^n$

$\ln(u_n)=n\ \ln(pa_n+qb_n)$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}pa_n+qb_n=p.1+q.1=p+q=1$

donc $\ln(pa_n+qb_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}pa_n+qb_n-1=pa_n+qb_n-p-q=p(a_n-1)+q(b_n-1)$

d'où $\ln(u_n)=n\ \ln(pa_n+qb_n)\underset{+\infty}{\sim}pn(a_n-1)+qn(b_n-1)$ (*)

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, $\ln(a_n)\underset{+\infty}{\sim}(a_n-1)$ et donc $n(a_n-1)\underset{+\infty}{\sim}n\ln(a_n)\underset{+\infty}{\longrightarrow}\ln(a)$

L'égalité (*) montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=p\ln(a)+q\ln(b)$, et par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(pa_n+qb_n)^n=e^{p\ln(a)+q\ln(b)}=a^p\,b^q}$$

Exercice 2 : $A^2+{}^tA=I_n \implies {}^tA=I_n-A^2 \implies A=I_n-{}^t(A^2)=I_n-({}^tA)^2$

$\implies A=I_n-(I_n-A^2)^2=I_n-(I_n-2A^2+A^4)$

$\implies A=2A^2-A^4$

Le polynôme $Q(X)=X^4-2X^2+X$ est un polynôme annulateur de A.

Voyons s'il est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$

$X^4-2X^2+X=X(X^3-2X+1)=X(X-1)(X^2+X-1)$

Le trinôme X^2+X-1 a pour discriminant $\delta=5>0$. Il admet donc deux racines réelles x_1 et x_2 (qu'il n'est pas utile de calculer)

$Q(X)=X^4-2X^2+X=X(X-1)(X-x_1)(X-x_2)$ est un polynôme annulateur de la matrice A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est donc diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Telecom SudParis **30 mn au tableau**

Exercice 1 : Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n=I_n$

On suppose que $(I_n,A,A^2,...,A^{n-1})$ est libre.

Montrer que $\operatorname{tr}(A)=0$

Exercice 2 : α est un réel >0 et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$

Déterminer, suivant la valeur de α la nature de la série $\sum u_n$

SOLUTION :

Exercice 1 : Puisque $A^n=I_n$, le polynôme X^n-1 est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de la matrice A.

Ce polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, ses racines sont les racines n^e de l'unité, $u_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k=0,1,...,n-1$:

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont parmi ces racines n^e :

$\exists P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $A=P.\Delta.P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont parmi les $u_k, k\in\{0,1,...,n-1\}$

Montrons que sur la diagonale de Δ, toutes les racines n^e u_k figurent toutes, une et une seule fois.

Supposons au contraire que certaines de ces racines ne figurent pas sur la diagonale de Δ (ce qui implique que d'autres figurent au moins 2 fois)

Soient, quitte à les renuméroter, $u_1,u_2,...,u_p$, $p<n$ les racines qui figurent sur la diagonale de Δ.

Les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}u_1^2\\u_2^2\\\vdots\\u_p^2\end{pmatrix}$, ... $\begin{pmatrix}u_1^p\\u_2^p\\\vdots\\u_p^p\end{pmatrix}$ sont $p+1$ vecteurs de $\mathbb{C}^p$, qui est un espace de dimension p. Ils forment donc un système lié :

$$\exists(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_p)\in\mathbb{C}^{p+1},\ \alpha_0\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_p\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}u_1^2\\u_2^2\\\vdots\\u_p^2\end{pmatrix}+\ ...\ +\alpha_p\begin{pmatrix}u_1^p\\u_2^p\\\vdots\\u_p^p\end{pmatrix}=0$$

donc, pour tout $i\in\{1,2,...,p\},\ \alpha_0+\alpha_1u_i+\alpha_2u_i^2+...+\alpha_pu_i^p=0$

et, en regardant chaque terme de la diagonale, on en déduit l'égalité matricielle :

$\alpha_0I_n+\alpha_1\Delta+\alpha_2\Delta^2+...+\alpha_p\Delta^p=0$

et donc

$\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+...+\alpha_pA^p=0$

Puisque $p<n$, cette égalité montre que le système $(I_n,A,A^2,...,A^{n-1})$ est lié, contrairement à l'hypothèse.

On en conclut que sur la diagonale de Δ, figurent toutes les racines n^e u_k une et une seule fois.

• Dès lors, $\mathrm{tr}(A)=u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}$

Les u_i étant les racines du polynôme X^n-1, les relations coefficients-racines montrent que la somme des racines $u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}$ est nulle (car le coefficient de X^{n-1} est nul).

Ainsi, $\boxed{\mathrm{tr}(A)=u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}=0}$

Remarque : autre solution astucieuse due à Bruno H. auquel devront être réversés les droits d'auteur.

Puisque $(I_n,A,A^2,...,A^{n-1})$ est libre, la matrice A n'admet pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à n.

Notons $\mathscr{I}(A)$ l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes annulateurs de la matrice A. Les deux polynomes X^n-1 et $\chi_A(X)$ sont deux polynômes de degré n, qui appartiennent à $\mathscr{I}(A)$. Puisque $\mathscr{I}(A)$ n'a pas de générateur de degré plus petit, ce sont deux générateurs de l'idéal $\mathscr{I}(A)$. (l'un et l'autre sont le polynôme minimal de la matrice A, mais la notion de polynôme minimal n'est pas au programme de la filière PSI*)

Par unicité à une constante multiplicative près du polynôme générateur de $\mathscr{I}(A)$, il existe $\mu\in\mathbb{C}-\{0\}$ tel que $\chi_A(X)=\mu(X^n-1)$

La trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres. Les valeurs propres de$A$ sont les racines de $\chi_A(X)$, c'est à dire celles de X^n-1, c'est à dire les racines n^e de l'unité.

Les racines n^e de l'unité sont $u_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}},k=0.....n-1$

La somme de ces racines est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k=\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}=0$

donc, $\boxed{\mathrm{tr}(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k=0}$

Exercice 2 : $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n^\alpha}}=\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$

Si $\frac{\alpha}{2}>1$, c'est à dire si $\alpha>2$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}=(-1)^n\left(n^\alpha+(-1)^n\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Rappelons que $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}=(1+u)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}u+\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2}u^2+o(u^2)=1-\dfrac{1}{2}u+\dfrac{3}{8}u^2+o(u^2)$ qd $u\to0$

donc $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+\dfrac{3}{8}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}+o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right)$

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}+v_n$ avec $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}$

Pour tout $\alpha>0$, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après le principe des séries alternées, et d'après l'équivalent qui précède, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\frac{5\alpha}{2}>1$, c'est à dire $\alpha>\dfrac{2}{5}$

En conclusion , $\boxed{\text{la série } \sum u_n\text{, diverge si } \alpha\in\left]0,\tfrac{2}{5}\right]\text{, converge si } \alpha\in\left]\tfrac{2}{5},2\right]\text{, converge absolument si } \alpha>2}$

Mines

Exercice 1 : Développer en série entière la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{1-2x\cos(t)+x^2}$

Exercice 2 : Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

SOLUTION :

Exercice 1 : $x^2-2x\cos(t)+1=(x-e^{it})(x-e^{-it})$

• Si $t = 0\ [2\pi]$, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

or $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et, par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur ouvert de convergence, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0,1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

• Si $t = \pi\ [2\pi]$, calcul analogue.

• Supposons désormais $t \neq 0\ [\pi]$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos(t) + 1} = \dfrac{1}{(x-e^{it})(x-e^{-it})} = \dfrac{a}{x-e^{it}} + \dfrac{b}{x-e^{-it}}$

en multipliant par $(x - e^{it})$ puis en remplaçant x par e^{it}, on obtient : $a = \dfrac{1}{e^{it}-e^{-it}} = \dfrac{1}{2i\sin(t)}$

de manière analoque, $b = \dfrac{-1}{2i\sin(t)}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2i\sin(t)}\left(\dfrac{1}{x-e^{it}} - \dfrac{1}{x-e^{-it}}\right) = \dfrac{1}{2i\sin(t)}\left(\dfrac{-e^{-it}}{1-xe^{-it}} + \dfrac{e^{it}}{1-xe^{it}}\right)$

En utilisant à nouveau la relation $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ valable pour tout complexe de module $|u| < 1$,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{1}{2i\sin(t)}\left(-e^{-it}\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-it})^n + e^{it}\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{it})^n\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2i\sin(t)}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)t}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)t}x^n\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2i\sin(t)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i(n+1)t} - e^{i(n+1)t})x^n\right) = \frac{1}{2i\sin(t)}\sum_{n=0}^{\infty} 2i\ \sin(n+1)t\ x^n$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\ x^n}$$

Exercice 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A)$

voir exercice 1.7 chapitre "diagonalisation", en passant aux endomorphisme canoniquement associés.

Mines

Exercice 1 : Montrer qu'il existe une unique fonction réelle f, définie pour $x > 0$, de limite nulle en $+\infty$ et vérifiant en tout point $x \in]0,+\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$

Montrer que f est continue, intégrable sur $[1,+\infty[$, et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$

SOLUTION :

Exercice 1 : • Analyse : Soit une fonction f définie sur $0,+\infty[$ et vérifiant :

$\forall x \in]0,+\infty[, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$

Soit $x \in]0,+\infty[$

alors $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$ $\quad\times(+1)$

$f(x+1) + f(x+2) = \frac{1}{(x+1)^2}$ $\quad\times(-1)$

$f(x+2) + f(x+3) = \frac{1}{(x+2)^2}$ $\quad\times(+1)$

$f(x+3) + f(x+4) = \frac{1}{(x+3)^2}$ $\quad\times(-1)$

. . . .

$f(x+n) + f(x+n+1) = \frac{1}{(x+n)^2}$ $\quad\times(-1)^n$

En multipliant ces égalités alternativement par $+1$ et par -1, et en les additionnant, on obtient dans le membre de gauche une somme "télescopique" :

$f(x) + (-1)^n f(x+n+1) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + ... + (-1)^n \frac{1}{(x+n)^2}$

Pour tout $x > 0$ fixé, la série $\sum(-1)^n \frac{1}{(x+n)^2}$ converge absolument puisque $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. De plus, par hypothése $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On peut alors passer à la limité quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente :

$\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}, \text{ ce qui montre l'unicité d'une éventuelle fonction } f \text{ solution.}}$

• **Synthèse :** Soit, pour tout $x > 0, f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. On a déja justifié la convergence absolue de cette série, f est définie sur $]0, +\infty[$.

Notons $u_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ |u_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$ donc $\|u_k\|^{\infty}_{]0,+\infty[} = \displaystyle\sup_{x\in]0,+\infty[} |u_k(x)| \leqslant \frac{1}{k^2}$, ce qui montre la convergence normale, et donc la convergence uniforme, de la série de fonctions $\sum u_k(\ )$ sur $]0, +\infty[$.

Chaque fonction $u_k(\ )$ étant continue sur $]0, +\infty[$, la fonction somme f l'est aussi.

• Chaque fonction $u_k(\ )$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$, et $|u_k(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Chaque fonction $u_k(\ )$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} |u_k(x)|dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}dx = \left[\frac{-1}{x+k}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{k+1}$ et la série $\sum \int_1^{+\infty} |u_k(x)|dx$ n'est pas convergente. On ne peut donc pas utiliser le théoème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque.

On pourrait aussi montrer sans difficulté la convergence uniforme de la série de fonctions, mais cela ne permet pas de conclure car on n'intègre pas sur un segment.

Posons alors $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)dx$ et $r_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)dx$

Pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum u_k(x)$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées (vérification vraiment immédiate). Donc $|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, majoration qui montre que la fonction $r_n(\ )$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = f_n(x) + r_n(x)$

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} f_n(x)dx + \int_1^{+\infty} r_n(x)dx$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}dx + \int_1^{+\infty} r_n(x)dx$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}dx\right) + \int_1^{+\infty} r_n(x)dx$ (somme finie, linéarité de l'intégrale)

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{-1}{x+k}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} r_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_1^{+\infty} r_n(x)dx$

Par ailleurs $\left|\int_1^{+\infty} r_n(x)dx\right| \leqslant \int_1^{+\infty} |r_n(x)|dx \leqslant \int_1^{+\infty} |u_{n+1}(x)|dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+n+1)^2} = \frac{1}{n+2}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} r_n(x)dx = 0$ et en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln(2)}$$

Mines :

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps $\mathbf{K}$.

1- a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comparer $\ker(f^k)$ et $\ker(f^{k+1})$

Montrer qu'il existe un entier p tel que : $\begin{cases} \forall k < p,\ \ker(f^k) \subsetneq \ker(f^{k+1}) \\ \forall k \geqslant p,\ \ker(f^k) = \ker(f^p) \end{cases}$

Que dire de la suite des images $\left((\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

b) On note $F = \Im(f^p)$ et $G = \ker(f^p)$

Montrer que F et G sont deux sous espaces supplémentaires de E, stables par f.

On note f_1 l'endomorphisme induit par f sur F et f_2 l'endomorphisme induit par f sur G.

Montrer que f_1 est bijectif et f_2 nilpotent.

2- a) Que peut on dire du spectre d'un endomorphisme nilpotent ? (Mines PSI 2009)

b) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, p l'entier défini comme dans la question 1-a)

Montrer que l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est égal à $\dim(\ker(f^p))$.

SOLUTION :

1- a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \ker(f^k), f^k(x) = 0 \implies f^{k+1}(x) = 0 \implies x \in \ker(f^{k+1})$

donc $\boxed{\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})}$

La suite des sous espaces $\left((\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

La suite des dimensions, $\left(\dim\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique de nombre entiers, croissante au sens large. Elle est majorée par $n = \dim E$, donc elle n'est pas injective.

Il existe donc un entier q tel que $\dim(\ker(f^q)) = \dim(\ker(f^{q+1}))$

Si, pour un entier q, $\ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$, alors pour tout $k \geqslant q$,

$\forall x \in \ker(f^{k+1}),\ f^{k+1}(x) = f^{p+1}(f^{k-p}(x)) = 0 \implies f^{k-p}(x) \in \ker(f^{p+1})$

$\implies f^{k-p}(x) \in \ker(f^p) \implies f^p(f^{k-p}(x)) = f^k(x) = 0$

donc $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^k)$ et par double inclusion, $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^k)$

La suite $\left((\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir du rang q.

Si on appelle p le plus petit entier tel que $\dim(\ker(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1}))$, alors :

$$\begin{cases} \forall k < p,\ \ker(f^k) \subsetneq \ker(f^{k+1}) \\ \forall k \geqslant p,\ \ker(f^k) = \ker(f^p) \end{cases}$$

• La suite des images $\left((\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (démonstration immédiate)

Le théorème du rang montre que la somme des dimensions $\dim(\ker(f^p)) + \dim(\Im(f^p))$ est constante.

On en déduit alors que $\begin{cases} \forall k < p,\ \Im(f^{k+1}) \subsetneq \Im(f^k) \\ \forall k \geqslant p,\ \Im(f^k) = \Im(f^p) \end{cases}$

b) $\forall x \in F = \Im(f^p),\ f(x) \in \Im(f^{p+1}) = \Im(f^p)$, donc F est stable par f.

$\forall x \in G = \ker(f^p),\ f(x) = 0 \in G$, donc G est stable par f.

• $\forall x \in F \cap G,\ \exists t \in E, x = f^p(t)$ et $f^p(x) = 0$

donc $f^p(x) = f^{2p}(t) = 0$ donc $x \in \ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$ donc $x = f^p(t) = 0$

Ceci montre que $F \cap G = \{0\}$ et que la somme $F + G$ est directe.

Le théorème du rang montre que :

$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(\Im(f^p)) + \dim(\ker(f^p)) = \dim(E)$

Par inclusion et égalité des dimensions, $F \oplus G = E$, les sous espaces F et G sont supplémentaires.

2- a) Soit g un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E : $\exists m \in \mathbb{N}, g^m = \omega$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$. Puisque X^m est un polynôme annulateur de g, $\lambda^m = 0$, ce qui entraîne que $\lambda = 0$.

Donc $\mathrm{Sp}(g) \subset \{0\}$

Par ailleurs g n'est pas inversible puisqu'il est nilpotent. 0 est donc valeur propre de g.

Finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(g) = \{0\}}$

b) Si $F = \Im(f^p)$ et $G = \ker(f^p)$, F et G sont supplémentaires, et stables par f.

f_1 est l'endomorphisme induit par f sur F et f_2 l'endomorphisme induit par f sur G.

• $\ker(f_1) = \ker(f) \cap F \subset \ker(f^p) \cap \Im(f^p) = \{0\}$ (car $\ker(f) \subset \ker(f^p)$)

donc f_1 est injective, et bijective car F est de dimension finie.

• $\forall x \in G = \ker(f^p), f_2^p(x) = f^p(x) = 0$

donc $f_2^p = \omega$ et f_2 est nilpotent.

• Soeint $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G.

Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f_2)$

alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

Le polynôme caractéristique de f est :

$P_f(x) = \det(f - xId_E) = \det(M - xI_n) = \det\left(\begin{array}{c|c} A - xI_{n-m} & 0 \\ \hline 0 & B - xI_m \end{array}\right)$

(où $m = \dim(G) = \dim(\ker(f^p)$)

$P_f(x) = \det(A - xI_{n-m}).\det(B - xI_m) = P_{f_1}(x).P_{f_2}(x)$ (déterminant d'une matrice diagonale par blocs)

Puisque f_1 est injectif, 0 n'est pas valeur propre de f_1, 0 n'est pas racine de $P_{f_1}(x)$.

Puisque f_2 est nilpotent, sa seule valeur propre est 0. Mais puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique $P_{f_2}(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Donc $P_{f_2}(X) = X^m$

Ainsi, $P_f(X) = P_{f_1}(X).P_{f_2}(X) = X^m.P_{f_1}(X)$ où 0 n'est pas racine de $P_{f_1}(X)$

On en conclut que l'ordre de multiplicité de 0 est $\boxed{m = \dim(G) = \dim(\ker(f^p))}$

X - ENS

Montrer que la fonction f_n définie par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de sa dérivée .

Montrer que la fonction A_n définie par $A_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{2^n\ n!} f_n(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$x\ A_n'(x) = (2n+1)A_n(x) - A_{n+1}(x)$

En déduire qu'il existe $(U_n, V_n) \in (\mathbb{Z}_n[X])^2$, respectivement pair et impair tel que :

$A_n(x) = U_n(x)\sin(x) + V_n(x)\cos(x)$.

Dans le but de montrer que π^2 est irrationnel, on suppose l'existence de $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{p}{q}$

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=q^nA_n(\frac{\pi}{2})\in\mathbb{Z}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Conclure. que peut on en déduire d'autre ?

SOLUTION :

• Soit F telle que : $F(x,t)=(1-t^2)^n\cos(tx)$

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1],\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-t(1-t^2)^n\sin(tx)$

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\to F(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et intégrable car continue.
- pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $x\to F(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\to\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-t(1-t^2)^n\sin(tx)$ est continue sur $[0,1]$, et intégrable,
- pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)=-t(1-t^2)^n\sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in[0,1],\ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|=|t(1-t^2)^n\sin(tx)|\leqslant 1$, fonction constante intégrable sur $[0,1]$,

d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on en déduit que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=\int_0^\pi\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^1-t(1-t^2)^n\sin(tx)dt$$

• Par intégration par parties, $f_n'(x)=\left[\dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\sin(tx)\right]_{t=0}^{t=1}-x\displaystyle\int_0^1\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\cos(tx)dt$

$$f_n'(x)=-\frac{x}{2(n+1)}\int_0^1(1-t^2)^{n+1}\cos(tx)dt=-\frac{x}{2(n+1)}f_{n+1}(x)$$

$$A_n(x)=\frac{x^{2n+1}}{2^n\ n!}f_n(x)\quad\Longrightarrow\quad A_n'(x)=\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^n\ n!}f_n(x)+\frac{x^{2n+1}}{2^n\ n!}f_n'(x)$$

$$\Longrightarrow\quad xA_n'(x)=\frac{(2n+1)x^{2n+1}}{2^n\ n!}f_n(x)-\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}\ (n+1)!}f_{n+1}(x)$$

$$\Longrightarrow\quad\boxed{x\ A_n'(x)=(2n+1)A_n(x)-A_{n+1}(x)}$$

• $f_0(x)=\displaystyle\int_0^1\cos(tx)dt=f_n'(x)=\left[\frac{\sin(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{\sin(x)}{x}$ donc $A_0(x)=xf_0(x)=\sin(x)$

Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition :

$\exists(U_n,V_n)\in(\mathbb{Z}_n[X])^2,U_n$ pair et V_n impair, $\forall x\in\mathbb{R},\ A_n(x)=U_n(x)\sin(x)+V_n(x)\cos(x)$.

- La proposition $\mathscr{P}_0$ est vérifiée : $U_0=1$ et $V_0=0$
- Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vérifiée :

$A_n(x)=U_n(x)\sin(x)+V_n(x)\cos(x)$, avec $(U_n,V_n)\in(\mathbb{Z}_n[X])^2,U_n$ pair et V_n impair

alors, d'après le résultat précédent, $A_{n+1}(x)=(2n+1)A_n(x)-xA_n'(x)$

$$\Longrightarrow\ A_{n+1}(x)=(2n+1)(U_n(x)\sin(x)+V_n(x)\cos(x))$$
$$-x[U_n'(x)\sin(x)+V_n'(x)\cos(x)+U_n(x)\cos(x)-V_n(x)\sin(x)]$$

$$A_{n+1}(x)=\underbrace{[(2n+1)U_n(x)-xU_n'(x)+xV_n(x)]}_{U_{n+1}(x)}\sin(x)+\underbrace{[(2n+1)V_n(x)-xV_n'(x)-xU_n(x)]}_{V_{n+1}(x)}\cos(x)$$

$$A_{n+1}(x)=U_{n+1}(x)\sin(x)+V_{n+1}(x)\cos(x)$$

où $U_{n+1}=(2n+1)U_n-XU_n'+XV_n$ est un polynôme pair à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à $n+1$ si ceux de U_n et de V_n sont inférieurs ou égaux à n.

et $V_{n+1}=(2n+1)V_n-XV_n'-XU_n$ est un polynôme impair à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à $n+1$ pour la même raison.

La proposition $\mathscr{P}_n$ est ainsi prouvée pour tout $n\in\mathbb{N}$, par récurrence.

• $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=q^nA_n(\frac{\pi}{2})=q^n\left(U_n(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})+V_n(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})\right)=q^nU_n(\frac{\pi}{2})$

$U_n(X)$ est un polynôme pair de $\mathbb{Z}_n[X]$, de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)}a_{2k}X^{2k}$

Supposons qu'il existe $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{p}{q}$,

alors, $u_n=q^nA_n(\frac{\pi}{2})=q^n\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)}a_{2k}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}=q^n\sum_{k=0}^{E(n/2)}a_{2k}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^k=q^n\sum_{k=0}^{E(n/2)}a_{2k}\left(\frac{p}{q}\right)^k$

$$u_n=q^nA_n(\tfrac{\pi}{2})=\sum_{k=0}^{E(n/2)}a_{2k}p^kq^{2n-k}\in\mathbb{Z}\quad\text{(puisque } a_{2k},p \text{ et } q \text{ sont des entiers)}$$

Par ailleurs, $u_n=q^nA_n(\frac{\pi}{2})=q^n\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2^n\ n!}f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$|f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)| = \left|\int_0^1 (1-t^2)^n \cos(\frac{\pi}{2}t)dt\right| \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\ t\right)\right| dt \leqslant \int_0^1 dt = 1$

donc $|u_n| = \left|q^n A_n(\frac{\pi}{2})\right| = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\left|\frac{q\,\pi^2}{8}\right|^n}{n!}\left|f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\left|\frac{q\,\pi^2}{8}\right|^n}{n!}$

On sait que la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout complexe z, donc que nécessairement $\lim \frac{z^n}{n!} = 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{q\,\pi^2}{8}\right|^n}{n!} = 0$ et par majoration $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

• (u_n) est une suite d'entiers relatifs, de limite nulle, donc elle est nulle à partir d'un certain rang :

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = 0$

donc $\forall n \geqslant n_0,\ A_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

or $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(1-t^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}_{\geqslant 0} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive ou nulle, et non identiquement nulle, donc est strictement positive : $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

On aboutit ainsi à une contradiction.

L'hypothése de départ, à savoir que π est rationnel, est donc absurde : π^2 n'est pas rationnel.

Il s'ensuit que $\boxed{\pi \text{ n'est pas rationnel}}$ non plus. (sinon, son carré le serait aussi)

Mines

Exercice 1 : On considère un entier $n \leqslant 1$. Etablir l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\},\ \int_0^{+\infty} t^k\ P(t)e^{-t}dt = 0$$

Que subsiste-t-il de ce résultat lorsque l'on cherche P dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2 : Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{n - 3E(n/3)}{n(n+1)}$

($E(x)$ désigne la partie entière du réel x)

SOLUTION :

Exercice 1 : On vérifie que l'application $\Phi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. (argumentation à développer)

$\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sous espace vectoriel de dimension n dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$, qui est de dimension $n+1$

C'en est un hyperplan. Il admet un sous espace supplémentaire orthogonal F, qui sera une droite vectorielle. F est engendrée par un unique polynôme unitaire $P(X)$ (il suffit de prendre un polynôme non nul de F et de le diviser par son coefficient dominant)

Or, par linéarité de l'intégrale, un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\},\ \int_0^{+\infty} t^k\ P(t)e^{-t}dt = 0$$

si et seulement si il est orthogonal aux polynômes $1, X, X^2, ..., X^{n-1}$

si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, ..., X^{n-1})$

si et seulement si il appartient à F.

Et puisque F est une droite vectorielle, elle possède un et un sul polynôme unitaire.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe bien un unique polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X]\text{, unitaire, tel que :}\\ \qquad \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ P(t)e^{-t}dt = 0\end{array}}$$

????????????????????

Exercice 2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}, E(x) \leqslant x < E(x) + 1$, donc $0 \leqslant x - E(x) < 1$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{n}{3} - E(\frac{n}{3}) < 1$, et donc $0 \leqslant n - 3E(\frac{n}{3}) < 3$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n = \dfrac{n - 3E(n/3)}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{3}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{3}{n^2}$, ce qui montre, par majoration, que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

Remarquons que :

• si $n = 3k,\ n - 3E(\frac{n}{3}) = 3k - 3E(k) = 0$ et dans ce cas, $u_n = u_{3k} = 0$

• si $n = 3k+1,\ n - 3E(k + \frac{1}{3}) = 3k + 1 - 3k = 1$ et dans ce cas, $u_n = u_{3k+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$

• si $n=3k+2,\ n-3E(k+\frac{2}{3})=3k+2-3k=2$ et dans ce cas, $u_n=u_{3k+2}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+3)}$

Il s'ensuit que, pour tout $k\geqslant 1,\ u_{3k+1}+u_{3k+2}+u_{3k+3}=\dfrac{1}{(3k+1)(3k+2)}+\dfrac{2}{(3k+2)(3k+3)}+0$

$$u_{3k+1}+u_{3k+2}+u_{3k+3}=\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2}+\frac{2}{3k+2}-\frac{2}{3k+3}=\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{3k+3}$$

$$u_{3k+1}+u_{3k+2}+u_{3k+3}=\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{3}{3k+3}$$

Pour tout $n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}u_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Rappelons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ et γ est la constante d'Euler.

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}u_k=\ln(3n)+\gamma+\varepsilon_{3n}-(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n)=\ln(3)+\varepsilon_{3n}-\varepsilon_n$

En passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\ln(3)}$

TPE

1- Domaine de définition de la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{\cos^2 t}{t}dt$

Trouver les limites et des équivalents aux bornes du domaine.

2- Nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{\ln(n!)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

3- Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^k)_{k\in N}$ ait une limite $B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Que peut on dire de la matrice B ?

SOLUTION :

1- La fonction $g:t\mapsto\frac{\cos^2 t}{t}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x\in]0,+\infty[$, cette fonction est continue, donc intégrable sur le **segment** $[1,x]$. par contre l'intégrale $\int_0^1\frac{\cos^2 t}{t}dt$ est divergente car $\frac{\cos^2 t}{t}\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{t}$. f n'est donc pas définie en 0.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=]0,+\infty[}$

• puisque l'intégrale $\int_0^1\frac{\cos^2 t}{t}dt$ diverge, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{\cos^2 t}{t}dt=+\infty$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$

• En s'inspirant du DL de la fonction cosinus en 0, montrons que pour x assez petit, $1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos(t)\leqslant 1$

Pour cela posons $\varphi(x)=\cos(t)-1+\frac{t^2}{2}$. $\forall x\in[0,1],\varphi'(x)=-\sin(t)+t$ et $\varphi"(x)=1-\cos(t)\geqslant 0$

x	0	1
$\varphi"(x)$	$+$	
$\varphi'(x)$	0 $\nearrow$ $+$	
$\varphi(x)$	$+$	
	0 $\nearrow$	

donc $\forall t\in[0,1],\ 1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos(t)\leqslant 1$

$\Longrightarrow\ \forall t\in[0,1],\ 1-t^2+\frac{t^4}{4}\leqslant\cos^2(t)\leqslant 1$

$\Longrightarrow\ \forall t\in[0,1],\ \frac{1}{t}-t+\frac{t^3}{4}\leqslant\frac{\cos^2(t)}{t}\leqslant\frac{1}{t}$

$\Longrightarrow\ \forall x\in[0,1],\ \int_x^1(\frac{1}{t}-t+\frac{t^3}{4})dt\leqslant\int_x^1\frac{\cos^2(t)}{t}dt\leqslant\int_x^1\frac{1}{t}dt$

$\Longrightarrow\ \forall x\in[0,1],\ -\ln x\underbrace{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{16}-\dfrac{x^4}{16}}_{limite\ finie\ en\ 0}\leqslant f(x)\leqslant-\ln x$

On en déduit que $\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$

• $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in\left[n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\cos^2 t}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\leqslant\frac{\cos^2 t}{t}\leqslant\frac{\cos^2 t}{n\pi-\frac{\pi}{2}}$

$$\Longrightarrow\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{n\pi+\frac{\pi}{2}}dt\leqslant\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt\leqslant\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{n\pi-\frac{\pi}{2}}dt=\frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{2}}\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2n+1}\leqslant\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt\leqslant\frac{1}{2n-1}$$

En sommant pour les valeurs de 1 à n,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-1}$$

La minoration obtenue montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\pi+\frac{\pi}{2})=+\infty$, et puisque f est croissante,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$=\ln(2n+1)+\gamma+\varepsilon_{2n+1}-\tfrac{1}{2}(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n)=\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{4n^2+4n+1}{n})+\varepsilon_{2n+1}-\tfrac{1}{2}\varepsilon_n$$
$$\underset{+\infty}{\sim}\tfrac{1}{2}\ln(4n+4+\tfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}\tfrac{1}{2}\ln(n)$$

Même équivalent pour le majorant, et par encadrement,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt\underset{+\infty}{\sim}\tfrac{1}{2}\ln(n)$$

Soit $x\in\mathbb{R}_+$, quelconque. Encadrons x par deux termes succssifs de la suite $(n\pi+\frac{\pi}{2})_{n\geqslant 0}$:

$$n\pi-\tfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant n\pi+\tfrac{\pi}{2}$$

En décomposant $f(x)=\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{t}dt+\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\cos^2 t}{t}dt$ où les premier et troisième terme sont bornés, $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln(n)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln(\frac{x}{\pi})\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln(x)$

$$\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}\tfrac{1}{2}\ln(x)}$$

2- On utilise les deux résultats suivants :

- la formule de Stirling : $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$
- l'équivalence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$

alors $u_n=\dfrac{1}{\ln(n!)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln n}{\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)}=\frac{\ln n}{n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln n}{n\ln n}$

$$\boxed{u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\text{ et la série }\sum u_n\text{ diverge.}}$$

3- Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et on suppose que la suite $(A^k)_{k\in N}$ converge vers une matrice $B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Rappelons que le produit des matices ets une application continue.

alors $\forall k\in\mathbb{N},\ A^{2k}=A^k\ A^k$ donc $\lim(A^{2k})=B=\lim(A^k\ A^k)=\lim(A^k).\lim(A^k)=B.B=B^2$

$B^2=B$. La matrice B est une matrice de projection.

Par ailleurs, $\forall k\in\mathbb{N},\ A^{k+1}=A.A^k=A^k.A$ donc, en passant à la limite comme ci-dessus,

$$B=A.B=B.A$$

$\boxed{\text{La matrice } B \text{ est une matrice de projection, qui commute avec } A.}$

Mines

Calculer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(kn+1)}$ quand $n\to+\infty$

SOLUTION : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(kn+1)}$ converge puisque $0\leqslant\dfrac{1}{k(kn+1)}\leqslant\dfrac{1}{n\,k^2}$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(kn+1)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+\frac{1}{n})}$$

Posons $u_k(x)=\dfrac{1}{k(k+x)}$

Poour tout $k\geqslant 1$ et pour tout $x\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant u_k(x)\ \leqslant\dfrac{1}{k^2}$, donc

$\|u_k\|_{[0,+\infty[}^{\infty}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|u_k(x)|=\dfrac{1}{k^2}$ et la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, donc converge uniformément sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Chaque fonction u_k étant continue sur cet intervalle, la fonction somme , $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+x)}$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et en particulier au point 0.

On en conclut que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+x)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+\frac{1}{n})} = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

et finalement, $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(kn+1)} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+\frac{1}{n})} \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6n}}$

0.1 CCP + Centrale

1- Nature et calcul de $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

2- Nature et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

SOLUTION :

1 -$S_{2n+1} = \sum\limits_{k=2}^{2n+1} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^k}{k}\right) = \sum\limits_{k=2}^{2n+1} \ln\left(\dfrac{k+(-1)^k}{k}\right) = \sum\limits_{p=1}^{n} \left(\ln\left(\dfrac{2p+1}{2p}\right) + \ln\left(\dfrac{2p}{2p+1}\right)\right) = 0$

$\boxed{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 0}$

2- $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \sum\limits_{p=1}^{n} -\ln\left(\dfrac{2p}{2p-1}\right) + \ln\left(\dfrac{2p+1}{2p}\right)$

$= \sum\limits_{p=1}^{n} \ln\left(\dfrac{(2p-1)(2p+1)}{(2p)^2}\right) = \ln\left(\dfrac{1.\,[3.5.....(2n-1)]^2\,(2n+1)}{(2.\,4\,.6\ \dots\ .\,2n)^2}\right) = \ln\left(\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{(2^n.n!)^4}\right)$

Utilisons la formule de Stitling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} 4\pi n\ (2n+1)}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(2\pi n)^2}\right) = \ln\left(\dfrac{n(2n+1)}{\pi n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)}$

ENSAM

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $\forall n \geq 3,\quad 2na_n = 2na_{n-1} - a_{n-3}$

a) Etudier avec MAPLE le comportement de la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ et conjecturer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

b) Soit $f(x)$ la somme de cette série. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$\forall x \in]-R,R[,\ (1-x)f'(x) = P(x)f(x)$ et calculer $f(x)$.

Vérifier l'intégration de l'équation différentielle avec MAPLE

c) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ et calculer R.

SOLUTION :

a) < **a[0]:=1; a[1]:=1; a[2]:=1; N:=100; Digits:=20;**
for n from 3 to N do a[n]:=a[n-1]-a[n-3]/2/n od:
for n from 3 to N do evalf(a[n]/a[n-1]) od;

Ce calcul laisse présager que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et donc que le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1} = 1$

b) $\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad$ et $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$

$2f'(x) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \ = 2a_1 + 4a_2 x + \sum\limits_{n=3}^{\infty} (2na_{n-1} - a_{n-3})x^{n-1}$

$2f'(x) = 2 + 4x + 2x\sum\limits_{n=3}^{\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + 2\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - \sum\limits_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-1}$

$2f'(x) = 2 + 4x + 2x(f'(x) - a_1) + 2(f(x) - a_0 - a_1 x) - x^2 f(x)$

$2f'(x) = 2 + 4x + 2xf'(x) - 2x + 2f(x) - 2 - 2x - x^2 f(x)$

donc $(2-2x)f'(x) = (2-x^2)f(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est solution sur }]-R,R[\text{ de l'équation différentielle :} \\ (2-2x)y' = (2-x^2)y \end{array}}$$

Avec MAPLE :

>dsolve((1-x)*diff(y(x),x)-(1-x*x/2)*y(x),y(x));

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x^2-2}{2(x-1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)-1}{2(x-1)} = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{1}{2(x-1)}$

$\ln|f(x)| = \dfrac{x^2+2x}{4} - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + k$

Finalement $f(x) = \lambda \dfrac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}$, λ constante réelle.

$f(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\boxed{\forall x \in]-1,1[, f(x) = \dfrac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}}$

c) Soit R_n la relation : $\forall k \in \{0,..,n\}$, $0 \le a_k$ et $1 - \frac{1}{k} \le \frac{a_k}{a_{k-1}} \le 1$

On vérifie facilement que pour $n = 1$ et $n = 2$, R_n est vraie.

Supposons R_n vraie : pour $k \in \{1,..,n\}$, $0 \le a_k$ et $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \le \frac{a_k}{a_{k-1}} \le 1$

pour $k \in \{1,..,n\}$, $0 \le a_k$ et $(k-1)a_{k-1} \le k a_k$

alors $(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{n} n a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)} \ge \dfrac{1}{n}(n-2)a_{n-2} - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)}$

(car $na_n \ge (n-1)a_{n-1} \ge (n-2)a_{n-2}$)

$a_{n+1} \ge \underbrace{\dfrac{2n^2-3n-4}{2n(n+1)}}_{\ge 0 \text{ si } n \ge 3} a_{n-2} \ge 0$

par ailleurs, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)} \le a_n$ donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$,

enfin, $(n+1)a_{n+1} = na_n + a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2} \ge na_n + \dfrac{1}{n}(n-2)a_{n-2} - \dfrac{a_{n-2}}{2}$

$(n+1)a_{n+1} \ge na_n + \dfrac{n-4}{2n} a_{n-2} \ge na_n$ si $n \ge 4$

On a ainsi montré que $a_{n+1} \ge 0$ et $\dfrac{n}{n+1} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ c'est à dire la propriété R_{n+1}

Ceci établit par récurrence que pour tout n , R_n est vraie.

L'encadrement $\dfrac{n}{n+1} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ montre alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et que le rayon de convergence de la série entière est bien $R = 1$

MINES-PONTS (+ question MAPLE)

Représenter l'ensemble décrit par le complexe $u = 1 + z + z^2$ lorsque z décrit une fois le cercle unité.

SOLUTION :

• En posant $z = e^{i\theta}$, z décrit une fois le cercle unité lorque θ décrit $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.

Alors, $u = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

$u = 1 + \cos\theta + i\sin\theta + 2\cos^2(\theta) - 1 + 2i\sin(\theta)\cos(\theta)$

$u = \cos\theta(1 + 2\cos(\theta)) + i\sin\theta(1 + 2\cos(\theta))$

$u = (1 + 2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = (1 + 2\cos\theta)e^{i\theta}$

u décrit donc la courbe de paramétrisation polaire $r(\theta) = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

• $r(-\theta) = r(\theta)$. On reduit l'étude à $[0, \pi]$ et on obtient tte la courbe par symétrie d'axe (Ox).

$\forall \theta \in [0, \pi], r'(\theta) = -2\sin(\theta)$

Formons le tableau de variation et de signe de la fonction $r(\theta)$:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$	0			$-$			0
$r(\theta)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

On poursuit alors le tracé sans difficulté.

Avec **MAPLE :**

>with(plots);

polarplot([1+2*cos(t),t,t=-Pi..Pi],scaling=constrained);

****

Centrale

Montrer que si A et B sont deux matrices réelles symétriques et positives telles que $B^2 = A$, alors A et B diagonalissent dans la même base.

En déduire que toute matrice symétrique positive admet une et une seule racine carrée symétrique positive.

Application : avec MAPLE calculer cette racine si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

On rappelle qu'une matrice réelle symétrique est dite positive si l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est positif, c'est à dire vérifie : $\forall x \in E, < u(x), x >\geq 0$

On montre que cela équivaut à ce que toutes les valeurs propres de u soient ≥ 0

• Soient A et B sont deux matrices symétriques réelles positives telles que $B^2 = A$

B symétrique réelle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une valeur propre de B et E_λ^B le sous espace propre associé.

alors, $\forall X \in E_\lambda^B, B.X = \lambda.X$ donc $A.X = B^2.X = B.(B.X) = B.(\lambda.X) = \lambda B.X = \lambda^2 X$,

ce qui montre que λ^2 est valeur propre de A et que $E_\lambda^B \subset E_{\lambda^2}^A$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de B. B étant diagonalisable, $E_{\lambda_1}^B \oplus E_{\lambda_2}^B \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}^B = \mathbb{R}^n$

Les inclusions $E_{\lambda_i}^B \subset E_{{\lambda_i}^2}^A$ entraînent $E_{\lambda_1}^B \oplus E_{\lambda_2}^B \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}^B \subset E_{{\lambda_1}^2}^A \oplus E_{{\lambda_2}^2}^A \oplus ... \oplus E_{{\lambda_p}^2}^A \subset \mathbb{R}^n$

et donc $E_{{\lambda_1}^2}^A \oplus E_{{\lambda_2}^2}^A \oplus ... \oplus E_{{\lambda_p}^2}^A = \mathbb{R}^n$

Spec$(B) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ entraîne Spec$(A) \subset \{{\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2, ..., {\lambda_p}^2\}$

Mais l'égalité $E_{{\lambda_1}^2}^A \oplus E_{{\lambda_2}^2}^A \oplus ... \oplus E_{{\lambda_p}^2}^A = \mathbb{R}^n$ entraîne d'une part que A ne peut pas avoir d'autre valeur propre que ${\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2, ..., {\lambda_p}^2$ et que pour chaque λ_i, $E_{\lambda_i}^B = E_{{\lambda_i}^2}^A$

(sinon, l'inclusion $\oplus E_{\lambda_i}^B \subset \oplus E_{{\lambda_i}^2}^A$ serait stricte, ce qui est impossible puisque $\oplus E_{\lambda_i}^B = \mathbb{R}^n$)

En conclusion, si Spec$(B) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ alors Spec$(A) = \{{\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2, ..., {\lambda_p}^2\}$ et pour tout $i, E_{\lambda_i}^B = E_{{\lambda_i}^2}^A$

•• *Existence* :

Soit A une matrice réelle symétrique positive de $\mathbb{R}^n$ donnée.

Soit $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\}$ son spectre.

Il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (orthogonale) telle que $A = P.\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_p \end{pmatrix}.P^{-1}$

Soit alors $B = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_p} \end{pmatrix}.P^{-1}$

Il est clair que $B^2 = A$, que B est symétrique (P est orthogonale, il s'ensuit que ${}^tB = B$) et que B est positive car ses valeurs propres sont positives ou nulles.

• • • *Unicité* :

Soit A une matrice réelle symétrique positive de $\mathbb{R}^n$, $\mu_i, i = 1..p$ ses valeurs propres, $E_{\mu_i}^A, i = 1..p$ ses sous espaces propres.

Considérons alors une matrice réelle symétrique positive B telle que $B^2 = A$.

Soient $\lambda_i, i = 1..q$ ses valeurs propres, $E_{\lambda_i}^B, i = 1..q$ ses sous espaces propres.

L'étude ci-dessus montre que $q = p$, Spec$(A) = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\} = \{{\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2, ..., {\lambda_p}^2\}$

• • •• *Application* :

Ecriture de A et calcul de ses éléments propres :

```
>with(linalg):A:=matrix(3,3,(i,j)-> if i=j then 4 else 1 fi);
> ep:=eigenvects(A);
> P:=transpose(matrix([seq(op(ep[i][3]),i=1..2)]));
```

Calcul de B :

```
> DELTA:=multiply(inverse(P),A,P);
> delta:=diag(sqrt(6),sqrt(3),sqrt(3));
```

> **B:=multiply(P,delta,inverse(P));**

ce qui donne $B = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

Vérification:

> **Verif:=multiply(B,B);map(simplify,");**

Centrale :

Soit $f\ :\ x \mapsto \tan(x) + \mathrm{ch}(x)$

Montrer que f induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

Montrer que la fonction réciproque g admet un développement limité à l'ordre 5 au voisinage du point 1 et le calculer.

MOTS CLES: **?series**

SOLUTION :

• f est définie, continue et de classe C^∞ sur l'ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \mathrm{sh}(x)$

>**restart;**

plot(1+ tan(x)^2+sinh(x), x=-Pi/2..Pi/2);evalf(Pi/2);

plot(1+ tan(x)^2+sinh(x), x=-1.4..1.4,y=0..10);

Le graphe de f' montre que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc injective. Etant continue, elle prend toute valeur entre $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f = +\infty$.

C'est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

• Puisque f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que f' ne s'annule pas, $g = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

f étant C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f' ne s'annulant pas, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc un développement limité en tout point de $\mathbb{R}$ et à tout ordre.

$f(0) = 1$ donc $g(1) = f^{-1}(1) = 0$

$f'(0) = 1$ donc $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$

Le DL de g en 1 à l'ordre 1 est : $g(x) = g(0) + g'(0)(x-1) + o(x-1)$

ou aussi : $g(1+u) = 1 + u + o(u)$

• L'existence d'un DL de g en tout point à tout ordre étant établie, écrivons le DL de g à l'aide de coeficients indéterminés :

$g(1+u) = a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + o(u^5)$

On se ramènera en 0 en posant $h(u) = g(1+u) = a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + o(u^5)$

>**restart;**

f:=t->tan(t)+cosh(t); series(f(t),t);

h:=add(a[k]*u^k,k=1..5);

On écrira ensuite l'égalité $f(g(1+u)) = f(h(u)) = u$, on calculera le DL5 de cette composée avec MAPLE, et on identifiera les coefficients obtenus avec le développement $u + o(u^5)$

series(f(h),u): DL:=expand(");

$DL := 1 + a_1u + (a_2 + \frac{a_1^2}{2})u^2 + (a_1a_2 + \frac{a_1^3}{3} + a_3)u^3 + (.....)u4 + (.....)u^5 + O(u^6)$

L'identidication avec le DL $f(h(u)) = u + o(u^5)$ conduit à la résolution du système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 + \dfrac{a_1^2}{2} = 0 \\ a_1a_2 + \dfrac{a_1^3}{3} + a_3 = 0 \\ a_1a_3 + a_1^2a_2 + \dfrac{a_1^4}{24} + \dfrac{a_2^2}{2} + a_4 = 0 \\ ..... = 0 \end{cases}$$

sol:=solve({coeff(DL,u,1)=1,seq(coeff(DL,u,k)=0,k=2..5)},{a[1],a[2],a[3],a[4],a[5]});

$sol := \{a_1 = 1, a_5 = -11/20, a_4 = 1/6, a_3 = 1/6, a_2 = -1/2\}$

H:=subs(sol,h);

Le DL5 de g au point 1 est donc :

$$\boxed{g(1+u) = h(u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{6}u^4 - \frac{11}{20}u^5 + o(u^5)}$$

- *Vérification :*
  series(f(H),u);
  HH:=unapply(H,u); series(HH(f(x)-1),x);

Centrale : avec MAPLE

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x > 0 \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Avec MAPLE, calculer la dérivée d'ordre n , pour $1 \leqslant n \leqslant 10$

Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $P_n(x) = x^{2n}e^{\frac{1}{x}}f^{(n)}(x)$

Calculer P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$

Donner une relation de récurrence entre les P_n et utiliser cette récurrence pour refaire le calcul des 10 premiers termes.

Donner le degré et le terme dominant de P_n.

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[,\mathbb{R})$. f est elle développable en série entière ?

Soit x_n la plus petite racine de P_n. Etudier la suite (x_n).

SOLUTION :

- Calcul, avec MAPLE, des dérivées successives de f, et de $x^{2n}e^{\frac{1}{x}}f^{(n)}(x)$:

```
>restart;n:=10;
for k from 1 to n do f[k]:=diff(exp(-1/x),x$k) od:
for k from 1 to n do P[k]:=expand(f[k]*exp(1/x)*x^(2*k)); od;
```

on trouve $P[5] := 120x^4 - 240x^3 + 120x^2 - 20x + 1$

- Expression théorique des dérivées de f :

$\forall x > 0 \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-2x+1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : il existe $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\quad \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$

- Les propositions $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont vérifiées.
- Supposons que $\mathscr{P}_n$ le soit : $\exists P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$

alors $\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{P_n'(x)x^{2n} - 2nx^{2n-1}P_n(x)}{x^{4n}} + \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_n'(x)x^2 + (1-2nx)P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$

$P_{n+1}(X) = P_n'(X)\ X^2 + (1-2nX)P_n(X)$ est bien un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

et $\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$

En supposant que $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $P_n'(X)\ X^2$ et $(1-2nX)P_n(X)$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ et leur somme P_{n+1} aussi.

La proposition $\mathscr{P}_n$ est ainsi prouvée par récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ il existe } P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}}$$

On a de plus établi la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = P_n'(X)\ X^2 + (1-2nX)P_n(X)}$$

Cette formule de récurrence, et l'initialisation $P_0 = 1$ permet de refaire le calcul des premiers termes de la suite (P_n). Nous noterons Q_n pour éviter toute confusion les résultats de ce deuxième calcul.

```
>Q[0]:=1;
for k from 0 to n do Q[k+1]:=expand((1-2*k*x)*Q[k]+x*x*diff(Q[k],x)) od;
```

on trouve $Q[5] := 120x^4 - 240x^3 + 120x^2 - 20x + 1$

- On a déja vérifié que P_n était de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Le calcul des 10 premiers P_n avec MAPLE, et la formule de récurrence

$$P_{n+1}(X) = P_n'(X)\ X^2 + (1-2nX)P_n(X)$$

permettent de montrer que chaque P_n est de degré exactement égal à $n-1$, et que son terme dominant est $(-1)^{n-1}\ n!\ X^{n-1}$

- On peut remarquer aussi, en remplaçant X par 0 dans la relation de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(0) = P_n(0)$ et que cette valeur vaut 1 par initialisation.

Tous les P_n ont pour terme constant 1.

L'examen des termes de degré 1

Dans la même relation de récurrence, on constate que les termes de degré 1 du polynôme P_{n+1} proviennent uiquement du terme $(1-2nX)P_n(X)$, et est donc égal à $-2nP_n(0)X$ plus le terme de degré 1 dans P_n.

Si on note u_n le coefficient de degré 1 de P_n, on a alors l'égalité $u_{n+1} = u_n - 2n$, ce qui permet de montrer par récurrence que $u_n = -2(1+2+3+...+n) = -n(n-1)$

- On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$.

  La fonction f est donc continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

  Elle est de plus dérivable sur l'ouvert $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}$

  On peut en conclure que f est dérivable au point 0 et que $f'0) = 0$. Cette dérivée ayant été obtenue comme une limite, f est $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

  A tout ordre , la croissance comparée entre fonctoion exponenetielle et fonctions puissantes, permet d'affirmer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

  et de montrer par récurrence que f est dérivable à tout ordre en 0 et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$

  Chaque dérivée est continue au point 0. La fonction est donc de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ à tout ordre n.

  donc $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[,\mathbb{R})}$

- On peut tracer les 10 premières courbes sur un même graphique :

  plot([seq(P[j],j=1..n)],x=0..2,y=-10..10); (à la suite des lignes déja écrites)

  On y voit plus clair en traçant des graphes séparés :

  for j from 1 to n do plot(P[j],x=0..2,y=-1..1);od;

  Il semble que chaque P_n ait $n-1$ racines, comme son degré.

  Montrons le par récurrence : C'est vrai pour les polynômes $P_2(X) = -2X+1$ et pour $P_3(X) = 6X^2-6X+1$ (**solve(6*x*x-6*x+1,x);**) ou calcul de Δ)

  Supposons que P_n admette $n-1$ racines réelles $0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ (0 n'est jamais racine, puisque $P_n(0) = 1$)

  La relation $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ montre que les zéros de la fonction dérivée $f^{(n)}$ sont exactement les racines du polynôme P_n sur $]0,+\infty[$. Sauf le nombre 0, qui est toujours zéro de la dérivée $f^{(n)}$, et jamais du polynôme P_n.

  $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sont donc des zeros de la fonction dérivée $f^{(n)}$. D'après le théorème de Rolle, $f^{(n+1)}$ s'annulera en des points $y_1 \in]x_1, x_2[, y_2 \in]x_2, x_3[, ..., y_{n-2} \in]x_{n-2}, x_{n-1}[$. Cela fournit $n-2$ zéros de $f^{(n+1)}$, strictement positifs, donc $n-2$ racines du polynôme P_{n+1}.

  Mais $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_1) = 0$, et le théorème de Rolle donne à nouveau une racine $y_0 \in]0, x_1[$.

  Enfin, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $d^\circ(P_n) = n-1 < 2n = d^\circ(x^{2n})$

  Les relations $f^{(n)}(x_{n-1}) = \lim\limits_{+\infty} f^{(n)} = 0$ montrent que $f^{(n)}$ passe par un extrèmum y_n (au moins) entre x_{n-1} et $+\infty$, et qu'en ce point $f^{(n+1)}$ s'annule. Finalement, $f^{(n+1)}$ admet $(n-2)+2 = n$ racines dans $]0,+\infty[$ et P_{n+1} aussi.

  On a ainsi montré par récurrence que tout polynôme P_n admettait $n-1$ racines sur $]0,+\infty[$. En conséquence, il est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

- Si f était développable en série entière sur un intervalle de la forme $[0, R[$, elle serait égale sur cet intervalle à sa série de taylor $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Or on montré que $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$.

  Donc on aurait $\forall x \in [0, R[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$. Ce qui est faux car $\forall x > 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$

  f n'est donc développable en série entière sur aucun voisinage à droite de 0.

- En notant désormais x_n la plus petite racines de P_n , on a montré que $0 < x_{n+1} < x_n$ ($y_0 < x_1$)

  La suite (x_n) est décroissante, minorée par 0, donc décroissante.

Centrale avec MAPLE

On donne un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Sans aucun calcul écrit, déterminer le rang de la matrice A, puis les valeurs propres de A, et leur ordre de multiplicité. Vérifiez ces résultats avec MAPLE.

Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de u soit diagonale par blocs ?

Trouver les matrices M telles que $M^2 = A$.