Oraux 2006 niveau 2 - Centrale - Mines - ENS - Solutions

****

1 Sujet 1

Définition : On appelle dérangement d'ordre n toute permutation $\sigma \in S_n$ qui n'a aucun point fixe, c'est à dire telle que :

$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \sigma(i) \neq i$.

On note d_n le nombre de dérangements de S_n

a) Donner une relation exprimant d_n en fonction de d_{n-1} et d_{n-2}

En déduire que $\forall n \geq 1, d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et donner un équivalent de d_n quand $n \to +\infty$

b) Que vaut la fonction génératrice $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k!} z^k$, pour z complexe ?

Solution

a) Considérons s un dérangement d'ordre $n, n \geq 3$, c'est à dire une permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ qui n'a aucun point fixe. Soient $j = s(n)$ et $i = s^{-1}(n)$

$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & ... & n & ... & \gamma & j \end{pmatrix}$

Premier cas : Si $i = j$, la valeur de j et la restriction s' de s au sous ensemble $\{1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n-1\}$ permettent de définir s.

Autrement dit, s est dfinie par la donnée de $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et de s', dérangement de l'ensemble $\{1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n-1\}$, ensemble qui possède $n-2$ éléments. Il y a donc $(n-1).d_{n-2}$ manières de définir s ainsi.

Deuxième cas : Si $i \neq j$, notons $\tau_{j,n}$ la transposition de $\{1, 2, ..., n\}$ qui échange j et n et laisse les $n-2$ autres indices inchangés.

Alors la restriction s" de $(\tau_{j,n})_o s$= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & ... & j & ... & \gamma & n \end{pmatrix}$

à l'ensemble $\{1, 2, ..., n-1\}$ est un dérangement de cet ensemble.

Il suffit donc de connaître l'indice i et le dérangement s" pour déterminer s. Ce qui donne $(n-1).d_{n-1}$ manières de définir s ainsi.

Au terme de cet inventaire, $d_n = (n-1).d_{n-1} + (n-1).d_{n-2}$

$$d_n = (n-1).(d_{n-1} + d_{n-2})$$

$d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$

On vérifie que la formule $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ est vraie pour $n = 1, 2, 3$

Supposons la vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$.

Alors $d_n = (n-1).d_{n-1} + (n-1).d_{n-2}$

$d_n = (n-1).(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1).(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$
$d_n = n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1).(n-1)!.\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$
$d_n = n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + n! \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$
$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$, donc $d_n \sim e^{-1}.n!$
b) Soient, pour $k \in \mathbf{N}$, $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ et $b_k = 1$
Soit $\{c_k\}$ la série produit de Cauchy des séries $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$
$c_0 = a_0 b_0 = 1$
$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1.1 + (-1).1 = 0 = \frac{d_1}{1!}$
$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1.1 + (-1).1 + \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{d_2}{2!}$
et $\forall n \geq 2, c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{d_n}{n!}$
$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - c_0$
$f(z) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k).(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k) - c_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \right) . \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) -1$
$f(z) = (e^{-z}).\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{e^{-z} - 1 + z}{1-z}$
.

* *

2 Sujet 2

Soient $A \in M_{n_1,p_1}(\mathbf{R}), B \in M_{n_2,p_2}(\mathbf{R}), C \in M_{n_1,p_2}(\mathbf{R})$, et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbf{R})$,

On note :

-$ker(A)$ l'ensemble des vecteurs-colonnes X de $\mathbf{R}^{p_1}$ tels que $A.X = 0$

-$Im(A)$ l'ensemble des vecteurs-colonnes Y de R^{n_1} pour lesquels il existe $X \in R^{p_1}$ tels que $Y = A.X$

-et, lorsque F est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{p_2}$, $Im(A)$ l'ensemble des vecteurs-colonnes Y de R^{n_1} pour lesquels il existe $X \in R^{p_2}$ tels que $Y = A.X$

Montrer que :

$$\left(\ rg(M) = rg(A) + rg(B) \ \right) \Leftrightarrow \left(\ C(ker(B)) \subset Im(A) \ \right)$$

Solution .

* *

3 Sujet 3

Soient $0 \leq a < b$ et f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, de période $T > 0$.

a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(nt)dt$

b) Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$, continue.

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g(t)f(nt)dt$

Solution :

a) Par le changement de variable $u = nt$,

$$\int_a^b f(nt)dt = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(u)du$$

$$\int_{na}^{nb} f(u)du = \int_{na}^{na+T} f(u)du + \int_{na+T}^{na+2T} f(u)du + ... + \int_{na+(m-1)T}^{na+mT} f(u)du + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du$$

avec $na + mT \leq nb < na + (m+1)T$ (*)

c'est à dire $m \leq \frac{n(b-a)}{T} < m+1$

ou encore, $m = E(\frac{n(b-a)}{T})$

or $\int_{na+kT}^{na+(k+1)T} f(u)du = \int_{na}^{na+T} f(v+kT)dv = \int_{na}^{na+T} f(v)dv = \int_a^{a+T} f(x)dx$

(par le changement $u = v + kT$ et par périodicité)

donc, $\int_{na}^{nb} f(u)du = m\int_a^{a+T} f(v)dv + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du$

f est continue donc bornée sur $[a, a+T]$ et aussi sur $[a, +\infty[$ par périodicité.

Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

alors $\left| \int_{na+mT}^{nb} f(u)du \right| \leq \int_{na+mT}^{nb} |f(u)|du \leq (nb - na - mT)M \leq MT$, d'après (*)

or $\frac{m}{n} \leq \frac{b-a}{T} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{b-a}{T}$

et puisque $\int_a^b f(nt)dt = \frac{1}{n}\left(m\int_a^{a+T} f(v)dv + \int_{na+mT}^{nb} f(u)du \right)$

on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(nt)dt = \frac{b-a}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx$

b) Soit $\epsilon > 0$

g étant continue, il existe une fonction φ, en escalier sur $[a,b]$,

telle que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3M(b-a)}$

Il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_p = b$ telle que la restriction de φ à chaque intervalle $]a_i, a_i + 1[$ est une constante relle λ_k.

alors, $\int_a^b g(t)f(nt)dt = \int_a^b (g(t) - \varphi(t))f(nt)dt + \int_a^b \varphi(t)f(nt)dt$

d'une part,

$$\left| \int_a^b (g(t) - \varphi(t))f(nt)dt \right| \leq \int_a^b |g(t) - \varphi(t)|.|f(nt)|dt \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.Mdt \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

d'autre part, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(t)f(nt)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t)f(nt)dt \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(nt)dt \right) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\lambda_k \lim_{n\to\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(nt)dt \right)$

$= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\lambda_k \frac{a_{k+1}-a_k}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt \right)$, d'après la question a)

$= \left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \frac{a_{k+1}-a_k}{T} \right) . \int_a^{a+T} f(t)dt$

$= \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt$

donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que

$\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b \varphi(t) f(nt)dt - \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Enfin, $\frac{1}{T} \int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt = \left(\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt \right) . \left(\int_a^b g(t)dt + \int_a^b (\varphi(t) - g(t))dt \right)$

$= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b g(t)dt + \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b (\varphi(t) - g(t))dt$

avec $\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)dt. \int_a^b (\varphi(t) - g(t))dt \right| \leq \frac{1}{T} MT(b-a) \frac{\varepsilon}{3M(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3}$

Finalement, pour $n \geq n_0$

$\left| \int_a^b g(t) f(nt)dt - \frac{1}{T} \int_a^b g(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b (g(t) - \varphi(t)) f(nt)dt \right|$

$+ \left| \int_a^b \varphi(t)) f(nt)dt - \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right| + \left| \frac{1}{T} \int_a^b (\varphi(t) - g(t))dt. \int_a^{a+T} f(t)dt \right|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(t) f(nt)dt = \frac{1}{T} \int_a^b g(t)dt. \int_a^{a+T} f(t)dt$

****

4 Sujet 4

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal (c'est à dire $\mathrm{Im} p \perp \ker p$)

(ii) $p^* = p$ (p^* est l'endomorphisme adjoint de p)

(iii) p est 1-lipschitzien

b) PO, ensemble des projecteurs orthogonaux de E est il un compact de $L(E)$?

Solution :

b) -PO est borné car $\forall p \in PO, \|p\| \leq 1$

- Soit(p_n) une suite d'éléments de PO, qui converge dans $L(E)$ vers $q \in L(E)$. (peu importe la norme, $L(E)$ est de dimension finie)

L'application $(f, g) \to f_o g$, de $L(E) \times L(E)$ dans $L(E)$, est bilinéaire, donc continue, puisque E est de dimension finie, donc $\lim_{n\to\infty} p_{n_o} p_n = (\lim_{n\to\infty} p_n)_o (\lim_{n\to\infty} p_n)$

et, puisque $p_{n_o} p_n = p_n$, par passage à la limite, $q_o q = q$

q est un projecteur

L'application $f \to f^*$, de $L(E)$ dans lui-même, est linéaire, donc continue, donc

$\lim_{n\to\infty} (p_n{}^*) = (\lim_{n\to\infty} p_n)^*$

et puisque pour tout $n, p_n{}^* = p_n$, il s'ensuit que $q = q^*$

q est donc un projecteur orthogonal.

On a ainsi montré que toute suite cconvergente d'éléments de PO a sa limite dansPO, c'est à dire que PO est un fermé de $L(E)$

PO, fermé et borné, est un compact de l'espace vectoriel normé $L(E)$

* *

5 Sujet 5

Soient A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, telles que, pour tout vecteur colonne X de $\mathbf{R}^n$, $0 \leq {}^tX.A.X \leq {}^tX.B.X$

Montrer que $\det(A) \leq \det(B)$.

Solution :

Notons, pour X et Y vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^n$, $\varphi_A(X,Y) = {}^tX.A.Y$ et $\varphi_B(X,Y) = {}^tX.B.Y$

A et B sont deux matrices symétriques positives, donc leurs valeurs propres sont ≥ 0 et leurs dterminants aussi.

♣ Si $\det(A) = 0$, alors l'inégalité deamndée est vérifiée puisque $\det(A) \geq 0$.

♣ Supposons que $\det(A) \neq 0$.

Alors toutes les valeurs propres de A sont > 0 , φ_A est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

$q_B(X) = {}^tX.B.X$ est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$.

Il existe donc une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n)$ orthonormale pour φ_A et diagonale pour q_B.

$Mat_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,..,\varepsilon_n)}(q_A) = I_n$ car $\varphi_A(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ et $Mat_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,..,\varepsilon_n)}(q_B) = \Delta = diag(\mu_1, \mu_2, .., \mu_n)$

Soit $(e_1, e_2, .., e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (considérée comme formée de vecteurs colonnes)

alors $\varphi_A(e_i, e_j) = {}^te_i.A.e_j = a_{i,j}$ et donc $Mat_{(e_1,e_2,..,e_n)}(\varphi_A) = A$

de même $Mat_{(e_1,e_2,..,e_n)}(\varphi_B) = B$

Soit P la matrice de passage de $(e_1, e_2, .., e_n)$ à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n)$

d'après la formule de changement de base pour une forme quadratique,

$$I_n = {}^tP.A.P \quad \text{et} \quad \Delta = {}^tP.B.P$$

pour tout i , $\mu_i = \varphi_B(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \geq \varphi_A(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1$

$$\text{d'où} \quad \det(\Delta) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mu_i}_{\geq 1} = \det(P)^2.\det(B) \geq 1 = \det(I_n) = \det(P)^2.\det(A)$$

En simplifiant par $\det(P)^2 > 0$, on obtient $\quad \det(A) \leq \det(B)$

* *

6 Sujet 6 :

Soit E un espace euclidien, muni de sa norme euclidienne.

Pour $g \in L(E)$, on note $||| g ||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| g(x) \|$ (c'est une norme sur $L(E)$)

Soit $f \in L(E)$ et f^* son adjoint. On suppose que $f_o f^* = f^*_o f$

a) Montrer que $||| f ||| = ||| f^* |||$

b) Quelles sont les relations entre $\ker f$, $\ker f^*$, $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^*$?

c) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ premiers entre eux, x et y deux éléments de E tels que $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(y) = 0$. Montrer que x et y sont orthogonaux.

Solution :

a) $\forall x \in E, \| f(x) \|^2 = < f(x), f(x) > = < x, f^*[f(x)] > = < x, f^*_o f(x) >$
$= < x, f_o f^*(x) > = < f^*(x), f^*(x) > = \| f^*(x) \|^2$

En passant aux sup, on obtient : $||| f ||| = ||| f^* |||$

b) Soient $x \in \ker f$ et $z \in \mathrm{Im}(f^*)$. $\exists t \in E, z = f^*(t)$

$< x, z > = < x, f^*(t) > = < \underbrace{f(x)}_{0}, t > = 0$

donc $\ker f \subset (\mathrm{Im}(f^*))^{\perp}$

or $\dim((\mathrm{Im}f^*)^{\perp}) = n - \dim(\mathrm{Im}f^*) = n - \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(\ker f)$ (car $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$)

Par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\ker f = (\mathrm{Im}f^*)^{\perp}}$

et puisque $(f^*)^* = f$, $\boxed{\ker f^* = (\mathrm{Im}f)^{\perp}}$

c)♣ Si P et Q sont premiers entre eux, il existe deux polynômes U et V tels que

$$U(X)P(X) + V(X)Q(X) = 1 \quad \text{(théorème de Bezout)}$$

donc $U(f)_o P(f) + V(f)_o Q(f) = Id_E$

Remarquons ensuite que $\forall x, y \in E, < P(f)(x), y > = < x, P(f^*)(y) >$

- En effet, $< f^2(x), y > = < f(x), f^*(y) > = < x, f^*[f^*(y)] > = < x, (f^*)^2(y) >$
- par récurrence immédiate, pour tout entier k, $< f^k(x), y > = < x, (f^*)^k(y) >$
- et pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, $\quad < P(f)(x), y > = < \sum_{k=0}^{m} a_k f^k(x), y >$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k < f^k(x), y > \quad \text{(par linéarité)}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k < x, (f^*)^k(y) > = < x, \sum_{k=0}^{m} a_k (f^*)^k(y) > = < x, P(f^*)(y) >$$

♣ Soient x et $y \in E$ tels que $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(y) = 0$.

$< x, y > = < Id_E(x), y > = < \underbrace{U(f)_o P(f)(x)}_{=0} + V(f)_o Q(f)(x), y >$

$= < V(f)_o Q(f)(x), y > = < x, \underbrace{V(f^*)_o Q(f^*)(y)}_{=0} > = 0$

Donc x et y sont orthogonaux.

****

7 Sujet 7:

Soit $E = C([a, b], \mathbf{R})$, espace des fonctions réelles continues sur le segment$[a, b]$, muni du produit scalaire $(f, g) \to \int_a^b f(t)g(t)dt$

a) Soit $f \in E$. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$

b) $\mathbf{R}[X]$ et $(\mathbf{R}[X])^{\perp}$ sont ils supplémentaires dans E ?

Solution : a) Si $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$, alors, par linéarité,

pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, $\int_a^b f(t)P(t)dt = 0$

Soit $f \in E$. Il existe une suite (Q_n) de polynômes qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. (th. de Weierstrass)

$\|f(t)f(t) - f(t)Q_n(t)\|^{\infty}_{t\in[a,b]} \leq \|f - Q_n\|^{\infty}.\|f\|^{\infty} \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$

La suite de fonctions $(t \longrightarrow f(t)Q_n(t))$ convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$ vers la fonction $(t \longrightarrow f^2(t))$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f(t)Q_n(t)dt}_{=0} = \int_a^b f^2(t)dt \text{ donc } \int_a^b f^2(t)dt = 0$$

f^2 étant continue et positive sur $[a,b]$, on en déduit que $\forall x \in [a,b], f^2(x) = 0$
Donc $f = 0$
b) $(\mathbf{R}[X])^{\perp} = \{0\}$ donc $\mathbf{R}[X]$ et $(\mathbf{R}[X])^{\perp}$ ne sont pas supplémentaires dans E.

* *

8 Sujet 8 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$ (réponse $\frac{5}{6}$)

* *

9 Sujet 9 :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $\forall n, u_n \neq -1$ et la suite (v_n) définie par :
$\forall n, v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)}$

a) Exprimer simplement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de $u_0, u_1, ..., u_n$
b) On suppose que $\forall n, u_n \geq 0$. Convergence de la série $\{v_n\}$?
c) On suppose que la série $\sum |u_n|$ converge. Convergence de la série $\sum |v_n|$?
d) On suppose que $\sum u_n$ converge.
Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

Solution :

a) $\forall n \geq 0, v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)} = \dfrac{(1+u_n)-1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)}$
$= \dfrac{1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_{n-1})} - \dfrac{1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)}$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{1+u_0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_{k-1})} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_k)}\right)$
cette somme est "télescopique" :

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)}}$

b) Si $\forall n$, $u_n \geq 0$, la série $\{v_n\}$ est à termes positifs ou nuls et la relation précédente montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leq 1$.

Les sommes partielles étant majorées, la série $\sum v_n$ converge.

c) Puisque $\sum |u_n|$ converge, $\lim u_n = 0$ et pour $n \geq n_0$ assez grand, $|u_n| < 1$.

Pour $n \geq n_0$, $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n}(1+u_k)\right) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}\ln(1+u_k)$ et $|\ln(1+u_k)| \sim |u_k|$, série absolument convergente.

Par équivalence, la série $\displaystyle\sum_{k \geq n_0}\ln(1+u_k)$ est absolument convergente et $\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n}(1+u_k)$ admet une limite finie, non nulle car c'est l'exponentielle de la somme de la série précédente,quand $n \to \infty$.

Quitte à multiplier par le réel $\displaystyle\prod_{k=0}^{n_0-1}(1+u_k)$, on en déduit que le dénominateur $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$ admet une limite finie non nulle quand $n \to \infty$

Notons $L = \lim_{n\to\infty}(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$

alors $\quad |v_n| = \left|\dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)}\right| \sim \left|\dfrac{u_n}{L}\right|$

Par équivalence, la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

d) Dans la formule a) utiliser $\ln(1+u_n) - u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,

qui montre que $\sum \ln(1+u_n)$ converge $\Longleftrightarrow \sum \dfrac{u_n^2}{2}$ converge.

* *

10 Sujet 10 :

Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, uniformément continue et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f^2(t)dt$ converge.

Solution :

a) Supposons que $f(x)$ n'ait pas pour limite 0 quand $x \to +\infty$.

Alors $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon_0$

Par ailleurs, f est uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$ donc :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Appliquons ceci à $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$: $\exists\alpha_0 > 0, |x - x'| < \alpha_0 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

Alors, $\forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon_0$

$\forall x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0], |f(x) - f(x_A)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ donc $-\frac{\varepsilon_0}{2} < f(x) - f(x_A) < \frac{\varepsilon_0}{2}$

et donc $\forall x \in [x_A - \alpha_0, x_A + \alpha_0], f(x) > f(x_A) - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}$

d'où $\displaystyle\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0} f(t)dt \geq \alpha_0.\varepsilon_0$

Ainsi, $\forall A \in \mathbf{R}^+, \exists x_A > A$ tel que $\displaystyle\int_{x_A-\alpha_0}^{x_A+\alpha_0} f(t)dt \geq \alpha_0.\varepsilon_0$ (*)

Mais si l'intédrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge, le reste $\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt$ a pour limite 0 quand $x \to 0$

On devrait donc avoir :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x-\alpha_0}^{x+\alpha_0} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_{x_A-\alpha_0}^{\infty} f(t)dt - \int_{x_A+\alpha_0}^{\infty} f(t)\right) = 0 - 0 = 0$, ce qui est contraire à (*)

L'hypothèse de départ est donc absurde et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) d'après a), $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

donc $\exists B > 0, \forall x > B, 0 \leq f(x) < 1$

donc $\forall x > B, 0 \leq f^2(x) \leq f(x) < 1$ et par majoration $\displaystyle\int_B^\infty f^2(t)dt$ converge aussi.

* *

11 Sujet 11 :

Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, continue, décroisante, de limite nulle en $+\infty$ et $a > 0$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(at)dt$ converge et donner son signe.

Solution :

Soit, pour tout entier naturel k, $u_k = \displaystyle\int_{\frac{k\pi}{a}}^{\frac{(k+1)\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt$

$\forall t \in [\frac{k\pi}{a}, \frac{(k+1)\pi}{a}], k\pi \leq at \leq (k+1)\pi$ et $\sin(at)$ a même signe que $(-1)^k$

f étant une fonction positive, u_k a même signe que $(-1)^k$ et la suite (u_k) est alternée.

Par le changement de variable $t = \frac{k\pi}{a} + u$,

$$u_k = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(k\pi + au)du = (-1)^k \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(au)du}_{>0}$$

$$|u_{k+1}| - |u_k| = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\underbrace{f(\frac{(k+1)\pi}{a} + u) - f(\frac{k\pi}{a} + u)}_{\leq 0 \text{ car } f \text{ est decroissante}} \right) \sin(au)du \leq 0$$

$$|u_k| = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)\sin(au)du \leq \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a} + u)du \leq \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(\frac{k\pi}{a})du = \frac{\pi}{a} f(\frac{k\pi}{a})$$

$|u_k| \leq \dfrac{\pi}{a} f(\dfrac{k\pi}{a}) \longrightarrow 0$ quand $k \to 0$ car $\lim\limits_{\infty} f = 0$

Ainsi, $\{u_k\}$ est une série alternée, décroissante en valeur absolue et de limite nulle.

Elle est donc convergente.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{n\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt$ a une limite finie L quand $n \to +\infty$

Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et n le plus grand entier tel que $\dfrac{n\pi}{a} \leq x < \dfrac{(n+1)\pi}{a}$

$$\int_0^x f(t)\sin(at)dt = \int_0^{\frac{n\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt + \int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt$$

or $\left| \displaystyle\int_{\frac{n\pi}{a}}^x f(t)\sin(at)dt \right| \leq \displaystyle\int_{\frac{n\pi}{a}}^{\frac{(n+1)\pi}{a}} f(t)dt \leq \frac{\pi}{a}\ f(\tfrac{n\pi}{a}) \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x f(t)\sin(at)dt = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = L$

b) la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = L$ a même signe que son premier terme $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\sin(at)dt > 0$

donc $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\sin(at)dt > 0$

****

12 Sujet 12 :

Pour quels entiers n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}dx$ converge-t-elle ?

Calculer $L = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et calculer un équivalent de $I_n - L$ quand $n \to +\infty$

Solution :

a) -$\forall n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$

$\dfrac{1}{1+x^n} \sim \dfrac{1}{x^n}$ quand $x \to +\infty$

donc $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $n \geq 2$

- si $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = 1$
- si $x \in]1,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = 0$
- pour $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{1}{2}$

Donc la suite de fonctions $(f_n) = (x \longrightarrow \frac{1}{1+x^n})_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,\infty[$

vers la fonction $g : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

Chaque fonction f_n est majorée sur $[0,+\infty[$ par la fonction $F : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$, qui est continue par morceaux et ontégrable sur $[0,+\infty[$

Par application du théorème de convergence dominèe, on en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 1dx + \int_1^\infty 0dx = 1$

b) $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx - 1$

$I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx - 1 + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$

$I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^n}}du$

(par le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ dans la deuxime intégrale)

$I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{u^n+1}du = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{x^n+1}dx$

Faisons le changement de variable $v = x^n, x = \sqrt[n]{v} = v^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}dv$

$I_n - 1 = \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{v^{1-\frac{2}{n}}-v}{v+1}v^{\frac{1}{n}-1}dv = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{v^{-\frac{1}{n}}-v^{\frac{1}{n}}}{v+1} = \frac{1}{n}\int_0^1 v^{\frac{1}{n}}\frac{v^{-\frac{2}{n}}-1}{v+1}dv$

or $v^{-\frac{2}{n}} - 1 = e^{-\frac{2}{n}\ln(v)} - 1 \sim -\dfrac{2}{n}\ln(v)$ quand $n \to +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(v^{-\frac{2}{n}} - 1) = -2\ln(v)$

par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} v^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(v)} = e^0 = 1$

Posons $h_n(v) = n.v^{\frac{1}{n}}\dfrac{v^{-\frac{2}{n}}-1}{v+1}$ de sorte que $I_n - 1 = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 h_n(v)dv$

Ainsi la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction k :

$v \longrightarrow \dfrac{-2\ln(v)}{v+1}$

Soit, pour $v \in [0,1]$ fixé, et pour m entier ≥ 2, $\varphi(m) = m.(v^{-\frac{2}{m}} - 1) = m.(e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1 + m.\frac{2}{m^2}e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}.\ln(v)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}(1 + \frac{2}{m}\ln(v)) - 1$

Soit alors $\psi(z) = e^z(1-z) - 1$ (où $z = -\frac{2}{m}\ln(v) \in \mathbf{R}_+$)

$\psi'(z) = e^z(1-z) - e^z = -ze^z < 0$

ψ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$, $\psi(0) = 0$ donc $\psi(x) \leq 0$ sur $[0,+\infty[$.

Il s'ensuit que $\varphi'(m) \leq 0$ sur $[2,+\infty[$ et que

$\forall n \geq 2, h_n(v) \leq h_2(v) = 2.\sqrt{v}\dfrac{v^{-1}-1}{v+1} \sim \dfrac{2}{\sqrt{v}}$ quand $v \longrightarrow 0^+$

h_2 est continue et intégrable sur $]0,1]$

Par application du théorème de convergence dominèe, on en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx = \int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dx$

Donc $(I_n - 1) \sim \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dv$ quand $n \to +\infty$

♣ Enfin calculons $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt$:

$\forall t \in]0,1[, \frac{\ln(t)}{t+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k t^k \ln(t)}_{u_k(t)}$

$$\int_0^1 |u_k(t)|dt = -\int_0^1 t^{k\rightarrow}\ln(t)_{\rightarrow}dt = \underbrace{\left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_{t\to 0^+}^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{t^k}{k+1}dt = \frac{1}{(k+1)^2}$$

La série $\sum\limits_{k\geq 0}\int_0^1 |u_k(t)|dt$ est convergente, d'après le théorème de d'intégration des séries de fonctions, on peut alors affirmer que $\int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(t)dt\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_k(t)dt\right)$

Donc $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Finalement, $(I_n - 1) \sim \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dv \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$ quand $n \to +\infty$

$\boxed{(I_n - 1) \sim \frac{\pi^2}{6n^2} \text{ quand } n \to +\infty}$

* *

13 Sujet 13 :

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n + n^2x^2}$

a) Domaine de définition et de continuité de la fonction f ?

b) Calculer la limite et un équivalent de f en $+\infty$

c) Même question en 0

Solution :

a1) - si $x \neq 0, u_n(x) \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$

La série $\sum\limits_n u_n(x)$ est convergente par équivalence à une série de Riemann.

- si $x = 0, u_n(x) \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum\limits_n u_n(x)$ est divergente

Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}^*$

a2) Par parité, on peut limiter le domaine d'étude de f à $]0,+\infty[$.

Soit $a > 0$. $\forall x \in [a,+\infty[, |u_n(x)| \leq \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2}$

donc $\| u_n \|_{[a,+\infty[}^{\infty} \leq \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2}$ et la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Chaque fonction u_n étant continue sur $[a,+\infty[$, la somme f l'est aussi.

Si x_0 est un réel quelconque > 0, il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$.

f est continue en tout point x_0 de $\mathbf{R}_+^*$ et par parité est donc continue sur $\mathbf{R}^*$.

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{x^2} + n^2}$

Posons $v_n(x) = \dfrac{1}{\frac{n}{x^2} + n^2}$

- $\| v_n \|_{[1,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement et uniformément sur $[1, +\infty[$.

- $\forall n \geq 1, \lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$

- d'après le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x))$

c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\frac{n}{x^2} + n^2} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Finalement, $\boxed{f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6x^2} \text{ quand } x \to +\infty}$

c2) Soit $x > 0$ et la fonction g définie par : $\forall t > 0, g(t) = \dfrac{1}{t + x^2 t^2}$.
g est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1], g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$.
Intégrons cette inégalité :
$g(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} g(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq \int_k^{k+1} g(k)dt = g(k)$
Sommons (fumé) pour k variant de 1 à p, puis passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g(k+1) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + x^2 k^2} = f(x)$
donc $f(x) - g(1) \leq \displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x)$
qui donne finalement l'encadrement :
$\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt + g(1)$
Or $g(1) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t + x^2 t^2} dt = \int_1^{\infty} \frac{1 + x^2 t - x^2 t}{t(1 + x^2 t)} dt$
$\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + x^2 t} \right) dt = \left[\ln \left(\frac{t}{1 + x^2 t} \right) \right]_{t=1}^{t \to +\infty}$
$= \ln \left(\dfrac{1}{x^2} \right) - \ln \left(\dfrac{1}{1+x^2} \right) = \ln(1 + x^2) - 2\ln(x)$
d'où

$$\ln(1 + x^2) - 2\ln(x) \leq f(x) \leq \ln(1 + x^2) - 2\ln(x) + \frac{1}{1 + x^2}$$

Quand $x \to 0$, chacun des membres encadrants est équivalent à $-2\ln(x)$ donc, finalement :
$\boxed{f(x) \sim -2\ln(x) \text{ quand } x \to 0^+}$

* *

14 Sujet 14 :

Déterminer $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n / \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = n \text{ et } \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = n\}$

Solution

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^n$, espace vetoriel des vecteurs colonnes muni du produit scalaire canonique.

$X \in E \iff \left(< X, U >= n \text{ et } < X, X >= \|X\|^2 = n \right)$

Soit $X \in E$, $\underbrace{| < X, U > |^2}_{n^2} \leq < X, X >< U, U >= \underbrace{\|X\|^2}_{n} \underbrace{\|U\|^2}_{n}$

Puisqu'il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz, les vecteurs X et U sont colinéaires.

Donc $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X = \lambda U$

mais $< X, U >= n =< \lambda U, U >= \lambda < U, U >= \lambda n$ donc $\lambda = 1$ et $X = U$

Conclusion : $\boxed{E = \{U\}}$

* *

15 Sujet 15 :

Soient $x \in \mathbf{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J^n$

Solution

a) Soit I la matrice identité. $J^2 = -I$ d'où $J^3 = -J, J^4 = I$

et plus généralement, $J^{4p} = I, J^{4p+1} = J, J^{4p+2} = -I, J^{4p+3} = -J$

ou aussi, $J^{2p} = (-1)^p I, J^{2p+1} = (-1)^p J$

En prenant la norme uniforme sur $M_2(\mathbf{R})$, $\|I\| = \|J\| = 1$

$\left\| \left(\dfrac{x^n}{n!} \right) J^n \right\| = \dfrac{|x|^n}{n!}$, donc la série matricielle $\sum \dfrac{x^n}{n!} J^n$ converge absolument pour tout x réel.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} J^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} J^{2p+1}$

$= \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) I + \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) J = (\cos x) I + (\sin x) J = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

* *

16 Sujet 16 :

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge et $(b_n(x))_{n \geq 0}$ une suite de fonctions réelles positives continues sur le segment $[0, 1]$ telles que :

$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum a_n b_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

b) Si $\forall n \in \mathbf{N}, b_n(1) = 1$, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

c) On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \neq 2k\pi$

Calculer $f(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$ sur son ouvert de convergence.

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ pour $\theta\in]0,\pi[$

Solution

Notons $r_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ de sorte que $a_n=r_{n-1}-r_n$

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$ et, en posant $Mr_n=\sup\limits_{k\geq n}|r_k|$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty}Mr_n=0$ et la suite (Mr_n) est positive, décroissante et de limite nulle.

Soient p et q entiers, $p\leq q$.

$$\begin{aligned}
&a_pb_p(x)+a_{p+1}b_{p+1}(x)+...+a_{q-1}b_{q-1}(x)+a_qb_q(x)\\
&=(r_{p-1}-r_p)b_p(x)+(r_p-r_{p+1})b_{p+1}(x)+...+(r_{q-2}-r_{q-1})b_{q-1}(x)+(r_{q-1}-r_q)b_q(x)\\
&=r_{p-1}b_p(x)+\underbrace{r_p(b_{p+1}(x)-b_p(x))}_{w_p(x)}+\underbrace{r_{p+1}(b_{p+2}(x)-b_{p+1}(x))}_{w_{p+1}(x)}+...+\underbrace{r_{q-1}(b_q(x)-b_{q-1}(x))}_{w_{q-1}(x)}-r_qb_q(x)\\
&=r_{p-1}b_p(x)+w_p(x)+w_{p+1}(x)+...+w_{q-1}(x)-r_qb_q(x)
\end{aligned}$$

or, $|w_p(x)|+|w_{p+1}(x)|+...+|w_{q-1}(x)|$

$$\begin{aligned}
&=|r_p|\,|\underbrace{b_{p+1}(x)-b_p(x)}_{\text{négatif}}|+|r_{p+1}|\,|\underbrace{b_{p+2}(x)-b_{p+1}(x)}_{\text{négatif}}|+...+|r_{q-1}|\,|\underbrace{b_q(x)-b_{q-1}(x)}_{\text{négatif}}|\\
&\leq Mr_p(b_p(x)-b_{p+1}(x))+Mr_{p+1}(b_{p+1}(x)-b_{p+2}(x))+...+Mr_{q-1}(b_{q-1}(x)-b_q(x))\\
&\leq Mr_p(b_p(x)-b_{p+1}(x))+Mr_p(b_{p+1}(x)-b_{p+2}(x))+...+Mr_p(b_{q-1}(x)-b_q(x))
\end{aligned}$$

(car (Mr_n) est décroissante)

$|w_p(x)|+|w_{p+1}(x)|+...+|w_{q-1}(x)|\leq Mr_pb_p(x)-Mr_pb_q(x)\quad\leq\quad Mr_pb_p(x)$

A p fixé, quand $q\to+\infty$, les sommes partielles $|w_p(x)|+|w_{p+1}(x)|+...+|w_q(x)|$ sont majorées.

Donc la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geq p}|w_k|$ converge, et la série complexe $\sum w_k$ converge absolument.

Par ailleurs, $|r_qb_q(x)|\leq|r_q|b_0(x)\longrightarrow 0$ quand $q\to+\infty$ (car $\lim r_n=0$)

Passons alors à la limite, pour p fixé, quand $q\to+\infty$ dans la relation :

$$\sum_{k=p}^{q}a_kb_k(x)=r_{p-1}b_p(x)+w_p(x)+w_{p+1}(x)+...+w_{q-1}(x)-r_qb_q(x)$$

On obtient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty}a_kb_k(x)=r_{p-1}b_p(x)+\sum_{k=p}^{\infty}w_k(x)$, ce qui montre que la sèrie de fonctions $\sum a_kb_k(x)$ converge simplment sur $[0,1]$

Notons $S_p(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kb_k(x)$ et $S(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_k(x)$

En passant à la limite quand $q\to\infty$ dans la relation

$|w_p(x)|+|w_{p+1}(x)|+...+|w_{q-1}(x)|\leq Mr_pb_p(x)-Mr_pb_q(x)\quad\leq\quad Mr_pb_p(x)$, on obtient

$$\sum_{k=p}^{\infty}|w_k(x)|\quad\leq\quad Mr_p.b_p(x)$$

♣ $\forall x\in[0,1],|S(x)-S_p(x)|=\left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{\infty}a_kb_k(x)\right|=\left|r_pb_{p+1}(x)+\displaystyle\sum_{k=p+1}^{\infty}w_k(x)\right|$

$|S(x)-S_p(x)|\leq|r_p|b_{p+1}(x)+Mr_{p+1}.b_{p+1}(x)\leq 2Mr_p\parallel b_{p+1}\parallel_{[0,1]}^{\infty}\leq 2Mr_p\parallel b_0\parallel_{[0,1]}^{\infty}$

d'où $\sup\limits_{x\in[0,1]}|S(x)-S_p(x)|=\|S-S_p\|_{[0,1]}^{\infty}\leq 2Mr_p\parallel b_0\parallel_{[0,1]}^{\infty}$

Et puisque $\lim Mr_p=0$, on en déduit par majoration que $\lim\limits_{p\to\infty}\|S-S_p\|_{[0,1]}^{\infty}=0$, c'est à dire que la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$, ou encore que la série de fonctions $\sum a_nb_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

b) chaque fonction $x\longrightarrow a_n.b_n(x)$ est continue sur $[0,1]$, par hypothèse sur la fonction b_n; la fonction somme S est alors continue sur $[0,1]$ comme limite uniforme de fonctions continues.

Donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$, ce qui s'écrit aussi : $\lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

c) ♣ Soit $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$. Cette série entière de la variable r converge absolument sur $]-1,1[$ car $\left|\frac{r^n e^{in\theta}}{n}\right| = \frac{|r|^n}{n} \leq |r|^n$

Par application du théorème de dérivation des séries entières,

$\forall r \in]-1,1[, f'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} e^{in\theta} = e^{i\theta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right) = e^{i\theta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n \right)$

$f'(r) = \frac{e^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{-r + e^{i\theta}}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}$

d'où $f(r) = f(0) + \int_0^r f'(\rho)d\rho = \int_0^r \left(\frac{-\rho + \cos(\theta)}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1} + i \frac{\sin(\theta)}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta)+1} \right) d\rho$

$f(r) = \int_0^r \left(\frac{-\rho + \cos(\theta)}{(\rho - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} + i \frac{\sin(\theta)}{(\rho - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} \right) d\rho$

$f(r) = \left[-\frac{1}{2} \ln\left((\rho - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \right) + i \sin\theta \frac{1}{\sin\theta} \arctan\left(\frac{\rho - \cos\theta}{\sin\theta} \right) \right]_{\rho=0}^{\rho=r}$

$\forall r \in]-1,1[, f(r) = -\frac{1}{2}\ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1) + i \arctan\left(\frac{r - \cos\theta}{\sin\theta} \right) + i \arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right)$

♣ En prenant $a_n = \frac{e^{in\theta}}{n}$ et $b_n(x) = x^n$, on est bien dans les hypothèses du a)

On appliquer le résultat b) : $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \lim_{r\to 1^-} f(r)$

$= -\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) + i \arctan\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right) + i \arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right)$

La partie réelle donne : $\boxed{\forall \theta \in \mathbf{R} \ - 2\pi\mathbf{Z}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta)}$

et la partie imaginaire : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \arctan\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right) + i \arctan\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right)$

$= \arctan\left(\frac{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} \right) + \arctan\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} \right)$

$= \arctan\left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right) + \arctan\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} \right)$

$= \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi - \theta}{2}$ (*)

(*) à condition que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$ c'est à dire que $0 < \theta < \pi$

$\boxed{\forall \theta \in]0,\pi[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}}$

* *

17 Sujet 17 :

Matrice de Gram

Soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des vecteurs d'un ev euclidien E, et G leur matrice de Gram.

Montrer que $rgG = rg(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Montrer que $\det G$ est inchang si on remplace $\vec{x}_k$ par $\vec{x}_k - \sum_{i\neq k} \lambda_i \vec{x}_i$. Soit $F = \text{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{x} \in E$. On note $d(\vec{x}, F) = \min(\|\vec{x} - \vec{y}\|, \vec{y} \in F)$.

Montrer que $d(\vec{x}, F)^2 = \frac{\text{Gram}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{x})}{\text{Gram}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)}$.

****

18 Sujet 18 :

Soit $A \in M_p(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive et la suite matricielle $(A_n)_{n\geq}$ définie par :

$A_0 = A$ et $\forall n \in \mathbf{N}, A_{n+1} = \frac{1}{2}(A_n + A_n^{-1})$

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq}$ est bien définie.

b) Soit $X \in M_{p,1}(\mathbf{R})$ et pour tout n, $u_n = {}^tX.A_n.X$

Etudier la suite (u_n)

c) Etudier la suite (v_n) telle que pour tout n, $v_n = \det(A_n)$

Solution

A , symétrique réelle, est diagonalisable et ses valeurs propres sont > 0 puisqu'elle est définie positive .

$\exists P \in GL_n(R)$ et une matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, .., \mu_n)$ telles que $A = P.\Delta.P^{-1}$

Puisque les μ_i sont tous > 0 , A est inversible et $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$ est bien définie.

De plus $A^{-1} = (P.\Delta.P^{-1})^{-1} = P.\Delta^{-1}.P^{-1}$

$$A_1 = \frac{1}{2}(P.\Delta.P^{-1} + P.\Delta^{-1}.P^{-1}) = \frac{1}{2}P.(\Delta + \Delta^{-1}).P^{-1} = P. \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mu_1 + \frac{1}{\mu_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{2}(\mu_n + \frac{1}{\mu_n}) \end{pmatrix} .P^{-1}$$

Les valeurs propres de A_1 sont les $\frac{1}{2}(\mu_1 + \frac{1}{\mu_1})$ qui sont > 0. A_1 est à son tour inversible.

Ce même calcul montre que si $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{p,n}$ sont les valeus propres de A_n, alors les valeurs propres de A_{n+1} sont

$\lambda_{1,n+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{1,n} + \frac{1}{\lambda_{1,n}})$, $\lambda_{2,n+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{2,n} + \frac{1}{\lambda_{2,n}})$, ..., $\lambda_{p,n+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{p,n} + \frac{1}{\lambda_{p,n}})$

Etudions alors une suite réelle (x_n) définie par la donnée de son premier terme $x_0 > 0$ et par la relation de réurrence $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$

Une telle suite est bien définie et $\forall n, x_n > 0$ (récurrence immédiate)

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} \right) = \frac{(x_n - 1)^2}{2x_n} \geq 0 \quad \text{donc} \quad x_n \geq 1 \text{ pour } n \geq 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente.

Sa limite L vérifie $L = \frac{1}{2}(L + \frac{1}{L})$ donc $L^2 = 1$ et $L = 1$ car $u_n > 0$

Il s'ensuit que chaque suite de valeurs propres $(\lambda_{k,n})_n$ pour $k \in \{1, 2, ..., p\}$ converge vers le réel 1.

$$A_n = P. \begin{pmatrix} \lambda_{1,n} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{p,n} \end{pmatrix} .P^{-1} \text{ , par contnuité du produit matriciel,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = P. \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \lambda_{1,n} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{p,n} \end{pmatrix} .P^{-1} = P.I_n.P^{-1} = I_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = {}^tX.(\lim_{n\to+\infty} A_n).X = {}^tX.I_n.X = \| X \|^2$$

c) L'application det, polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice, est continue.

d'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = \det(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \det(I_n) = 1$

****

19 Sujet 19 :

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et v un vecteur de E tel que $\{u_k(v), k \in \mathbf{N}\}$ engendre E.

Montrer que $\{u_k(v), 0 \leq k \leq n-1\}$ est une base de E et que le commutant $C(u)$ de u est la sous algèbre de $L(E)$ engendrée par u. Préciser la dimension de $C(u)$

Solution

♣ Soit $\chi_f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ le polynôme caractéristique de f (normalisé unitaire)

χ_f est un polynôme annulateur de f : $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + ... + a_1u + a_0Id_E = 0$

donc $u^n(v) = -a_{n-1}u^{n-1}(v) - ... - a_1u(v) - a_0.v$

et $u^n(v)$ est combinaison linéaire de $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$

En composant par u, $u^{n+1}(v) = -a_{n-1}u^n(v) - ... - a_1u^2(v) - a_0.u(v)$

et $u^{n+1}(v)$ est combinaison linéaire de $(u(v), u^2(v), ..., u^n(v))$ et donc de $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$

Par récurrence, en répétant le rasisonnement, pour tout entier $m \geq n$, $u^m(v)$ est combinaison linéaire de $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$

Donc $\text{Vect}\{u_k(v), 0 \leq k \leq n-1\} = \text{Vect}\{u_k(v), 0 \leq k \leq n-1\} = E$

$(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ est un système générateur de E, il possède n éléments, c'est donc une base de E.

♣ Il est clair que $\mathbf{K}[u] = \mathbf{K}_n[u] = \{P(u), P \in \mathbf{K}_n[X]\} \subset C(u)$

Réciproquement, soit $g \in C(u)$.

Puisque $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ est une base de E, il existe des scalaires $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ tels que $g(v) = b_0v + b_1u(v) + ... + b_{n-1}u^{n-1}(v) = Q(u)(v)$ avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_kX^k$

alors $g[u(v)] = u[g(v)]$ car $g_ou = u_og$

donc $g[u(v)] = u[b_0v + b_1u(v) + ... + b_{n-1}u^{n-1}(v)]$

$= b_0u(v) + b_1u^2(v) + ... + b_{n-1}u^n(v) = Q(u)[u(v)]$

puis $g[u^2(v)] = u[g(u(v))] = Q(u)[u^2(v)]$ et, pour tout $k \leq n-1$, $g[u^k(v)] = Q(u)[u^k(v)]$

Ainsi, les endomorphismes g et $Q(u)$ coïcident sur la base $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ de E, donc sont égaux.

$g = Q(u) \in \mathbf{K}_n[u]$ et finalement $C(u) = \mathbf{K}_n[u]$

♣ $C(u) = \mathbf{K}_n[u] = \text{Vect}(Id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$

Montrons que $(Id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$ est un système libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_0Id_E + \lambda_1u + ... + \lambda_{n-1}u^{n-1} = 0$

alors $(\lambda_0Id_E + \lambda_1u + ... + \lambda_{n-1}u^{n-1})(v) = 0$

donc $\lambda_0v + \lambda_1u(v) + ... + \lambda_{n-1}u^{n-1}(v) = 0$ et $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ puisque $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ est libre.

donc $(Id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$ est un système libre et générateur, c'est une base de $C(u)$.

$\dim(C(u)) = n$

* *

20 Sujet 20 :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) \neq 0$

a) Déterminer un équivalent de $\int_0^1 (1-x)^n f(x)dx$ quand $n \to +\infty$

b) Même question pour $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx$

Solution

a) Effectuons le changement de variable $u = (1-x)^n$, $x = 1 - u^{\frac{1}{n}}$, $dx = -\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$

$a_n = \int_0^1 (1-x)^n f(x)dx = -\frac{1}{n}\int_1^0 uf(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}-1}du = \frac{1}{n}\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}du$

f est bornée sur la segment $[0,1]$ car est continue et $\forall u \in [0,1], |f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}| \leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty}$

Par ailleurs, $\forall u \in]0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n}} = 1$, donc la suite de fonctions $(u \longrightarrow f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}})$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante $f(0)$.

La majoration obtenue nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}} du \right) = \int_0^1 f(0)du = f(0) \neq 0$$

donc $\boxed{a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(1-u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}} du \sim \frac{f(0)}{n} \quad \text{quand} \quad n \to \infty}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx = \frac{1}{n}\, b_n$

Notons $\varepsilon(x) = f(x) - f(0)$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0 par contnuité de la fonction f en 0.

Soit $\alpha(n) \in]0,1]$ une fonction de l'entier n que nous choisirons par la suite.

$$b_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx = \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx + \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(x)-f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx + \int_{\alpha(n)}^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx$$

- $\displaystyle\int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx = f(0)\left[\ \ln(x+\tfrac{1}{n})\ \right]_0^{\alpha(n)} = f(0).\ln(1+n\alpha(n))$
- $\displaystyle\left| \int_0^{\alpha(n)} \frac{f(x)-f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx \right| \leq \int_0^{\alpha(n)} \frac{|\varepsilon(x)|}{x+\frac{1}{n}}dx \leq \sup_{x\in[0,\alpha(n)]} |\varepsilon(x)|. \int_0^{\alpha(n)} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx$
  $\displaystyle\leq \sup_{x\in[0,\alpha(n)]} |\varepsilon(x)|.\ln(1+n\alpha(n))$
- $\displaystyle\left| \int_{\alpha(n)}^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}dx \right| \leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty} . \int_{\alpha(n)}^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx = \| f \|_{[0,1]}^{\infty} \left[\ \ln(x+\tfrac{1}{n})\ \right]_{\alpha(n)}^1$
  $\displaystyle\leq \| f \|_{[0,1]}^{\infty} .\ln\left(\frac{n+1}{n\alpha(n)+1} \right)$

Choisissons alors $\alpha(n) = \dfrac{1}{\ln n}$

Quand $n \to +\infty$:

- $\displaystyle\int_0^{\alpha(n)} \frac{f(0)}{x+\frac{1}{n}}dx = f(0).\ln(1+\tfrac{n}{\ln n}) \sim f(0).\ln(\tfrac{n}{\ln n}) = f(0).(\ln n - \ln(\ln n)) \sim f(0).\ln n$
- $\displaystyle\sup_{x\in[0,\alpha(n)]} |\varepsilon(x)|. \int_0^{\alpha(n)} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}dx = \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} .\ln(1+\tfrac{n}{\ln n}) \sim \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} .\ln n$
  $= o(\ln n)$
  car $\lim\limits_{n\to+\infty} \| \varepsilon \|_{[0,\alpha(n)]}^{\infty} = 0$ puisque $\lim\limits_{0} \epsilon = 0$
- $\displaystyle\| f \|_{[0,1]}^{\infty} .\ln\left(\frac{n+1}{n\alpha(n)+1} \right) = \| f \|_{[0,1]}^{\infty} .\ln\left(\frac{n+1}{\frac{n}{\ln n}+1} \right) \sim \| f \| .\ln(\ln n) = o(\ln n)$

Quand $n \to +\infty$, de ces trois intégrales, la première est équivalente à $f(0).\ln n$ et les deux dernières sont négligeables devant $\ln n$.

Leur somme est donc équivalente à $f(0).\ln n$, et

$$\boxed{\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx = \frac{b_n}{n} \sim \frac{f(0).\ln n}{n} \text{ quand } n \to +\infty}$$

* *

21 Sujet 21 : Norme d'un projecteur

Soient F et G deux sous espaces supplémentaires d'un espace euclidien E

On définit $c = \sup\{< x,y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$

a) Montrer que $c \in [0,1]$, qu'il existe $x_0 \in F$ et $y_0 \in G$, unitaires, tels que $c =< x_0, y_0 >$.
Peut-on avoir $c = 0$? $c = 1$? Si oui à quelle condition ?
On note $\theta_0 = \arccos c$ et θ_0 est appelé "angle des sous espaces F et G"
Que vaut $\sup\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$?
b) Soit p le projecteur sur F de direction G.
Calculer $|||p|||$.

$$(\text{ on rappelle que } |||p||| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \| f(x) \| = \sup_{\|x\|=1} \| f(x) \| \ )$$

Solution

a) Pour $x \in F$ tel que $\| x \| \leq 1$, et $y \in G$ tel que $\| y \| \leq 1$,

$$| < x, y > | \leq \| x \| . \| y \| \leq 1 \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Donc $\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$ est majoré et sa borne supérieure c est définie, inférieure ou égale à 1.

Puisque $< x, -y >= - < x, y >$, l'ensemble comprend des nombres ≥ 0 et $c \geq 0$

Donc $c \in [0,1]$.

Soient $B_F = \{x \in F, \| x \| \leq 1\}$ et $B_G = \{y \in G, \| y \| \leq 1\}$.

Ce sont des boules fermées donc des compacts de E.

L'application

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & < x, y > \end{array}$$

est bilinéaire donc continue (E est de dimension finie)

L'image du compact $B_F \times B_G$ est un compact, donc est fermé et contient sa borne supérieure c.

Ainsi $\exists (x_0, y_0) \in B_F \times B_G$ tel que $< x_0, y_0 >= c$

Remarquons que l'ensemble $\{< x, y >, x \in F \text{ et } \| x \| \leq 1, y \in G \text{ et } \| y \| \leq 1\}$ est centré en 0 (car $< x, -y >= - < x, y >$) donc la borne inférieure de cet ensemble est l'opposée de sa borne supérieure. Cet ensemble est $[-c, c]$.

- Si $c = 0$, alors $\forall x \in F, \forall y \in G, < x, y >= 0$, F et G sont orthogonaux.
- le cas $c = 1$ est exclu car alors $< x_0, y_0 >= c = 1 = \| x_0 \| . \| y_0 \|$, donc $x_0 \in F$ et $y_0 \in G$ sont colinéaires (Cauchy-Schwarz), non nuls, ce qui est impossible car F et G sont en somme directe.

b) $|||p||| = \sup_{\|x\|=1} \| f(x) \|$

- Soit $x \in E$ quelconque tel que $\| x \| = 1$. $\exists a \in F, \exists b \in G, x = a + b$
et alors $p(x) = a$

$\| x \|^2 = 1 = \| a \|^2 + \| b \|^2 + 2 < a, b >$

or $\quad -c \leq \left\langle \dfrac{a}{\| a \|}, \dfrac{b}{\| b \|} \right\rangle \leq c \quad$ et donc $\quad -c \| a \| . \| b \| \leq < a, b > \leq c \| a \| . \| b \|$

donc $1 = \| a \|^2 + \| b \|^2 + 2 < a, b > \ \geq \ \| a \|^2 + \| b \|^2 - 2c \| a \| . \| b \|$

$1 \geq (\| b \| - c \| a \|)^2 + \| a \|^2 - c^2 . \| a \|^2 = (\| b \| - c \| a \|)^2 + \sin^2(\theta_0) \| a \|^2$

$\sin^2(\theta_0) \neq 0$ car $c \neq 1$

donc $\sin^2(\theta_0) \| a \|^2 \leq 1$ et $\| a \| = \| p(x) \| \leq \dfrac{1}{\sin \theta_0}$

Donc $|||p||| \leq \dfrac{1}{\sin \theta_0}$

- Considérons $(x_0, y_0) \in B_F \times B_G$ tel que $< x_0, y_0 >= c$ et soit $z = x_0 - c.y_0$

$\| p(z) \| = \| x_0 \| = 1$

et $\| z \|^2 = \| x_0 \|^2 + c^2 \| y_0 \|^2 - 2c < x_0, y_0 >= 1 + c^2 - 2c^2 = \sin^2 \theta_0$

donc $\dfrac{\| p(z) \|}{\| z \|} = \dfrac{1}{\sin \theta_0}$, ce qui achève de montrer que $\boxed{|||p||| = \dfrac{1}{\sin \theta_0}}$

* *

22 Sujet 22 : Mines

a) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont semblables.

b) Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n.u_{n^2}$ sont de même nature.

Solution

a)${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont symétriques réelles donc diagonalisables. Or $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$ (résultat classique) donc ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres aux mêmes ordres de multiplicité, sont semblables à la même matrice diagonale, donc sont semblables entre elles.

b) utiliser $(2n+1).u_{(n+1)^2} \leq u_{n^2} + u_{n^2+1} + u_{n^2+2} + ... + u_{n^2+2n} \leq (2n+1).u_{n^2}$

* *

23 Sujet 23 : TPE

On définit pour tout x réel et tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n(x) = 3^n \sin^3(\frac{x}{3^n})$

a) Etudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbf{R}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

b) Etudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbf{R}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$.

c) Calculer $\sin^3(t)$ en fonction de $\sin(3t)$ et de $\sin t$.

Ecrire alors $u_n(x)$ sous la forme $v_n(x) - v_{n+1}(x)$

En déduire $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ et $S(x)$.

d) Soit $A_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Etudier la convergence de la suite $A_n(3^n)$

La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

Solution

a) Soit $x \in \mathbf{R}$, fixé.

$\frac{x}{3^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc $|u_n(x)| \sim |3^n(\frac{x}{3^n})^3| = |\frac{x^3}{9^n}|$, série géométrique de raison $\frac{1}{9}$ convergente.

La série $\sum u_n(x)$ converge donc absolument en tout point de $\mathbf{R}$.

$\| u_n \|_\infty^R = \sup\limits_{x \in R} |u_n(x)| = 3^n$ est une série grossièrement divergente, donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbf{R}$.

b) Par imparité u_n , on peut supposer que $[a, b] \subset \mathbf{R}^+$

On sait que $\forall t \in \mathbf{R}, |sint| \leq |t|$, donc $\forall x \in [a, b], |u_n(x)| \leq 3^n.\frac{x^3}{27^n} = \frac{x^3}{9^n}$

donc $\| u_n \|_\infty^{[a,b]} = \sup\limits_{x \in [a,b]} |u_n(x)| \leq \dfrac{b^3}{9^n}$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc unifomément sur $[a, b]$.

c) $\sin^3(t) = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = \dfrac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i}$

$= \dfrac{-1}{4} \dfrac{e^{3it} - e^{-3it} - 3(e^{it} - 3e^{-it})}{2i} = \dfrac{-1}{4}(\sin(3t) - 3\sin t)$

$u_n(x) = 3^n \sin^3(\frac{x}{3^n}) = \frac{-3^n}{4}(\sin(\frac{x}{3^{n-1}}) - 3\sin(\frac{x}{3^n}))$

$= \underbrace{\dfrac{-3^n}{4} \sin\left(\dfrac{x}{3^{n-1}} \right)}_{v_n(x)} + \underbrace{\dfrac{3^{n+1}}{4} \sin\left(\dfrac{x}{3^n} \right)}_{-v_{n+1}(x)}$

$S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) = v_1(x) - v_{n+1}(x)$

$S_n(x) = \dfrac{-3}{4}\sin x - \dfrac{3^{n+1}}{4}\sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ et puisque $\sin(\frac{x}{3^n}) \sim \frac{x}{3^n}$,

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{-3}{4}\sin x - \dfrac{3}{4}x$

d) $A_n(x) = S(x) - S_n(x) = \dfrac{3^{n+1}}{4}\sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right) - \dfrac{3}{4}x$

$A_n(3^n) = \dfrac{3^{n+1}}{4}\sin(1) - \dfrac{3^{n+1}}{4} = \dfrac{3^{n+1}}{4}(\sin(1)-1)$

donc $\parallel S - S_n \parallel_\infty^R \ \geq A_n(3^n) = \dfrac{3^{n+1}}{4}(\sin(1)-1) \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$

La série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$.

* *

24 Sujet 24

Soit E une espace euclidien et u un endomorphime de E tel que :

$\forall x \in E, < u(x), x >= 0$

Montrer que $E = \mathrm{Im}u \oplus^{\perp} \ker u$ et que le rang de u est pair .

(on pourra s'intéresser à u^* et à $\tilde{u}$ induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$)

Solution

♣ $\forall x, y \in E, < u(x+y), x+y >= 0 = \underbrace{< u(x), x >}_{0} + < u(y), x > + < u(x), y > + \underbrace{< u(y), y >}_{0}$

donc $\forall x, y \in E, < u(x), y >= - < u(y), x >= - < x, u(y) >=< x, u^*(y) >$ donc $u^* = -u$ u est un endomorphisme antisymétrique.

♣ Soient $x \in \mathrm{Im}u$ et $y \in \ker u$: $\exists t \in E, x = u(t)$ et $u(y) = 0$.

$< x, y >=< u(t), y >=< t, u^*(y) >= - < t, \underbrace{u(y)}_{0} >= 0$

Les sous espaces $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont orthognaux. Ils sont donc en somme directe.

Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$

La somme étant directe, $\dim(\mathrm{Im}u \oplus \ker u) = \dim(\mathrm{Im}u) + \dim(\ker u) = \dim(E)$

L'inclusion $\mathrm{Im}u \oplus \ker u \subset U$ et légalité des dimensions permet alors d'affirmer que :

$\mathrm{Im}u \oplus^{\perp} \ker u = E$

♣ $\mathrm{Im}u$ est stable par u. Soit $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

$\ker \tilde{u} = \ker u \cap \mathrm{Im}u = \{0\}$ donc $\tilde{u}$ est injectif.

$\tilde{u}$ est lui aussi antisymétrique (car $\forall x, y \in \mathrm{Im}u, < \tilde{u}(x), y >= - < x, \tilde{u}(y) >$)

donc $\underbrace{\det(\tilde{u}) = \det \tilde{u}^*}_{(1)} = \det(-\tilde{u}) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}u)}\det(\tilde{u})$

(1) car leurs matrices dans une BON sont transposées l'une de l'autre

soit, en simplifiant pat $\det(\tilde{u})$ qui n'est pas nul, $(-1)^{\dim(\mathrm{Im}u)} = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Im}u)$ est un entier pair.

* *

25 Sujet 25

Soit M une matrice réelle symétrique non nulle.

Montrer que $\dfrac{(\mathrm{tr}M)^2}{\mathrm{tr}(M^2)} \leq \mathrm{rg}(M)$

Solution

M^2 est réelle symétrique positive ,

$$(\forall X \in M_{n,1}(R), {}^t X.M^2.X = {}^t(M.X).(M.X) = \|M.X\|^2 \geq 0)$$

donc ses valeurs propres $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sont positives ou nulles, et non toutes nulles.

donc $\mathrm{tr}(M^2) = \sum \mu_i > 0$

Soit r le rang de M et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres non nulles , les $n - r$ dernières valeurs propres de M étant 0.

alors $(\mathrm{tr}M)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right)^2 = < (1, ..., 1, 0, ..., 0), (\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0) >^2$

$$\leq \| (1, ..., 1, 0, ..., 0) \|^2 . \| (\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0) \|^2 = r. \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$$

Les λ_i^2 sont les valeurs propres de M^2

(car $M = P.\mathrm{diag}(\lambda_i).P^{-1} \Rightarrow M^2 = P.\mathrm{diag}(\lambda_i^2).P^{-1}$, M est diagonalisable car réelle symétrique)

donc $(\mathrm{tr}M)^2 \leq r. \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \leq r. \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = r.\mathrm{tr}(M^2)$ (en notant $M^2 = (b_{i,j})$)

et puisque $\mathrm{tr}(M^2) > 0$, on obtient $\dfrac{(\mathrm{tr}M)^2}{\mathrm{tr}(M^2)} \leq r = \mathrm{rg}(M)$.

* *

26 Sujet 26

On considre l'ensemble E des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que

$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$ (1)

a) Montrer que E est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

b) Montrer que le ss ensemble F des suites bornées est un sous epace de E, de dimension 2.

c) Donner une base de E forme de suites solutions réelles.

Solution

a) Les suites (a^n) géométriques solutions de (1) sont celles pourlesquelles $a^3 = a^2 + a + 1$, c'est à dire où a est racine du polynôme $Q(X) = X^3 - X^2 - X - 1$

Recherchons les racines réelles de $Q(X)$ par l'étude de la fonction polynomiale associée.

$\forall x \in R, Q'(X) = 3X^2 - 2X - 1 = (3X - 3)(X + \frac{1}{3})$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		0	1		2		$+\infty$
Q'(x)		+	0	-		0		+		
Q(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$		1	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations de Q montrent que le polynôme $Q(X)$ admet une seule racine réelle, α , dans l'intervalle $]1, 2[$.

Le polynôme étant réel, il admet deux autres racines complexes conjuguées β et $\overline{\beta}$.

$Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \overline{\beta}) = X^3 - (\alpha + \beta + \overline{\beta})X^2 + (\alpha\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta})X - \alpha\beta\overline{\beta}$

$= 3X^2 - 2X - 1$

donc $\alpha\beta\overline{\beta} = \alpha|\beta|^2 = 1$ et puisque $1 < \alpha < 2$, on en déduit que $|\beta| = |\overline{\beta}| < 1$

On peut écrire $\beta = re^{i\theta}$, $r \in]0, 1[$, $\theta \in] - \pi, \pi[- \{0\}$

Les suites $(\alpha^n), (\beta^n), (\overline{\beta}^n)$ forment une base de E sur $\mathbf{C}$,

donc $\exists a, b, c \in \mathbf{C}$, tels que $\forall n, u_n = a.\alpha^n + b.\beta^n + c.\overline{\beta}^n$

Puisque $0 < |\beta| = |\overline{\beta}| < 1 < \alpha$, (u_n) est bornée si et seulement si $a = 0$, c'est à dire si et seulement si $(u_n) = b.(\beta^n) + c.(\overline{\beta}^n)$

Donc F est un sous espace de E de dimension 2, de base $((\beta^n), (\overline{\beta}^n))$

??????????????????????

?????????????????????????

??????????????????????????

* *

27 Sujet 27

Mines

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$

a) Montrer qu'il existe une unique racine $r_n \in]0,1[$ telle que $P_n'(r_n)=0$

b) Montrer que $\forall n>0, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k-r_n}=0$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n$ et déterminer un équivalent de r_n quand $n\to+\infty$

Solution

a) $P_n(0)=P_n(1)=...=P_n(n)=0$

la fonction polynomiale P_n est C^∞ , en lui appliquant le théorème de Rolle, on montre l'existence d'une racine de $P_n'(X)$ dans chacun des $n-1$ intervalles $]0,1[,]1,2[,...,]n-1,n[$. P_n' étant de degré $n-1$, on a là toutes les racines de P_n' qui est scindé dans $\mathbf{R}[X]$. En particulier, P_n' admet une unique racine r_n dans $]0,1[$.

b) $P_n'(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(X-j)\right)$

d'où $\dfrac{P_n'(X)}{P_n(X)}=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{X-j}$ et en remplaçant l'indéterminée par r_n , $\dfrac{\overbrace{P_n'(r_n)}^{=0}}{\underbrace{P_n(r_n)}_{\neq 0}}=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{r_n-j}=0$

$0<r_n<1$ donc pour tout $k\in\{0,1,...,n\}, k-1<k-r_n<k$ et $\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{k-r_n}$

$0=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k-r_n}=-\frac{1}{r_n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-r_n}>-\frac{1}{r_n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

donc $\dfrac{1}{r_n}>\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et puisque la série $\sum\dfrac{1}{k}$ diverge, par minoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{r_n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}r_n=0$

$\dfrac{1}{r_n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-r_n}$ et l'encadrement $\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{k-r_n}$ entraine :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-r_n}<\frac{1}{1-r_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon(n)\sim\ln n$ quand $n\to+\infty$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}r_n=0$

l'encadrement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{r_n}<\frac{1}{1-r_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ entraine alors que $\dfrac{1}{r_n}\sim\ln n$

et finalement , $\boxed{r_n\sim\dfrac{1}{\ln n}\quad\text{quand}\quad n\to+\infty}$

* *

28 Sujet 28

Soient f et g deux endomophismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps $\mathbf{K}$.

Montrer que : $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}f\cap\mathrm{Im}g=\{0\} \\ \text{et}\quad \ker f+\ker g=E\end{cases}$

Solution

$\forall y \in \mathrm{Im}(f+g), \quad \exists x \in E, \quad y = (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im} g}$

Donc $\mathrm{Im}(f+g) \underbrace{\subset}_{(1)} \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$

d'où $\mathrm{rg}(f+g) = \dim(\mathrm{Im}(f+g)) \underbrace{\leq}_{(1')} \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g)$

Il y a égalité entre $\mathrm{rg}(f+g)$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ si et seulement si l'inégalité (1'), c'est à dire l'inclusion (1) est une égalité et si $\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) = 0$

Donc $\quad \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g \\ \text{et } \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\} \end{cases}$

♣ Supposons que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

- alors on vient de voir que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$
- $\dim(\ker f + \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$ (Grassmann)
  $= n - \mathrm{rg} f + n - \mathrm{rg} g - \dim(\ker f \cap \ker g)$ (formule du rang)
  $= 2n - \mathrm{rg}(f+g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$

Montrons que $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$

l'inclusion $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ est immédiate.

réciproquement soit $x \in \ker(f+g)$:

$(f+g)(x) = 0$ donc $\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im} f} = \underbrace{g(-x)}_{\in \mathrm{Im} g}$ et donc $f(x) = g(x) = 0$ puisque $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$

ce qui montre bien que $x \in \ker f \cap \ker g$ et termine la démonstration.

On peut alors écrire :

$\dim(\ker f + \ker g) = 2n - \mathrm{rg}(f+g) - \dim(\ker(f+g)) = 2n - n = n$

(à nouveau th. du rang appliqué à $f+g$)

L'inclusion $\ker f + \ker g \subset E$ et l'égalité des dimensions permettent alors de conclure à l'égalité :

$\ker f + \ker g = E$

♣ Supposons maintenant que $\quad \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$

D'après le résultat préliminaire, il suffit de montrer que : $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$

- L'inclusion $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ ayant déja été montrée, il suffit de prouver que $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}(f+g)$
- soit $z \in \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$. $\quad \exists x, y \in E$ tels que $z = f(x) + g(y)$
- Puisque $\ker f + \ker g = E$, il existe $a \in \ker f$ et $b \in \ker g$ tels que $x = a + b$
  et il existe $c \in \ker f$ et $d \in \ker g$ tels que $y = c + d$

alors $(f+g)(b+c) = f(b) + \underbrace{f(c)}_{0} + \underbrace{g(b)}_{0} + g(c)$

et $z = f(x) + g(y) = f(a+b) + g(c+d) = \underbrace{f(a)}_{0} + f(b) + g(c) + \underbrace{g(d)}_{0} = f(b) + g(c)$

on a ainsi montré que $z = (f+g)(b+c) \in \mathrm{Im}(f+g)$

et finalement que $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$

* *

29 Sujet 29

ENSI

On considère la série de fonctions $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
b) Calculer un équivalent de f en zéro.
c) Calculer un équivalent de f en $+\infty$

Solution :

b) L'étude des variations des fonctions $\varphi : u \longrightarrow \ln(1+u) - u$

et $\quad \psi : u \longrightarrow \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$

montre que : $\quad \forall x > -1, \quad \ln(1+u) \leq u$

$\forall x > 0, \quad \ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}$

donc pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$

$$\frac{x^2}{n^2} - \frac{x^4}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \leq \frac{x^2}{n^2}$$

Pour tout x réel fixé ces trois séries étant convergentes, en sommant de 1 à $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{n^2}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{x^4}{2n^4}\right) \leq f(x) \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$x^2\frac{\pi^2}{6} - x^2\frac{\pi^4}{180} \leq f(x) \leq x^2\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(en utilisant : } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90})$$

d'où il résulte que $\boxed{f(x) \sim \frac{\pi^2}{6}x^2 \text{ quand } x \to +\infty}$

Autre méthode

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^2}\ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)}_{u_n(x)}$$

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \sim \frac{x^2}{n^2} \text{ quand } n \to +\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0} u_n(x) = \frac{1}{n^2}$$

Puisque $\ln(1+u) \leq u$, $\quad 0 \leq u_n(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \leq \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

Donc $\| u_n \|_{]0,+\infty[}^{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to 0}u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on retrouve le résultat déja établi.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$, fixé.

Considérons la fonction $h : (t \longrightarrow \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right))$

h est définie, continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ $\quad$ (car $h(t) \sim \frac{x^2}{t^2}$ en $+\infty$)

pour tout $n \geq 1$, $\forall t \in [n, n+1]$, $\quad h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$

en intégrant, $\int_n^{n+1} h(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} h(t)dt \leq \int_n^{n+1} h(n)dt$

$$h(n+1) \leq \int_n^{n+1} h(t)dt \leq h(n)$$

En sommant pour n variant de 1 à p et en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h(n+1) \leq \int_1^{+\infty} h(t)dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) = f(x)$$

et puisque $h(1) = \ln(1+x^2)$

$$f(x) - \ln(1+x^2) \leq \int_1^{+\infty} h(t)dt \leq f(x)$$

♣ Calculons $\int_1^{+\infty} h(t)dt$:

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)dt = \int_1^{+\infty}[\ln(x^2+t^2)-2\ln(t)]dt$$

Pour $a>1$, $\displaystyle\int_1^a [\ln(x^2+t^2)-2\ln(t)]dt = \int_1^a \ln(x^2+t^2)dt - 2\int_1^a \ln(t)dt$

$$= \left[\ t.\ln(x^2+t^2)\ \right]_{t=1}^{t=a} - \int_1^a \frac{2t^2}{x^2+t^2}dt - 2\left[\ t.\ln t\ \right]_{t=1}^{t=a} + 2\int_1^a dt$$

$$= a.\ln(x^2+a^2) - \ln(x^2+1) - 2\int_1^a \frac{t^2+x^2-x^2}{x^2+t^2}dt - 2a\ln a + 2a - 2$$

$$= a.\ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) - 2(a-1) + 2x^2\int_1^a \frac{1}{x^2+t^2}dt + 2a - 2$$

$$= a.\ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) + 2x^2\frac{1}{x}\left[\ \mathrm{Arctan}\frac{t}{x}\ \right]_{t=1}^{t=a}$$

$$= a.\ln\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) + 2x\left(\mathrm{Arctan}\frac{a}{x} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}\right)$$

Passons à la limite pour x fixé quand $a \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt = 2x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}\right) - \ln(x^2+1)$$

$$= 2x\mathrm{Arctan}x - \ln(x^2+1)$$

♣ Reportons ce résultat dans l'encadrement obtenu plus haut :

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt \le f(x) \le \int_1^{+\infty} h(t)dt + \ln(1+x^2)$$

on obtient : $2x\mathrm{Arctan}x - \ln(x^2+1) \le f(x) \le 2x\mathrm{Arctan}x$

Quand $x \to +\infty$, $\ln(x^2+1) \sim 2\ln x = o(x)$ et $\lim(\mathrm{Arctan}x) = \frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{f(x) \sim \frac{\pi x}{2} \quad \text{quand } x \to +\infty}$

* *

30 Sujet 30

ENSI

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique et $p \le n$ le nombre de ses valeurs propres distinctes.

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbf{R}_{p-1}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$

Application $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Solution :

A étant une matrice symétrique de $M_n(\mathbf{R})$, elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$.

Il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ telles que $A = Q.\Delta.Q^{-1}$

Alors $A^2 = Q.\Delta^2.Q^{-1}$ et pour tout entier k , $A^k = Q.\Delta^k.Q^{-1}$.

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right)$$

$$= \lim_{m\to+\infty} Q.\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k}{k!}\right)Q^{-1}$$

$$= \lim_{m\to+\infty} Q.\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_2^k}{k!} & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_p^k}{k!} \end{pmatrix}.Q^{-1}$$

$$= Q.\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^k}{k!}\right)Q^{-1} \qquad \text{(par continuité du produit matriciel)}$$

$$\exp(A) = Q.\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix}.Q^{-1} = Q.\exp(\Delta).Q^{-1}$$

Par ailleurs, si $P = a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$ est un polynôme de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$, alors

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p-1} a_kA^k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(Q.\Delta^k.Q^{-1}) = Q.\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k\Delta^k\right).Q^{-1}$$

(par linéarité du produit matriciel)

$$= Q.\sum_{k=0}^{p-1} a_k\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \lambda_p^k \end{pmatrix}.Q^{-1} = Q.\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda_p^k \end{pmatrix}.Q^{-1}$$

$$P(A) = Q.\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & P(\lambda_p) \end{pmatrix}.Q^{-1}$$

Le polynôme P est tel que $\exp(A) = P(A)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & P(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} P(\lambda_1) = e^{\lambda_1} \\ P(\lambda_2) = e^{\lambda_2} \\ .... \\ P(\lambda_p) = e^{\lambda_p} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + ... + a_{p-1}\lambda_1^{p-1} = e^{\lambda_1} \\ a_0 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2 + ... + a_{p-1}\lambda_2^{p-1} = e^{\lambda_2} \\ .... \\ a_0 + a_1\lambda_p + a_2\lambda_p^2 + ... + a_{p-1}\lambda_p^{p-1} = e^{\lambda_p} \end{cases}$$

On est en présence d'un système de p équations (et pas n !) aux p inconnues $(a_0, a_1, ..., a_{p-1})$ dont la matrice est $W = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{p-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & ... & \lambda_3^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & ... & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$

Son déterminant est un déterminant de VanderMonde qui vaut :

$$\det(W) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{p-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & ... & \lambda_3^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & ... & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i)$$

et qui n'est pas nul car les λ_i sont deux à deux distincts.

Le système est un système de Cramer qui admet un p-uplet solution $(a_0, a_1, ..., a_{p-1})$ unique et donc un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ solution unique.

Application $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A = Q.\Delta.Q^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ici $p = 2$ et $P(X) = a_1 X + a_0$ vérifie le système : $\begin{cases} a_0 + 5a_1 = e^5 \\ a_0 + 7a_1 = e^7 \end{cases}$

$a_0 = \dfrac{7e^5 - 5e^7}{2}, a_1 = \dfrac{e^7 - e^5}{2}$ et $\boxed{P(X) = \dfrac{e^7 - e^5}{2} X + \dfrac{7e^5 - 5e^7}{2}}$

$$\boxed{\exp(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^7 + e^5}{2} & 0 & \dfrac{e^7 - e^5}{2} \\ 0 & e^5 & 0 \\ \dfrac{e^7 - e^5}{2} & 0 & \dfrac{e^7 + e^5}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{e^7 - e^5}{2} A + \dfrac{7e^5 - 5e^7}{2} I_3}$$

****

31 Matrices de rang 1

Mines

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$.

a) Montrer que A est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes X et Y de K^n, non nulles, telles que $A = X.{}^tY$

b) Soit A de rang 1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré au plus égal à 2.

En déduire une condition pour que A soit diagonalisable.

Solution :

a) ♣ Si A est de rang 1, toutes ses colonnes sont colinéaires à l'une d'entre elles, par exemple à la colonne $C_j = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 C_j & \alpha_2 C_j & ... & \alpha_n C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$$

donc $A = X.{}^tY$ où $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Y = C_j = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$, qui sont non nuls sinon A le serait.

♣ Réciproquement, si $A = X.^tY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, sont deux vecteurs colonnes non nuls, alors, colonne par colonne, A peut s'écrire de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & ... & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & ... & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & ... & x_ny_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} y_1X & y_2X & ... & y_2X \end{pmatrix}$

A est une matrice dont toutes les colonnes sont colinéaires à la colonne X, donc son rang est au plus 1. Pour que A soit nulle il faut que tous les y_i ou le vecteur colonne X le soient, c'est à dire que $X = 0$ ou $Y = 0$, ce qui est exclu.

Donc $\text{rg}(A) = 1$.

b) Soit A de rang 1. Soient X et Y deux vecteurs colonnes non nuls tels que $A = X.^tY$

alors $A^2 = (X.^tY)(X.^tY) = X.(^tY.X).^tY$

or $^tY.X = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)$ (matrice 1-1)

et on peut remarquer que $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \text{tr}(A)$

donc $A^2 = X.(\text{tr}(A)).^tY = \text{tr}(A).X.^tY = \text{tr}(A).A$

Donc $\boxed{A \text{ vérifie la relation } A^2 = \text{tr}(A).A \text{ et a pour polynôme annulateur } X^2 - \text{tr}(A).X}$

♣ -si $\text{tr}(A) \neq 0$, le polynôme annulateur $X^2 - \text{tr}(A).X = X.(X - \text{tr}(A))$ est scindé dans $\mathbf{K}[X]$ et à racines simples. A est donc diagonalisable.

-si $\text{tr}(A) = 0$, $X^2 - \text{tr}(A).X = X^2$ est un polynôme annulateur de A.

Donc $\text{Spec}(A) \subset \{0\}$ (le spectre est inclu dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur). Si A est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle et est donc nulle, ce qui est exclu car son rang vaut 1.

Donc dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

Finalement, $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \text{tr}(A) \neq 0}$

****

32 Sujet 32

Mines

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.

On définit une suite de fonctions (f_n) par :

$$f_0 = f$$

et $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [a, b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$

Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ et calculer sa somme.

Solution :

♣ La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est donc bornée :

$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| = \| f \|^\infty$

$\forall x \in [a, b], \quad |f_1(x)| = \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^x \| f \|^\infty dt = (x - a) \| f \|^\infty$

d'où $\forall x \in [a, b], \quad |f_2(x)| = \left| \int_a^x f_1(t)dt \right| \leq \int_a^x |f_1(t)|dt \leq \int_a^x \| f \|^\infty (t - a)dt$

$|f_2(x)| \leq \dfrac{(x-a)^2}{2} \parallel f \parallel^\infty$

Montrons par récurrence que pour tout entier n,

$\forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{(x-a)^n}{n!} \parallel f \parallel^\infty$

Ceci a été vérifié pour $n = 1, 2$

Supposons le vrai à l'ordre n : $\quad \forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{(x-a)^n}{n!} \parallel f \parallel^\infty$

alors, $\quad \forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_a^x f_n(t)dt \right| \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!} \parallel f \parallel^\infty dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \parallel f \parallel^\infty$$

Il en résulte que pour tout n, $\quad \forall x \in [a,b], \quad |f_{n+1}(x)| \leq \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \parallel f \parallel^\infty$

et donc $\quad \parallel f_n \parallel^\infty \leq \dfrac{(b-a)^n}{(n)!} \parallel f \parallel^\infty$

Or la série réelle $\quad \sum \dfrac{(b-a)^n}{(n)!} \parallel f \parallel^\infty$ converge $\quad$ (série exponentielle)

Donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [a,b].}$

♣ Notons, $\forall x \in [a,b], S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$\forall x \in [a,b], \quad S(x) = f_0(x) + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x)$

$S(x) = f_0(x) + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$ et puisque la série converge normalemnt donc uniformément sur $[a,b]$ et donx sur tout $[a,x]$,

$$S(x) = f_0(x) + \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$S(x) = f_0(x) + \int_a^x S(t)dt$$

Chaque fonction f_n est continue sur $[a,b]$ (récurrence immédiate). Puisque la série converge uniformément, sa somme S est aussi continue sur $[a,b]$.

En posant $z(x) = \displaystyle\int_a^x S(t)dt$, z est dérivable sur $[a,b]$ (comme primitive d'une fonction continue) et $z'(x) = S(x)$

Donc z est solution sur $[a,b]$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = f$

La solution générale de l'équation homogène asociée (E_0) : $y' - y = 0$ $\quad$ a pour expression $y(x) = e^x$

Par la méthode de variation de la constante, cherchons une solution de (E) de la forme $u(x) = e^x \lambda(x)$, λ fonction inconnue.

$u'(x) = e^x \lambda(x) + e^x \lambda'(x)$, $\quad$ donc $e^x \lambda'(x) = f(x)$ et $\quad \lambda'(x) = f(x)e^{-x}$

$\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt + \text{cte}$

et finalement $\quad z(x) = e^x \displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt + \mu e^x$

Or $z(a) = \displaystyle\int_a^a S(t)dt = 0$ $\quad$ donc $\quad \mu = 0 \quad$ et $\quad z(x) = e^x \displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt$

Enfin, $S(x) = z'(x)$ $\quad$ (car $z(x) = \displaystyle\int_a^x S(t)dt$)

$S(x) = z'(x) = e^x \displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt + e^x f(x)e^{-x}$

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \quad S(x) = f(x) + e^x \int_a^x f(t)e^{-t}dt}$$

****

33 sujet 33

Centrale

Soit n un entier positif et $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$

a) Quelle est la dimension sur $\mathbf{R}$ le l'espace vetoriel $S_{(E)}$ des solutions de l'équation différentielle (E) : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$

b) Montrer que l'endomorphisme de dérivation laisse cet espace stable. Calculer la trace et le déterminant de l'endorphisme induit.

Solution :

a) $S_{(E)}$ est un sous espace vectoriel de $C^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ espace des fonctions de classe C^n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Considérons l'application Φ qui à la fonction $f \in S_{(E)}$ fait correspondre la fonction vectorielle $X \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$: $\quad f \quad \longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$

f est solution de l'équation $(E) \iff X$ est solution de l'équation (E') :

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} .X$$

Donc Φ est une application de $S_{(E)}$ dans $S_{(E')}$, sous espace des solutions de (E').

On sait que l'espace $S_{(E')}$ des solutions du système différentiel linéaire (E') est un espace de dimension n.

Φ est linéaire (immédiat) . Montrons que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel de $S_{(E)}$ dans $S_{(E')}$

Injectivité : Soit $f \in \ker \Phi$. Alors $\Phi(f) = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f = 0$

Ainsi, $\ker \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

Surjectivité : Soit $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{(E')}$. $\qquad Y' = A.Y$

donc $\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

ce qui donne, composante par composante :

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \quad y_1' = y_2 \quad ... \quad y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = -a_0y_0 - a_1y_1 - a_2y_2 ... - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = y_0' \qquad y_2 = y_1' = y_0'' \qquad ... \qquad y_{n-1} = y_0^{(n-1)} \\ \quad y_0^{(n)} = -a_0 y_0 - a_1 y_0' - a_2 y_0'' ... - a_{n-1} y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Donc y_0 est solution de (E) et $Y = \Phi(y_0)$, ce qui montre que Φ est surjective.
Ainsi, Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $S_{(E)}$ sur $S_{(E')}$. Donc $\dim(S_{(E)}) = \dim(S_{(E')}) = n$
b) ♣ Soit f un élément de $S_{(E)}$.

$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + a_{n-2} f^{(n-2)}(x) + ... + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$

les a_i étant constants, en dérivant cette égalité, on vérifie que f' satisfait le même équation.
Donc $S_{(E)}$ est stable par l'endomorphisme de dérivation D.
Notons $\widetilde{D}$ l'endomorphisme induit par D sur $S_{(E)}$.
♣ Notons $(e_0, e_1, ..., e_{n-1}) = B$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ... \quad e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$ le système fondamental de solutions de (E') qui vérifie :

$Y_0(0) = e_0, \quad Y_1(0) = e_1, \quad ... \quad Y_{n-1}(0) = e_{n-1}$

Soit $W(x) = \det_B(Y_0(x), Y_1(x), ..., Y_{n-1}(x))$ le wronskien du système $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$
$W(0) = \det_B(e_0, e_1, ..., e_{n-1}) = 1 \neq 0$ qui montre que $(Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1})$ est bien une base de $S_{(E')}$
Soient alors $f_i = \Phi^{-1}(Y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1$ les images réciproques des Y_i par Φ.
$(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est une base de $S_{(E)}$ comme image par l'isomorphisme Φ^{-1} d'une base de $S_{(E')}$.

$$\Phi(f_0) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \\ \vdots \\ f_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = Y_0 \quad \text{et} \quad \Phi(f_0)(0) = Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(0) \\ f_0'(0) \\ \vdots \\ f_0^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$$

de sorte que $\quad f_0(0) = 1, \quad f_0'(0) = 0, \quad ... \quad f_0^{(n-1)}(0) = 0$
de même, $\quad f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 1, \quad ... \quad f_1^{(n-1)}(0) = 0$
et de manière générale, $\quad f_i^{(k)}(0) = \delta_{i,k}$
♣ Soit $g_0 = \widetilde{D}(f_0) = f_0'$
-Puisque $g_0 \in S_{(E)}$, il se décompose sur la base $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ de $S_{(E)}$

$$g_0 = f_0' = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i \quad \text{et pout tout } k, \quad g_0^{(k)} = f_0^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(k)}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-2\}, \quad g_0^{(k)}(0) = \underbrace{f_0^{(k+1)}(0)}_{\delta_{0,k+1}=0} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \underbrace{f_i^{(k)}(0)}_{\delta_{i,k}} = b_k$

donc $b_0 = b_1 = ... = b_{n-2} = 0$

pour $k = n-1, \quad g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$

or $f_0^{(n)}(0) + a_{n-1} \underbrace{f_0^{(n-1)}(0)}_{0} + ... + a_1 \underbrace{f_0'(0)}_{0} + a_0 \underbrace{f_0(0)}_{1} = 0$ donc $g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = -a_0$

donc $g_0^{(n-1)}(0) = f_0^{(n)}(0) = -a_0 \qquad$ et $\quad b_{n-1} = -a_0$

d'où finalement, $\widetilde{D}(f_0) = f_0' = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f_i^{(k)} = -a_0 f_{n-1}$

-Plus généralement, calculons $\widetilde{D}(f_j)$: $g_j = \widetilde{D}(f_j) = f_j' = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i$ puisque $\widetilde{D}(f_j) \in S_{(E)}$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-2\}$, $\quad g_j^{(k)}(0) = \underbrace{f_j^{(k+1)}(0)}_{\delta_{j,k+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \underbrace{f_i^{(k)}(0)}_{\delta_{i,k}} = c_k$

donc $c_0 = c_1 = ... = c_{j-2} = c_j = c_{n-2} = 0 \quad$ et $\quad c_{j-1} = 1$

pour $k = n-1$, $\quad g_j^{(n-1)}(0) = f_j^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \underbrace{f_i^{(n-1)}(0)}_{\delta_{i,n-1}} = c_{n-1}$

là encore, la relation $f_j^{(n)}(0) + a_{n-1} \underbrace{f_j^{(n-1)}(0)}_{0} + ... + a_j \underbrace{f_j^{(j)}(0)}_{1} + ... + a_0 \underbrace{f_j(0)}_{0} = 0$

entraîne que $f_j^{(n)}(0) = -a_j \qquad$ donc $\quad c_{n-1} = -a_j$

d'où finalement, $\widetilde{D}(f_j) = f_j' = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i = f_{j-1} - a_j f_{n-1}$

La matrice de $\widetilde{D}$ dans la base $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f_0' & f_1' & f_2' & \cdots & f_{n-1}' \end{array} \\ M = & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{array} \right) \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{array} \end{array}$$

C'est la matrice A du système (E')

♣ Alors $\mathrm{tr}(\widetilde{D}) = \mathrm{tr}(A) = -a_{n-1}$

et $\quad \det(\widetilde{D}) = \det(A) = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0$

$$\boxed{\mathrm{tr}(\widetilde{D}) = -a_{n-1} \quad \text{et} \quad \det(\widetilde{D}) = (-1)^n a_0}$$

****

34 sujet 34

Centrale

Soit p_n le nombre de chiffres dans l'écriture de l'entier naturel n en base 10. (par ex. $p_{100} = p_{999} = 3$)

Nature et somme éventuelle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n(n+1)}$

Solution :

♣ Soit q un entier ≥ 1. Pour tout n tel que $10^q \leq n \leq 10^{q+1} - 1$, $\quad p_n = q + 1$

or $10^q \leq n \leq 10^{q+1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 10^q \leq n < 10^{q+1} \quad \Leftrightarrow \quad q \leq \log_{10} n < q + 1$

$\Leftrightarrow \quad q = E(\log_{10} n) \quad$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x)

Donc $p_n = E(\log_{10} n) + 1 = E\left(\frac{\ln n}{\ln 10}\right) + 1 \sim \frac{\ln n}{\ln 10}$ quand $n \to +\infty$

Donc $\frac{p_n}{n(n+1)} \sim \frac{1}{\ln 10} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $n \to +\infty \quad$ (car $\ln n = o(\sqrt{n})$)

Par majoration par une série de Riemann convergente, on conclut que la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n(n+1)}$ converge.

♣ Pour tout $N > 0$, $\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} \frac{p_n}{n(n+1)} = \sum_{q=0}^{N} \left(\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1} \frac{p_n}{n(n+1)} \right)$

$$\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} \frac{p_n}{n(n+1)} = \sum_{q=0}^{N} \left(\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1} \frac{q+1}{n(n+1)} \right) = \sum_{q=0}^{N} \left((q+1) \underbrace{\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}_{\text{somme "télescopique"}} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} \frac{p_n}{n(n+1)} = \sum_{q=0}^{N} (q+1) \left(\frac{1}{10^q} - \frac{1}{10^{q+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{10} + \frac{2}{10} - \frac{2}{100} + \frac{3}{100} - \frac{3}{1000} + ... + \frac{N}{10^{N-1}} - \frac{N}{10^N} + \frac{N+1}{10^N} - \frac{N+1}{10^{N+1}}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} .... + \frac{1}{10^{N-1}} + \frac{1}{10^N} - \frac{N+1}{10^{N+1}}$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{N+1}{10^{N+1}} = 0$ (croissance comparée puissance-exponentielle), en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n(n+1)} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{10^q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n(n+1)} = \frac{10}{9}}$$

* *

35 sujet 35

Mines

Etudier la suite de terme général $u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ puis la série de terme général u_n

Solution :

♣ Tous les facteurs du produit $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ sont > 0.

$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est la somme partielle de rang n de la série $\left\{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}_{n\geq 2}$

Notons $v_k = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, qui est à termes négatifs.

$v_k = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim -\frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $k \to +\infty$

or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge , donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) = -\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

♣ Par comparaison série intégrale, on montre que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{2}) \sim 2\sqrt{n}$

Puisque $\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$ et $\left\{-\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}$ sont deux séries divergentes à termes positifs équivalents, les sommes partielles de même rang sont aussi équivalentes :

??

* *

$A = (\ \alpha_1 C_j | \alpha_1 C_j | ... \alpha_1 C_j |\ )$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

* *

;

;

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right)$$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} x^2 \text{ quand } x \to +\infty}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^2$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$