Oraux 2007

****

1 Centrale - 826*

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t(t-1)(t-2)...(t-n+1)dt$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

b) Calculer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

c) Montrer que la série $\sum a_n$ converge absolument.

d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

Solution :

a)• Pour tout $t \in [0,1],\ 0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} -1 &\leq t-1 \leq 0 \\ -2 &\leq t-2 \leq -1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -n+1 &\leq t-n+1 \leq -n+2 \end{aligned}$$

donc $\mid t(t-1)(t-2)...(t-n+1) \mid \leq\ 1.1.2.....(n-2)(n-1) = (n-1)!$

$$\Longrightarrow |a_n| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^1 t(t-1)(t-2)...(t-n+1)dt\right| \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 |t(t-1)(t-2)...(t-n+1)|dt$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (n-1)!dt = \frac{1}{n}$$

donc pour tout x réel, $|a_n x^n| \leq \dfrac{|x|^n}{n}$, ce qui montre par majoration que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$. Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1.

• Pour tout $n \geq 2$ et $t \in [0,1]$

$|t-2| \geq 1,\ |t-3| \geq 2,\ ......\ , |t-n+1| \geq n-2$

Chacun des facteurs du produit $t(t-1)(t-2)...(t-n+1)$ garde un signe constant sur $[0,1]$ et le produit aussi, donc

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^1 t(t-1)(t-2)...(t-n+1)dt\right| = \frac{1}{n!}\int_0^1 |t(t-1)(t-2)...(t-n+1)|dt$$

$$\geq \frac{1}{n!}\int_0^1 |t(t-1)(n-2)!|dt = \frac{(n-2)!}{n!}\int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{n(n-1)}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6n(n-1)}$$

donc pour tout x réel, $|a_n x^n| \geq \dfrac{|x|^n}{6n(n-1)}$, ce qui montre par minoration que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge grossièrement pour $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1.

• $\boxed{\text{Finalement, la série entière } \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } R = 1}$

b) $\forall x \in]0,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)(t-2)...(t-n+1)dt\right)x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \underbrace{\frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)x^n}{n!}}_{u_n(t)} dt$$

d'après la majoration obtenue en a), $|u_n(t)| \leq \dfrac{(n-1)!|x|^n}{n!} \leq |x|^n$, terme général d'une série convergente puisque $|x| < 1$.

La série de fonctions $\sum u_n(t)$ converge normalement et donc uniformément pour $t \in [0,1]$.

On peut alors affirmer que $\forall x \in]0,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(t)dt\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt\right)$

donc $\forall x \in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)x^n}{n!} dt \right)$

or on sait que $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^n}{n!}$

donc $\forall x \in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t dt = \int_0^1 e^{t\ln(1+x)} dt = \left[\frac{e^{t\ln(1+x)}}{\ln(1+x)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1+x-1}{\ln(1+x)}$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}}$$

d) La série $\sum a_n$ converge absolument. $\forall x \in [-1,1], |a_n x^n| \leq |a_n|$ donc $\sup_{x\in[-1,1]} |a_n x^n| \leq |a_n|$ et la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$.

La fonction somme $S:\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est donc continue sur $[-1,1]$.

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\ln(2)}$

et de même, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{\ln(2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 0}$$

* *

2 Centrale - 829

a) Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$

b) Soient $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et f la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est donnée par $f(t) = \text{ch}(bt)$.
Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

c) Calculer l'intégrale définie en a)

Solution :

a) la fonction $g\ :\ x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

- $g(x) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{ax}{x} = a$ donc g est prolongeable en une fonction continue sur $[0,+\infty[$
- $|g(x)| \leq \frac{1}{e^x-1} \overset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$

g est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1} dx$ est absolument convergente.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\sin(ax)}{e^x-1} = \frac{\sin(ax)e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sin(ax)e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n$ (car $0 < e^{-x} < 1$)

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ax)e^{-nx}$ (après décalage d'indice d'une unité)

- Notons (v_n) la suite de fonctions $(x \mapsto \sin(ax)e^{-nx})_{n\geq 1}$

Pour tout $n \geq 1$, la fonction v_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque $|v_n(x)| \leq e^{-nx}$

$\int_0^{+\infty} |v_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} |\sin(ax)| e^{-nx} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{n}$

! ! ! ! ! Ce calcul ne permet pas de conclure à la convergence de la série numérique $\sum \left(\int_0^{+\infty} |v_n(x)| dx \right)$ et d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Nous allons donc intégrer la somme partielle de la série et essayer d'intervertir somme de série et intégrale par un passage à la limite :

et, $\int_0^{+\infty} v_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \sin(ax)e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} \text{Im}(e^{iax}e^{-nx}) dx = \text{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-n+ia)x} dx \right)$

$= \text{Im}\left(\left[\frac{e^{(-n+ia)x}}{-n+ia} \right]_{x=0}^{x\to+\infty} \right) = \text{Im}\left(\frac{1}{n-ia} \right) = \text{Im}\left(\frac{n+ia}{n^2+a^2} \right) = \frac{a}{n^2+a^2}$

Notons $g_N(x)=\sum_{n=1}^{N} v_n(x)=\sum_{n=1}^{N}\sin(ax)e^{-nx}$ et $R_N(x)=g(x)-g_N(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\sin(ax)e^{-nx}$

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx=\int_0^{+\infty} g_N(x)dx+\int_0^{+\infty} R_N(x)dx \qquad (1)$$

or $$\int_0^{+\infty} g_N(x)dx=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n(x)dx=\sum_{n=1}^{N}\int_0^{+\infty} v_n(x)dx=\sum_{n=1}^{N}\frac{a}{n^2+a^2} \qquad (2)$$

(somme finie, linéarité de l'intégrale)

et $$\left|\int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right|\le\int_0^{+\infty}|R_N(x)|dx=\int_0^{+\infty}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\sin(ax)e^{-nx}\right|dx\le\int_0^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}|\sin(ax)|e^{-nx}dx$$

$$\left|\int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right|\le\int_0^{+\infty}|\sin(ax)|\,\frac{e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}|\sin(ax)|\,\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx=\int_0^{+\infty}|g(x)|e^{-Nx}dx$$

La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée sur $[0,+\infty[$.

d'où $\left|\int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right|\le\int_0^{+\infty}\| g \|_\infty\, e^{-Nx}dx=\| g \|_\infty\left[\frac{e^{-Nx}}{-N}\right]_0^{\infty}=\frac{\| g \|_\infty}{N}$, ce qui montre que :

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right|=0 \qquad (3)$$

D'après les relations (1), (2) et (3), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{a}{n^2+a^2}\right)+0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$ (cette dernière série, équivalente à $\frac{a}{n^2}$ est cvgte)

En conclusion, $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}}$$

b) La fonction f est paire, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n(f)=0$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{ch}(bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re(\text{ch}(bt)e^{int})dt=\Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{(in+b)t}+e^{(in-b)t})dt\right)$$

$$=\Re\left(\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(in+b)t}}{in+b}+\frac{e^{(in-b)t}}{in-b}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$=\Re\left(\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(in+b)\pi}-e^{(-in-b)\pi}}{in+b}+\frac{e^{(in-b)\pi}-e^{(-in+b)\pi}}{in-b}\right]\right)$$

$$=\Re\left(\frac{(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{e^{b\pi}-e^{-b\pi}}{in+b}+\frac{e^{-b\pi}-e^{b\pi}}{in-b}\right]\right)=\Re\left(\frac{(-1)^n\text{sh}(b\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{in+b}+\frac{1}{b-in}\right]\right)$$

$$=\Re\left(\frac{(-1)^n\text{sh}(b\pi)}{\pi}\left[\frac{-in+b}{b^2+n^2}+\frac{b+in}{b^2+n^2}\right]\right)=\frac{2b(-1)^n\text{sh}(b\pi)}{\pi(b^2+n^2)}$$

La série de Fourier de f est :

$$S_f(x)=\frac{2\,b\,\text{sh}(b\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2b^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{b^2+n^2}\right) \qquad \left(a_0=\frac{2\,\text{sh}(b\pi)}{\pi\, b}\right)$$

c) La fonction f étant 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en tout point $x\in\mathbb{R}$ et sa somme est égale à $f(x)$

En particulier au point $x=\pi$:

$$S_f(\pi)=\frac{2\,b\,\text{sh}(b\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2b^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^2+n^2}\right)=f(\pi)=\text{ch}(b\,\pi)$$

$$\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^2+n^2}=\frac{\pi\text{ch}(b\,\pi)}{2b\,\text{sh}(b\pi)}-\frac{1}{2b^2}=\frac{b\pi\text{ch}(b\,\pi)-\text{sh}(b\pi)}{2b^2\,\text{sh}(b\pi)}$$

d'où l'on déduit : $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}=\frac{a\pi\text{ch}(a\,\pi)-\text{sh}(a\pi)}{2a\,\text{sh}(a\pi)}}$$

****

3 Centrale - 830*

a) Résoudre, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation (E_n) : $y"+y=\sin(nx)$

b) Soit $(c_n)_{n\ge1}$ une suite réelle telle que $\sum|c_n|$ converge.

Montrer que l'on peut définir une fonction continue, 2π-périodique f par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(nx)$

c) Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de sa série de Fourier.

d) Résoudre l'équation (E_f) : $y"+y=f(x)$

Solution :

a) L'équation homogène $(E_{n,0})$: $y" + y = 0$, associée à (E_n), a pour solution générale :
$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, $(a, b) \in \mathbf{K}^2$

• si $n \geq 2$, on peut rechercher une solution particulière de (E_n) de la forme $g(x) = \lambda \sin(nx)$
alors $\quad g''(x) + g(x) = \sin(nx) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(1 - n^2) = 1$
La solution générale de (E_n) est alors :

$$\boxed{y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \frac{1}{1-n^2}\sin(nx), \quad (a, b) \in \mathbf{K}^2}$$

• si $n = 1$, recherchons une solution particulière de (E_1) par la méthode de variation des constantes, c'est à dire de la forme $\quad g(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x) \quad$ où a et b sont deux fonctions inconnues de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus la condition :

$\forall x \in \mathbb{R},\ a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) = 0 \qquad (1)$

alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -a(x)\sin(x) + b(x)\cos(x) + \underbrace{a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x)}_{=0}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) - a(x)\cos(x) - b(x)\sin(x)$

$g''(x) + g(x) = \sin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad -a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) = \sin(x) \qquad (2)$

La résolution de (1) et (2) donne : $\quad a'(x) = -\sin^2(x) \quad$ et $\quad b'(x) = \sin(x)\cos(x)$

d'où $\quad a(x) = -\displaystyle\int \sin^2(x)dx = \int \frac{\cos(2x) - 1}{2}dx = \frac{\sin(2x) - 2x}{4} = \frac{\sin(x)\cos(x) - x}{2}$

$b(x) = \displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$

La solution générale de (E_n) est alors :

$$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \frac{\sin(x)\cos(x) - x}{2}\cos(x) + \frac{\sin^2(x)}{2}\sin(x)$$

$$\boxed{y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{x\cos(x)}{2}, \quad (a, b) \in \mathbf{K}^2}$$

b) Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum |c_n|$ converge.

Notons $v_n(x) = c_n \sin(nx)$. Alors $\|v_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = |c_n|$ et la série de fonctions $\sum v_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Chaque fonction v_n étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction somme f est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$.

Chaque v_n étant 2π-périodique, f l'est aussi.

c) f étant continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, ses coefficients de Fourier sont bien définis.

f est impaire comme chaque fonction v_n. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(nx)\right)\sin(kx)dx$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{c_n\sin(nx)\sin(kx)}_{w_k(x)}dx$

Là aussi, la relation $\|w_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = |c_n|$ entraine la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum w_n(\ )$ sur $\mathbb{R}$.

donc $\ b_k(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} w_k(x)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} c_n\sin(nx)\sin(kx)dx$

$= \displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} c_n(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x)dx \qquad$ (car $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$)

or $\ \displaystyle\int_0^{2\pi}(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x)dx = \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_0^{2\pi} \qquad$ si $n \neq k$

et $\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx = \int_0^{2\pi}\frac{1 - \cos(2nx)}{2}dx = \pi \qquad$ si $n = k$

donc $\ b_k(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}c_k\,2\pi = c_k$

La série de Fourier de f est donc $S_f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(nx)$, c'est à dire la même expression que celle définissant la fonction f. Donc cette série de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$ et est égale à f.

d) La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (E_f) : $\ y'' + y = f(x)$ est :
$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, $(a, b) \in \mathbf{K}^2$

Reste à trouver une solution particulière de l'équation complète $y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$

Par une méthode adaptée du principe de superposition, on va rechercher pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une solution de l'équation $y'' + y = c_n \sin(nx)$, qui n'est autre que l'équation (E_n) résolue en a), et considérer la somme de la série de ces solutions.

- pour $n = 1$, l'équation $y'' + y = c_1 \sin(x)$ a pour solution particulière $g_1(x) = c_1 \left(\dfrac{\sin(x)}{2} - \dfrac{x\cos(x)}{2} \right)$

- pour $n \geq 2$, l'équation $y'' + y = c_n \sin(nx)$ a pour solution particulière $g_n(x) = c_n \dfrac{\sin(nx)}{1-n^2}$

Considérons donc la fonction h définie par $h(x) = c_1 \left(\dfrac{\sin(x)}{2} - \dfrac{x\cos(x)}{2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \dfrac{\sin(nx)}{1-n^2}$, montrons qu'elle est de classe C^2 et solution de l'équation (E_f) :

- $\forall n \geq 2$, $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{|c_n|}{n^2-1} \leq |c_n|$ donc la série de fonctions $\sum g_n(\ )$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par convergence uniforme d'une série de fonctions continues.

- chaque fonction b_n, $n \geq 1$, est C^1 sur $\mathbb{R}$.

- $\forall n \geq 2$, $\|g'_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{c_n\, n\cos(nx)}{1-n^2} \right| = \dfrac{n\, c_n}{n^2-1} \leq |c_n|$ donc la série de fonctions $\sum g'_n(\ )$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction h est c^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x).$$

- de même, chaque fonction w_n, $n \geq 1$ est C^2 sur $\mathbb{R}$.

- et $\forall n \geq 2$, $\|g''_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{c_n\, n^2\sin(nx)}{1-n^2} \right| = \dfrac{n^2\, c_n}{n^2-1} \leq 2|c_n|$. Le théorème de dérivation permet d'affirmer que la fonction h est c^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g''_n(x).$$

Enfin, $h''(x) + h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g''_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g''_n(x) + g_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = f(x)$. Donc h est solution de l'équation (E_f).

Finalement, la solution générale de (E_f) a pour expression :

$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + h(x)$, $(a, b) \in \mathbf{K}^2$

soit aussi $\boxed{y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c_1 \left(\dfrac{\sin(x)}{2} - \dfrac{x\cos(x)}{2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \dfrac{\sin(nx)}{1-n^2}}$

* *

4 Centrale 06

Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(H) = 1$

a) Montrer que H s'écrit comme produit d'une matrice colonne X par une matrice ligne Y.
En déduire que $H^2 = \mathrm{tr}(H).H$

b) Déterminer le polynôme caratéristique de H.
H est elle diagonalisable ?

c) Soit $M = I_n + H$ $\quad$ (I_n matrice unité d'ordre n)
M est elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}

Solution :

a)• Si H est de rang 1, toutes ses colonnes $C_{j,\ j=1...n}$ sont proportionnelles à l'une d'entre elles C_{i_0} :
$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \exists y_j \in \mathbb{C},\ C_j = y_j C_{i_0}$

$$H = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & ... & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & ... & y_nx_2 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ y_1x_n & y_2x_n & ... & y_nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} = X \times Y$$

avec $X = C_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix}$

• $H^2 = X.Y.X.Y$

or $Y.X = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k x_k \right)$ (matrice 1-1)

donc $H^2 = X.(\text{tr}H).Y = \text{tr}(H).X.Y = \text{tr}(H).H$

b) • Le polynôme $P(X) = X^2 - \text{tr}(H).X = X(X - \text{tr}(H))$ est un polynôme annulateur de la matrice H.

Donc $\text{Spec}(H) \subset \{0, \text{tr}(H)\}$

Puisque $\text{rg}(H) = 1$, dans tous les cas, $\dim(E_H^0) = n - 1$, le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

- si $\text{tr}(H) \neq 0$, il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racines simples (0 et $\text{tr}(H)$). Alors H est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

- si $\text{tr}(H) = 0$, H possède une unique valeur propre 0, d'ordre n puisque $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension $n - 1$. H n'est donc pas diagonalisable.

Finalement, $\boxed{H \text{ est diagonalisable si et seulement si } \text{tr}(H) \neq 0}$

• Dans tous les cas, 0 est valeur propre de H d'ordre au moins $n - 1$ (puisque $\dim(E_H^0) = n - 1$)

Donc X^{n-1} divise le polynôme caractéristique $\chi_H(X)$

- si $\text{tr}(H) \neq 0$, H est diagonalisable, donc admet une autre valeur propre, qui ne peut être que $\text{tr}(H)$.

Donc $X - \text{tr}(H)$ divise aussi $\chi_H(X)$ et alors $\chi_H(X) = X^{n-1}(X - \text{tr}(H))$

- si $\text{tr}(H) = 0$, H n'est pas diagonalisable, donc ne peut pas avoitr d'autre valeur propre que 0. Or $\chi_H(X)$ est de la forme $X^{n-1}(X - \alpha)$ et nécessairement $\alpha = 0$, de sorte que $\chi_H(X) = X^n$.

Notons que dans les deux cas, $\boxed{\chi_H(X) = X^{n-1}(X - \text{tr}(H))}$ (au signe près)

c) $\det(M) = \det(H + I_n) = \chi_H(-1) = (-1)^{n-1}(-1 - \text{tr}(H))$

• M est inversible $\iff \det(M) \neq 0 \iff \text{tr}(H) \neq -1$

• Notons $t = \text{tr}(H)$

D'après a) $H(H - tI_n) = 0$

or $H = M - I_n$ donc $(M - I_n)(M - (t+1)I_n) = 0$

$\implies M^2 - (2+t)M = -(t+1)I_n$

$\implies M\left(\frac{-1}{t+1}(M - (2+t)I_n)\right) = I_n$

donc $\boxed{M^{-1} = \frac{t+2}{t+1} I_n - \frac{1}{t+1} M}$

* *

5 Mines 06 *

Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur le segment $[a, b]$, $f > 0$

et (E) l'équation différentielle : $y'' - f(x)y = g(x)$

a) Montrer qu'il existe au plus une solution de (E) qui s'annule en a et b.

Pour cela, on pourra supposer qu'il existe deux telles solutions y_1 et y_2, considérer $h = y_1 - y_2$ et montrer que h^2 est une fonction convexe.

b) On considère l'équation différentielle (H) :

$y'' - f(x)y = 0$

Justifier l'existence de deux fonxtions u et v solutions de (H) et telles que :

$u(a) = 0$ et $u'(a) = 0$

$v(b) = 0$ et $v'(b) = 0$

c) En déduire qu'il existe une unique solution de (E) s'annulant en a et b, et l'exprimer en fonction de u et v.

Solution :

a)• Supposons qu'il existe deux solutions de (E) y_1 et y_2 qui s'annulent en a et b et considérons $h = y_1 - y_2$

$y_1'' - f(x)y_1 = g(x)$

$\begin{cases} y_1'' - f(x)y_1 = g(x) \\ y_2'' - f(x)y_2 = g(x) \end{cases} \implies h'' - f(x)h = 0$ (par différence)

$(h^2)' = 2hh'$ et $(h^2)'' = 2(hh'' + h'^2)$

$h'' - f(x)h = 0 \implies hh'' - f(x)h^2 = 0$

$\implies hh'' = f(x)h^2 \geq 0$

$\implies (h^2)'' = 2(hh'' + h'^2) \geq 0$

La fonction h^2 est donc convexe. En tout point $x \in [a, b], f(x)$ est sous la sécante joignant les points d'abscisses a et b.

Donc $h^2(x) \leq 0$ (puisque $h^2(a) = h^2(b) = 0$)

Donc $\forall x \in [a,b], h(x) = 0$ et $y_1 = y_2$.

b) th. de Cauchy - Lipschitz

c)

* *

6 Mines 06 - 370

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(\mathbb{R}^{2n+1})$ tel que :

$u^3 = u, \qquad \text{tr}u = 0, \qquad \text{tr}u^2 = 2n$

On note $C(u)$ le commutant de u : $C(u) = \{v \in L(E) \ / \ u_o v = v_o u\}$

a) Déterminer la dimension de $C(u)$

b) Quels sont les entiers n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Solution :

a)• Le polynôme $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynome annulateur de u, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. u est donc diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 0, 1\}$.

Dans une base bien choisie B_0, u admet une matrice de la forme $\text{diag}(\underbrace{1,1,...,1}_{p\ fois}, \underbrace{-1,-1,...,-1}_{q\ fois}, \underbrace{0,0...,0}_{r\ fois})$

où $p = \dim(\ker(u - Id_E))$, $q = \dim(\ker(u + Id_E))$, $r = \dim(\ker(u))$ (éventuellement nuls)

$\text{tr}(u) = p - q = 0$ donc $p = q$

$\text{tr}(u^2) = p + q = 2n$ donc $p = q = n$ (puisque la matrice de u^2 dans la même base est $\text{diag}(\underbrace{1,...,1}_{p+q\ fois}, \underbrace{0,...,0}_{r\ fois})$)

Par différence, puisque $p + q + r = 2n + 1$, $r = 1$

• Soit $v \in C(u)$. Alots $\forall x \in E^u_\lambda = \dim(\ker(u - \lambda Id_E))$, $u[v(x)] = v[u(x)] = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E^u_\lambda$.
Chaque sous espace propre de u est stable par tout $v \in C(u)$.

Donc E^u_1, E^u_{-1} et E^u_0 sont stables par v.

Dans la base B_0 union d'une base de E^u_1, d'une base de E^u_{-1} et d'une base de E^u_0, la matrice de u est constituée de blocs de la forme : $\left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right)$ où $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$.

Elle a donc $2n^2 + 1$ coefficients arbitraires.

Réciproquement, tout endomorphisme =v= dont la matrice dans la base B_0 est de cetype commute avec u.

Donc $\boxed{\dim(C(u)) = 2n^2 + 1}$

b)• $u^3 = u$, $u^4 = u^2$, $u^5 = u^3 = u$ etc... Donc $\mathbb{R}[u]$ =Vect$(Id_E, u, u^2, u^3, ..., u^k, ...) = \text{Vect}(Id_E, u, u^2)$ est de dimension 3.

Par ailleurs, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

Donc $\boxed{C(u) = R[u]} \iff \dim(C(u)) = \dim(R[u]) \iff 2n^2 + 1 = 3 \ \boxed{\iff n = 1}$

* *

7 Mines - 384 *

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que deux des propositions suivantes entraînent la troisième :

(i) f est une isométrie

(ii) $f^2 = -Id_E$

(iii) Pour tout $x \in E$ $f(x)$ est orthogonal à x.

Solution :

a) Supposons (i) et (ii)

alors $\forall x \in E$, $< f(x), x > = < f_o f(x), f(x) >$ (d'après (i), f conserve le produit scalaire)

$< f(x), x > = < -Id_E(x), f(x) > = < -x, f(x) > = - < f(x), x >$

donc pour tout $x \in E$, $< f(x), x > = 0$.

b) Supposons (i) et (iii) et montrons que $f^2 = -Id_E$

$\forall x \in E$, $\|f^2(x) + x\|^2 = < f^2(x) + x, f^2(x) + x > = < f^2(x), f^2(x) > +2 < f^2(x), x > + < x, x >$

$= 2(< f^2(x), x > + < x, x >)$ $\qquad (< f^2(x), f^2(x) > = < x, x >$ d'après (i))

par ailleurs, $< f^2(x) + f(x), f(x) + x > = 0$ $\qquad$ (d'après (iii))

$\Longrightarrow \underbrace{< f^2(x), f(x) >}_{=0\ d'apres\ (i)} + < f^2(x), x > + < f(x), f(x) > + \underbrace{< f(x), x >}_{=0\ d'apres\ (i)} = 0$

donc $< f^2(x), x >= - < f(x), f(x) >= - < x, x >$ (d'après (i))

En reportant dans le premier calcul, on obtient :

$\forall x \in E,\ \|f^2(x) + x\|^2 = 2(< f^2(x), x > + < x, x >) = 0$

donc $\forall x \in E,\ f^2(x) + x = 0$, ce qui montre bien que $f^2 = -Id_E$

c) Supposons (ii) et (iii) et montrons que f est une isométrie.

$\forall x \in E,\ < f^2(x) - f(x), f(x) - x >= 0$ (d'après (iii))

$\Longrightarrow\ 0 =< -x - f(x), f(x) - x >=< x, x > - < f(x), f(x) >$

donc $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$ et f est une isométrie.

* *

8 Mines - 468 *

Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre d'involutions de $\{1, 2, ..., n\}$. On convient que $u_0 = 1$

a) Calculer u_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$

Montrer que $\forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ converge si $x \in]-1, 1[$. On note $S(x)$ sa somme.

c) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[,\ S'(x) = (x + 1)S(x)$

d) En déduire une expression de $S(x)$ et une expression de u_n.

e) Vérifier l'exactitude des résultats trouvés sur les 10 ou 15 premiers termes avec MAPLE.

Solution :

a) Notons S_n le groupe des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$. $u_n = \text{Card}\{\sigma \in S_n / \sigma_o \sigma = Id\}$

$S_1 = \{Id\}$ et $u_1 = 1$

$S_2 = \{Id, \tau_{1,2}\}$ et $u_2 = 2$ (une transposition $\tau_{i,j}$ est toujours involutive)

$S_3 = \{Id, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ et $u_3 = 4$

Soit $n \geq 2$ et soit σ une involution de $\{1, 2, ..., n\}$.

- Si $\sigma(n) = n$, l'ensemble $\{1, 2, ..., n-1\}$ est stable par σ et la restriction de σ à $\{1, 2, ..., n-1\}$ est une involution de $\{1, 2, ..., n-1\}$. Il y a donc u_{n-1} involutions de $\{1, 2, ..., n\}$ de ce type.

- Sinon, $\sigma(n) = m \neq n$, alors $\sigma(m) = n$ car σ est involutive. Le nombre m est l'un quelconque des nombres $1, 2, ..., n-1$, et son choix étant fait, la restriction de σ à $\{1, 2, ..., m-1, m+1, ..., n-1\}$ est une involution de cet ensemble. Il y en a u_{n-2} car $\{1, 2, ..., m-1, m+1, ..., n-1\}$ compte $n-2$ éléments.

Le décompte de ces deux cas qui s'excluent mutuellement permet d'affirmer que $\boxed{u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}}$

On peut remarquer que cette égalité est bien vérifiée pour $n = 3$.

b) Montrons par récurrence que $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 1$

u_n est bien positif puisque c'est un cardinal.

- On vérifie que cette relation est vraie pour $n \leq 3$.
- Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $n-1$.

alors $\frac{u_n}{n!} = \frac{u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}}{n!} = \frac{1}{n} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \frac{u_{n-2}}{(n-2)!} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq 1$

ce qui montre que la relation est alors vraie à l'ordre n.

On a ainsi prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 1$

Alors, si $|x| < 1$, $\left|\frac{u_n}{n!} x^n\right| < |x|^n$, terme général d'une série géométrique convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \text{ converge absolument si } x \in]-1, 1[}$.

c) $\forall x \in]-1, 1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$

Par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n = S(x) + xS(x) \qquad \text{(par changement d'indice de sommation)}$$

$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est donc solution de l'équation différentielle } (E) : \; y' - (x+1)y = 0}$.

d)• L'équation (E) est linéaire et homogène; sa solution générale a pour expression : $y(x) = \lambda e^{\frac{x^2+2x}{2}}$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[, S(x) = \lambda e^{\frac{x^2+2x}{2}}$

La relation $S(0) = a_0 = 1$ donne $\lambda = 0$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, S(x) = e^{\frac{x^2+2x}{2}}}$.

• $\forall x \in]-1,1[, S(x) = e^x.e^{\frac{x^2}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\; e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$

Posons, pour n entier quelconque $\alpha_n = \frac{1}{n!}$, $\beta_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ et $\beta_{2n+1} = 0$ de sorte que

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ et $e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$

La série produit de Cauchy de ces deux séries entières a pour expression : $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \beta_{2k} \alpha_{n-2k} \qquad \text{(puisque les } \beta_{2h+1} \text{ sont nuls)}$$

$$\gamma_n = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^k k!} \frac{1}{(n-2k)!}$$

Et puisque les deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ sont absolument convergentes pour tout $x \in]-1,1[$,

la série produit l'est aussi et $\forall x \in]-1,1[$, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$

donc $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = e^x.e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\; a_n = n!\, \gamma_n = n! \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^k k!} \frac{1}{(n-2k)!}}$

e) • Calcul des a_n par la formule de récurrence :

```
>u[0]:=1;   u[1]:=1;
for k from 2 to 10 do u[k]:=u[k-1]+(k-1)*u[k-2] od:
for k from 2 to 10 do v[k]:=u[k]/k! od;
```

• Calcul des a_n par la formule trouvée en d) :

```
>for n from 0 to 10 do v[n]:= add(1/2**k/k!/(n-2*k)!,k=0..floor(n/2)) od;
```

• Calcul des premiers termes du développement de $S(x)$:

```
>f:=x->exp(x+ x*x/2);
series(f(x),x,15);
```

* *

9 Mines - 474 *

On considère une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ait un rayon de convergence R non nul et pour somme $f(z)$.

a) Montrer que pour $0 < r < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$

b) Que dire de f si $|f|$ admet un extremum local en 0 ?

c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier m et un polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout complexe z. Montrer que $f \in \mathbb{C}_m[X]$

Solution :

a)• pour tout r tel que $0 < r < R$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta}).\overline{f(re^{i\theta})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right)$$

Chacune de ces deux dernières séries est absolument convergente puisque $0 < r < R$. Notons $(c_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de Cauchy :

$$\forall \in \mathbb{N},\ c_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta} \overline{a}_{n-k} r^{n-k} e^{-i(n-k)\theta} = r^n \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_{n-k} e^{i(2k-n)\theta}$$

$|c_n(\theta)| \leq \sum_{k=0}^{n} r^k |a_k|.r^{n-k}|a_{n-k}| = \gamma_n$. Ce dernier terme est le terme d'ordre n de la série produit de Cauchy de $\sum r^n |a_n|$ par elle même. La série $\sum r^n |a_n|$ étant absolument convergente puisque $0 < r < R$, son carré de Cauchy l'est aussi. Donc la série à termes positifs $\sum \gamma_n$ converge aussi.

donc $\forall \theta \in [0, 2\pi], |f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta)$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta)\right) d\theta$$

La majoration pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ de $|c_n(\theta)|$ par γ_n montre que la série de fonctions $\sum c_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$.

$$\text{donc } \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} c_n(\theta) d\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} r^n \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_{n-k} e^{i(2k-n)\theta} d\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^n \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_{n-k} \int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)\theta} d\theta\right) \quad \text{(linéarité de l'intégrale d'une somme finie)}$$

Or lorsque m est entier $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } m \text{ est non nul} \\ 2\pi \text{ si } m = 0 \end{cases}$

donc $\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)\theta} d\theta$ est nul sauf lorsque n est pair $(n = 2h)$ pour la valeur $k = \frac{n}{2} = h$

donc $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{h=0}^{\infty} r^{2h} a_h \overline{a}_{2h-h}.2\pi$

et finalement, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} 2\pi.r^{2h} a_h \overline{a_h} = \sum_{h=0}^{\infty} r^{2h} |a_h|^2$

b) Supposons que $|f|$ admette un maximum local en 0 : $\exists \alpha > 0,\ \forall z \in B(0, \alpha),\ |f(z)| \leq |f(0)|$

En prenant $r = \frac{\alpha}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0)|^2 d\theta = |f(0)|^2 = |a_0|^2$

L'inégalité $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 \leq |a_0|^2$ entraîne alors que $\forall n \geq 1, a_n = 0$

donc $\boxed{f \text{ est une fonction constante.}}$

b) Supposons que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier m et un polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq P(|z|)$.

alors, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(\underbrace{|re^{i\theta}|}_{=r})|^2 d\theta$

$P(X)^2 \in \mathbb{R}_{2m}[X] : \exists (b_0, b_1, ..., b_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m+1},\ P(X)^2 = \sum_{k=0}^{2m} b_k X^k$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2m} |b_k| r^k d\theta = \sum_{k=0}^{2m} |b_k| r^k$

si l'un des a_h n'est pas nul avec $h > m$, on obtient l'inégalité $|a_h|^2 r^{2h} \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 \leq \sum_{k=0}^{2m} |b_k| r^k$, qui est absurde car, quand $r \to +\infty$, $\sum_{k=0}^{2m} |b_k| r^k \sim b_{2m} r^{2m} = o(|a_h|^2 r^{2h})$

donc $\forall h > m,\ a_h = 0$ et $f \in \mathbb{C}_m[X]$.

* *

10 Mines 490

Montrer que pour tout x réel positif, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2}dt=\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt$

Solution :

• Notons $H(x,t)=\dfrac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2}$ et $h(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2}dt=\int_0^{\infty}H(x,t)dt$

- Pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto H(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

(intégrable car $|H(x,t)|\leq\dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$)

cette dernière domination par une fonction intégrable permet d'appliquer le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$ et d'affirmer que h est continue sur $[0,+\infty[$.

H admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{t(1+t^2)(1+\frac{x^2}{t^2})}=\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

- Pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- soit $\alpha>0$. Pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall(x,t)\in[\alpha,+\infty[_\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\leq\frac{1}{\sqrt{1+t^2}(\alpha^2+t^2)}=\varphi(t)$$

où φ est une fonction continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, on en déduit que h est de classe C^1 sur $[\alpha,+\infty[$, et donc aussi sur $]0,+\infty[$ puisque $\alpha>0$ est quelconque, et que :

$$\forall x>0,\ \ h'(x)=\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^{\infty}\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}dt$$

$$\forall x>0,\ \ h'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u)(x^2+u)}\qquad\text{(par le changement de variable } u=t^2)$$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+u}-\frac{1}{x^2+u}\right)du=\frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\left(\frac{1+u}{x^2+u}\right)\right]_{u=0}^{u\to+\infty}=\frac{\ln x}{x^2-1}$$

• Pour tout $(\varepsilon,x)\in\mathbb{R}^{+*\,2}$, $h(x)-h(\varepsilon)=\displaystyle\int_{\varepsilon}^{x}h'(t)dt=\int_{\varepsilon}^{x}\frac{\ln t}{t^2-1}dt$

La fonction $t\mapsto\dfrac{\ln t}{t^2-1}$ est intégrable sur $]0,x]$ (car $\frac{\ln t}{t^2-1}\underset{0}{=}o(\frac{1}{\sqrt{t}})$)

Par continuité de h en 0, en passant à la limite quand $\varepsilon\to0$, on obtient : $h(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt$

donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2}dt=\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt}$

* *

11 Mines - 561

$\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire canonique, déterminer les extrema éventuels de la norme euclidienn sur l'ensemble $\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1+x_2+...+x_n=1\}$

Solution :

Notons H l'hyperplan affine $\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1+x_2+...+x_n=1\}$ et $(e_1,e_2,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On demande les extrema de $\{\|x\|,x\in H\}$

• En considérant, pour λ réel quelconque, le vecteur $v=(\lambda,-\lambda+1,0,0,...,0)$ qui appartient à H et a pour norme $\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}$ aussi grande que l'on veut, il est clair que $\boxed{\sup_{x\in H}\|x\|=+\infty}$

• Le minimum de $\{\|x\|,x\in H\}$ est aussi le minimum de $\{\|x+e_1\|,x+e_1\in H\}$ ou aussi de $\{\|x+e_1\|,x\in H-e_1\}$

$H-e_1$ est le translaté de l'hyperplan H par le vecteur $-e_1$.

$H-e_1=\{(x_1-1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1+x_2+...+x_n=1\}=\{(x_1',x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1'+x_2+...+x_n=0\}=H_0$

On est ainsi ramené à rechercher le minimum de $\{\|x+e_1\|,x\in H_0\}$, c'est à dire la distance du vecteur$-e_1$ à l'hyperplan vectoriel H_0.

D'après le théorème de la projection, on sait que ce minimum sera $\|v+e_1\|$ où v est le projeté orthogonal de $-e_1$ sur H_0 : $d(-e_1,H_0)=d(-e_1,v)=\|v+e_1\|$

Reste à calculer v, projeté orthogonal de $-e_1$ sur H_0.

Soit $v=(v_1,v_2,...,v_n)$. $v\in H_0$ donc $v_1+v_2+...+v_n=1$

Le vecteur $u=(1,1,...,1)$ est une base de la droite $H_0^\perp$

$v-(-e_1)=v+e_1\in H_0^\perp$ donc $v+e_1=(v_1+1,v_2,...,v_n)$ est colinéaire à $u=(1,1,...,1)$

$\implies v_1+1=v_2=...=v_n$

$\implies v_1+v_2+...+v_n=1=nv_1+(n-1)$

$\implies v_1=\dfrac{2-n}{n}$ et $\forall i\geq 2,\ v_i=\dfrac{2}{n}$

ainsi, $v+e_1=\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{2}{n},...,\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{2}{n}u$

finalement, $\boxed{\inf_{x\in H}\|x\|=d(-e_1,H_0)=\|v+e_1\|=\dfrac{2}{n}\|u\|=\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$

****

12 Mines - 575

Trouver les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que f' soit une primitive de f.

Solution :

Si f' est une primitive de f, alors, par défintion d'une primitive, $f''=f$ et f est solution de l'équation différentielle $y''-y=0$.

Donc $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda e^x+\mu e^{-x}$

Réciproquement, si $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda e^x+\mu e^{-x}$, alors $f'(x)=\lambda e^x-\mu e^{-x}$ est une primitive de $f(x)$ puisque $f''(x)=\lambda e^x+\mu e^{-x}=f(x)$

****

13 Mines - 493 *

Soit $a>0$, x réel. On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

b) Montrer que f est développable en série de Fourier.

c) En utilisant un logiciel de calcul formel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{b^2+t^2}$

d) En déduire les coefficients de Fourier de f.

e) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Solution :

a) • Notons, pour $n\in\mathbb{Z}$ et x réel, $u_n(x)=\dfrac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$

Chaque fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ car $a^2+(x-2n\pi)^2\geq a^2>0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)\overset{n\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{1}{4n^2\pi^2}$, donc la série double $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}u_n(x)$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

• $\displaystyle\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+2\pi)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x+2\pi-2n\pi)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x+-2(n-1)\pi)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}u_{n-1}(x)$

$\displaystyle=\sum_{-\infty}^{+\infty}u_n(x)=f(x)$ (par décalage d'indice)

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc } 2\pi\text{-périodique.}}$

• $\displaystyle\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(-x-2n\pi)^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2(-n)\pi)^2}$

$\displaystyle=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2m\pi)^2}=f(x)$ (par changement d'indice $m=-n$)

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$

b) • Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $[b,c]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$ et n_0 assez grand pour que $c-2n_0\pi<0$

$\forall x\in[b,c],\forall n\geq n_0,\ x-2n\pi\leq c-2n\pi\leq c-2n_0\pi<0$

$$\Longrightarrow\ (x-2n\pi)^2 \geq (c-2n\pi)^2 > 0$$
$$\Longrightarrow\ \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} \leq \frac{1}{a^2+(c-2n\pi)^2}$$
$$\Longrightarrow\ \sup_{x\in[b,c]}\left|\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}\right| = \|u_n\|_{[b,c]}^{\infty} \leq \frac{1}{a^2+(c-2n\pi)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2\pi^2}$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[b,c]\subset\mathbb{R}$. Chaque fonction u_n étant continue, la fonction somme, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, est continue sur tout segment et donc continue en tout point de $\mathbb{R}$

• $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall x\in\mathbb{R},\ u_n'(x) = \dfrac{-2(x-2n\pi)}{(a^2+(x-2n\pi)^2)^2}$

$\forall x\in[b,c], \forall n\geq n_0,\ |u_n'(x)| \leq \dfrac{2(2n-b\pi)}{(a^2+(c-2n\pi)^2)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^3\pi^4}$

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[b,c]\subset\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction somme, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, est de classe C^1 sur tout segment et donc sur $\mathbb{R}$.

• Un raisonnement et des majorations du même type que ci-dessus permettent de montrer que fonction $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f, somme des deux précédentes, est elle aussi C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n'(x) = -2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x-2n\pi}{(a^2+(x-2n\pi)^2)^2}$$

La fonction f est alors 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier est définie, converge en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$. (th. de Dirichlet)

c) Avec MAPLE :

int(cos(t)/(b2+t**2),t=0..infinity); simplify(");**

donne pour résultat après simplification : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{b^2+t^2} = \frac{\pi e^{-b}}{2b}$

d) La fonction f est paire, donc pour tout n, $b_n(f)=0$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2k\pi)^2}\right)\cos(nt)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\cos(nt)\right)dt$$

Tout comme la série $\sum u_k(t)$, la série $\sum u_k(t).\cos(nt)$ converge normalement et uniformément sur le segment $[0,2\pi]$. Donc $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\cos(nt)\right)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} u_k(t)\cos(nt)dt\right)$

d'où $a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2k\pi)^2}dt\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-2k\pi}^{-2k\pi+2\pi}\frac{\cos(n(u+2k\pi))}{a^2+u^2}du\right) \quad \text{(par le changement de variable } u=t-2k\pi\text{)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nu)}{a^2+u^2}du \quad \text{(regroupement de termes par la relation de Chasles)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n\cos(v)}{n^2a^2+v^2}dv \quad \text{(par le changement de variable } nu=v\text{)}$$
$$= \frac{n}{2\pi}\frac{\pi e^{-na}}{2na} = \frac{e^{-na}}{4a} \quad \text{(question précédente, avec } b=na\text{)}$$

La série de Fourier de f est : $S_f(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nt)$

$$S_f(x) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}\cos(nx)$$
$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}e^{-inx}\right) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-a-ix})^n\right)$$

$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)}}{1-e^{-(a+ix)}}\right) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)}(1-e^{-a+ix})}{(1-e^{-a-ix})(1-e^{-a+ix})}\right)$$
$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)} - e^{-2a}}{1-e^{-a-ix}-e^{-a+ix}+e^{-2a}}\right)$$
$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-a}(\cos x + i\sin x) - e^{-2a}}{1-2e^{-a}\cos x+e^{-2a}}\right)$$
$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} \times \frac{e^{-a}\cos x - e^{-2a}}{1-2e^{-a}\cos x+e^{-2a}}$$
$$= \frac{2-3e^{-a}\cos x + e^{-2a}}{4a(1-2e^{-a}\cos x+e^{-2a})}$$

f étant égale en tout point à la somme de sa série de Fourier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2-3e^{-a}\cos x + e^{-2a}}{4a(1-2e^{-a}\cos x+e^{-2a})}}$$

****

14 Mines - 2006 *

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que $\quad 1 - z = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\right)$

Solution :

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$, fixé, et posons pour $r \in]-1,1[$, $f(r) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(re^{i\theta})^k}{k}\right) = \exp\underbrace{\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} r^k\right)}_{S(r)}$

$S(r)$ est une série entière de la variable réelle r, qui converge absolument sur $]-1,1[$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, $\forall r \in]-1,1[,\ S'(r) = -\sum_{k=1}^{+\infty} r^{k-1}e^{ik\theta}$

$$S'(r) = -e^{i\theta}\sum_{h=0}^{+\infty}(re^{i\theta})^h = -\frac{e^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

Par dérivation d'une fonction composée, $\forall r \in]-1,1[,\ f(r) = \exp(S(r)) \implies f'(r) = S'(r)\exp(S(r))$

$$\implies f'(r) = -\frac{e^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} f(r) = \frac{1}{r-e^{-i\theta}} f(r)$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - \dfrac{1}{x-e^{-i\theta}}\, y = 0$

Ses solutions sont les fonctions de la forme :

$y(x) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x-e^{-i\theta}} dx\right)$, λ scalaire quelconque.

$$\int \frac{1}{x-e^{-i\theta}} dx = \int \frac{x-e^{i\theta}}{(x-e^{-i\theta})(x-e^{i\theta})} dx = \int \frac{x-\cos\theta - i\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1} - i\int \frac{\sin\theta}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\theta+1) - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{C},\ f(r) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2}\ln(r^2-2r\cos\theta+1) - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C},\ f(r) = \lambda\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}\ \exp\left(-i\mathrm{Arctan}\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right)$$

Or rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\mathrm{Arctan}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\mathrm{Arctan}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d'où $\quad f(r) = \lambda\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}} - i\dfrac{\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}}{\sqrt{1+\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}}\right)$

(on limite le calcul au cas où $\theta \in]0,\pi[$ et on obtient les autres cas par conjugaison de z , ou bien ce sont des cas connus si $\theta \in \{0,\pi\}$ car alors z est réel.)

On peut ainsi supposer que $\sin\theta > 0$ pour simplifier les calculs.

ainsi, $\quad f(r) = \lambda\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}\ \left(\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}} - i\dfrac{r-\cos\theta}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}}\right)$

$$f(r) = \lambda(\sin\theta - ir + i\cos\theta)$$

Pour $r = 0$, $f(0) = \exp(0) = 1 = \lambda(\sin\theta + i\cos\theta) = \lambda i e^{-i\theta}$ donc $\lambda = -ie^{i\theta}$

et $f(r) = -ie^{i\theta}(-ir + ie^{-i\theta}) = -re^{i\theta} + 1 = 1 - z$

On ainsi montré que $\forall r \in]-1, 1[,\ f(r) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(re^{i\theta})^k}{k}\right) = -re^{i\theta} + 1$, c'est à dire que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\right) = 1 - z$

****

15 CCP

Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $A^n = {}^tA$ et on pose $B = A^{n+1}$

a) Montrer que B est diagonalisable.

b) Calculer B^n . En déduire les valeurs propres possibles de B.

Que peut on dire de B lorsque n est pair ?

Solution :

a) ${}^tB = {}^t(A^{n+1}) = {}^t(A^n.A) = {}^t({}^tA.A) = {}^tA.A = A^n.A = B$

B est une matrice symétrique réelle donc est diagonalisable dans $M_p(\mathbb{R})$.

b) $B^n = (A^n)^{n+1} = ({}^tA)^{n+1} = ({}^tA)^n\, {}^tA = {}^t(A^n)\, {}^tA = A.\, {}^tA = A.A^n = B$

Le polynôme $X^n - X$ est un polynôme annulateur de la matrice B.

Donc les valeurs propres de B sont racines du polynôme $X^n - X$

Or les seules racines réelles de $X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$ ne peuvent être que 0, 1 et -1.

Donc $\text{Spec}(B) \subset \{0, 1, -1\}$

c) Si n est pair, les racines de $X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$ sont 0 et 1.

Donc B est diagonalisable et semblable à une matrice de la forme $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $B^2 = I_p$ et B est une matrice de projection.

****

16 Centrale + ENSI

Soient $A \in M_n(\mathbb{R}\ )$.

Discuter et résoudre l'équation (E) : $\quad {}^tX + X = \text{tr}(X).A \qquad$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{R}\ )$.

Solution :

• Soit $X \in M_n(\mathbb{R}\ )$ tel que ${}^tX + X = \text{tr}(X).A$

Il existe un unique couple $(X_1, X_2) \in M_n(\mathbb{R}\ )$ formé d'une matrice symétrique X_1 et d'une matrice antisymétrique X_2 tel que $X = X_1 + X_2$

($X_1 = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$ et $X_2 = \frac{1}{2}(X - {}^tX)$)

alors : $\quad {}^tX + X = \text{tr}(X).A \iff 2X_1 = \text{tr}(X_1 + X_2).A$

$\iff 2X_1 = (\text{tr}(X_1) + \underbrace{\text{tr}(X_2)}_{=0}).A$

$\iff 2X_1 = \text{tr}(X_1).A \qquad$ ($\text{tr}(X_2) = 0$ car X_2 est antisymétrique)

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X_1 = \lambda.A$

d'où $\quad {}^tX + X = \text{tr}(X).A \iff 2\lambda.A = \text{tr}(\lambda.A).A$

$\iff \lambda(2 - \text{tr}(A)).A = 0$

$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \quad \text{tr}(A) = 2 \\ \text{ou} \quad A = 0 \end{cases}$

• Réciproquement :

- si $A = 0$, ${}^tX + X = \text{tr}(X).A = 0 \iff X$ est antisymétrique

- si A n'est pas symétrique, la seule matrice X_1 de la forme $\lambda.A$ qui soit symétrique est la matrice nulle, obtenue lorsque $\lambda = 0$

L'équation $2X_1 = \mathrm{tr}(X_1).A$ avec X_1 symétrique a pour seule solution $X_1 = 0$ et les solutions de l'équation (E) sont les matrices antisymétriques, car elles vérifient à la fois ${}^tX + X = 0$ et $\mathrm{tr}(X) = 0$

- si A est symétrique non nulle et $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, alors nécesssairement $\lambda = 0$ donc $X_1 = 0$ et les solutions de l'équation (E) sont là encore les matrices antisymétriques

- enfin si A est symétrique et $\mathrm{tr}(A) = 2$, alors l'égalité $\lambda(2 - \mathrm{tr}(A)).A = 0$ est vérifiée pour tout réel λ.

Les solutions de l'équation (E) sont les matrices de la forme $\lambda.A + X_2$ où X_2 est une matrice antisymétrique quelconque.

* *

17 Centrale + ENSI

a) Montrer que l'application : $(G, H) \mapsto \mathrm{tr}({}^tG.H)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
On notera $\|\ \ \|$ la norme euclidienne associée.
b) Soit $V = {}^t(v_1, v_2, ..., v_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$
Calculer la matrice de la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par V.
c) Soient Pet Q deux matrices canoniquement associées à des projecteurs orthogonaux de ranq 1. Calculer $\| P - Q \|$ en foncton de l'angle entre $\mathrm{Im}P$ et $\mathrm{Im}Q$.

Solution :
a) voir le cours.
b) Soit p la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par V.
Puisque V est unitaire, il constitue une base orthogonale de $\mathrm{Im}p$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) =< x, V > V$

Notons $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$

$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, p(e_i) =< e_i, V > V = v_i.V$

$$P = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_2v_1 & \dots & v_nv_1 \\ v_1v_2 & v_2^2 & \dots & v_nv_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1v_n & v_2v_n & \dots & v_n^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ v_1.V & v_2.V & \dots & v_nV \\ & & & \end{array} \right) \quad \text{(colonne par colonne)}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .(v_1, v_2, ..., v_n) = V.{}^tV$$

Finalement, $\boxed{P = V.{}^tV}$

c) Soient Pet Q deux matrices canoniquement associées à des projecteurs orthogonaux p et q de ranq 1.
d'après la question précédente, $\exists(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ P = U.{}^tU$ et $Q = V.{}^tV$
alors $\| P - Q \|^2 = \mathrm{tr}({}^t(P - Q).(P - Q))$

$$\| P - Q \|^2 = \mathrm{tr}({}^t(U.{}^tU - V.{}^tV).{}^t(U.{}^tU - V.{}^tV))$$
$$= \mathrm{tr}(U.{}^tU - V.{}^tV).(U.{}^tU - V.{}^tV))$$
$$= \mathrm{tr}(U.{}^tU.U.{}^tU + V.{}^tV.V.{}^tV - U.{}^tU.V.{}^tV - V.{}^tV.U.{}^tU)$$

or ${}^tU.U = (u_1, u_2, ..., u_n).\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = 1$ et de même ${}^tV.V = 1$

et ${}^tU.V = {}^tV.U = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n =< U, V >$

donc $\| P - Q \|^2 = \mathrm{tr}(U.{}^tU + V.{}^tV - U.\underbrace{{}^tU.V}_{<U,V>}.{}^tV - V.\underbrace{{}^tV.U}_{<U,V>}.{}^tU)$

$$= \mathrm{tr}(U.{}^tU + V.{}^tV- < U, V > U.{}^tV- < U, V > V.{}^tU$$

or $\mathrm{tr}(U.{}^tV) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} v_1u_1 & v_2u_1 & \dots & v_nu_1 \\ v_1u_2 & v_2u_2 & \dots & v_nu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1u_n & v_2u_n & \dots & v_nu_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n =< U, V >$

et de la même manière, $\mathrm{tr}(U.{}^tU) =\| U \|^2 = 1$ et $\mathrm{tr}(V.{}^tV) =\| V \|^2 = 1$
donc $\| P - Q \|^2 = 2 - 2 < U, V >^2$
Si θ est l'angle des droites $\mathrm{Im}P$ et $\mathrm{Im}Q$, alors $< U, V >= \cos(\theta)$
d'où $\| P - Q \|^2 = 2 - 2\cos^2(\theta) = 2\sin^2(\theta)$ et finalement, $\boxed{\| P - Q \| = \sqrt{2}\sin(\theta)}$

* *

18 Développement asymptotique d'une somme de Riemann ** :

Soit f une fonction réelle ou complexe de classe C^3 sur $[0,1]$.

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où a et b sont des constantes à déterminer en fonction de f.

Solution :

Soit $F : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

F, primitive de f, est de classe C^4 sur $[0,1]$ car f est de classe C^3.

Pour $k = 0,1,2,3$, notons $M_k = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$

Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégrale sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ à l'ordre 2 :

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + \frac{x_{k+1}-x_k}{1!}F'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)}{1!}F"(t)dt, \quad \text{qui s'écrit aussi :}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}f'(t)dt$$

avec $\displaystyle\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}f'(t)dt\right| \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M_1\frac{(\frac{k+1}{n}-t)}{1!}dt = M_1\left[-\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{M_1}{2n^2}$

En sommant pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + R_1 \quad \text{avec} \quad |R_1| \le n.\frac{M_1}{2n^2} \le \frac{M_1}{2n}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou aussi $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + o(1)}$ (1)

(o(1) est une suite de limite nulle)

- Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 3 :

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + \frac{x_{k+1}-x_k}{1!}F'(x_k) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2!}F"(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2!}F^{(3)}(t)dt, \text{ soit :}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2}f"(t)dt, \quad \text{qui donne par sommation :}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + R_2 \quad (2), \quad \text{avec :}$$

$$|R_2| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2!}f"(t)dt\right)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M_2\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^2}{2!}dt\right) = \sum_{k=0}^{n-1} M_2\left[-\frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{M_2}{6n^2}$$

La relation (1), appliquée à la fonction f' donne : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f'(t)dt + o(1)$

Reportons-la dans (2) :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(\int_0^1 f'(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3)}$$

- Un calcul analogue à partir de la formule de Taylor à l'ordre 4 :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}f"\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}f^{(3)}(t)dt \quad \text{donne par sommation}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f"\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{(\frac{k+1}{n}-t)^3}{6}f^{(3)}(t)dt\right)}_{R_3} \quad (4)$$

Reportons les relations : - (1) pour $f"$: $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f"\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f"(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = f'(1) - f'(0) + O\left(\frac{1}{n}\right)$

- (3) pour f' : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f'(t)dt - \frac{f'(1)-f'(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = f(1) - f(0) - \frac{f'(1)-f'(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et la majoration $|R_3| \leq \dfrac{M_3}{24n^3}$ dans (4) :

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}\left(f(1)-f(0)-\frac{f'(1)-f'(0)}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{1}{6n^2}\left(f'(1)-f'(0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+R_3$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} - \frac{f'(1)-f'(0)}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

****

19 Intégrale fonction des bornes (Centrale + ENSI 06)

Montrer que pour tout $x > 1$, il existe $y \in]1, +\infty[$, unique, tel que $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)}dt = 1$ (Centrale)

On note $f(x)$ cet unique y.

Etudier la continuité, les variations et limites aux bornes de la fonction f. Montrer que f est C^1 sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de $f'(x)$.

Solution :

Pour $x \in]1, +\infty[$, fixé, soit h_x la fonction $y \longrightarrow \displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)}dt$

La fonction $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$ étant continue et strictzmznt positive sur $]1, +\infty[$, sa primitive h_x est C^1 sur $]1, +\infty[$ et strictement croissante.

• Quand $t \to +\infty$, $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$ (car $\ln(t) = o(t)$)

et par minoration l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} h_x(y) = +\infty$

• Quand $t \to 0$, $\dfrac{1}{\ln(t)} \sim \dfrac{1}{t-1}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge donc $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} h_x(y) = -\infty$

y	1		x		$+\infty$
$h_x(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

h_x, continue et strictement croissante, réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Donc il existe un unique $y \in]1, +\infty[$ tel que $h_x(y) = 1$, c'est à dire tel que $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{\ln(t)}dt = 1$.

La fonction h_x dépendant de x, prenons plutôt $H(y) = h_2(y) = \displaystyle\int_2^y \frac{1}{\ln(t)}dt$.

H est encore une bijection strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$:

y	1		2		$+\infty$
$H(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout x de $]1, +\infty[$, $y = f(x)$ est défini par l'égalité : $\displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{1}{\ln(t)}dt = 1$.

Or $\displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{1}{\ln(t)}dt = H(f(x)) - H(x)$ car H est une primitive de $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$.

Donc $H(f(x)) - H(x) = 1$, $H(f(x)) = H(x) + 1$, et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1)$

• Quand $x \to +\infty$, $H(x) \to +\infty$ et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1) \to +\infty$ (voir les tableaux de variation)

• Quand $x \to 1^+$, $H(x) \to -\infty$ et $f(x) = H^{-1}(H(x)+1) \to 1$ (voir les tableaux de variation)

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{1^+} f = 1}$

• H, primitive de $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et sa dérivée ne s'annule pas.

H^{-1} est donc de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$, et $\forall x \in]-\infty, +\infty[$, $(H^{-1})'(x) = \dfrac{1}{H'(H^{-1}(x))}$

$$(H^{-1})'(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln(H^{-1}(x))}} = \ln(H^{-1}(x))$$

Par composition, $f(x) = H^{-1}(H(x)+1)$ est C^1 sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = (H^{-1})'(H(x)+1).H'(x)$

$$f'(x) = \ln(\underbrace{H^{-1}(H(x)+1)}_{f(x)}).\frac{1}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]1, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}}$

20 ENSI - Sommes de Riemann :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

Solution :

$u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1-0}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f\ :\ t \longrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Puisque f est continue sur ce segment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\ \arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

* *

21 Centrale - fausse intégrale de Riemann :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

Solution :

$\ln(u_n) = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\ln(n!) - n\ln(n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\Big(ln(k) - \ln(n)\Big) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f\ :\ t \longrightarrow \ln(t)$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Mais la fonction ln n'est pas continue sur $[0,1]$ et on ne peut pas conclure par le théorème sur les sommes de Riemann.

La fonction ln est continue et croissante sur $]0,1]$, donc, pour tout $k \in [[1,n]]$,

$\forall t \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}],\quad \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \ln t \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$

et en intégrant, $\displaystyle\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \overset{(1)}{\leq} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln t\ dt \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

En sommant pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$\displaystyle\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt$

Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \ln t\ dt = \Big[\ t\ \ln t\Big]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} dt = -\alpha\ln\alpha - 1 + \alpha \quad \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \quad -1$

En passant à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = -1$$

et par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$

Remarque : On aurait pu aussi employer la formule de Stirling

* *

22 Mines 06 * - Comportement de f en $+\infty$

1- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

a-t-on nécessairement $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 0$?

Même question si on suppose que $f \geq 0$

2- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et admettant une limite L en $+\infty$. Montrer que $L = 0$.

3- Soit f une fonction continue par morceaux, décroissante et positive sur $[0,+\infty[$.

On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) \overset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

4- Soit f une fonction uniformément continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$.

Solution :

1- NON : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ converge mais $\cos(t^2)$ ne tend pas vers 0 quand $t\longrightarrow+\infty$

2- Si $L\neq 0$, $f(x)$ a même signe que L quand $x\to+\infty$ et $f(x)\overset{x\to+\infty}{\sim} L$

Or $\int_0^{+\infty} Ldt$ diverge, donc par équivalence $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge aussi, ce qui montre par contraposée que si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $L=0$.

3- Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, le reste de cette intégrale, $r(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 qd $x\to+\infty$

Soit $x>0$. $\forall t\in[\frac{x}{2},x],\ 0\leq f(x)\leq f(t)$ car f est décroissante.

$$\Longrightarrow \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)dt\leq\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\leq\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t)dt=r\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 0\leq\frac{x}{2}f(x)\leq r\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x.f(x)=0 \quad\text{et donc}\quad f(x)\overset{x\to+\infty}{=} o\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Remarque : ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose plus que f est décroissante, comme le montre la question 1.

4 - On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. On sait qu'alors le reste $r(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 quand $x\to+\infty$.

Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $x\to+\infty$:

$\exists\varepsilon_0>0,\forall A>0,\exists x_A>A,\ |f(x_A)|>\varepsilon_0$

f est uniformément continue que $[0,+\infty[$:

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x,y\in\mathbb{R}^+,\ \ |x-y|<\eta\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Appliquons cette propriété à $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$:

$\exists\eta_1>0,\forall x,y\in\mathbb{R}^+,\ \ |x-y|<\eta_1\implies|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$

donc $\forall x\in[x_A,x_A+\eta_1],\ |f(x)-f(x_A)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ (puisqu'alors $|x-x_A|<\eta_1$)

alors $$\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x)dx=\underbrace{\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x_A)dx}_{=\eta_1 f(x_A)}+\int_{x_A}^{x_A+\eta_1}(f(x)-f(x_A))dx$$

or $|\eta_1 f(x_A)|\geq\eta_1\varepsilon_0$ (car $|f(x_A)|>\varepsilon_0$)

et $$\left|\int_{x_A}^{x_A+\eta_1}(f(x)-f(x_A))dx\right|\leq\int_{x_A}^{x_A+\eta_1}\underbrace{|f(x)-f(x_A)|}_{<\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}}dx<\eta_1\epsilon=\eta_1\frac{\varepsilon_0}{2}$$

donc $$\left|\int_{x_A}^{x_A+\eta_1} f(x)dx\right|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

soit aussi $|r(x_A)-r(x_A+\eta_1)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$

On a ainsi montré que $\exists\varepsilon_0>0,\forall A>0,\exists x_A>A,|r(x_A)-r(x_A+\eta_1)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$, ce qui est contradictoire avec la propriété $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r(x)=0$.

L'hypothèse faite a abouti à une contradiction et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

* *

23 Centrale * - Intégrale de reste d'intégrale impropre :

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt$ pour tout $a>0$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ convergent.

Qu'en est il de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$?

Calculer un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ quand $x\longrightarrow 0^+$

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx$ converge et la calculer.

Solution :

a) • Soit $a>0$. $\forall x>0, \displaystyle\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt$ est définie car $t \longrightarrow \frac{e^{it}}{t}$ est continue sur le segment $[a,x]$.

$$\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_a^x + \int_a^x \frac{e^{it}}{it^2}dt = i\frac{e^{ia}}{a} - i\frac{e^{ix}}{x} - i\int_a^x \frac{e^{it}}{t^2}dt$$

puisque $\left|\dfrac{e^{it}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt$ converge absolument, de plus $\dfrac{e^{ix}}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x \frac{e^{it}}{t}dt\right) = i\frac{e^{ia}}{a} - i\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt$ converge.

• La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,a]$.

Donc $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin t}{t}dt$ est définie et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ aussi par additivité.

• $\dfrac{\cos t}{t} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\cos t}{t}dt$ est divergente.

Fixons $a>0$. $\forall x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt = \int_x^a \frac{\cos t}{t}dt + \underbrace{\int_a^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt}_{A\ fixe} = A + \int_x^a \frac{1-2\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$

$$= A + \ln a - \ln x - 2\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$$

or $t \longrightarrow \dfrac{\sin^2\frac{t}{2}}{t} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{t}{4}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\displaystyle\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$ a une limite finie quand $x \to 0^+$

L'égalité $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt = A + \ln a - \ln x - 2\int_x^a \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}dt$ montre alors que $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt \overset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x}$

b) $\displaystyle\int_a^b\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = \left[x\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right]_a^b - \int_a^b x\frac{-e^{ix}}{x}dx$

$$= b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt - a\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt + \int_a^b e^{ix}dx$$

quand $a \longrightarrow 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt \sim -\ln a$ (voir question a)) donc $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\left(a\int_a^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right) = 0$

Mais quand $b \longrightarrow +\infty$, $\displaystyle\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt \longrightarrow 0$ (reste d'une intégrale convergente)

et $b\displaystyle\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt$ présente la forme indéterminée $\infty \times 0$

Passons à la limite quand $a \longrightarrow 0$:

$$\int_0^b\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt + \int_0^b e^{ix}dx$$

$$= b\int_b^{+\infty}\underset{\to}{\frac{1}{t}}\overset{\rightharpoonup}{e^{it}}dt + \frac{e^{ib}-1}{i} = b\left[\frac{e^{it}}{it}\right]_{t=b}^{t\to+\infty} + b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{it^2}dt + i - ie^{ib}$$

$$= 0 - b\frac{e^{ib}}{ib} + b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{it^2}dt + i - ie^{ib} = i - ib\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt$$

Reste à étudier $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt\right)$:

$$b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt = b\left(\left[\frac{e^{it}}{it^2}\right]_{t=b}^{t\to+\infty} + 2\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{it^3}dt\right) = b\left(0 - \frac{e^{ib}}{ib^2} + 2\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{it^3}dt\right)$$

$$= i\frac{e^{ib}}{b} - 2ib\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^3}dt$$

or $\displaystyle b\left|\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^3}\right| \leq b\int_b^{+\infty}\frac{1}{t^3}dt = b\frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(b\int_b^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2}dt\right) = 0$

et $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = i$

Ceci montre que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx \text{ converge}}$ et que $\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}dt\right)dx = i}$

• En considérant les parties réelle et imaginaire, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt\right)dx = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx = 1}$$

* *

24 Mines ** - Fonctions de carré intégrables :

Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, telle que f^2 et $f"^2$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que $f.f"$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que $f.f'$ admet une limite finie en $+\infty$ et que f'^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$

c) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f.f' = 0$ et que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

Solution :

a) $\forall x \in [0,+\infty[, \quad (|f(x)| - |f"(x)|)^2 = f(x)^2 + f"(x)^2 - 2|f(x)|.|f"(x)| \geq 0$

et donc $|f(x).f"(x)| \leq \frac{1}{2}(f(x)^2 + f"(x)^2)$, ce qui montre par majoration que $|f.f"|$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) $\forall x \in [0,+\infty[, \quad \int_0^x f'^2(t)dt = \Big[f(t)f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x f(t)f"(t)dt$

donc $\quad f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t)dt + \int_0^x f(t)f"(t)dt \qquad (1)$

d'après a), $f.f"$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)f"(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)f"(t)dt$

La fonction $x \longrightarrow \int_0^x f'^2(t)dt$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie quand $x \to +\infty$ si elle est bornée, a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ si elle n'est pas bornée.

Donc, d'après (1), $f(x)f'(x)$ admet une limite, finie ou infinie, quand $x \to +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$, l'égalité $\int_0^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\Big[f^2(t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0))$ montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'intégrabilité de f^2 sur $[0,+\infty[$.

Donc $f(x)f'(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

L'égalité (1) entraîne alors que $\int_0^x f'^2(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, c'est à dire que f'^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

c) f^2 et f'^2 étant intégrable sur $[0,+\infty[$, comme en a), on en déduit que $f.f'$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$f.f'$ ayant une limite finie en $+\infty$, (question b) celle-ci ne peut être que 0.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = 0$

L'égalité $f^2(x) - f^2(0) = 2\int_0^x f(t)f'(t)dt$ et l'intégrabilité de $f.f'$ sur $[0,+\infty[$. montrent que f^2 admet une limite finie en $+\infty$, et celle-ci ne peut être que 0 puisque f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

25 Mines - Limite d'intégrale

Soit $u_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}\,dx$

Existence et limite éventuelle de la suite (u_n)

Solution :

Soit $\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}$, qui est bien défini car $1+x+x^2+...+x^n > 0$

$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$

$f_2(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, de même que $f_n(x)$ pour $n \geq 2$ car alors $f_n(x) \leq f_2(x)$.

La suite (u_n) est donc définie à partir du rang 2.

$\forall x \in [0,+\infty[-\{1\}, f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}$

- si $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1 - x$

- si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$
- si $1 < x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers la fonction g.

- pour $n \ge 2$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction g, qui est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car nulle sur intégrable sur $[1, +\infty[$).
- $\forall n \ge 2, \quad 0 \le f_n(x) \le \underbrace{f_2(x)}_{\text{intégrable sur } [0,+\infty[}$.

Par application du théorème de convergence majorée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

* *

26 ENSI - Intégrale de Gauss

On rappelle que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. On note α sa valeur.

b) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx$.

Exprimer J_n en fonction de termes de la suite (w_n).

Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ et en déduire la vaelur de α.

Solution :

b) ♣ le changement de variable $x = \sqrt{n}.\cos t$, $dx = -\sqrt{n}.\sin t \, dt$ donne :

$$J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t)^n (-\sqrt{n}.\sin t) \, dt = \sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} \, dt = \sqrt{n}.w_{2n+1}$$

Puisque $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$J_n \sim \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

♣ Soit $h_n : x \longrightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n & \text{si} \quad 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad x > \sqrt{n} \end{cases}$

h_n est continue sur $[0, +\infty[$, $(h_n(\sqrt{n}) = 0)$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \ge n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x) \, dx$

Pour tout $x \ge 0$, pour tout $n > x$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{x^2}{n})} \longrightarrow e^{-x^2} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$\text{car} \quad n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \sim n.\frac{-x^2}{n} \longrightarrow -x^2 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction H :

$x \longrightarrow e^{-x^2}$.

de plus l'inégalité $\forall u \in]-\infty, 1[, 1 - u \le e^{-u}$ entraîne

$$\ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \le \frac{-x^2}{n} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n \le e^{-x^2}$$

Donc $\forall n \in N^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad h_n(x) \le e^{-x^2}$

Cette majoration permet d'appliquet le théorème de convergence dominée et de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} H(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$$

et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

* *

26.1 ENSI - Limite d'intégrale

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \sin x\, dx.$

Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Solution :

Définissons $h_n : x \longrightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \sin x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$

h_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\quad (h_n(0) = 0)$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $h_n(x) = 0$ si $x \geq n$

et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx$

L'étude des variations de la fonction $(u \to \ln(1 - u + u)$ montre que :

$\forall u \in]-\infty, 1[, \quad \ln(1-u) + u \leq 0$

donc $\quad \ln(1-u) \leq -u$, $\qquad 1 - u \leq e^{-u}$

Donc $\forall x \in [0, n[, \quad 0 \leq \frac{x}{n} < n$, $\quad$ on a $\quad 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}}$

et donc $\quad \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq e^{-x}$

Donc, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |h_n(x)| \leq e^{-x} \qquad (1)$

- Soit $x \in [0, +\infty[$, pour n assez grand, $x < n$ et $x \in [0, n]$ et donc $h_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \sin(x)$

$$h_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n} \right)} \sin(x) \longrightarrow e^{-x} \sin x \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction H :

$x \longrightarrow e^{-x} \sin x$.

La majoration (1) permet d'appliquet le théorème de convergence dominée et de conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} H(x)\, dx$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)\, dx = \Im m \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ix}\, dx \right) = \Im m \left[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} \right]_{c=0}^{t\to+\infty} = \Im m \left[\frac{-1}{-1+i} \right]$$

$$= \Im m \left[\frac{1+i}{(1+i)(1-i)} \right] = \frac{1}{2}$$

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

27 Mines * - Utilisation d'équation différentielle :

En utilisant une équation différentielle, calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(xt)}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{\sqrt{t}} dt$$

Solution :

Soit $h(x) = f(x) + ig(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} dt$

Notons $H(x,t) = \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$

- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, , la fonction $t \longrightarrow \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue et et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in]0, +\infty[, \ \left| \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} \right| \leq \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, fonction de t continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction $h \ : \ x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus :

- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = it\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, , la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = it\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est continue et et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in]0, +\infty[, \ \left| \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) \right| = \left| \sqrt{t} e^{-t+ixt} \right| \leq \sqrt{t} e^{-t}$, fonction continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt$$

• Intégrons par partie entre a et b $(0 < a < b)$: $\displaystyle\int_a^b i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt = \left[\frac{i\sqrt{t}\ e^{-t+ixt}}{-1+ix}\right]_a^b - \int_a^b \frac{ie^{-t+ixt}}{(-1+ix)2\sqrt{t}}dt$,

puis passons à la limite quand $b \to +\infty$ et quand $a \to 0$; :

$$h'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}dt = 0 + \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}dt = \frac{i}{2(1-ix)}h(x)$$

h est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = \frac{i}{2(1-ix)}y$$

• Notons $a(x) = \dfrac{i}{2(1-ix)}y$.

(E) est une équation linéaire dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $x \to a(x)$ et λ une constante complexe quelconque.

$$A(x) = \int_0^x \frac{i}{2(1-iu)}du = \int_0^x \frac{i(1+iu)}{2(1+u^2)}du = -\int_0^x \frac{u}{2(1+u^2)}du + i\int_0^x \frac{1}{2(1+u^2)}du$$

$$A(x) = -\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{i}{2}\arctan x$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \lambda e^{A(x)} = \lambda e^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{i}{2}\arctan x} = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)\right)$$

Notons $\theta = \arctan x$ de sorte que $\tan\theta = x$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \text{ et donc } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et donc } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{1+x^2}}$$

$$h(x) = \lambda\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad \text{(en intégrant } \sqrt{2} \text{ dans la constante)}$$

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu \text{ par le changement de variable } u = \sqrt{t}, \quad t = u^2,\ dt = 2udu$$

$$h(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} = \lambda\sqrt{2} \quad \text{et donc} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

D'où $h(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + i\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

• En prenant les parties réelle et imaginaire,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{et}\ \ g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}}$$

* *

28 Centrale + CCP : Utilisation d'équation différentielle

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente, et on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$

a) Déterminer le domaine de définition Δ de f et montrer que $\forall x > 0, |f(x)| \leq \dfrac{1}{x}$

b) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ puis $f(x)$

c) Montrer que f est continue sur Δ (on pourra exprimer f comme somme d'une série de fonctions) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

Solution :

a) $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est défini.

$\forall x > 0, |\sin(t)| \leq t$ donc $|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}| \leq \underbrace{e^{-xt}}$

(intégrable sur $[0,+\infty[$ car $x>0$)

donc $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\Delta=[0,+\infty[}$$

$$|f(x)|=\left|\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt\ \right|\leq\int_0^{+\infty}\underbrace{\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|}_{\leq 1}e^{-xt}dt\leq\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}$$

b) ♣ Notons $g(x,t)=\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ et soit $a>0$ et prolongeons $\dfrac{\sin(t)}{t}$ en 0 par la valeur 1.

$\forall x\in[a,+\infty[,\forall t\in[0,+\infty[,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)e^{-xt}$

- $\forall t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\to g(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,

de même que la fonction $x\to\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$

- $\forall x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\to g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

de même que la fonction $t\to\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ (voir (3))

- $\forall x\in[a,+\infty[,\forall t\in[0,+\infty[,\left|\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ \right|=|-\sin(t)e^{-xt}|\leq e^{-xt}\leq\underbrace{e^{-at}}$ (3)

(intégrable sur $[0,+\infty[$ car $a>0$)

Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ nous permet alors d'affirmer que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$

et que $\forall x\in[a,+\infty[,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt$

$$♣\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt=\Im m\left(\ \int_0^{+\infty}e^{it}e^{-xt}dt\ \right)=\Im m\left[\ \frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\ \right]_{t=0}^{t\to+\infty}=\Im m\left[\ \frac{-1}{i-x}\ \right]$$

$$=\Im m\left[\ \frac{x+i}{(x-i)(x+i)}\ \right]=\frac{1}{x^2+1}$$

donc, $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}$

d'où $\exists k\in\mathbf{R},\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=-\text{Arctan}(x)+k$

et, puisque $\lim\limits_{\infty}f=0,\ k=\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi, $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=-\text{Arctan}(x)+\frac{\pi}{2}=\text{Arctan}(\frac{1}{x})}$

c) Pour tout $x>0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$ est convergente ,

donc $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$

Posons $u_n(x)=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$

Sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, $\sin t$ a même signe que $(-1)^n$, la série $\sum u_n(x)$ est donc alternée.

$$|u_n(x)|=\left|\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt\ \right|\leq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}e^{-xt}dt\leq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dt}{t}$$

$|u_n(x)|\leq\ln\left(\ \dfrac{n+1}{n}\ \right)\longrightarrow+0$ quand $n\to+\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=0$

Par le changement de variable $t=n\pi+u$, on obtient :

$$u_n(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n\pi+u)}{n\pi+u}e^{-x(n\pi+u)}du=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{n\pi+u}e^{-x(n\pi+u)}du$$

d'où $|u_{n+1}(x)|-|u_n(x)|=\displaystyle\int_0^{\pi}\underbrace{\left(\ \frac{e^{-x((n+1)\pi+u)}}{(n+1)\pi+u}-\frac{e^{-x(n\pi+u)}}{n\pi+u}\ \right)}_{\leq 0}\sin(u)du\leq 0$

Pour tout $x\in[0,+\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées.

donc $\forall x\in[0,+\infty[,|r_n(x)|=\left|\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\ \right|\leq|u_{n+1}(x)|\leq\ln\left(\ \dfrac{n+2}{n+1}\ \right)$

$$\|\ r_n\ \|_\infty=\sup_{x\in[0,+\infty[}|r_n(x)|\leq\ln\left(\ \frac{n+2}{n+1}\ \right)\longrightarrow 0\quad\text{quand}\quad n\to+\infty$$

La série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge donc uniformément sur $[0,+\infty[$. Chaque fonction $u_n()$ étant continue, la somme f l'est aussi.

Ainsi, f est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\frac{\pi}{2}$ - Arctan$(x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

* *

29 CCP-Centrale - Intégrale de l'inverse

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive en tout point.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2 \frac{1}{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}$. Peut il y avoir égalité ?

Solution :

Puisque f ne s'annule pas sur $[a,b]$, la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable.

Etant continue, positive et non identiquement nulle, son intégrale est > 0.

L'application $(f,g) \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{R})$

Par application de la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2 \leq \int_a^b \sqrt{f(t)}^2 \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt$$

donc $\displaystyle\left(\int_a^b dt\right)^2 = (b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$

soit, finalement, $\boxed{\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{(b-a)^2}{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}}$

Il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont liées, c'est à dire si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \sqrt{f} = \lambda\dfrac{1}{\sqrt{f}} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, f = \lambda$ c'est à dire si et seulement si f est une fonction constante.

* *

30 Centrale : Intégrale de l'inverse

Soit $\Phi\ :\ E = C^0([a,b],\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Montrer que Φ est minoré sur E et calculer $\inf\limits_{f\in E}\Phi(f)$

Φ est elle majorée ?

Solution :

L'application $\Psi\ :\ (f,g) \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$

D'après la formule de Cauchy-Schwarz, $\forall f\in E$, $\displaystyle\left|\int_a^b \left(\sqrt{f(t)}.\sqrt{\frac{1}{f(t)}}\right)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}^2\right)\left(\int_a^b \sqrt{\frac{1}{f(t)}}^2 dt\right)$

Donc $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \overset{(1)}{\geq} \left|\int_a^b dt\right|^2 = (b-a)^2$ et $(b-a)^2$ est un minorant de Φ.

Il y a égalité dans (1) si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{f}}$ sont liées,

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \sqrt{f} = \lambda\sqrt{\dfrac{1}{f}}$

$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f = \lambda$

Donc $\boxed{\inf\limits_E \Phi = (b-a)^2}$

• Soit M un réel positif (aussi grand qu'on veut)

Soit f la fonction affine par morceaux et continue, qui vaut M sur $\left[a\ ,\ a+\dfrac{b-a}{3}\right]$ et qui vaut $\dfrac{1}{M}$ sur $\left[b-\dfrac{b-a}{3}\ ,\ b\right]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^{a+\frac{b-a}{3}} Mdt = \frac{b-a}{3}M$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq \int_{b-\frac{b-a}{3}}^b Mdt = \frac{b-a}{3}M$, donc

$\Phi(f) \geq \dfrac{(b-a)^2}{9}M^2$ et $\boxed{\text{la fonction } \Phi \text{ n'est pas majorée.}}$

* *

31 Projecteurs

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

On suppose que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(Id_E - f) \leq n$. Montrer que f est un projecteur de E.

Solution :

Pour tout $x \in E$, $\quad x = f(x) + (Id_E - f)(x)$

donc $E \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(Id_E - f)$. L'inclusion inverse étant vraie, il y a égalité.

D'après la formule de Grassmann,

$$\underbrace{\dim\Big(\ \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(Id_E - f)\Big)}_{=n} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Im}(Id_E - f))}_{\leq n \textit{ par hypothese}} - \underbrace{\dim\Big(\ \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f)\Big)}_{\geq 0}$$

Donc $\quad \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Im}(Id_E - f)) = n \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

Pour tout $x \in E$, $\quad f^2(x) - f(x) = f\big(\ f(x) - x\big) = (Id_E - f)\big(\ -f(x)\big) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

donc $f^2(x) = f(x)$ et f est un projecteur.

* *

32 Centrale - CCP * - Rang d'une somme

Soient f et g deux endomophismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps $\mathbf{K}$.

Montrer que $\quad : \quad \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\} \\ \text{et} \quad \ker f + \ker g = E \end{cases}$

Solution

$\forall y \in \mathrm{Im}(f+g), \quad \exists x \in E, \quad y = (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}f} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im}g}$

Donc $\mathrm{Im}(f+g) \underbrace{\subset}_{(1)} \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$

d'où $\mathrm{rg}(f+g) = \dim(\mathrm{Im}(f+g)) \underbrace{\leq}_{(1')} \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g)$

Il y a égalité entre $\mathrm{rg}(f+g)$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ si et seulement si l'inégalité (1'), c'est à dire l'inclusion (1) est une égalité et si $\dim(\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g) = 0$

Donc $\quad \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g \\ \text{et } \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\} \end{cases}$

♣ Supposons que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

- alors on vient de voir que $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}$
- $\dim(\ker f + \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$ $\quad$ (Grassmann)
  $= n - \mathrm{rg}f + n - \mathrm{rg}g - \dim(\ker f \cap \ker g)$ $\quad$ (formule du rang)
  $= 2n - \mathrm{rg}(f+g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$

Montrons que $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$

l'inclusion $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ est immédiate.

réciproquement soit $x \in \ker(f+g)$:

$(f+g)(x) = 0$ donc $\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}f} = \underbrace{g(-x)}_{\in \mathrm{Im}g}$ $\quad$ et donc $f(x) = g(x) = 0$ puisque $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}$

ce qui montre bien que $x \in \ker f \cap \ker g$ et termine la démonstration.

On peut alors écrire :

$\dim(\ker f + \ker g) = 2n - \mathrm{rg}(f+g) - \dim(\ker(f+g)) = 2n - n = n$

(à nouveau th. du rang appliqué à $f+g$)

L'inclusion $\ker f + \ker g \subset E$ et l'égalité des dimensions permettent alors de conclure à l'égalité :

$\ker f + \ker g = E$

♣ Supposons maintenant que $\quad \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$

D'après le résultat préliminaire, il suffit de montrer que : $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$

- L'inclusion $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f+\text{Im}g$ ayant déja été montrée, il suffit de prouver que $\text{Im}f+\text{Im}g \subset \text{Im}(f+g)$
- soit $z \in \text{Im}f + \text{Im}g$. $\quad \exists x, y \in E$ tels que $z = f(x) + g(y)$
- Puisque $\ker f + \ker g = E$, il existe $a \in \ker f$ et $b \in \ker g$ tels que $x = a + b$

et il existe $c \in \ker f$ et $d \in \ker g$ tels que $y = c + d$

alors $(f+g)(b+c) = f(b) + \underbrace{f(c)}_{0} + \underbrace{g(b)}_{0} + g(c)$

et $z = f(x) + g(y) = f(a+b) + g(c+d) = \underbrace{f(a)}_{0} + f(b) + g(c) + \underbrace{g(d)}_{0} = f(b) + g(c)$

on a ainsi montré que $z = (f+g)(b+c) \in \text{Im}(f+g)$

et finalement que $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$

* *

33 Classique tout concours - Endomorphisme commutant avec tous les autres

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ et $f \in L(E)$

a) Montrer que si $\forall x \in E,\ f(x)$ est colinéaire à x alors f est une homothétie.

b) Montrer que si $f \in L(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E, alors f est une homothétie.

c) Déterminer les matrices $M \in L(E)$ qui commutent avec toutes les matrices inversible.

$$(\forall N \in GL_n(\mathbf{K}), \quad M.N = N.M)$$

Solution :

a) Par hypothèse, $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x.x$

Si $x \neq 0, \lambda_x$ est unique car $\lambda_1.x = \lambda_2.x \implies (\lambda_1 - \lambda_2).x = 0$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2$ car $x \neq 0$.

Soient x et y non nuls.

- Si x et y sont liés, $\exists \mu \in \mathbf{K},\ y = \mu x$

  $f(y) = \lambda_y.y = f(\mu.x) = \mu.f(x) = \mu.\lambda_x.x = \lambda_x\mu.x = \lambda_x.y$

  donc $(\lambda_x - \lambda_y).y = 0$ et $\lambda_x = \lambda_y$
- Si (x, y) est libre, $f(x+y) = \lambda_{x+y}.(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y$

  donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x).x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y).y = 0$

  $\implies \lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$ puisque (x, y) est libre.

  donc $\lambda_x = \lambda_y$

Ainsi, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda.x$ et donc $\boxed{f = \lambda.Id_E}$.

b) Soit $f \in L(E)$ qui commute avec tous les endomorphismes de E.

Soit x un vecteur quelconque non nul de E.

Considérons alors la projection p sur la droite $\text{Vect}(x)$ parallèlement à un hyperplan H supplémentaire de cette droite.

Par hypothèse sur f, $\quad f_o p = p_o f$

donc $f(\underbrace{p(x)}_{=x}) = \underbrace{p(f(x))}_{\in Im(p)}$

donc $f(x) \in Im(p) = \text{Vect}(x)$ et $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x.x$

Il s'ensuit alors d'après a) que f est une homothétie.

c) Soit $M \in M_n(\mathbf{K})$ qui commute avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbf{K})$.

$\forall (i,j) \in \{1, 2, ..., n\}^2,\ I_n + E_{i,j} \in GL_n(\mathbf{K})$, donc $M.(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j}).M$

$\implies M + M.E_{i,j} = M + E_{i,j}.M$

$\implies M.E_{i,j} = E_{i,j}.M$ et par linéarité, M commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbf{K})$.

Alors, d'aprés a) appliqué aux matrices, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ M = \lambda I_n$

* *

34 Centrale - Mines *- Matrices de trace nulle

Soit $M \in M_n(\mathbf{K})$.

Montrer que : $\text{tr}(M) = 0 \iff M$ est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Solution :

• Si M est semblable à une matrice N dont tous les éléments diagonaux sont nuls, alors $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N) = 0$.

• Montrons l'implication réciproque, pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n, par récurrence sur n.

- Pour $n = \dim(E) = 1$, $\mathrm{mat}(f) = (\lambda)$, donc $\mathrm{tr}(f) = \lambda = 0$ et $\mathrm{mat}(f) = 0$, la propriété est vérifiée.

- Supposons que tout endomorphisme de trace nulle d'un espace de dimension $n-1$ admette une base dans laquelle les éléments diagonaux de sa matrice soient tous nuls.

Soit alors $f \in L(E)$, E espace vectoriel de dimension n, tel que $\mathrm{tr}(f) = 0$.

- si $f = \lambda.Id_E$ est une homothétie, alors $\mathrm{tr}(f) = \lambda.n = 0$ donc $\lambda = 0$ et $f = 0$ vérifie bien la propriété demandée.

- si f n'est pas une homothétie, alors il existe $x_1 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1))$ soit un système libre.

(cf. exercice précédent)

Prenons alors $x_2 = f(x_1)$ et complétons le système libre (x_1, x_2) en une base $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ de E.

$$\mathrm{Mat}_{(x_1,\dots,x_n)} f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(x_1) & f(x_2) \;...\; & f(x_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & ... & a_{3,n} \\ 0 & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a_{1,2} \; ... \; a_{1,n} \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \text{ avec } B = \begin{pmatrix} a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ a_{3,2} & ... & a_{3,n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Considérons ensuite p le projecteur sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(x_2, x_3, ..., x_n)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(x_1)$ et g la restriction de $p_o f$ à H.

g est un endomorphisme de H, dont la matrice dans la base $(x_2, ..., x_n)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{(x_2,\dots,x_n)} g = \begin{pmatrix} a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ a_{3,2} & ... & a_{3,n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} = B$$

alors $\quad \mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(B) = a_{2,2} + ... + a_{n,n} = \mathrm{tr}(f) = 0$

On peut donc appliquer à g l'hypothèse de récurrence : il existe une base $(y_2, ..., y_n)$ de H dans laquelle la matrice de g possède une diagonale nulle : $\quad \mathrm{Mat}_{(y_2,\dots,y_n)} g = C = \begin{pmatrix} 0 & c_{2,3} & ... & c_{2,n} \\ c_{3,2} & 0 & ... & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,2} & ... & c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}_{n-1}$

Alors, la matrice de f dans la base $(x_1, y_2, ..., y_n)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{(x_1,y_2,\dots,y_n)} f = A' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & 0 & c_{2,3} & ... & c_{2,n} \\ \times & c_{3,2} & 0 & ... & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & c_{n,2} & ... & c_{n,n-1} & 0 \end{array}\right)_n$$

(les $\times$ représentent des éléments quelconques de $\mathbf{K}$)

On a ainsi construit une base de E dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice de f sont nuls.

****

35 Mines * - Groupe multiplicatif de matrices

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $G = \{M_1, M_2, ..., M_p\}$ un sous ensemble fini de matrices de $M_n(K)$ formant un groupe pour la multiplication $\times$.

a) Donner un exemple d'un tel sous ensemble G.

G est il nécessairement un sous groupe de $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$?

b) Montrer que toutes les matrices de G ont même rang.

c) Montrer que $P = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} M_k$ est une matrice de projection.

Solution :

a) Prenons $M_k = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^k = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta^k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$

où $\theta = \dfrac{2\pi}{p}$ et $M_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Alors $\quad M_k.M_j = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta^{k+j} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = M_{(k+j)\ [p]}$ et $M_p = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ est élément neutre de G pour la multiplication.

Autre exemple :

• Si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$: Soit G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \alpha_m & .... & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où α_1 est une racine primitive p_1-ème de l'unité, α_2 une racine p_2-ème de l'unité,..., α_m une racine p_m-ème de l'unité.

G est un groupe pour la loi $\times$, de cardinal $p_1.p_2.....p_m$.

• Si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$: Soit G l'ensemble des matrices de la forme précédente, avec $\alpha_i = \pm 1$

G est un groupe pour la loi $\times$, de cardinal 2^m.

• Ces exemples montrent que G n'est pas nécessairement un sous groupe de $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$

b) Soient M_1 et M_2 deux matrices de G. Soit J l'élément neutre du groupe $(G, \times)$ (qui n'est pas forcément la matrice unité I_n)

Soit M_2^{-1} le symétrique de M_2 dans G pour cette loi $\times$.

Alors, $M_1 = (M_2 \times M_2^{-1}) \times M_1 = M_2 \times (M_2^{-1} \times M_1)$, ce qui montre que $\text{rg}(M_1) \leq \text{rg}(M_2)$

(car $\text{rg}(A \times B) \leq \text{rg}(A)$)

Pour un raison analogue, $\text{rg}(M_2) \leq \text{rg}(M_1)$ et donc $\text{rg}(M_1) = \text{rg}(M_2)$

c) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, l'application $f_k \ : \ M \longrightarrow M_k.M$ est une bijection de G dans G :

- elle est injective : $\forall M, N \in G,\ f_k(M) = f_k(N) \implies M_k.M = M_k.N$

$\implies M_k^{-1}(M_k.M) = M_k^{-1}(M_k.N) \implies M = N$

(M_k^{-1} désigne l'inverse de M_k dans le groupe $(G, \times)$)

- elle est surjective : $\forall M \in G,\ M = M_k.(M_k^{-1}.M) = f_k(M_k^{-1}.M)$

Donc quand M décrit G, $M_k.M$ décrit G aussi.

$$P^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{p} M_k\right).\left(\sum_{j=1}^{p} M_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} \underbrace{M_k.M_j}_{decrit\ G}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\underbrace{(M_1 + M_2 + ... + M_p)}_{independant\ de\ k}$$

$$P^2 = \frac{1}{n^2}\, n\,(M_1 + M_2 + ... + M_p) = \frac{1}{n}(M_1 + M_2 + ... + M_p) = P$$

$\boxed{\text{Donc } P \text{ est une matrice de projection.}}$

****

36 Mines 06 - Rangs de f^k ; indice de nilpotence *

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K et $f \in L(E)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soient $r_k = \text{rg}(f^k)$ et $\delta_k = r_k - r_{k+1}$ (on convient que $f^0 = Id_E$)

1-a) Montrer que $\delta_k = \dim(\ker f \cap \text{Im} f^{k+1})$

(on pourra considérer la restriction $\widetilde{f_k}$ de f à $\text{Im} f^k$))

En déduire que (δ_k) est une suite décroissante.

Montrer que pour tout k, $\delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}$. En déduire que la suite (δ_k) est nulle à partir d'un certain rang.

b) Soit p le plus petit entier tel que $\delta_p = 0$ (donc $\delta_{p-1} \neq 0$)

Montrer que - si $k < p$, $\text{Im}(f^{k+1}) \subsetneq \text{Im}(f^k)$

et que - si $k \geq p$, $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$

2-a) On suppose que f est nilpotente d'ordre 2. ($f \neq 0$ et $f^2 = 0$)

Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dfrac{n}{2}$

b) Plus généralement, on suppose que f est nilpotent d'ordre p. ($f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$)

Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dfrac{p-1}{p} n$

Solution :

1-a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{f_k}$ la restriction de f à $\text{Im} f^k$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im} f^k & \xrightarrow{\widetilde{f_k}} & E \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Recherchons noyau et image de $\widetilde{f_k}$:

•$\forall x \in \text{Im} f^k,\ x \in \ker(\widetilde{f_k}) \iff \widetilde{f_k}(x) = 0$

$\iff f(x) = 0$

donc $\ker(\widetilde{f_k}) = \mathrm{Im} f^k \cap \ker f$

$\bullet \forall y \in E,\ y \in \mathrm{Im}(\widetilde{f_k}) \iff \exists x \in \mathrm{Im} f^k,\ y = \widetilde{f_k}(x) = f(x)$

$\iff \exists t \in E,\ y = f(f^k(t))$

$\iff y \in \mathrm{Im} f^{k+1}$

donc $\mathrm{Im}(\widetilde{f_k}) = \mathrm{Im} f^{k+1}$

Le théorème du rang appliqué à $\widetilde{f_k}$ permet d'écrire : $\dim(\mathrm{Im} f^k) = \dim(\mathrm{Im} f^{k+1}) + \dim(\mathrm{Im} f^k \cap \ker f)$

soit aussi : $r_k = r_{k+1} + \dim(\mathrm{Im} f^k \cap \ker f)$

et par différence, $\boxed{\delta_k = r_k - r_{k+1} = \dim(\mathrm{Im} f^k \cap \ker f)}$

• Si $x \in \mathrm{Im} f^{k+1}$, alors $\exists t \in E,\ x = f^{k+1}(t) = f^k(f(t))$ donc $x \in \mathrm{Im} f^k$.

d'où $\mathrm{Im} f^{k+1} \subset \mathrm{Im} f^k$

alors $\mathrm{Im} f^{k+1} \cap \ker f \subset \mathrm{Im} f^k \cap \ker f$, et en passant aux dimensions, $\delta_{k+1} \leq \delta_k$

$\boxed{\text{La suite } (\delta_k) \text{ est donc décroissante (au sens large)}}$

Remarque : Cette décroissance de δ s'écrit aussi $\delta_{k+1} = r_{k+1} - r_{k+2} \leq \delta_k = r_k - r_{k+1}$,

ou encore $r_{k+1} \leq \dfrac{r_k + r_{k+2}}{2}$

On dit alors, par analogie aux fonctions, que **la suite** (r_k) **est convexe**.

• $\delta_0 = r_0 - r_1 = n - r_1$

$\delta_1 = r_1 - r_2$

$\delta_2 = r_2 - r_3$

....

$\delta_k = r_k - r_{k+1}$

En additionnant membre à membre,

$\underbrace{\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_k}_{\geq (k+1)\delta_k} = \underbrace{n - r_{k+1}}_{\leq n}$ donc $(k+1)\delta_k \leq n$ d'où $\boxed{\delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}}$

• L'inégalité $0 \leq \delta_k \leq \dfrac{n}{k+1}$ montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \delta_k = 0$

Mais comme (δ_k) est une suite d'entiers naturels, puisqu'elle est de limite nulle, elle est nulle à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite)

b)• Si p est le plus petit entier tel que $\delta_p = 0$, la suite (δ_k) étant décroissante,

$\forall k < p,\ \delta_k = r_k - r_{k+1} \geq 1$ donc $r_k = \mathrm{rg}(f^k) > r_{k+1} = \mathrm{rg}(f^{k+1})$

L'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ est donc **stricte**.

• La suite (δ_k) étant stationnaire nulle à partir du rang p, $\forall k \geq p,\ \delta_k = r_k - r_{k+1} = 0$,

l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ à laquelle s'ajoute l'égalité des dimensions entraîne alors l'égalité $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k)$

La suite des images itérées, $(\mathrm{Im} f^k)$ est donc **strictement décroissante** jusqu'au rang p, puis **stationnaire** à partir de ce rang p.

2-a) Si $f_o f = 0$ alors $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ et donc $\dim(\mathrm{Im} f) \leq \dim(\ker f)$

or, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = n$

d'où $2\dim(\mathrm{Im} f) \leq n$ et $\boxed{\mathrm{rg}(f) \leq \dfrac{n}{2}}$

2-b) Supposons que f soit nilpotente d'ordre p. Alors $\mathrm{Im} f^p = \{0\}$ donc $r_p = 0$ et $\delta_p = 0$.

Le même calcul de sommation fait en 1-a) montre que :

$\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{p-1} = n - r_p = n$

La suite (δ_k) étant décroissante, $n = \delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{p-1} \leq p.\delta_0 = p(n - r_1)$

donc $p.r_1 \leq (p-1)n$ et finalement, $\boxed{r_1 = \mathrm{rg}(f) \leq \dfrac{p-1}{p} n}$

Note : Ce résultat généralise celui de la question précédente :

Si f est nilpotente d'ordre 3, alors $\mathrm{rg}(f) \leq \dfrac{2}{3} n$

* *

37 CCP

a) Montrer que l'application $(A, B) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Tr}({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

b) Soient A et B deux matrices données de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $f : X \longrightarrow A.X - X.B$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et trouver son adjoint.

Solution :

a) Par linéarité de la trace et les relations $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$, Φ est clairement bilinéaire et symétrique.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, non nulle. Alors $\mathrm{Tr}({}^tA.B) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2} a_{i,j}^2 > 0$ car l'un des $a_{i,j}^2$ au moins est strictement positif.

Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $M_n(\mathbb{R})$, donc un produit scalaire.

b) f est linéaire (immédiat).

Recherchons $g \in L(M_n(\mathbb{R}))$ tel que : $\quad \forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{R}),\ \Phi(f(X),Y) = \Phi(X, g(Y)) \qquad (1)$

$\forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \Phi(f(X),Y) = \mathrm{Tr}({}^tf(X).Y) = \mathrm{Tr}({}^t(A.X - X.B).Y)$

$\Phi(f(X),Y) = \mathrm{Tr}({}^tX.{}^tA.Y -{}^t B.{}^tX.Y) = \mathrm{Tr}\left({}^t({}^tX.{}^tA.Y -{}^t B.{}^tX.Y)\right)$ (car $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}A$)

$\Phi(f(X),Y) = \mathrm{Tr}({}^tY.A.X -{}^t Y.X.B) = \mathrm{Tr}({}^tY.A.X) - \mathrm{Tr}(({}^tY.X).B)$

$= \mathrm{Tr}({}^tY.A.X) - \mathrm{Tr}(B.({}^tY.X))$ (car $\mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$)

$= \mathrm{Tr}(({}^tY.A - B.{}^tY).X) = \mathrm{Tr}({}^tX.({}^tA.Y - Y.{}^tB).Y) = \Phi(X, ({}^tA.Y - Y.{}^tB))$

Donc $\quad \forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \Phi(f(X),Y) = \Phi(X, (\underbrace{{}^tA.Y - Y.{}^tB}_{g(Y)}))$

d'où : $\boxed{\forall Y \in M_n(\mathbb{R}),\ f^*(Y) ={}^t A.Y - Y.{}^tB}$

* *

38 Mines - Ponts 06 *

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. (Mines - Ponts)

$[x,y,z]$ désigne le produit mixte des vecteurs x, y et z de E.

Soit f un endomorphisme donné de E.

a) Soit $(x,y,z) \in E^3$; simplifier $\quad [f(x),y,z] + [x,f(y),z] + [x,y,f(z)]$

b) Trouver les endomorphismes g de E qui vérifient :

$\forall (x,y) \in E^2, f(x) \wedge y - f(y) \wedge x = g(x \wedge y)$

Solution :

a) Soit φ l'application de E^3 dans $\mathbb{R}$ qui à $(x,y,z) \in E^3$ associe $[f(x),y,z] + [x,f(y),z] + [x,y,f(z)]$

$\forall (x_1,x_2,y,z) \in E^4, \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \varphi(x_1+\lambda x_2,y,z) = [f(x_1+\lambda x_2),y,z] + [x_1+\lambda x_2, f(y), z] + [x_1+\lambda x_2, y, f(z)]$

$= [f(x_1)+\lambda f(x_2),y,z] + [x_1+\lambda x_2, f(y), z] + [x_1+\lambda x_2, y, f(z)]$

$= [f(x_1),y,z] + [x_1,f(y),z] + [x_1,y,f(z)] + \lambda\left([f(x_2),y,z] + [x_2,f(y),z] + [x_2,y,f(z)]\right)$

$= \varphi(x_1,y,z) + +\lambda\varphi(x_2,y,z)$

Donc ϕ est une forme 3-linéaire sur E.

De plus, $\phi(x,x,z) = \underbrace{[f(x),x,z] + [x,f(x),z]}_{=0} + \underbrace{[x,x,f(z)]}_{=0} = 0$

de même $\phi(x,y,x) = \varphi(x,y,y) = 0$

Donc φ est une forme tri-linéaire alternée sur E. Or on sait que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est un espace vectoreil de dimemsion 1 (droite vectorielle).

Soir $B = (e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée directe de l'espace E_3. L'application déterminant dans cette base forme une base de cette droite vectorielle.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\quad \varphi = \lambda.det_B : \qquad \forall (x,y,z) \in E^3, \varphi(x,y,z) = \lambda.det_B(x,y,z)$

Par définition du déterminant dans la base B, $det_B(e_1,e_2,e_3) = 1$,

donc $\varphi(e_1,e_2,e_3) = \lambda.det_B(e_1,e_2,e_3) = \lambda.1 = \lambda$

$\lambda = \varphi(e_1,e_2,e_3) = [f(e_1),e_2,e_3] + [e_1,f(e_2,),e_3] + [e_1,e_2,f(e_3)]$

Soit $A = \mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

alors $\lambda = [f(e_1),e_2,e_3] + [e_1,f(e_2,),e_3] + [e_1,e_2,f(e_3)] = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 1 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix}$

$\lambda = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \mathrm{tr}(f)$

Finalement, $\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3,\quad [f(x),y,z] + [x,f(y),z] + [x,y,f(z)] = \mathrm{tr}(f).[x,y,z]}$

b) ♣ Soit $g \in L(E)$ telle que

$\forall (x,y) \in E^2,\quad f(x) \wedge y - f(y) \wedge x = g(x \wedge y) \qquad (*)$

alors, en prenant le produit scalaire avec un vecteur z quelconque,

$\forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad [f(x),y,z] - [f(y),x,z] =< g(x \wedge y), z >$

d'après la question précédente,

$[f(x),y,z] - [f(y),x,z] = [f(x),y,z] + [x,f(y),z] = \text{tr}(f).[x,y,z] - [x,y,f(z)]$

donc, $\forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad \text{tr}(f).[x,y,z] - [x,y,f(z)] =< g(x \wedge y), z >$

$\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in E^2, \forall z \in E, \quad \text{tr}(f). < x \wedge y, z > - < x \wedge y, f(z) > =< g(x \wedge y), z >$

Quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $t = x \wedge y$ décrit E

donc, $\forall t \in E, \forall z \in E, \quad \text{tr}(f). < t, z > - < t, f(z) > =< g(t), z >$

$\Longrightarrow \quad \text{tr}(f). < t, z > - < f^*(t), z > =< g(t), z >$

$\Longrightarrow \quad < (\text{tr}(f).Id_E - f^*)(t), z > =< g(t), z >$

Ceci étant vrai pour tout $z \in E$, on en déduit que $g = \text{tr}(f).Id_E - f^*$

Donc il existe au plus un endomorphisme g de E qui vérifie la condition (*).

♣ Réciproquement, soit $g = \text{tr}(f).Id_E - f^*$

Pour vérifier que $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x) \wedge y - f(y) \wedge x = g(x \wedge y)$, on montre que :

pour tout $z \in E$, $< f(x) \wedge y - f(y) \wedge x, z > =< g(x \wedge y), z >$.

En effet, $< f(x) \wedge y - f(y) \wedge x, z > = [f(x),y,z] - [f(y),x,z]$

$= [f(x),y,z] + [x,f(y),z] = \text{tr}(f).[x,y,z] - [x,y,f(z)]$

et $< g(x \wedge y), z > =< \text{tr}(f).x \wedge y \ , \ z > - < f^*(x \wedge y), z >$

$= \text{tr}(f).[x,y,z] - < x \wedge y, f(z) > = \text{tr}(f).[x,y,z] - [x,y,f(z)]$

* *

39 CCP

Déterminer $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n\}$

Solution

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^n$, espace vetoriel des vecteurs colonnes muni du produit scalaire canonique.

$X \in E \Longleftrightarrow \left(< X, U > = n \text{ et } < X, X > = \|X\|^2 = n \right)$

Soit $X \in E$, $\underbrace{| < X, U > |^2}_{n^2} \leq < X, X >< U, U > = \underbrace{\|X\|^2}_{n} \underbrace{\|U\|^2}_{n}$

Puisqu'il y a égalité dans la formule de Cauchy-Schwarz, les vecteurs X et U sont colinéaires.

Donc $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X = \lambda U$

mais $< X, U > = n =< \lambda U, U > = \lambda < U, U > = \lambda n$ donc $\lambda = 1$ et $X = U$

Conclusion : $\boxed{E = \{U\}}$

* *

40 Centrale

Soit M une matrice réelle symétrique non nulle.

Montrer que $\dfrac{(\text{tr}M)^2}{\text{tr}(M^2)} \leq \text{rg}(M)$

Solution

M^2 est réelle symétrique positive ,

$(\forall X \in M_{n,1}(R), {}^t X.M^2.X = {}^t(M.X).(M.X) = \|M.X\|^2 \geq 0)$

donc ses valeurs propres $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sont positives ou nulles, et non toutes nulles.

donc $\text{tr}(M^2) = \sum \mu_i > 0$

Soit r le rang de M et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres non nulles , les $n - r$ dernières valeurs propres de M étant 0.

alors $(\text{tr}M)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right)^2 = < (1, ..., 1, 0, ..., 0), (\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0) >^2$

$\leq \| (1, ..., 1, 0, ..., 0) \|^2 . \| (\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0) \|^2 = r. \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$

Les λ_i^2 sont les valeurs propres de M^2

(car $M = P.\text{diag}(\lambda_i).P^{-1} \Rightarrow M^2 = P.\text{diag}(\lambda_i^2).P^{-1}$, M est diagonalisable car réelle symétrique) donc $(\mathrm{tr}M)^2 \leq r.\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \leq r.\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = r.\mathrm{tr}(M^2)$ (en notant $M^2 = (b_{i,j})$)

et puisque $\mathrm{tr}(M^2) > 0$, on obtient $\dfrac{(\mathrm{tr}M)^2}{\mathrm{tr}(M^2)} \leq r = \mathrm{rg}(M)$.