Oraux 2

* *

1 Sujet 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur la corps $\mathbf{K}$.

Quels sont les endomorphismes de E dont le rang et la trace valent 1 ?

Solution :

D'après le thèorème du rang, puisque $\text{rg}(f) = 1$, $\ker(f)$ est un hyperplan H.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ une base de H, qu'on complète par e_n en une base $B = (e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ de E.

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & ... & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr}(f) = a_n = 1$$

alors $\chi_f(X) = X^{n-1}(X-1)$, $\quad \text{Spec}(f) = \{0, 1\}$

$E_0^f = H$. $\quad$ Soit v une base de la droite vectorielle E_1^f

alors $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f est la projection sur la droite $E_1^f = \text{Vect}(v)$ de direction H.

* *

2 Sujet 2

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$, nilpotente. Montrer que $A^n = 0$

Solution : A est nilpotente donc il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $A^p = 0$

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de A. X^p est un polynôme annulateur de A donc $\lambda^p = 0$ et donc $\lambda = 0$. Donc $\text{Spec}(A) = \{0\}$.

Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbf{R}[X]$, donc est égal à X^n car 0 est sa seule racine.

Or χ_A est un polynôme annulateur de A , donc $A^n = 0$

* *

3 Sujet 3

CCP Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable ? inversible ? orthogonale ?

Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$

Solution :

En développant suivant la première colonne (ou première ligne), det(A)= $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Donc A est inversible. Elle n'est pas orthogonale car ses colonnes ne forment pas une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$.

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & -2 \\ 0 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x).[(x+1)(x-3)+4]$

$\chi_A(x) = (1-x).(x^2-2x+1) = -(x-1)^3$

1 est valeur propre triple de A.

Si A étant diagonalisable, il existerait une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que

$A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = I_3$, ce qui n'est pas le cas.

$\text{rg}(A - 1.I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1$

donc $\dim(E_1^A) = 3 - 1 = 2$

Recherchons les vecteurs propres de A.

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. $\quad A.V = 1.V \quad \Longleftrightarrow \quad (A - I_3).V = 0$

$\Longleftrightarrow \quad 2y - 2z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = z$

Les deux vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E_1^A.

Il n'y a pas de troisième vecteur propre indépendant puisque A n'est pas diagonalisable.

Pour obtenir la troisième colonne de B recherchons un vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de R^3 tel que $A.V_3 = V_2 + V_3$

$A.V_3 = V_2 + V_3 \quad \Longleftrightarrow \quad (A - I_3).V_3 = V_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \quad 2y - 2z = 1$

Prenons par exemple $y = \frac{1}{2}$ et $z = 0$

Alors $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. A est la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$.

Puisque $A.V_1 = V_1$, $A.V_2 = V_2$ et $A.V_3 = V_2 + V_3$, la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) est B.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (V_1, V_2, V_3).

La formule de changement de base pour un endomorphisme nous donne : $B = P^{-1}.A.P$
donc A est semblable à B.

****

4 Sujet 4

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{K})$.

A qeulle condition la matrice $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$ est elle inversible .

Solution :

En ajoutant à une colonne une combinaison linéaire d'autres colonnes, on ne change pas le rang d'une matrice.

Ajoutons à la $n+1$ ième colonne de M la première, à la $(n+2)^e$ la deuxième, ..., à la $(n+k)^e$ colonne la k^e :

$M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & 2A \\ A-B & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix}$

Soustrayons la $(n+k)^e$ colonne à la k^e :

$\begin{pmatrix} A+B & A \\ A-B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix}$

Ajoutons la k^e ligne à la $(n+k)^e$:

$\begin{pmatrix} B & A \\ -B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ a même rang que $\begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} B & \frac{1}{2}A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A).\det(B)$

Donc M est inversible si et seulement si A et B le sont.

****

5 Sujet 5

Montrer que si $A \in M_n(\mathbf{R})$, alors $\det(I_n + {}^tA.A) > 0$

Solution :

La matrice $I_n + {}^tA.A$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de $I_n + {}^tA.A$:

il existe un vecteur colonne X de $\mathbf{R}^n$, non nul, tel que $\quad (I_n + {}^tA.A).X = \lambda X$

alors ${}^tX.(I_n + {}^tA.A).X = \lambda.{}^tXX = \lambda \underbrace{\| X \|^2}_{>0}$

$${}^tX.X + {}^t(A.X).(AX) = \underbrace{\| X \|^2}_{>0} + \underbrace{\| A.X \|^2}_{\geq 0} = \lambda \underbrace{\| X \|^2}_{>0}$$

donc $\lambda > 0$

Ainsi, $I_n + {}^tA.A$ est semblable à une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$

donc $\det(I_n + {}^tA.A) = \prod_i \lambda_i > 0$

* *

6 Sujet 6

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{tr}({}^tA.A) \geq 0$

b) Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n.\mathrm{tr}({}^tA.A)}$

Cas d'égalité ?

Solution : a) Si $A = (a_{i,j})$, alors

$\mathrm{tr}({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$ (voir sujet 8)

donc $\mathrm{tr}({}^tA.A) \geq 0$.

b) Munissons $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire caonique :

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $\quad \left\langle X, Y \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

En notant $Z = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ ... \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \right| = | < Z, U > | \underbrace{\leq}_{(1)} \| Z \| . \| U \| = \sqrt{n. \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2} \underbrace{\leq}_{(2)} \sqrt{n. \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} = \sqrt{n.\mathrm{tr}({}^tA.A)}$$

Donc $|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n.\mathrm{tr}({}^tA.A)}$

Il y a égalité si et seulement si les inégalités (1) et (2) sont des égalités

D'après la relation de Cauchy-Schwarz, (1) est une égalité si et seulement si Z et U sont colinéaires, c'est à dire ssi $a_{1,1} = a_{2,2} = ... = a_{n,n}$

(2) est une égalité si et seulement si pour tous $i \neq j, a_{i,j} = 0$

Finalement, b) est une égalité si et seulement si A est de la forme $\lambda.I_n$, $\lambda \in \mathbf{R}$

* *

7 Sujet 7

CCP a) Montrer que l'application $\phi : (M, N) \longrightarrow \mathrm{tr}({}^tM.N)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$

b) Déterminer la matrice Φ de ϕ dans la base canonique de $M_n(\mathbf{R})$

Solution :

ϕ est clairement bilinéaire et symétrique sur $M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R})$

Si $C = A.B \in M_n(\mathbf{R})$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, $\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right)$

donc $\phi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tA.B) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i} \right)$

et $\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2 \right) > 0$ car, si $A \neq 0$, l'un au moins des coefficients $a_{k,i}^2$ est strictement positif.

ϕ est une forme bilinéaire et symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$

b) La base canonique de $M_n(\mathbf{R})$ est formée des n^2 matrices élémentaire $E_{i,j}$

Le terme général de la matrice Φ de ϕ dans cette base est $\Phi_{(i,j)(h,k)} = \phi(E_{(i,j)}, E_{(h,k)})$

$\phi(E_{(i,j)}, E_{(h,k)}) = \mathrm{tr}({}^tE_{(i,j)}.E_{(h,k)}) = \mathrm{tr}(E_{(j,i)}.E_{(h,k)})$

$= \mathrm{tr}(\delta_{(i,h)}.E_{(j,k)}) = \delta_{(i,h)}.\mathrm{tr}(E_{(j,k)}) = \delta_{(i,h)}.\delta_{(j,k)} = \delta_{(i,j),(h,k)}$

Donc $\Phi = I_{n^2}$

* *

8 Sujet 8

Soit A une matrice réelle symétrique et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres (pas forcément distinctes)

Montrer que $\sum_{(i,j) \in \{1,2,..,n\}^2} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

Solution : Introduisons le produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$: $\phi : (M, N) \longrightarrow \mathrm{tr}({}^tM.N)$

A est symétrique réelle donc diagonalisable :

$\exists P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P.\Delta.P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

alors, $\sum_{(i,j)} a_{i,j}^2 = \mathrm{tr}({}^tA.A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(P.\Delta.P^{-1}.P.\Delta.P^{-1}) = \mathrm{tr}(P.\Delta^2.P^{-1}) = \mathrm{tr}(\Delta^2)$

$= \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

* *

9 Sujet 9

a) Soit $M = \begin{pmatrix} n & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n & \ldots & -1 \\ & & \ddots & \\ -1 & -1 & \ldots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$

Montrer que M est une matrice définie positive.

b) Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$,

on définit $C = A \otimes B$ par $C = A \otimes B = (a_{i,j}.b_{i,j}) \in M_n(\mathbf{R})$

Montrer que $A \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique définie positive, $C = A \otimes M$ l'est aussi.

Solution :

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathbf{R}^n$, non nulle,

$${}^tX.M.X = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n). \begin{pmatrix} n & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n & \ldots & -1 \\ & & \ddots & \\ -1 & -1 & \ldots & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$${}^tX.M.X = \sum_{i=1}^{n} n x_i^2 - 2 \sum_{i<j} x_i x_j = (n+1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

$$\left(\text{ car } \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right)$$

or , en notant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =< X, U >^2 \leq \| X \|^2 . \| U \|^2$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leq n. \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

d'où ${}^tX.M.X \geq (n+1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ car $X \neq 0$

b) ??????????????????????????????

* *

10 Sujet 10

a) Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) + f(x) = 0$

Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$

Solution :

Posons $h(x) = f'(x) + f(x)$.

h est une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$.

f est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'+y=h(x)$

La solution génerale de l'équation homogène associée (E_0) : $y'+y=0$ est de la forme : $y(x)=\lambda.e^{-x}, \lambda \in \mathbf{R}$

Appliquons la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution de (E_0) de la forme $z(x)=\lambda(x).e^{-x}$, λ fonction à déterminer.

$z'(x)=\lambda'(x).e^{-x}-\lambda(x).e^{-x}$

$$z'(x)+z(x)=h(x) \implies \lambda'(x).e^{-x}=h(x)$$
$$\implies \lambda'(x)=h(x).e^{x}$$
$$\implies \lambda(x)=\int_0^x h(t).e^t dt+c$$

La solution génerale de l'équation (E) est donc :

$$y(x)=e^{-x}\int_0^x h(t).e^t dt+c.e^{-x},\ c \text{ constante réelle.}$$

Donc $\exists c \in \mathbf{R}, \forall x \in [0,+\infty[, \quad f(x)=e^{-x}\int_0^x h(t).e^t dt+c.e^{-x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} c.e^{-x}=0$

Soit $\varepsilon>0$. $\quad \exists A>0, \forall t>A, |h(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left| e^{-x}\int_0^x h(t).e^t dt \right| = \left| e^{-x}\int_0^A h(t).e^t dt + e^{-x}\int_A^x h(t).e^t dt \right|$$
$$\leq e^{-x}\underbrace{\left| \int_0^A h(t).e^t dt \right|}_{\text{constante } c_2} + e^{-x}\int_A^x \underbrace{|h(t)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}.e^t dt$$
$$\leq c_2 e^{-x} + e^{-x}\frac{\varepsilon}{2}(e^x-e^A) \leq c_2 e^{-x}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$\exists B>0$ (qu'on peut supposer $\geq A$) , tel que $\forall x \geq B, c_2e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et donc, pour tout $x \geq B, \left| e^{-x}\int_0^x h(t).e^t dt \right| \leq \varepsilon$

On ainsi montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left| e^{-x}\int_0^x h(t).e^t dt \right|=0$ et donc que $\lim\limits_{+\infty} f=0$

****

11 Sujet 11

Soit $f \in C^1([0,1],\mathbf{R})$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_1,x_2,...,x_n$ distincts dans $[0,1]$, tels que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)}=n$$

Solution :

Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[0,1]$ permet d'affirmer que $\exists c \in]0,1[$ tel que $(1)-f(0)=(1-0)f'(c)$ c'est à dire tel que $f'(c)=1$.

L'image du segment $[0,1]$ par la fonction continue f' est un segment J de $\mathbf{R}$, qui contient 1.

Montrons que 1 est un point intérieur à J.

- Il se peut que $J=\{1\}$, dans le cas où $f(x)=x$
- Si J est de la forme $[1,b], b>1$, alors la fonction $(x \to f'(x)-1)$ est continue sur $[0,1]$, positive et non identiquement nulle. Donc $\int_0^1 (f'(x)-1)dx>0$

mais $\displaystyle\int_0^1 (f'(x)-1)dx = f(1)-f(0)-1 = 0$, ce cas est donc impossible.
- de la même manière, le cas $J = [a,1], a < 1$ est exclu.
Donc J est de la forme $[a,b], a < 1 < b$ et contient un intervalle de la forme $[1-\alpha, 1+\alpha], \alpha > 0$
♣ Si $n = 2p$ est pair, soient $z_1, z_2, ..., z_p$ tels que $z_1 > z_2 > ... > z_p > 1$
et $z_{p+1} = 2 - z_1, \quad z_{p+2} = 2 - z_2, \quad ..., \quad z_{2p} = 2 - z_p$, z_1 étant pris suffisamment près de 1 pour que $1 - \alpha < \frac{1}{z_1} < \frac{1}{z_2} < ... < \frac{1}{z_p} < 1 < \frac{1}{z_{2p}} < ... < \frac{1}{z_{p+2}} < \frac{1}{z_{p+1}} < 1 + \alpha$
pour chaque i, $\frac{1}{z_i} \in J$ donc $\exists x_i \in [0,1]$ tel que $f'(x_i) = \frac{1}{z_i}$
Les x_i sont deux à deux distincts car les $f'(x_i) = \frac{1}{z_i}$ le sont.
alors $\dfrac{1}{f'(x_i)} + \dfrac{1}{f'(_{p+i})} = z_i + z_{p+i} = 2$
et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{f'(x_i)} + \frac{1}{f'(x_{p+i})} = \sum_{i=1}^{p} 2 = 2p = n$
♣ Si $n = 2p+1$ est impair, on définit de même les $2p$ nombres x_i pour $i = 1, 2, .., 2p$ et on ajoute $x_{2p+1} = c$ tel que $f'(c) = 1$

* *

12 Sujet 12

CCP Montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction *Arctan* admet n zéros réels qu'on calculera.
Solution :

* *

13 Sujet 13

CCP Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer l'équivalence :
(A est une matrice symétrique positive) $\iff$ $\exists B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A = {}^tB.B$
Solution :
♣ Si $\exists B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A = {}^tB.B$, alors ${}^tA = {}^t({}^tB.B) = {}^tB.B = A$
et pour tout vecteur colonne $X \in \mathbf{R}^n$,
${}^tX.A.X = {}^t X.{}^tB.B.X = {}^t(B.X).(B.X) = \| B.X \|^2 \geq 0$ donc la matrice A est symétrique positive.
♣ Si A est une matrice symétrique positive, elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$ et ses valeurs propres sont ≥ 0
$\exists P \in O_n(R)$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$ telles que $A = P.\Delta.P^{-1}$
Soit alors $\Delta' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, de sorte que $\Delta'^2 = \Delta$
alors, $A = P.\Delta.P^{-1} = P.\Delta'^2.P^{-1} = (P.\Delta'.P^{-1})(P.\Delta'.P^{-1}) = {}^tB.B$
(en ayant posé $B = P.\Delta'.P^{-1}$).

* *

14 Sujet 14

Calculer le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & & & \\ & \ddots & & (b) \\ (a) & & \ddots & \\ & & & a+b \end{vmatrix}$

Solution : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b^n$

par récurrence, $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$ si $a \neq b$

* *

15 Sujet 15

a) Rechercher les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifient :

$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + k$, k réel donné.

b) Même question pour la relation :

$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n + k$ (ENSI)

* *

16 Sujet 16

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = f(\frac{1}{x})$

Solution :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telle que :

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = f(\frac{1}{x})$

Par composition, f' est de classe C^1 donc f est de classe C^2 et

$\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} f(x)$

f est donc solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $x^2 y" + y = 0$

C'est une équation d'Euler. Faisons le changement de variable $t = \ln(x)$:

$f(x) = z(t) = z(\ln(x))$

$f'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln(x))$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} z''(\ln(x))$

Quand x décrit $]0, +\infty[$, $t = \ln(x)$ décrit $\mathbf{R}$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ x^2 f''(x) + f(x) = 0 \iff \forall t \in \mathbf{R},\ z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$ (E')

(E') est une équation du deuxième ordre linéaire à coefficients constants.

L'équation caractéristique assciée est : $r^2 - r + 1 = 0$

qui a pour solutions $r_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

La solution générale de (E') est :

$z(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ ou aussi $z(t) = \alpha e^{\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + \beta e^{\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t)$

donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall x > 0, f(x) = \alpha e^{\frac{\ln(x)}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)) + \beta e^{\frac{\ln(x)}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x))$

$f(x) = \sqrt{x} \Big(\ \alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x))\ \Big)$

♣ Réciproquement, si $f(x)=\sqrt{x}\left(\ \alpha\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\beta\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)$, alors

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ \alpha\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\beta\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\left(\ -\alpha\frac{\sqrt3}{2}\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\beta\frac{\sqrt3}{2}\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)$

$f'(x)=\dfrac{(\alpha+\beta\sqrt3)\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+(\beta-\alpha\sqrt3)\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))}{2\sqrt{x}}$

et $f(\frac{1}{x})=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\ \alpha\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))-\beta\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)$

$f'(x)=f(\frac{1}{x})$ si et seulement si $\alpha+\beta\sqrt3=2\alpha$ et $\beta-\alpha\sqrt3=-2\beta$

si et seulement si $\alpha=\beta\sqrt3$

Finalement,

$f(x)=\beta\sqrt{x}\left(\ \sqrt3\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)=2\beta\sqrt{x}\left(\ \frac{\sqrt3}{2}\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\frac12\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)$

$=2\beta\sqrt{x}\left(\ \sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))+\cos(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\sqrt3}{2}\ln(x))\ \right)$

$\boxed{f(x)=A\sqrt{x}\ \sin\left(\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt3}{2}\ln x\ \right)}$

* *

17 Sujet 17

Trouver une relation entre Arccos$(1-x)$ et Arcsin$\sqrt{\frac{x}{2}}$

Solution :

Notons $f(x)=$Arccos$(1-x)$ et $g(x)=$Arcsin$\sqrt{\frac{x}{2}}$

f et g sont définies et continues sur $[0,2]$ et dérivables sur $]0,2[$.

$\forall x\in]0,2[,\ f'(x)=-\dfrac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac12 f'(x)$$

donc $\exists k\in\mathbf{R},\forall x\in]0,2[,\quad g(x)=\frac12 f(x)+k$

$f(1)=$Arccos$(0)=\frac{\pi}{2}$ et $g(1)=$Arcsin$\sqrt{\frac12}=\frac{\pi}{4}$

donc $k=0$ et $\boxed{\forall x\in[0,2],\ \text{Arccos}(1-x)=2\text{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2}}}$

* *

18 Sujet 18

Centrale + CCP

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente, et on définit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$

a) Déterminer le domaine de définition Δ de f et montrer que $\forall x>0,|f(x)|\leq\dfrac{1}{x}$

b) Montrer que f est C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ puis $f(x)$

c) Montrer que f est continue sur Δ (on pourra exprimer f comme somme d'une série de fonctions) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$

Solution :

a) $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est défini.

$\forall x > 0, |\sin(t)| \leq t$ donc $|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}| \leq \underbrace{e^{-xt}}$

(intégrable sur $[0, +\infty[$ car $x > 0$)

donc $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\Delta = [0, +\infty[}$$

$$|f(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{\sin(t)}{t} \right|}_{\leq 1} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

b) ♣ Notons $g(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ et soit $a > 0$ et prolongeons $\dfrac{\sin(t)}{t}$ en 0 par la valeur 1.

$\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in [0, +\infty[, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t) e^{-xt}$

- $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \to g(x,t)$ est continue sur $[a, +\infty[$,

de même que la fonction $x \to \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$

- $\forall x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \to g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$,

de même que la fonction $t \to \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ (voir (3))

- $\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in [0, +\infty[, \left| \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = |-\sin(t) e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq \underbrace{e^{-at}}$ (3)

(intégrable sur $[0, +\infty[$ car $a > 0$)

Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ nous permet alors d'affirmer que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que $\forall x \in [a, +\infty[, \ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) dt$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt$

$$♣ \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = \Im m \left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-xt} dt \right) = \Im m \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_{t=0}^{t \to +\infty} = \Im m \left[\frac{-1}{i-x} \right]$$

$$= \Im m \left[\frac{x+i}{(x-i)(x+i)} \right] = \frac{1}{x^2+1}$$

donc, $\forall x \in]0, +\infty[, \ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$

d'où $\exists k \in \mathbf{R}, \ \forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) = -\text{Arctan}(x) + k$

et, puisque $\lim\limits_{\infty} f = 0, \ k = \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) = -\text{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2} = \text{Arctan}(\frac{1}{x})}$

c) Pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est convergente ,

donc $f(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$

Posons $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$

Sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin t$ a même signe que $(-1)^n$, la série $\sum u_n(x)$ est donc alternée.

$|u_n(x)| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} e^{-xt} dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{t}$

$|u_n(x)| \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \right) \longrightarrow +0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$

Par le changement de variable $t = n\pi + u$, on obtient :

$u_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi+u)}{n\pi+u} e^{-x(n\pi+u)} du = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{n\pi+u} e^{-x(n\pi+u)} du$

d'où $|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}}{(n+1)\pi+u} - \frac{e^{-x(n\pi+u)}}{n\pi+u} \right)}_{\leq 0} \sin(u) du \leq 0$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées.

donc $\forall x \in [0, +\infty[, |r_n(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

$\| r_n \|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |r_n(x)| \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$

La série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Chaque fonction $u_n(\ )$ étant continue, la somme f l'est aussi.

Ainsi, f est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\frac{\pi}{2}$ - Arctan$(x)) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$

****

19 Sujet 19

Ensam PSI 1998

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection, qui commute avec A et telle que $P.A = P$

Solution :

L'application : $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ (M, N) & \longrightarrow & M.N \end{array}$

est bilinéaire donc continue car $M_n(\mathbf{C})$ est de dimension finie.

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} A^{2k} = P = \lim\limits_{k\to\infty} A^k.A^k = (\lim\limits_{k\to\infty} A^k).(\lim\limits_{k\to\infty} A^k) = P.P$

Donc $P^2 = P$ et P est une matrice de projection.

En passant à la limita dans l'égalité $A^{k+1} = A.A^k = A^k.A$, on obtient : $P = A.P = P.A$

****

20 Sujet 20

CCP

On définit $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{n(4n^2-1)}$

Nature et calcul éventuel de $\sum u_n$

Solution :

$u_n \sim \dfrac{1}{4n^3}$ quand $n \to \infty$ (série de Riemann convergente) donc $\sum u_n$ converge.

♣ Considérons la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$. Elle converge au point 1 donc $R \geq 1$

$$\frac{1}{n(4n^2-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1} + \frac{c}{2n+1}$$

En multipliant par n et en faisant $n = 0$, on obtient $a = -1$

En multipliant par $2n-1$ et en faisant $n = \frac{1}{2}$, on obtient $b = 1$. De même $c = 1$

$$\forall x \in [-1,1], S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{2n-1} + \frac{x^n}{2n+1} \right)$$

$$\forall x \in]-1,1[, S(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

(les séries ne convergent pas au point 1)

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1} = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - x \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - 1$$

d'où $S(x) = \ln(1-x) + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - 1$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, S(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - 1}$$

♣ $\forall x \in [0,1], \forall n \geq 1, |u_n x^n| \leq u_n = \dfrac{1}{n(4n^2-1)}$

donc $\| u_n x^n \|_{[0,1]}^{\infty} \leq u_n = \dfrac{1}{n(4n^2-1)}$

La série entière converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$ et la somme S est continue sur $[0,1]$.

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x)$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\ln(1+\sqrt{x}) - 1 \right)}_{\ln(2)-1} + \lim_{x \to 1^-} \left(\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\ln(1-\sqrt{x}) \right)$$

pour calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \left(\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\ln(1-\sqrt{x}) \right)$,

faisons le changement $1 - \sqrt{x} = u$

$$\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\ln(1-\sqrt{x}) = \ln(u) + \ln(2-u) - \frac{1}{2}\left(1 - u + \frac{1}{1-u} \right)\ln(u)$$

$$= \ln(2-u) - \frac{u^2}{2(1-u)}\ln(u)$$
$$= \underbrace{\ln(2-u)}_{\to \ln 2} - \underbrace{\frac{u}{2(1-u)}}_{\text{borné}}\underbrace{u\ln(u)}_{\to 0}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln(1-\sqrt{x})\right) = \ln 2$

et finalement , $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2\ln 2 - 1}$

* *

21 Sujet 21

CCP

Déterminer le domaine Δ des entiers n de $\mathbf{N}$ pour lesquels l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}dx$ est définie.

Convergence et calcul éventuel de $\displaystyle\sum_{n\in\Delta} u_n$ et en déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x-1)}dx$ après avoir justifié sa convergence.

Solution :

♣ La fonction $f_n : (x \longrightarrow \frac{\ln x}{x^n})$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$

Puisque $\ln(x) = o(\sqrt{x})$ en $+\infty$, pour $n \geq 2$, $\dfrac{\ln x}{x^n} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ et f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

pour $n \leq 1$, $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\ln x}{x^n}$ et par minoration, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx$ est divergente.

finalement $\boxed{\Delta = \{n \in \mathbf{N}, n \geq 2\}}$

♣ Pour $n \geq 2$ intégrons par parties :

$$\int_1^A \frac{1}{x^n}\ln x\,dx = \int_1^A x^{-n}\ln x\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x\right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-n}}{-n+1}\,dx$$
$$= \frac{-1}{n-1}\frac{\ln A}{A^{n-1}} - \left[\frac{x^{-n+1}}{(-n+1)^2}\right]_1^A = \frac{-1}{n-1}\frac{\ln A}{A^{n-1}} - \frac{1}{A^{n-1}(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}$$

Puisque $n \geq 2$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln A}{A^{n-1}} = 0$

et $u_n = \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{x^n}\ln x\,dx = \frac{1}{(n-1)^2}$ $\qquad \boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}\ln x\,dx = \frac{1}{(n-1)^2}}$

♣ Pour $x > 1, 0 < \frac{1}{x} < 1$ et la série géométrique $\sum(\frac{1}{x})^n$ converge.

Notons $v_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$

$\forall x > 1, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\ln x = \dfrac{\ln x}{x(x-1)}$

Prolongeons g par continuité en 1 en posant $g(1) = 1$

$$\text{(puisque } \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1)$$

Puisque la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \int_1^{+\infty} |v_n(x)| dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ converge, on en déduit que g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x) \right) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} v_n(x)\, dx \right)$$ c'est à dire :

$$\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x-1)}\, dx = \frac{\pi^2}{6}}$$

* *

22 Sujet 22

Mines

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 3, non nulle telle que $A^3 = -A$ Montrer que A est semblable $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$ non nulle telle que $A^3 = -A$

$\det(A^3) = (\det A)^3 = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$

donc $\det(A)(\underbrace{(\det A)^2 + 1}_{\neq 0}) = 0$ donc $\det(A) = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé A.

$f^3 + f = 0$ et $\ker(f) \neq \{0\}$

♣ Montrons que $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + Id_{\mathbf{R}^3}) = E$

- c'est immédiat si on dispose du th. de décomposition des noyaux, car les polynômes X et $X^2 + 1$ étant premiers entre eux, la relation $f(f^2 + I) = \omega$ entraine alors :

$\ker(f) \oplus \ker(f^2 + I) = \ker \omega = E$ (ω endomorphisme nul)

- ce théorème ne figurant pas au programme, démontrons le résultat annoncé :

soit $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2 + I)$: $f(x) = 0$ et $f(\underbrace{f(x)}_{0}) = -x$

donc $x = 0$, la somme $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + I)$ est directe.

soit $x \in \mathbf{R}^3$, posons $a = f^2(x) + x$ et $b = -f^2(x)$

$f(a) = f^3(x) + f(x) = 0$ donc $a \in \ker f$

$(f^2 + I)(b) = -f^4(x) - f^2(x) = -f(f^3(x) + f(x)) = -f(0) = 0$ donc $b \in \ker(f^2 + I)$

Comme $x = a + b$, $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + I) = \mathbf{R}^3$

♣ $\ker(f) \neq \mathbf{R}^3$, sinon f serait nul, donc $\ker(f^2 + I) \neq \{0\}$

Soit y une vecteur non nul de $\ker(f^2 + I)$, $f^2(y) = -y$. Montrons que $(y, f(y))$ est libre.

Soient λ et μ réels tels que $\lambda y + \mu f(y) = 0$, alors $\lambda f(y) + \mu f^2(y) = \lambda f(y) - \mu y = 0$

En multipliant la première égalité par λ , la deuxième par $-\mu$ et en ajoutant, on obtient :

$(\lambda^2 + \mu^2).y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \mu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$

Donc le système $(y, f(y))$ est libre et $\dim(\ker(f^2 + I)) \geq 2$

Puisque $\dim(\ker f) \geq 1$ $(\ker(f) \neq \{0\})$, nécessairement,

$\dim(\ker(f^2+I)) = 2$ et $\dim(\ker f) = 1$

Soit alors a une base de $\ker f$, y un vecteur non nul de $\ker(f^2+I)$ de sorte que $(y, f(y))$ est une base de $\ker(f^2+I)$. Alors $(a, y, f(y))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ car $\ker(f) \oplus \ker(f^2+I) = \mathbf{R}^3$

et puisque $f(f(y)) = -y$ la matrice de f dans la base $(a, y, f(y))$ est m Montrer que A est semblable $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A et B étant les matrices de f dans deux bases distinctes , elles sont semblables.

* *

23 Sujet 23

Mines

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}\,dx$

Existence et limite éventuelle de la suite (u_n)

Solution :

Soit $\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+...+x^n}$, qui est bien défini car $1+x+x^2+...+x^n > 0$

$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ne sont pas intégrables sur $[0, +\infty[$

$f_2(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, de même que $f_n(x)$ pour $n \geq 2$ car alors $f_n(x) \leq f_2(x)$.

La suite (u_n) est donc définie à partir du rang 2.

$\forall x \in [0, +\infty[-\{1\}, f_n(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$

- si $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1-x$
- si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$
- si $1 < x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers la fonction g.

- pour $n \geq 2$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction g, qui est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car nulle sur intégrable sur $[1, +\infty[$).
- $\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{f_2(x)}_{\text{intégrable sur } [0,+\infty[}$.

Par application du théorème de convergence majorée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

* *

24 Sujet 24

ENSI Soient f et g deux endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie.

Si f_og est un projecteur, montrer que $\text{rg}(g_of) \geq \text{rg}(f_og)$

Solution :

f_og est un projecteur, donc $f_og_of_og = f_og$

Or on sait que $\text{rg}(u_ov) \geq \text{rg}(u)$ et $\text{rg}(u_ov) \geq \text{rg}(v)$, donc :

$\text{rg}(f_og) = \text{rg}(f_o(g_of)_og) \leq \text{rg}(f_o(g_of)) \leq \text{rg}(g_of)$

* *

25 Sujet 25

ENSI

Trouver une relation de récurrence concernant $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ et montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$

Solution :

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x).\tan^n x\, dx =$$

$$= \left[\ \frac{1}{n+1}.\tan^{n+1} x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, (\underbrace{\tan x - 1}_{\leq 0})\, dx \leq 0$$

La suite (I_n) est décroissante.

donc $\quad I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

et l'encadrement $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$ entraine que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$ quand $n \to +\infty$

* *

26 Sujet 27

ENSI

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(\ 1 - \frac{x}{n}\ \right)^n \sin x\, dx$.

Etudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$

Solution :

Définissons $h_n : x \longrightarrow \begin{cases} \left(\ 1 - \dfrac{x}{n}\ \right)^n \sin x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ \quad 0 & \text{si} \quad\ \ x > n \end{cases}$

h_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\quad (h_n(0) = 0)$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \geq n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx$

L'étude des variations de la fonction $(u \to \ln(1 - u + u)$ montre que :

$$\forall u \in]-\infty, 1[, \quad \ln(1-u) + u \leq 0$$

donc $\quad \ln(1-u) \leq -u$, $\qquad 1 - u \leq e^{-u}$

Donc $\forall x \in [0, n[, \quad 0 \leq \frac{x}{n} < n$, $\quad$ on a $\quad 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}}$

et donc $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$

Donc, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad |h_n(x)| \leq e^{-x} \qquad (1)$

- Soit $x \in [0,+\infty[$, pour n assez grand, $x < n$ et $x \in [0,n]$ et donc $h_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin(x)$

$$h_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \sin(x) \longrightarrow e^{-x}\sin x \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction H : $x \longrightarrow e^{-x}\sin x$.

La majoration (1) permet d'appliquet le théorème de convergence dominée et de conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} H(x)\,dx$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx = \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{ix}\,dx\right) = \Im m\left[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right]_{c=0}^{t\to+\infty} = \Im m\left[\frac{-1}{-1+i}\right]$$

$$= \Im m\left[\frac{1+i}{(1+i)(1-i)}\right] = \frac{1}{2}$$

Finalement, $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

* *

27 Sujet (intégrale de Wallis)

ENSI

Soit $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Etablir une relation de récurrence sur les termes de la suite (u_n), étudier les varaitions de (u_n) et la suite $(n.u_n.u_{n-1})$

En déduire un équivalent de $u_n \quad n \to +\infty$

Solution :

♣ $u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \sin^n x\,dx = \left[-\cos x\ \sin^n x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2 x\ \sin^{n-1} x\,dx.$

$= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\ \sin^{n-1} x\,dx = n(u_{n-1}-u_{n+1})$

d'où $\boxed{(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}}$

♣ $u_{n+1}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\underbrace{\sin x - 1}_{\leq 0})\,dx \leq 0$

La suite (u_n) est décroissante :

$$u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}u_{n+1} \quad \text{donc} \quad 1 \leq \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n-1}$$

on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ c'est à dire que $u_{n+1} \sim u_n \quad$ quand $\quad n \to +\infty$

L'égalité $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ entraine que $\quad (n+1)u_{n+1}u_n = nu_nu_{n-1} \quad$ c'est à dire que la suite $(\underbrace{nu_nu_{n-1}}_{v_n})$ est constante.

$v_1 = u_1.u_0 = \frac{\pi}{2}$

donc $\forall n \geq 1, \quad n u_n u_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

♣ Puisque $u_n \sim u_{n-1}$, il s'ensuit que $n.u_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$

et finalement $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \text{ quand } \quad n \to +\infty}$

* *

28 Sujet (intégrale de Gauss)

ENSI

On rappelle que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $\quad n \to +\infty$

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ converge. On note α sa valeur.

b) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx.$

Exprimer J_n en fonction de termes de la suite (w_n).

Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ et en déduire la vaelur de α.

Solution :

b) ♣ le changement de variable $x = \sqrt{n}.\cos t$, $\quad dx = -\sqrt{n}.\sin t \, dt$ donne :

$$J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 t)^n (-\sqrt{n}.\sin t) \, dt = \sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} \, dt = \sqrt{n}.w_{2n+1}$$

Puisque $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand $\quad n \to +\infty$, on a :

$$J_n \sim \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

♣ Soit $h_n : x \longrightarrow \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n} \right)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad x > \sqrt{n} \end{cases}$

h_n est continue sur $[0, +\infty[$, $(h_n(\sqrt{n}) = 0)$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \geq n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x) \, dx$

Pour tout $x \geq 0$, pour tout $n > x$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n = e^{n \ln(1-\frac{x^2}{n})} \quad \longrightarrow \quad e^{-x^2} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$\text{car} \quad n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \sim n.\frac{-x^2}{n} \longrightarrow -x^2 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction H :

$x \longrightarrow e^{-x^2}$.

de plus l'inégalité $\quad \forall u \in]-\infty, 1[, 1 - u \leq e^{-u}$ entraîne

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \leq \frac{-x^2}{n} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n \leq e^{-x^2}$$

Donc $\forall n \in N^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad h_n(x) \leq e^{-x^2}$

Cette majoration permet d'appliquet le théorème de convergence dominée et de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} H(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$$

et puisque $\lim_{n\to\infty} J_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

****

29 Sujet 30

ENSI

a) Existe-t-il une suite (b_n) telle que $\forall x \in]0,\pi[, x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Solution :

a) Recherchons une fonction f 2π-périodique dont la série de Fourier soit réduite à $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$, donc f impaire, et telle que cette série soit égale à x^2 sur $]0,\pi[$.

Soit f 2π-périodique et impaire définie par : $\forall x \in]0,\pi[, f(x) = x^2$

(alors $\forall x \in]-\pi,0[, f(x) = -x^2$)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^*, b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(nx)}{n}x^2 \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2x}{n}\cos(nx)\,dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}x \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n}\left[\frac{-\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3}
\end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, b_{2n}(f) = -\dfrac{\pi}{n}$

et $b_{2n+1}(f) = \dfrac{2\pi}{2n+1} - \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3}$

La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux, (discontinue en $-\pi$ et en π, continue et dérivable en 0), sa série de Fourier converge donc en tout point $x \in \mathbf{R}$ (et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$)

En tout point de $]0,\pi[$ où f est continue, la somme vaut $f(x) = x^2$

donc , $\forall x \in]0,\pi[, \quad x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$

b) $S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\pi}{n}\sin(2nx) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2\pi}{2n+1} - \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3} \right)\sin((2n+1)x)$

$$\begin{aligned}
S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n}\sin(n\pi) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{2n+1} - \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \right)\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2(-1)^n\pi}{2n+1} - \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

donc $\displaystyle\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right)$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$

* *

30 Sujet 31

ENSI

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[, \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n^2(t)\,dt$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) et calculer sa limite.

Solution :

♣ $\forall x \in [0,1[, \quad f_0(x) = 1$

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)^2\,dt = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t + 1 \right)^2 dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{t^6}{9} + t^4 + t^2 + 1 + \frac{2t^5}{3} + \frac{2t^4}{3} + \frac{2t^3}{3} + 2t^3 + 2t^2 + 2t \right) dt$$

$$= 1 + \frac{x^7}{63} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^2$$

$$= \frac{x^7}{63} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{3} + \frac{2x^4}{3} + x^3 + x^2 + x + 1$$

- par récurrence immédiate on montre que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[, \quad f_n(x) \geq 1 > 0$
- Montrons par récurrence sur n que $\forall x \in [0,1[, \quad f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$

c'est vrai pour $n = 1$ car $f_0(x) = 1 \leq 1 + x = f_1(x)$

Supposons cela vrai à l'ordre n : $\forall x \in [0,1[, \quad f_{n-1}(x) \leq f_n(x)$

alors, $\forall x \in [0,1[, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\,dt$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \underbrace{(f_n(t) - f_{n-1}(t))}_{\geq 0}.\underbrace{(f_n(t) + f_{n-1}(t))}_{\geq 0}\,dt \quad \geq 0$$

Donc pour tout $x \in [0,1[$, la suite numérique réelle $(f_n(x))$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

- Or remarquons que $f_1(x) = 1 + x$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1 \leq 1 + x + x^2 + x^3$$

$$f_3(x) = \frac{x^7}{63} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{3} + \frac{2x^4}{3} + x^3 + x^2 + x + 1 \leq 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

Montrons alors par récurrence que que pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$

On vient de le vérifier pour $n = 1, 2, 3$

Supposons cela vrai jusqu'à l'ordre n.

alors $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n^2(t)\, dt \leq 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 dt = 1 + \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{1-x}$

Donc $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

- Pour tout x de $[0,1[$, la suite $(f_n(x))$ est croissanre et majorée. Elle converge donc. Soit $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction g, telle que :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1[\text{ vers une fonction } g, \text{ telle que : } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{1-x}}$$

♣ - Soit $x \in [0,1[$, fixé. $\forall t \in [0,x], \forall n \in \mathbf{N}, f_n(t) \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x} = \text{cte}$

La suite de fonctions $(t \longrightarrow f_n(t))_n$ est donc dominée sur $[0,x]$ par la constante $\dfrac{1}{1-x}$ qui est intégrable sur le segment $[0,x]$. Domination analogue pour son carré.

Par application du théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^x f_n^2(t)\, dt \right) = \int_0^x \left(\lim_{n \to +\infty} f_n^2(t) \right) dt$$

En passant à la limite pour x fixé quand $n \to \infty$ dans l'égalité $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n^2(t)\, dt$, on obtient :

$$g(x) = 1 + \int_0^x g^2(t)\, dt$$

♣ - La suite $(f_n(x))_n$ étant croissante, $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq f_n(x) \leq g(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

Posons $d_n(x) = g(x) - f_n(x)$

Soient $0 \leq x \leq y < 1$

$$d_n(y) - d_n(x) = g(y) - g(x) - (f_n(y) - f_n(x))$$
$$= \int_0^y g^2(t)\, dt - \int_0^x g^2(t)\, dt - \left(\int_0^y f_n^2(t)\, dt - \int_0^x f_n^2(t)\, dt \right)$$
$$= \int_0^y (g^2(t) - f_n^2(t))\, dt - \int_0^x (g^2(t) - f_n^2(t))\, dt$$

$$d_n(y) - d_n(x) = \int_x^y \underbrace{(g^2(t) - f_n^2(t))}_{\geq 0}\, dt \geq 0$$

La fonction $(x \longrightarrow d_n(x))$ est donc croissante sur $[0,1[$.

Pour tout $a \in [0,1[$, on a donc $\sup\limits_{x \in [0,a]} d_n(x) = d_n(a)$

$\forall x \in [0,a], \quad 0 \leq d_n(x) \leq d_n(a) = g(a) - f_n(a)$

donc $\| g - f_n \|_{[0,a]}^{\infty} = \| d_n \|_{[0,a]}^{\infty} \leq g(a) - f_n(a) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ car $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(a) = g(a)$

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge donc uniformément sur tout segment } [0,a] \subset [0,1[}$$

Chaque fonction f_n étant continue car polynomiale, la limite g est également une fonction continue sur $[0,a]$ et finalement sur $[0,1[$ car ceci est valable pour tout $a \in [0,1[$.

La fonction $(x \longrightarrow \int_0^x g^2(t)\,dt)$ est alors de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue.

Et la relation $g(x) = 1 + \int_0^x g^2(t)\,dt$ permet de conclure que g est C^1.

On peut alors dériver cette relation, ce qui donne :

$g'(x) = g^2(x)$

Donc $\forall x \in [0,1[, \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = 1$ (on a vu que $g(x) \geq 1 > 0$)

en intégrant, $\dfrac{-1}{g(x)} = x + k$ (k constante réelle)

en $x = 0$, $\dfrac{-1}{g(0)} = -1 = k$

donc $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

9

****

31 Sujet 33

ENSI

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ sont semblables.

Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$, $A.B$ et $B.A$ sont elles nécessairement semblables ?

Solution :

♣ ${}^t(A.{}^tA) = {}^t({}^tA).{}^tA = A.{}^tA$. La matrice $A.{}^tA$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Elle est semblable à une matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ 0 & ... & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

La matrice ${}^tA.A$ est elle aussi symétrique réelle donc diagonalisable.

Et puisque $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$, $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ ont même spectre.

${}^tA.A$ est elle aussi semblable à la même matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ 0 & ... & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ semblables à la même matrice Δ sont semblables entre elles. (transitivité de la similitude)

♣ Notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(\mathbf{R})$ (dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne).

$E_{1,2}E_{2,2} = E_{1,2}$ et $E_{2,2}E_{1,2} = 0$ ne sont pas semblables.

Donc $A.B$ et $B.A$ peuvent ne pas être semblables.

****

32 Sujet 34

Mines

Montrer que l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution réelle x_n et déterminer un développement asymptotique de (x_n)

Solution :

♣ Soit φ la fonction $x \longrightarrow e^x + x$

$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = e^x + 1 \geq 1$. La fonction φ est strictement croissante et continue sur $\mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

φ réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur$\mathbf{R}$

Pour tout entier n, n admet un unique antécédent par φ, qu'on notera x_n. x_n est l'unique réel tel que $\varphi(x_n) = n$ c'est à dire tel que $e^{x_n} + x_n = n$

♣ φ étant strictement croissante, φ^{-1} l'est aussi.

Donc $\quad n < n+1 \Rightarrow \varphi^{-1}(n) = x_n < \varphi^{-1}(n+1) = x_{n+1}$

La suite (x_n) est croissante.

Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite $L \in \mathbf{R}$, on aurait $\lim(e^{x_n} + x_n) = e^L + L$, ce qui est incompatible avec l'égalité $e^{x_n} + x_n = n$ quand $n \to +\infty$.

Donc $\lim(x_n) = +\infty$

-Alors $e^{x_n} + x_n \sim e^{x_n} \sim n \quad$ donc $x_n \sim \ln(n)$

Un premier développement asymptotique de (x_n) est $x_n = \ln(n) + o(\ln n)$

-Posons alors $x_n = \ln n + y_n$ (donc $y_n = o(\ln n)$) et cherchons un équivalent de y_n :

$e^{x_n} + x_n = n \quad \Rightarrow \quad e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n$

$ne^{y_n} + y_n = n - \ln n$ et, en prenant un équivalent pour chaque membre,

$ne^{y_n} \sim n \quad$ donc $\quad \lim e^{y_n} = 1 \quad$ et $\quad \lim y_n = 0$

Alors $n(e^{y_n} - 1) = -y_n - \ln n$ et, en prenant un équivalent pour chaque membre, $ny_n \sim -\ln n$

Donc $y_n \sim -\dfrac{\ln n}{n}$

Un deuxième développement asymptotique de (x_n) est $x_n = \ln(n) - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n} \right)$

-Posons maintenant $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n$ (donc $z_n = o(\frac{\ln n}{n})$) et cherchons un équivalent de z_n :

$e^{\ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n} + \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n = n$

Le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne :

$$n\left[1 + \left(-\frac{\ln n}{n} + z_n \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2 n}{n^2} - 2z_n\frac{\ln n}{n} + z_n^2 \right) + o\left(-\frac{\ln n}{n} + z_n \right)^2 \right] + \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n = n$$

$$nz_n + \frac{\ln^2 n}{2n} - z_n \ln n + \frac{nz_n^2}{2} + o\left(-\frac{\ln n}{n} + z_n\right)^2 - \frac{\ln n}{n} + z_n = 0$$

puisque $z_n = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), \quad o\left(-\dfrac{\ln n}{n} + z_n\right)^2 = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$

donc $nz_n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{z_n}{2} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{2n} + o\left(+\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$

en prenant un équivalent pour chaque membre, $nz_n \sim -\dfrac{\ln^2 n}{2n}$ et donc $z_n \sim -\dfrac{\ln^2 n}{2n^2}$

Ce qui complète le développement asymptotique de (x_n) :

$$\boxed{x_n = \ln(n) - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\right)}$$

* *

33 Sujet 35

Mines

a) Déterminer le domaine de définition et la continuité de la fonction $f : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$

b) Montrer que $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ quand $x \to 0$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ plus simple.

Solution :

a) pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-nx}}{n+x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$, série géométrique de raison < 1 donc convergente.

Pour $x = 0$, $\frac{e^{-nx}}{n+x} = \frac{1}{n}$, série divergente.

Pour $x < 0$, $\lim \frac{e^{-nx}}{n+x} = \infty$, la série est grossièrement divergente.

Le domaine de définition de f est donc $D_f =]0, +\infty[$

♣ soit $[a, b]$ un segment quelconque de $]0, +\infty[$.

$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq \underbrace{\frac{e^{-nx}}{n+x}}_{u_n(x)} \leq \frac{e^{-nb}}{n+a} \quad$ donc $\quad \| u_n \|_{[a,b]}^{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{e^{-nx}}{n+x} \right| \leq \frac{e^{-nb}}{n+a}$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$.

Chaque fonction u_n est continue sur $[a, b]$. La fonction somme f est donc continue sur $[a, b]$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, f est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $g(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-xe^{-nx}}{n(n+x)}$

or $\forall x \in]0, b]$, $0 \leq \frac{xe^{-nx}}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n^2}$ donc $|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b}{n^2} = b\frac{\pi^2}{6}$

par ailleurs $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = -\ln(1 - e^{-x}) \qquad$ (car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$)

donc $f(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = g(x) - \ln(1 - e^{-x})$

$g(x)$ étant bornée au voisinage de 0, on en conclut que $\boxed{f(x) \sim -\ln(1 - e^{-x}) \text{ quand } x \to 0}$

* *

* *

34 Sujet 1

ENSI

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A.^tA$ et ${}^tA.A$ sont semblables.

Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$, $A.B$ et $B.A$ sont elles nécessairement semblables ?

Solution :

888888888888888888888888888888888888

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$$

35 Sujet 1

ENSI

$F_n = 1/((1 + X/n)^n - 1)$.

(ou $F_n = \frac{1}{\left(1+\frac{X}{n}\right)^n - 1}$ pour ceux qui prfrent...).

1) Dcomposition en lments simples de F_n. 2) Que peut-on en dduire lorsque n tend vers l'infini ?

Rponse : un dveloppement en srie de fractions rationnelles de $1/(e^x - 1)$.

Simplement, je sche sur la permutation limite/somme qui semble requise pour pouvoir conclure. Quelqu'un voit-il quelque chose de praticable ?

Merci d'avance pour vos claircissements. Denis Choimet

Solution :

****

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(f) = a_n = 1$$