Oraux - 2008

Sujet 1 (CCP)

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle (E) : $\quad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$

Exercice 2 : Soit C la courbe de paramétrisation polaire : $\quad r(\theta) = \dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin\theta}$

Etudier le comportement de la courbe au voisinage de l'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

SOLUTION :

Exercice 1 : L'équation différentielle (E) est linéaire homogène du second ordre, mais n'est pas à coefficients constants.

• Commençons par rechercher s'il existe des séries entières solutions.

Soit $S\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de raon de convergence $r \neq 0$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in]-r, r[,\ S'(x) = \sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \ \text{ et }\ S''(x) = \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

S est solutionde (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-r, r[,\ xS''(x) + 3S'(x) - 4x^3S(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+3)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-r, r[,\ 3a_1 + 8a_2x + 15a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}[(n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3}]x^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'une série entièer de rayon non nul, on obtient :

$$\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \forall n \geq 3,\ (n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3} = 0 \end{cases}$$

La dernière relation de récurrence, appliquée aux conditions initiales $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ donne :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{4k+1} = a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$$

Elle donne, appliquée à $n = 4k-1$: $\quad 4k(4k+2)a_{4k} = 4a_{4k-4} \quad \Longrightarrow \quad a_{4k} = \dfrac{a_{4k-4}}{2k(2k+1)}$

d'où $\quad a_4 = \dfrac{a_0}{2.3}, \quad a_8 = \dfrac{a_4}{4.5}, \quad a_{12} = \dfrac{a_8}{6.7}, \quad ....., a_{4k} = \dfrac{a_{4k-4}}{2k(2k+1)}$

par récurrence immédiate, $\quad a_{4k} = \dfrac{a_0}{1.2.3.4.5.\ ...\ 2k.(2k+1)} = \dfrac{a_0}{(2k+1)!}$

Donc $\ S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k}x^{4k} = a_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{4k}}{(2k+1)!}$

Réciproquement, la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{4k}}{(2k+1)!}$ a un rayon de convergence infini (immédiat par le critère de D'alembert)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$$

• Le coefficient de y'' dans l'équation s'annule en 0, mais ne s'annule pas sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ni sur $I_2 =]0, +\infty[$. Les solutuions de (E) sur chacun de ces intervalles forment donc un espace vectoriel de dimension 2. Les séries entières trouvées précédemment, de la forme λS_0 ne forment qu'un espace de dimension 1.

Nous n'avons donc pas encore trouvé toutes les solutions de (E).

Puisque le fonction S_0 ne s'annule ni sur I_1 ni sur I_2, recherchons les solutions de (E) sur chaque I_k de la forme $y(x) = \lambda(x)S_0(x)$

alors $\forall x \in I_k,\ y'(x) = \lambda'(x)S_0(x) + \lambda(x)S_0'(x)$

et $y''(x) = \lambda''(x)S_0(x) + 2\lambda'(x)S_0'(x) + \lambda(x)S_0''(x)$

y est solution de (E) sur I_k si et seulement si $\forall x \in I_k,\ xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I_k,\ x[\lambda''(x)S_0(x) + 2\lambda'(x)S_0'(x) + \lambda(x)S_0''(x)] + 3[\lambda'(x)S_0(x) + \lambda(x)S_0'(x)] - 4x^3\lambda(x)S_0(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ \forall x \in I_k,\ (xS_0(x))\lambda''(x) + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))\lambda'(x) + (\underbrace{xS_0''(x) + 3S_0'(x) - 4x^3S_0(x)}_{=0})\lambda(x) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall x \in I_k,\ xS_0(x)\lambda''(x) + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))\lambda'(x) = 0$

La fonction λ' est donc solution sur I_k de l'équation du premer ordre (F) :

$$xS_0(x)z' + (2xS_0'(x) + 3S_0(x))z = 0$$

Sur chaque I_k la solution générale de (F) est : $z(x) = \mu \exp\left(-\int_a^x \frac{2tS_0'(t) + 3S_0(t)}{tS_0(t)}dt\right)$

$$z(x) = \mu \exp\left(-\int_a^x \frac{2S_0'(t)}{S_0(t)} + \frac{3}{t}dt\right) = \mu \exp\left(-2\ln|S_0(x)| - 3\ln|x| + cte\right)$$

$$z(x) = \frac{\mu'}{x^3S_0^2(x)} = \frac{\mu'\,x}{\mathrm{sh}^2(x^2)}$$

donc $\forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \dfrac{\mu'\,x}{\mathrm{sh}^2(x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x) = \dfrac{\mu'}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{\mathrm{sh}^2(x^2)}dx = \frac{-\mu'}{2}\coth(x^2) + \mu''$

et $y(x) = \lambda(x)S_0(x) = \left(\dfrac{-\mu'}{2}\coth(x^2) + \mu''\right)\dfrac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2} = A\dfrac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2} + B\dfrac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$

Finalement, la solution générale de (E) sur les intervalles I_1 et I_2 est :

$$\boxed{y(x) = A\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2} + B\frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2} = C\frac{e^{x^2}}{x^2} + D\frac{e^{-x^2}}{x^2} \text{ où } A, B, C, D \text{ sont des constantes.}}$$

Sujet 2-192 (CCP)

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{ch}t)^n}dt$

1- Montrer que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2- La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, donner sa limite.

3- Trouver la nature des séries de terme général $\{u_n\}$ et $\{(-1)^n u_n\}$

Exercice 2 :

Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \\ \mathrm{tr}(A) = 3 \\ A \text{ est inversible} \end{cases}$

SOLUTION :

Exercice 1 :

1- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{ch}t)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Puisque $\forall t \in [0, +\infty[, \mathrm{ch}t \geq 1$, pour tout n, $0 \leq \dfrac{1}{(\mathrm{ch}t)^n} \leq \dfrac{1}{(\mathrm{ch}t)} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \leq 2e^{-t}$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, par majoration la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\text{ch}t)^n}$ l'est aussi pour tout $n \geq 1$. Donc u_n est défini pour tout $n \geq 1$.

2- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la suite suite géométrique $\left(\dfrac{1}{(\text{ch}t)^n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, de raison 1 si $t = 0$ et de raison strictement inférieure à 1 si $t > 0$ (car $\text{ch}t > 1$)

Dons la suite de fonctions $(t \mapsto)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction g telle que : $g(0) = 1$ et $\forall t > 0,\ g(t) = 0$

De plus on a la domination : $\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0,+\infty[, 0 \leq \dfrac{1}{(\text{ch}t)^n} \leq \dfrac{1}{(\text{ch}t)} \leq 2e^{-t}$ où la fonction $t \mapsto 2e^{-t}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\text{ch}t)^n} dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$$

donc $\boxed{\lim u_n = 0.}$

3- • Pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \leq 1 \leq e^t$ donc $\text{ch}t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \dfrac{e^t + e^t}{2} = e^t$ et $\dfrac{1}{\text{ch}t} \geq e^{-t}$

donc $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\text{ch}t)^n} dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}$, ce qui montre par minoration que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente.}}$

• La suite (u_n) est décroissante (pas de difficulté à le montrer) et de limite nulle. On en déduit par le critère de Leibniz des séries alternées que $\boxed{\text{la série alternée } \sum (-1)^n u_n \text{ est convergente.}}$

Exercice 2 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \\ \text{tr}(A) = 3 \\ A \text{ est inversible} \end{cases}$

Alors, A étant inversible, en multipliant l'égalité $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ par A^{-1} , on obtient :

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$ est un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$, à racines simples. A est donc diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Et on sait aussi que $\text{Sp}(A) \subset \{1,2\}$

Il esiste $P \in GL_3(\mathbb{R}),\ A = P.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec $\{a,b,c\} \subset \{1,2\}$

Mais la condition $\text{tr}(A) = 3$ entraîne que seul le cas $a = b = c = 1$ est possible (si l'un des nombres a, b ou c valait 2, alors la trace dépasserait 3)

donc $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = P.P^{-1} = I_3$ $\boxed{A = I_3}$

Sujet 3-220 (CCP)

Exercice 1 :

Montrer que la fonction $f : t \mapsto e^{-t} \sin t$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} |f|$

(on pourra montrer que $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt$ s'exprime simplement en fonction de u_0)

Exercice 2 :

Quel est le rang de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 ?

Donner ses valeurs propres, ses sous espaces propres, et les matrices des projecteurs sur les sous espaces propres. Quelle relation y-a-t-il entre ces matrices de projection et A ?

SOLUTION :

Exercice 1 : • La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\sin t$ est continue sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall t \in [0,+\infty[, |f(t)| = |e^{-t}\sin t| \le e^{-t}$, fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par majoration, on en conclut que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}dt\right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)t}dt = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-1+i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2}$$

$$\text{(car } |e^{(-1+i)t}| = |e^{-t}e^{it}| = e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0)$$

En prenant la partie imaginaire, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\, dt = \frac{1}{2}}$$

• Par le changement de variable $t = n\pi + u$, on obtient :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt = \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+u)}|\sin(n\pi+u)|du = e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-u}\sin u du = e^{-n\pi}u_0$$

$$u_0 = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{(-1+i)t}dt\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{\pi}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\pi}e^{i\pi}-1}{-1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{1-i}\right) = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(t)|dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}u_0 = u_0\frac{1}{1-e^{-\pi}}$

(somme d'une série géométrique de raison $e^{-\pi}$)

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\, dt = \frac{1}{2}\coth\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Exercice 2 :

• Soit A la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$

Toutes les colonnes de A étant égales, le rang de A est 1.

0 est donc valeur propre de A et le sous espace propre associé est de dimension $n-1$, c'est un hyperplan. Il a pour équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Reste à trouver une n^e valeur propre de A. Puisque la somme des valeurs propres est égale à la trace de A, la somme de toutes les valeurs propres vaut n, mais 0 étant déja une valeur propre d'ordre $\ge n-1$, $\lambda = n$ est valeur propre de A, simple.

Le sous espace propres associé est une droite, c'est l'image de A.

Elle a pour équation $x_1 = x_2 = ... = x_n$

• Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, p_1 le projecteur sur $E_0^f = \ker f$ et p_2 le projecteur sur $E_n^f = \mathrm{Im} f$

$(e_1, e_2, ...e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$p_1(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$ avec $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ puisque $p_1(e_1)$ appartient à l'hyperplan $\ker f$.

$p_1(e_1) - e_1 = (a_1 - 1)e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$ appartient à la somme des autres sous espaces, c'est à dire ici à Imf =Vect$(1, 1, ..., 1)$

donc $(a_1 - 1) = a_2 = a_3 = ... = a_n$

En reportant dans la relation $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$, on obtient : $na_1 - (n - 1) = 0$

soit finalement $a_1 = \dfrac{n-1}{n}$, $a_2 = a_3 = ... = a_n = -\dfrac{1}{n}$

Le calcul est analogue pour $p_1(e_j)$: $p_1(e_j) = \dfrac{n-1}{n}e_j - \displaystyle\sum_{k\neq j} \frac{a_k}{n}$

Ce qui donne finalement pour la matrice de p_1 : $P_1 = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & n-1 & ... & -1 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ -1 & -1 & ... & n-1 \end{pmatrix}$

• p_2 est la projecteur supplémentaire de p_1 : $p_2 = Id_{\mathbb{R}^n} - p_1$

La matrice de p_2 est $P_2 = I_n - P_1 = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n}A$

Sujet 4-208 (CCP)

Exercice 1 :

$u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$

Déterminer le domaine de définition de la série $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$

Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition et calculer $S'(1)$

Calculer $S(1)$

Exercice 2 :

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum u_n^2$ converge.

Montrer que que l'application $((u_n), (v_n)) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_nv_n$ définit un produit scalaire sur E.

Déterminer l'orthogonal du sous espace F des suites nulles à partir d'un certain rang.

Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires, et que $(F^\perp)^\perp \neq F$

SOLUTION :

Exercice 1 :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ est défini si et seulement si $1 + \dfrac{x}{n} > 0$

Le domaine de définition de u_n est $\Delta_n =]-n, +\infty[$.

$u_n(x)$ est défini pour tout n si et seulement si $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Delta_n =]-1, +\infty[$

Quand $u \to 0$, $\ln(1 + u) - u = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) - u = -\dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \sim -\dfrac{u^2}{2}$

donc, pour tout $x \in]-1, +\infty[-\{0\}$, $|u_n(x)| \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$

La série $\sum u_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout $x \in]-1, +\infty[$ (le cas $x = 0$ est immédiat)

Le domaine de définition de la fonction somme S est donc l'intervalle $]-1, +\infty[$.

• Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x \in]-1, +\infty[$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}\right) - \dfrac{1}{n}$

$u_n'(x) = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{x}{n(n+x)}$

Soient a et b réels quelconques tels que $-1 < a < 0 < 1 < b$

alors, $\forall x \in [a,b], |x| \leq b,\ 0 < n+a \leq n+x$ et $0 < \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n+a}$

donc $\forall x \in [a,b], |u'_n(x)| \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$

donc $\|u'_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u'_n(x)| \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$, ce qui montre la convergence normale de la série des normes $\sum \|u'_n\|_\infty$ puisque $\dfrac{b}{n(n+a)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$

Ainsi, - La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,+\infty[$,

- chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$,

- La série des fonctions dérivées $\sum u'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle $]-1,+\infty[$,

On en déduit par le théorème de dérivation des séries de fonctions que la fonction somme S est C^1 sur tout segment $[a,b] \subset]-1,+\infty[$ et que $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'n(x)$

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, S est dérivable en tout point de segment $]-1,+\infty[$ et : $\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ S'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(n+x)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}\right)}$

- $S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$

or $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=2}^{p+1}\dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p+1} - 1$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\boxed{S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = -1}$

- $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right]$

or $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{p}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\ln\dfrac{n+1}{n} - \dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{n}\right)$

$$= \ln(p+1) - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$$

rappelons que $\sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n} = \ln p + \gamma + \varepsilon_p$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

donc $\sum\limits_{n=1}^{p}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = \ln(p+1) - (\ln p + \gamma + \varepsilon_p) = \ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right) - \gamma - \varepsilon_p$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\boxed{S(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = -\gamma}$

Exercice 2 :

a) • Soient (a_n) et (b_n) deux suites de E.

Pour tout n, $(|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n|.|b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n|.|b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

alors $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n$ est le terme général d'une série convergente et la suite $(a_n) + (b_n)$ apprtient aussi à E. E est par ailleurs clairement stable par multiplication par un scalaire. C'est donc un sous espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

• Soient (a_n) et (b_n) deux suites de E. La série $\sum a_n b_n$ converge comme montré ci-dessus et

$\phi((a_n),(b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ est donc bien défini.

L'application ϕ est bilinéaire et symétrique sur E (immédiat)

Soit $(u_n) \in l^2$, non nulle : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} \neq 0$

alors $\phi((u_n),(u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \geq u_{n_0}^2 > 0$

Donc ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , c'est à dire un produit scalaire.

• Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $\Delta_j = (\delta_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont tous les termes sont nuls, sauf celui d'indice j.

Chaque Δ_j appartient à F, espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

Soit $u = (u_n) \in F^{\perp}$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\Phi(u,\Delta_j) = u_j = 0$. u est donc la suite nulle et $\boxed{F^{\perp} = \{0\}}$

Donc $F + F^{\perp} = F \neq E$ (la suite constante 1 est dans E mais pas dans F)

$\boxed{(F^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E \neq F}$

Sujet 5-211 (CCP)

Exercice 1 : Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonaliser f avec un minimmum de calculs.

Rechercher les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

SOLUTION :

Exercice 1 : Remarquons que $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1.

On en conclut que 1 est valeur propre de f, et que le sous espace propre associé, $\ker(f - I_d)$, est le plan d'quation $x + 2y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. 1 est valeur propre au moins double. Reste à trouver une troisième valeur propre λ. (qui peut être encore 1 à priori)

Or la somme des valeurs propres est égale à la trace de f. Donc $1 + 1 + \lambda = 2 + 3 + 2 = 7$ et $\lambda = 5$.

Donc $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 5\}$ (1 étént valeur propre double)

E_f^1 est le plan d'équation $x + 2y + z = 0$

E_f^5 est une droite.

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3, f est diagonalisable.

• $\{0\}$ est l'unique sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 stable par f.

• Un sous espace de dimension 1 (une droite) est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Ce sera donc soit la droite E_f^5 elle même, soit toute droite incluse dans le plan E_f^1.

• Soit F un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (un plan) stable par f. Soit alors $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur F.

f étant diagonalisable admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (par exemple le polynôme $\prod_{\lambda\in Sp(f)} (X - \lambda) = (X - 1)(X - 5) = Q(X)$)

Ce polynôme $Q(X)$ est un polynôme annulateur de $\widetilde{f}$ aussi, qui est donc lui aussi diagonalisable.

F admet alors une base (w_1, w_2) formée de vecteurs propres de $\widetilde{f}$ et w_1 et w_2 sont nécessiarement des vecterurs propres de f.

- si w_1 et w_2 sont dans le plan E_f^1, alors $F = \text{Vect}(w_1, w_2) = E_f^1$
- si w_1 et w_2 sont l'un dans E_f^1 et l'autre dans E_f^5, alors $F = \text{Vect}(w_1, w_2)$ est un plan quelconque contenant la droite E_f^5.

Finalement, outre les cas triviaux de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}^3$, les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont :
- la droite E_f^5 et toute droite incluse dans le plan E_f^1.
- le plan E_f^1 et tout plan quelconque contenant la droite E_f^5.

Sujet 6-195 (CCP)

Exercice 1 :

On considère l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{1+\cos^2 x}\, dx$

a) Calculer J_1

b) Montrer que pour tout n, $J_{2n} = 0$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

(indication : on pourra utiliser la fonction 2π-périodique impaire coïncidant sur $]0, \pi[$ avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$)

Exercice 2 :

On considère l'ensemble $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 2y^2 \leq 8\}$ et la fonction f définie sur Δ par:

$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + x^2$

a) Montrer que f possède des extrema sur Δ et qu'elle les atteint.

b) Montrer que f possède un unique extremum sur l'intérieur de Δ et le calculer.

c) Déterminer tous les extrema atteints sur Δ

SOLUTION :

Exercice 1 :

a) Calculer J_1

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\int_0^{\pi} (\text{Arctan}(\cos x))'\, dx = -\left[\text{Arctan}(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$J_1 = -\text{Arctan}(-1) + \text{Arctan}(1) = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $J_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin n(\pi - u)}{1+\cos^2(\pi - u)}\, du$ par le chgmnt de variable $u = \pi - x$

$$J_{2n} = \int_0^{\pi} \frac{-\sin nu}{1+\cos^2 u} du = -J_{2n} \text{ donc } J_{2n} = 0$$

c) Considérons la fonction f, 2π-périodique impaire et telle que $\forall x \in]0, \pi[, f(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{paire}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{1+\cos^2 t} dt = \frac{2}{\pi} J_n$$

La restriction de f à l'ouvert $]0, \pi[$ est prolongeable au segment $[0, \pi]$ en la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ qui est de classe C^1. Par imparité, il en va de même pour la restriction de f à l'ouvert $]-\pi, 0[$. f est donc de classe C^1 par morceaux sur le segment $[-\pi, \pi]$ et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Par contre f n'est pas continue au point 0 car $f(0)=0$ (fonction impaire) ,

et $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right) = \dfrac{1}{2}$

On peut appliquer la version "faible" du théorème de Dirichlet et affirmer que la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in\mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^+} f\right)$

f étant continue au point $\dfrac{\pi}{2}$, en appliquant cette égalité au point $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient : $S_f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

soit encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$

et puisque $b_{2n} = \dfrac{2}{\pi}J_{2n} = 0$, il ne reste que les termes impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}(f)\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}(-1)^p = 1$$

ce qui donne finalement en multipliant par $\dfrac{\pi}{2}$: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 :

a)L'ensemble $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+2y^2\le 8\}$ est compact car c'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continue sur ce compact. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

b) L'intérieur de l'ellipse $\overset{\circ}{\Delta}$ est un ensemble ouvert.

La fonction f est de calsse

$\forall (x,y)\in\overset{\circ}{\Delta},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} + 2x = x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}+2\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}+2\right) = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = 0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$$

Donc f admet un seul point critique sur $\overset{\circ}{\Delta}$, le point $(0,0)$. C'est le seul point de $\overset{\circ}{\Delta}$ qui peut être un extremum local de f.

On remarque d'ailleurs que c'est bien un minimum local et même global puisque

$\forall (x,y)\in\Delta, f(x,y)\ge 0 = f(0,0)$.

c) Il reste à rechercher les extrema éventueels situés sur la frontière de Δ, c'est à dire sur l'ellipse d'équation $x^2+2y^2=8$

Paramétrons l'ellipse $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ par l'application $t\mapsto M(t) = (2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t),\ t\in[0,2\pi]$

$\forall t\in[0,2\pi],\ f(M(t)) = \sqrt{8\cos^2 t+4\sin^2 t+1}+8\cos^2 t = \sqrt{4\cos^2 t+5}+8\cos^2 t$

$\dfrac{d[f(M(t))]}{dt} = \dfrac{-4\sin t\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t+5}} - 16\sin t\cos t = -2\sin(2t)\left(\dfrac{1}{\sqrt{4\cos^2 t+5}}+4\right)$

$\dfrac{d[f(M(t))]}{dt} = 0 \iff \sin(2t)=0 \iff 2t = 0\,[\pi] \iff t = 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\iff t\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\} \iff M\in\left\{(2\sqrt{2},0),(0,2),(-2\sqrt{2},0),(0,-2)\right\}$

$f(2\sqrt{2},0) = f(-2\sqrt{2},0) = 11,\ f(0,2) = f(0,-2) = \sqrt{5}$

Le maximum global de f sur la frontière de Δ est obtenu aux points $(2\sqrt{2},0)$ et $(-2\sqrt{2},0)$ et vaut 11.

D'après l'étude b), c'est aussi le maximum de f sur Δ.

Finalement, $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ atteint son minimum sur } \Delta \text{ au points } (0,0) \text{ et ce minimun vaut } 0. \\ f \text{ atteint son maximum sur } \Delta \text{ aux points } (2\sqrt{2},0) \text{ et } (-2\sqrt{2},0) \text{ et ce maximun vaut } 11. \end{array}}$

Sujet 7 (ENSEA)

a) On considère un espace vectoriel réel E de dimension n et un endomrphisme $f \in L(E)$, nilpotent d'ordre n : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

Montrer qu'il existe un vecteur v de E tel que $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ soit une base de E.

Ecrire la matrice de f dans cette base.

b) Montrer que pour tout p compris entre 1 et $n-1$, $\dim(\ker(f^p)) = p$

c) Rechercher le commutant de f, c'est à dire $C(f) = \{g \in L(E), f_o g = g_o f\}$

SOLUTION :

a) Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$

Montrons que la famille $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$

En composant par f^{n-1} et tenant compte de ce que $f^n = 0$, on obtient

$$\lambda_0 \underbrace{f^{n-1}(v)}_{\neq 0} + \lambda_1 \underbrace{f^n(v)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{f^{n+1}(v)}_{=0} + ... + \lambda_{n-1} \underbrace{f^{2n-2}(v)}_{=0} = 0$$

donc $\lambda_0 = 0$ puisque $f^{n-1}(v) \neq 0$

En repartant de l'égalité $\lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$ et en composant cette fois par f^{n-2}, on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(v) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$

En réïtérant le procédé, on obtient successivement $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, ... $\lambda_n = 0$, ce qui montre bien que le système $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre.

Puisque c'est un système libre de n vecteurs dans un espace de dimension n, c'est une base de E.

La matrice de f dans la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(v) & f^2(v) & ... & f^{n-1}(v) & f^n(v) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v \\ f(v) \\ f^2(v) \\ \vdots \\ f^{n-1}(v) \end{array} \end{array}$$

b) Puisque $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est une base de E, un système générateur de $\mathrm{Im}(f)$ est l'image de cette base, c'est à dire $(f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ (puisque $f^n(v) = 0$)

or $(f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ est libre comme système extrait d'un système libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(f) = n-1$ et par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 1$

Par une récurrence sans difficulté, on montre de même que pour tout p compris entre 1 et $n-1$, $(f^p(v), f^{p+2}(v), ..., f^{n-1}(v))$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f^p)$.

Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(f^p) = n-p$ et par le théorème du rang, $\dim(\ker(f^p)) = p$

Remarque : On peut montrer aussi que $(f^{n-p}(v), f^{n-p+1}(v), ..., f^{n-1}(v))$ est une base de $\ker(f^p)$.

c) Soit $g \in L(E)$ tel que $g_o f = f_o g$

alors $g_o f^2 = (g_o f)_o f = (f_o g)_o f = f_o (g_o f) = f_o (f_o g) = f_o^2 g$

et par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_o f^k = f^k{}_o g$

• $g(v) \in E$ donc se décompose sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ de E :

$\exists (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v)$

Montrons alors que $g = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + ... + a_{n-1} f^{n-1}$

Il suffit pour cela de vérifier que les endomorphismes g et $a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}$ coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$.

On a déja $g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v)$

alors $g(f(v)) = f(g(v)) = f(a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v))$

$= a_0 f(v) + a_1 f^2(v) + a_2 f^3(v) + ... + a_{n-1} f^n(v) = (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f(v))$

puis $g(f^2(v)) = f^2(g(v)) = f^2(a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v))$

$= a_0 f^2(v) + a_1 f^3(v) + a_2 f^4(v) + ... + a_{n-1} f^{n+1}(v)$

$= (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f^2(v))$

en réïtérant le calcul, on montre par une récurrence sans difficulté que

$\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(v)) = (a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1})(f^k(v))$

Les endomorphismes g et $a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}$ sont donc égaux puisqu'ils coïncident sur la base $(v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v))$ de E.

Donc $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ g = P(f)$

Par ailleurs il est clair que tout polynôme en f commute avec f.

Donc $\boxed{\text{le commutant de } f \text{ est } C(f) = \mathbb{R}_{n-1}[f] = \text{Vect}(Id_E, f, f^2, f^3, ..., f^{n-1})}$

C'est un sous espace vectoriel de $L(E)$ de dimension n.

Sujet 8 (CCP)

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x^2}$

a) Domaine de définition et de continuité de la fonction f ?

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) Calculer la limite et un équivalent de f en $+\infty$

d)* Même question en 0 (question rajoutée)

Exercice 2 :

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = (2X+1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$

Déterminer les valeus propres de u.

SOLUTION :

Exercice 1 :

a1) Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x^2 + n}$

- si $x \neq 0, u_n(x) \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$

La série $\displaystyle\sum_n u_n(x)$ est convergente par équivalence à une série de Riemann.

- si $x = 0, u_n(x) \sim \frac{1}{n}$ et la série $\displaystyle\sum_n u_n(x)$ est divergente

Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}^*$

a2) Par parité, on peut limiter le domaine d'étude de f à $]0, +\infty[$.

Soit $a > 0$. $\forall x \in [a, +\infty[, |u_n(x)| \leq \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2}$

donc $\| u_n \|_{[a,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{n^2}$ et la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Chaque fonction u_n étant continue sur $[a, +\infty[$, la somme f l'est aussi.

Si x_0 est un réel quelconque > 0, il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a, +\infty[$.

f est continue en tout point x_0 de $\mathbf{R}_+^*$ et par parité est donc continue sur $\mathbf{R}^*$.

b) Chaque fonction $u_n :\ x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x^2 + n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et

$$u_n'(x) = \frac{-2n^2x}{(n^2x^2+n)^2} = \frac{-2x}{(nx^2+1)^2}$$

Soient a et b quelconques tels que $0 < a < b$.

$$\forall x \in [a,b],\ |u_n'(x)| \leq \frac{2b}{(na^2+1)^2} \leq \frac{2b}{a^4}.\frac{1}{n^2}$$

donc $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| \leq \frac{2b}{a^4}.\frac{1}{n^2}$ et la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que la fonctions somme f est de classe C^1 sut tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et donc aussi sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Enfin, par parité, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2}$

Posons $v_n(x) = \frac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2}$

- $\| v_n \|_{[1,+\infty[}^{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement et uniformément sur $[1,+\infty[$.

- $\forall n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}$

- d'après le théorème de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{x\to+\infty} v_n(x))$

c'est à dire $\lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Finalement, $\boxed{f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x^2} \text{ quand } x \to +\infty}$

d) Soit $x > 0$ et la fonction g définie par : $\forall t > 0, g(t) = \frac{1}{t+x^2t^2}$.

g est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\forall t \in [k,k+1], g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$.

Intégrons cette inégalité :

$g(k+1) = \int_k^{k+1} g(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq \int_k^{k+1} g(k)dt = g(k)$

Sommons (fumé) pour k variant de 1 à p, puis passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:

$\sum_{k=1}^{\infty} g(k+1) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+x^2k^2} = f(x)$

donc $f(x) - g(1) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x)$

qui donne finalement l'encadrement :

$\int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt + g(1)$

Or $g(1) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t+x^2t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{1+x^2t-x^2t}{t(1+x^2t)}dt$

$\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+x^2t} \right) dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+x^2t} \right) \right]_{t=1}^{t\to+\infty}$

$= \ln\left(\frac{1}{x^2} \right) - \ln\left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \ln(1+x^2) - 2\ln(x)$

d'où

$$\ln(1+x^2) - 2\ln(x) \leq f(x) \leq \ln(1+x^2) - 2\ln(x) + \frac{1}{1+x^2}$$

Quand $x \to 0$, chacun des membres encadrants est équivalent à $-2\ln(x)$ donc, finalement :

$\boxed{f(x) \sim -2\ln(x) \text{ quand } x \to 0^+}$

Exercice 2 :

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $u(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$

Déterminer les valeus propres de u.

Sujet 9 (CENTRALE)

Exercice 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire, 2π-périodique et telle que $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = x$.

1- A l'aide de MAPLE représenter le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2- Représenter ensuite la fonction $x \mapsto f(x) + f(x+\pi)$
Quelles conséquences peut on en tirer pour la fonction f ?

3- Calculer la série de Fourier $S_f(x)$.

4- Avec MAPLE, représeneter les 10 premières composantes de $S_f(x)$.

5- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Exercice 2 :

SOLUTION :

Exercice 1 :

1- **>restart; PP:=evalf(Pi);**
f:= x -> if (0 <= x and x<= PP) then x elif (-PP <= x and x<= 0) then -x elif x >= PP then f(x-2*PP) elif x <= -PP then f(x+2*PP) fi;

Remarque : Si on se contente d'écrire des tests booléens du type " **if (0 <= x and x<= Pi)**", MAPLE retourne souvent le message d'erreur suivant : ***Error, (in f) cannot evaluate boolean***

C'est pourquoi il est préférable de demander à MAPLE de comparer des <u>décimaux flottants</u> avec l'instruction : **PP:=evalf(Pi);**

Tracé de la courbe :
>plot(f,-3*PP..3*PP, scaling = constrained);

2 - **g:=x->f(x)+f(x+PP) ;**
plot(g,-10..10,scaling = constrained);

Conséquences : en premier lieu, tous les coefficients $b_n(f)$ sont nuls, puisque la fonction f est paire.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - f(t+\pi))\cos(nt)dt$

$$a_n(f) = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)dt}_{=0\ si\ n\neq 0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\pi)\cos(nt)dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu - n\pi)du$$

(par le changement de variable $u = t + \pi$)

$\Rightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = (-1)^{n+1}a_n(f)$

$\Rightarrow\quad (1+(-1)^n)a_n(f) = 0$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n}(f) = 0.}$

3- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

on retrouve bien que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n}(f) = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1}(f) = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}$

enfin, $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t dt = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi^2}{2} = \pi$

La série de Fourier de f est donc $\boxed{S_f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}}$

5- La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, on peut affirmer que la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa somme est égale à f.

En particulier en 0, on obtient : $S_f(0) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = f(0) = 0$

d'où l'on tire : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$

La formule de Parseval-Bessel donne : $\dfrac{|a_0(f)|^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(f)|^2 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt$

soit ici : $\dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \dfrac{2\pi^2}{3}$

d'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{\pi^2}{16}\left(\dfrac{2\pi^2}{3} - \dfrac{\pi^2}{2}\right) = \dfrac{\pi^4}{96}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} = \left(1 - \frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

d'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{16}{15}\times\dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}}$

Sujet 10 (Très classique CENTRALE-CCP-TPE)

Exercice 1 : a et b étant deux nombres complexes, on définit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b & ... & b \\ b & a & b & ... & b \\ b & b & a & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & b & ... & b & a \end{pmatrix}$

1- Calculer le déterminant de la matrice M.

A quelle condition est elle inversible ?

Calculer alors son inverse .

2- M est elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 2 :

SOLUTION :

1- En ajoutant toutes les colonnes à la première, on obtient :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & ... & b \\ a+(n-1)b & a & b & ... & b \\ a+(n-1)b & b & a & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & ... & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & ... & b \\ 1 & a & b & ... & b \\ 1 & b & a & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ 1 & b & ... & b & a \end{vmatrix}$$

puis par l'opération $C_j \leftarrow C_j - bC_1$, pour$j = 2..n$:

$$\det(M) = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1} \text{ puisque}$$

la dernière matrice est triangulaire.

$$\boxed{\det(M) = (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1}}$$

La matrice M est inversible si et seulement si $a+(n-1)b \neq 0$ et $a \neq b$

• Notons J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1, et I_n la matrice unité. Notons que $J^2 = nJ$

alors $M = bJ + (a-b)I_n$

$\implies \quad M^2 = b^2 nJ + 2b(a-b)J + (a-b)^2 I_n = (bn + 2(a-b))bJ + (a-b)^2 I_n$

$\implies \quad M^2 = (bn+2a-2b)(M-(a-b)I_n) + (a-b)^2 I_n$

$\implies \quad M^2 = (bn+2a-2b)M - (a-b)(bn+2a-2b-a+b)I_n$

$\implies \quad M^2 - (bn+2a-2b)M = (b-a)(bn+a-b)I_n$

dans le cas où M est inversible, on a vu que $a+(n-1)b \neq 0$ et $a-b \neq 0$. On peut alors diviser par le produit $(b-a)(bn+a-b)I_n$ qui n'est pas nul :

$\implies \quad M\dfrac{(M-(bn+2a-2b)I_n)}{(b-a)(bn+a-b)} = I_n$

ce qui montre que $M^{-1} = \dfrac{M-(bn+2a-2b)I_n}{(b-a)(bn+a-b)}$

2 - La relation $M^2 - (bn+2a-2b)M = (b-a)(bn+a-b)I_n$ montre que le polynôme

$Q(X) = X^2 - (bn+2a-2b)X + (a-b)(bn+a-b)$ est un polynôme annulateur de M.

or $Q(X) = (X-(a-b))(X-(a-b+bn))$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines, $z_1 = a-b$ et $z_2 = a-b+bn$ sont distinctes, sauf dans le cas où $b=0$ mais alors la matrice M est déja diagonale.

M est donc diagonalisable dans tous les cas.

Ses valeurs propres sont parmi les racines du polynôme annulateur :

$\mathrm{Sp}(M) \subset \{a-b, a-b+bn\}$

Le calcul du déterminant de la question précédente, dans lequel on remplace a par $a-x$ donne alors :

$\det(M - xI_n) = \chi_M(x) = (a-x+(n-1)b)(a-b-x)^{n-1}$

donc $\chi_M(X) = (-1)^n(X-a-b+nb)(X-a+b)^{n-1}$ et $\mathrm{Sp}(M) = \{a-b, a-b+bn\}$

• Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

$$M.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (M-(a-b)I_n)X = 0$$

$\iff \quad bJ.X = 0 \quad \iff \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$

Donc le sous-espace propre asocié à la valeur propre $(a-b)$ est l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ donné par l'équation : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$

Par ailleurs $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (a+(n-1)b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui montre que le sous-espace propre asocié à la valeur propre $a+(n-1)b$ est la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sujet 11 (CENTRALE)

Exercice 1 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1.

Montrer que l'ensembles des racines complexes de P' est inclus dans l'enveloppe convexe des racines de P. (ie le plus petit sous ensemble convexe de $\mathbb{C}$ qui contient les racines de P)

Indication : considérer $\dfrac{P'}{P}$

Exercice 2 : Soit P un polynôme à coefficients réels, scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que P' est également scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

SOLUTION :

1- P, polynôme complexe de degré ≥ 1, est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - z_i)^{m_i}$

($z_1, z_2, ..., z_p$ sont les racines de P et $m_1, m_2, ..., m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs)

On notera $A_1, A_2, ..., A_p$ les images de $z_1, z_2, ..., z_p$ dans le plan complexe.

$$\Longrightarrow \quad P'(X) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \left(m_i (X - z_i)^{m_i - 1} \prod_{k \neq i} (X - z_k)^{m_k} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{X - z_i}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P' et M son point image dans le plan complexe : $P'(z) = 0$

- si z est racine de P, alors z est l'une des z_i et appartient bien à l'enveloppe convexe des racines de P.

- sinon, tous les $z - z_i$ sont non nuls et alors, $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{z - z_i} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{\overline{z} - \overline{z_i}} = 0 \qquad \text{(en prenant la conjugué, } m_i \text{ est entier)}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} m_i \frac{z - z_i}{(\overline{z} - \overline{z_i})(z - z_i)} = 0$$

$z - z_i$ est la mesure complexe du vecteur $\overrightarrow{A_i M}$ et $(\overline{z} - \overline{z_i})(z - z_i) = |z - z_i|^2$ est le carré de sa norme. Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \frac{\overrightarrow{A_i M}}{A_i M^2} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{A_i M^2} \overrightarrow{A_i M} = 0$

Cette égalité montre que M est barycentre des points $A_1, A_2, ..., A_p$ affectés de coefficients positifs, donc appartient à l'enveloppe convexe de ces points.

Remarque : l'enveloppe convexe des points $A_1, A_2, ..., A_p$ est le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$ qui contient tous ces points. On montre que l'ensemble des barycentres des points $A_1, A_2, ..., A_p$ affectés de coefficients ≥ 0 est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$, qui contient $A_1, A_2, ..., A_p$, et que c'est le plus petit au sens de l'inclusion.

Exercice 2 : Soit P un polynôme à coefficients réels, scindé dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i}$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $m_i \in \mathbb{N}$.

Ordonnons les a_i par ordre croissant : $a_1 < a_2 < ... < a_p$

D'après le théorème de Rolle, puisque la fonction polynôme P est continue et dérivable sur chaque segment $[a_1, a_{i+1}]$, que $P(a_1) = P(a_{i+1}) = 0$, on peut affirmer qu'il existe $b_i \in]a_1, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$.

Ceci donne $p-1$ racines pour $P'(X)$: $b_1 < b_2 < ... < b_{p-1}$

Mais, pour chaque indice i pour lequel $m_i > 1$, a_i est racine multiple de P d'ordre m_i. Elle est donc aussi racine du polynôme dérivé P' d'ordre $m_i - 1$

Cela fournit $(m_1-1)+(m_2-1)+...+(m_p-1) = (m_1+m_2+...+m_p)-p = n-p$ racines supplémentaires de $P'(X)$.

On a donc trouvé $(p-1)+(n-p) = n-1$ racines réelles de $P'(X)$. Or $P'(X)$ est de degré $n-1$. Il est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Sujet 12 (CENTRALE)

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé du plan euclidien on considère la courbe Γ d'équation:

$$2x^2 - 72xy + 23y^2 + 60x - 80y + 48 = 0$$

Reconnaitre la courbe Γ, préciser ses éléments géométriques fondamentaux puis la tracer.

Exercice 2 : On considère des réels $a_1, a_2, .., a_n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & ... & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{pmatrix}$

1 - Calculer $\det(A)$. En déduire à quelle(s) condition(s) A est inversible.

2 - Lorsque la condition précédente est satisfaite, calculerA^{-1} .

SOLUTION :

1 - Soit q le forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par la formule :

$$q(x,y) = 2x^2 - 72xy + 23y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -36 \\ -36 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La réduction de la matrice A (avec ou sans MAPLE, il n'y a pas de difficultés) donne :

$\mathrm{Sp}(A) = \{-25, 50\}$ $\quad E^A_{-25} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E^A_{50} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

La matrice A est diagonalisable (dès le départ elle est réelle symétrique) suivant l'égalité :

$$A = P.\Delta.P^{-1} \text{ où } \Delta = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le repère initial, définissons $w_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base (w_1, w_2) est alors la matrice orthogonale $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ qui est une matrice orthogonale directe ($\det(P) = +1$)

La base (w_1, w_2) est donc une base orthonormale directe.

Le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'w_1 + y'w_2$ a pour vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base (w_1, w_2)

La formule de changement de base pour des vecteurs non dit que $X = P.X'$

d'où $q(x,y) = {}^tX.A.X = {}^t(P.X').A.(P.X') = {}^tX'\,{}^tP.A.P.X' = {}^tX'\,{}^tP.(P.\Delta.P^{-1}).P.X' = {}^tX'.\Delta.X'$

$$q(x,y) = (x', y')\begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -25x'^2 + 50y'^2$$

Par ailleurs , $X = P.X' \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x' - 3y'}{5} \\ y = \dfrac{3x' + 4y'}{5} \end{cases}$$

Le point $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ appartient à Γ si et seulement si $q(x, y) + 60x - 80y + 48 = 0$

$$\iff -25x'^2 + 50y'^2 + 60\frac{4x' - 3y'}{5} - 80\frac{3x' + 4y'}{5} + 48 = 0$$
$$\iff -25x'^2 + 50y'^2 + 48x' - 36y' - 48x' - 64y' + 48 = 0$$
$$\iff -25x'^2 + 50y'^2 - 100y' + 48 = 0$$
$$\iff -25x'^2 + 50\left(y'^2 - 2y'\right) + 48 = 0$$
$$\iff -25x'^2 + 50\left[(y' - 1)^2 - 1\right] + 48 = 0$$
$$\iff -25x'^2 + 50\left(y' - 1\right)^2 = 2$$
$$\iff -\frac{x'^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} + \frac{(y' - 1)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 1$$

Prenons la point Ω de coordonnées $(0, 1)$ dans le repère (O, w_1, w_2). Alors l'équation de Γ dans le repère (Ω, w_1, w_2) est : $\quad -\dfrac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} + \dfrac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 1$

Γ est une hyperbole, d'axe focal (Ωy), de sommets $S(\frac{1}{5}, 0)$ et $S'(\frac{1}{5}, 0)$ dans le repère (Ω, w_1, w_2)

Les deux assymptotes on pour équation globale dans ce repère $-\dfrac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} + \dfrac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 0$

soit $x'' + y''\sqrt{2} = 0$ et $x'' - y''\sqrt{2} = 0$

• Tracé :

>with(plots):
implicitplot(2*x*x-72*x*y+60*x+23*y*y-80*y+48, x=-3..1, y=-2..3) ;

****

Exercice 2 : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & ... & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ a_1 - a_2 & 0 & 0 & ... & 0 & a_2 \\ a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & 0 & ... & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & a_{n-1} \\ a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & ... & a_{n-1} - a_n & a_n \end{vmatrix}$

(par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3, ..., C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$)

En développant par rapport à la première ligne,

$$\det(A) = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & 0 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & ... & a_{n-1} - a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\boxed{\det(A) = (-1)^{n+1} a_1 (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)...(a_{n-1} - a_n)}$$

$$\boxed{A \text{ est inversible } \iff \begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_1 \neq a_2 \\ a_2 \neq a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \neq a_n \end{cases}}$$

2 - Les conditions de la question 1 étant vérifiées, on peut calculer A^{-1} en concaténant les

matrices A et I_n en la matrice $(A|I_n) \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$ et par des opérations élémentaires sur les lignes, la transformer en une matrice du type $(I_n|B)$

On sait qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice A équivaut à la multiplier à gauche par une matrice inversible $Q_1 \in GL_n(\mathbb{C})$: A devient Q_1A.

Si on effectue p opérations élementaires, au terme du processus, la matrice A est devenue $Q_pQ_{p-1}...Q_3Q_2Q_1A = I_n$.

Puisqu'on a effectué les mêmes opérations sur la matrice I_n (c'est dans ce but qu'on l'a écrite à droite de A), la matrice I_n est devenue $Q_pQ_{p-1}...Q_3Q_2Q_1I_n = B$

De ce deux égalités, on déduit que $A^{-1} = Q_pQ_{p-1}...Q_3Q_2Q_1 = B$

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_2 & a_2 & ... & a_2 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_3 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right) \text{ on effectue } \left\{\begin{array}{l} L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2} \\ .... \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & ... & a_2-a_1 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-a_2 & a_3-a_2 & ... & a_3-a_2 & 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1}-a_{n-2} & a_{n-1}-a_{n-2} & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_n-a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Puisque les conditions $\{a_1 \neq 0,\ a_1 \neq a_2,\ a_2 \neq a_3,\ ...,\ a_{n-1} \neq a_n\}$ sont remplies, on peut procéder aux opérations suivantes : $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{a_1}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a_2-a_1}L_2 \\ .... \\ L_{n-1} \leftarrow \frac{1}{a_{n-1}-a_{n-2}}L_{n-1} \\ L_n \leftarrow \frac{1}{a_n-a_{n-1}}L_n \end{array}\right.$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & \frac{-1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & \frac{-1}{a_3-a_2} & \frac{1}{a_3-a_2} & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & \frac{-1}{a_{n-1}-a_{n-2}} & \frac{1}{a_{n-1}-a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{-1}{a_n-a_{n-1}} & \frac{1}{a_n-a_{n-1}} \end{array}\right)$$

On effectue enfin les opérations : $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ .... \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n \end{array}\right.$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{c|cccccc} & \frac{1}{a_1} - \frac{-1}{a_2-a_1} & \frac{-1}{a_2-a_1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ & \frac{-1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1} - \frac{-1}{a_3-a_2} & \frac{-1}{a_3-a_2} & ... & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{-1}{a_3-a_2} & \frac{1}{a_3-a_2} - \frac{-1}{a_4-a_3} & ... & 0 & 0 \\ I_n & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & ... & \frac{-1}{a_{n-1}-a_{n-2}} & \frac{1}{a_{n-1}-a_{n-2}} - \frac{1}{a_n-a_{n-1}} & -\frac{1}{a_n-a_{n-1}} \\ & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{-1}{a_n-a_{n-1}} & \frac{1}{a_n-a_{n-1}} \end{array}\right)$$

Finalement,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}-\frac{-1}{a_2-a_1} & \frac{-1}{a_2-a_1} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{-1}{a_2-a_1} & \frac{1}{a_2-a_1}-\frac{-1}{a_3-a_2} & \frac{-1}{a_3-a_2} & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{a_3-a_2} & \frac{1}{a_3-a_2}-\frac{-1}{a_4-a_3} & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{a_{n-1}-a_{n-2}} & \left(\frac{1}{a_{n-1}-a_{n-2}}-\frac{1}{a_n-a_{n-1}}\right) & -\frac{1}{a_n-a_{n-1}}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{a_n-a_{n-1}} & \frac{1}{a_n-a_{n-1}}\end{pmatrix}$$

Sujet 13 (CENTRALE)

Exercice 1 : Soit λ un réel positif ou nul et (E) l'équation différentielle : $xy'+\lambda y+xy^2=\lambda$

1 - Soit $g\ :\ x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière solution de (E) sur un intervalle $]-r,r[,\ (r>0)$

Etablir une relation de récurrence que doivent vérifier les coefficients a_n

Résoudre l'équation dans le cas où $\lambda=0$

Déterminer a_n dans le cas général.

Aves MAPLE, calculer les 10 premiers termes lorque $\lambda=1$.

2 - Montrer que $g(x)\overset{x\to1^-}{=}O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

Exercice 2 :

SOLUTION :

1 - $\forall x\in]-r,r[,\ g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et d'après le théorème de dérivation terme à terrme des séries entières, $\forall x\in]-r,r[,\ g'(x)=\displaystyle\sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

g est solution de (E) sur l'intervalle $]-r,r[\ \Rightarrow\ \forall x\in]-r,r[,\ xg'(x)+\lambda g(x)+x^2g(x)=\lambda$

$$\Longrightarrow \forall x\in]-r,r[,\ \sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2=\lambda$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ étant absolument convergente pour tout $x\in]-r,r[$, le produit de Cauchy de cette série par elle-même est la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où les coefficients c_n sont définis par : $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$

$$\text{donc } \forall x\in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+\lambda)a_n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^{n+1}=\lambda$$

$$\Longrightarrow \forall x\in]-r,r[,\ \lambda a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1+\lambda)a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^{n+1}=\lambda$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on en déduit :

$$\begin{cases}\lambda a_0=\lambda\\ \forall n\geq 0,\ (n+1+\lambda)a_{n+1}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=0\end{cases}$$

• Premier cas : si $\lambda=0$

alors a_0 est quelconque et $\forall n \geq 0,\ a_{n+1} = -\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}}{n+1}$, ce qui donne :

$$a_1 = -a_0^2, \quad a_2 = -\frac{2a_0a_1}{2} = a_0^3, \quad a_3 = -\frac{a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0}{3} = -a_0^4$$

et si jusqu'au rang n, $a_k = (-1)^k a_0^{k+1}$, alors $a_{n+1} = -\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}}{n+1}$

$$a_{n+1} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_0^{k+1}(-1)^{n-k}a_0^{n-k+1}}{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)a_0^{n+2}}{n+1} = (-1)^{n+1}a_0^{n+2}$$

ce qui montre par récurrence que $\forall n \geq 1, a_n = (-1)^n a_0^{n+1}$

alors $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_0^{n+1}x^n = a_0 - a_0^2 x\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_0x)^n = a_0 - \frac{a_0^2x}{1+a_0x} = \frac{a_0}{1+a_0x}$

Réciproquement, la fonction $h:\ x \mapsto \dfrac{a}{1+ax}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à $\dfrac{1}{|a|}$, et vérifie $h'(x) = \dfrac{-a^2}{(1+ax)^2}$ donc est solution de l'équation (E) qui se résume à $y' + y^2 = 0$ lorsque $\lambda = 0$.

• Deuxième cas : si $\lambda > 0$

alors l'identification des coefficients de l'égalité (1) donne :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 0,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1+\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) \end{cases}$$

Cette formule de récurrence permet de calculer les termes pas à pas.

```
>a[0]:=1;
lambda:=1;for k from 0 to 9 do a[k+1]:=-simplify(add(a[i]*a[k-i],i=0..k))/(k+1+lambda)
od;
```

MAPLE calcule les 10 premiers coefficients, et en particulier

$a_{10} = \dfrac{249045899}{14370048000}$

2 - Montrons par récurrence que $|a_n| \leq 1$.

C'est vrai au rang 0 puisque $a_0 = 1$.

Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang n.

Alors $|a_{n+1}| = \left|\dfrac{1}{n+1+\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)\right| \leq \dfrac{1}{n+1+\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\underbrace{|a_k a_{n-k}|}_{\leq 1} \leq \dfrac{n+1}{n+1+\lambda} \leq 1$

On a ainsi prouvé par récurrence que pour tout n, $|a_n| \leq 1$.

Il s'ensuit que pour tout $x \in]-1,1[$, $|a_nx^n| \leq ||x^n|$ et puisque que la série $\sum x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$, par majoration, il en est de même de la série $\sum a_nx^n$. Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1.

De plus, $\forall x \in]0,1[$, $|g(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$, ce qui prouve bien que

$$\boxed{g(x) \overset{x\to 1}{=} O\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

Sujet 14-169 (ENSAM)

Exercice 1 : A l'aide de MAPLE, trouver les réels a, b, c tels que la matrice $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit celle d'une rotation et en donner les caractéristiques.

Exercice 2 :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2} dt$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calculer $f(0), f(1), f'(x)$ et la limite de f en $+\infty$.

SOLUTION :

Exercice 1 :

R est une matrice de rotation si et seulement si R est orthogonale et $\det(R) = 1$

Les deux premières colonnes de la matrice sont unitaires et orthogonales entre elles.

La troisième colonne est orthogonale aux deux premières si et seulement si $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=c \\ b=-2c \end{cases}$

La troisième colonne est unitaire $\iff a^2+b^2+c^2=1 \iff 6c^2=1 \iff c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Il existe deux matrices R orthogonales :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

>with(linalg):

R:=matrix(3,3,[1/sqrt(3),1/sqrt(2),-1/sqrt(6),1/sqrt(3),0,2/sqrt(6),1/sqrt(3),-1/sqrt(2),-1/sqrt(6)]);

det(R);radnormal(");

Ainsi, $\det(R_1) = -1$ et $\det(R_2) = 1$ donc seule $R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation.

L'axe de la rotation r associée représentée par la matrice R est l'ensemble des vecteurs invariants, c'est à dire le noyau de $r - Id$

>kernel(R-1);

L'axe de la rotation est dirigé par le vecteur $w = [3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6},\ 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6},\ 1]$

Dans une base orthonormée directe (u, v, w) , la matrice de r est $R' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\text{tr}(R) = \text{tr}(R') = 2\cos\theta + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ et $\cos\theta = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - 1}{2}$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}$$

Reste à trouver le signe de θ :

On prend un vecteur u orthogonal à w (par exemple $u = [0, -1, 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}]$:

>u:=vector([0,-1,sqrt(2)*sqrt(3)+sqrt(3)+sqrt(2)+2]); dotprod(u,w);

(l'instruction **dotprod(u,w)** permet de contrôler l'orthogonalité entre u et w)

Puis on prend $v = w \wedge u$ de façon à ce que la base (u, v, w) soit orthognale directe. (Il est inutile de normer les vecteurs dans le cas présent, ce qui compliquerait inutilement les calculs)

> v:=crossprod(w,u);

Enfin, le signe de $\sin\theta$ sera donné par celui de la composante de $r(u)$ sur le vecteur v :

>ru:=multiply(R,u); dotprod(ru,v); evalf(");

-748.5522575

On en déduit que $\sin\theta < 0$ et donc $\theta = -\text{Arc}\cos\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}\right)$

En conclusion,

La matrice $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation.
l'axe de cette rotation est dirigé par le vecteur $w \left\vert \begin{array}{c} 3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \\ 1 \end{array}\right.$
l'angle de cette rotation a pour mesure $\theta = -\text{Arc}\cos\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}\right)$

Exercice 2 :

• - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}$ est continue et intégrable (voir domination) sur $[0,+\infty[$

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ cette dernière fonction de la variable t seule étant continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on en conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

• De plus, en notant $H(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}$,

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$

- Pour tout $a>0$, pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$, cette dernière fonction de la variable t seule étant continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} \leq \dfrac{t}{a^2t^4} = \dfrac{1}{a^2t^3}$,

Par application du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, on en conclut que la fonction f est C^1 sur $[a,+\infty[$ et que $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt$

a étant un réel positif quelconque, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt}$

• $f(0) = 0$

$f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[(\text{Arctan}(t))^2\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$

• $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\times\dfrac{t}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{x^2-1}\times\dfrac{t}{1+x^2t^2}$

(cette décomposition en éléments simples peut être obtenue à l'aide de MAPLE :

>convert(t/(1+t*t)/(1+x*x*t*t),parfrac,t);)

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-t}{1+t^2} + \frac{tx^2}{1+x^2t^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{2(x^2-1)}\ln x^2 = \frac{\ln x}{x^2-1}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}}$

• Posons $g_n(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(nt)}{1+t^2}$

- Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- La suite de fonctions (g_n) converge simplemnt sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $g\ :\ t\ \mapsto$ $\dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,+\infty[,\ |g_n(t)| \leq \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$, cette dernière fonction de la variable t seule étant continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = \int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$

Enfin, par encadrement (si $n = E(x)$, alors $f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$), on en conclut que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}}$$

Sujet 15-171 (ENSAM)

Exercice 1 : Avec MAPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} b & a & b & a & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ a & b & a & b & a & b \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, est elle diagonalisable ?

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 :

Calculer une primitive de la fonction $g\ :\ x\ \mapsto\ \dfrac{1}{x}(x^3+1)^{1/4}$

SOLUTION :

Exercice 1 : Si a et b sont réels, la matrice A est symétrtique réelle, donc diagonalisable.

Mais cet argument ne peut pas être employé pour une matrice complexe.

Recherchons les éléments propres avec MAPLE :

>with(linalg):

A:=matrix(6,6,[a,b,a,b,a,b,b,a,b,a,b,a,a,b,a,b,a,b,b,a,b,a,b,a,a,b,a,b,a,b,b,a,b,a,b,a]);

eigenvals(A); $\quad 0,0,0,0,3a+3b,3a-3b$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3a+3b, 3a-3b\}$, 0 étant valeur propre d'ordre 4.

>eigenvects(A);

$[3a+3b, 1, \{[1,1,1,1,1,1]\}], [3a-3b, 1, \{[1,-1,1,-1,1,-1]\}],$
$[0, 4, \{[-1,0,0,0,1,0], [-1,0,1,0,0,0], [0,-1,0,0,0,1], [0,-1,0,1,0,0]\}]$

Dans le cas général où les trois valeurs propres $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 3a+3b, \lambda_2 = 3a-3b$ sont distinctes, la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 6 et A est diagonalisable.

- Si $b = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 3a$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3a\}$

Dans ce cas $A = a\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$. Or la matrice $\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$ est symétrique rélle donc diagonalisable dans $M_6(\mathbb{R})$, donc aussi dans $M_6(\mathbb{C})$ et A est diagonalsiable dans $M_6(\mathbb{C})$.

- Si $a = b$, alors $\lambda_2 = \lambda_0$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 6a\}$ mais le sous espace associé à la valeur propre nulle d'ordre 5 est l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 6 et A est là aussi diagonalisable.

- Si $a = -b$, alors $\lambda_1 = \lambda_0$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 6a\}$ mais le sous espace associé à la valeur propre nulle d'ordre 5 est l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0$. La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 6 et A est encore diagonalisable.

Dans tous les cas, A est diagonalisable.

- Calculons A^n à l'aide d'un polynôme annulateur :

>charpoly(A,x); factor(");

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^4(X - 3a + 3b)(X - 3a - 3b)$

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la division de X^n par χ_A s'écrit :

$$X^n = \chi_A(X)Q(X) + \alpha X^5 + \beta X^4 + \gamma X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \nu$$

- en remplaçant X par 0, on obtient $\nu = 0$

0 est racine de χ_A d'ordre 4, donc est aussi racine des polynômes dérivés χ'_A, χ''_A et χ'''_A

- en dérivant une première fois, on obtient l'égalité :

$$nX^{n-1} = \chi'_A(X)Q(X) + \chi_A(X)Q'(X) + 5\alpha X^4 + 4\beta X^3 + 3\gamma X^2 + 2\lambda X + \mu$$

qui donne $\mu = 0$ en remplaçant X par 0.

- en dérivant une deuxième et une troisième fois on obtient de même : $\lambda = \gamma = 0$

donc $X^n = \chi_A(X)Q(X) + \alpha X^5 + \beta X^4$

Notons $z_1 = 3a + 3b$ et $z_2 = 3a - 3b$

- à nouveau, en remplaçant X par z_1 puis par z_2, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} z_1^{n-4} = \alpha z_1 + \beta \\ z_2^{n-4} = \alpha z_2 + \beta \end{array}\right.$

par différence, $\alpha(z_1 - z_2) = z_1^{n-4} - z_2^{n-4}$ et $\alpha = \dfrac{z_1^{n-4} - z_2^{n-4}}{z_1 - z_2} = \dfrac{z_1^{n-4} - z_2^{n-4}}{6b}$

de même, $\left\{\begin{array}{l} z_1^{n-4} z_2 = \alpha z_1 z_2 + \beta z_2 \\ z_1 z_2^{n-4} = \alpha z_1 z_2 + \beta z_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \beta(z_2 - z_1) = z_1 z_2 (z_1^{n-3} - z_2^{n-3})$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{z_1 z_2 (z_1^{n-3} - z_2^{n-3})}{z_2 - z_1} = \frac{9(a^2 - b^2)(z_2^{n-3} - z_1^{n-3})}{6b}$$

Finalement, $X^n = \chi_A(X)Q(X) + \dfrac{z_1^{n-4} - z_2^{n-4}}{6b} X^5 + \dfrac{3(a^2 - b^2)(z_2^{n-3} - z_1^{n-3})}{2b} X^4$

puisque $\chi_A(A) = 0$ (th. de Cayley-Hamilton), $A^n = \dfrac{z_1^{n-4} - z_2^{n-4}}{6b} A^5 + \dfrac{3(a^2 - b^2)(z_2^{n-3} - z_1^{n-3})}{2b} A^4$

Exercice 2 :

$g \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt[4]{x^3 + 1}$ est définie sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$

Soit $a \in I_k$.

$$G(x) = \int \frac{1}{x}\sqrt[4]{x^3 + 1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\sqrt[4]{x^3 + 1}}{x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt[4]{u + 1}}{u}du$$

(par le changement de variable $u = x^3$)

On esr ramené à une intégrale abélienne ; on effectue le changement de variable

$v = \sqrt[4]{u + 1}, \quad u = v^4 - 1, \quad du = 4v^3 dv$

$$G(x) = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt[4]{u + 1}}{u}du = \frac{1}{3}\int \frac{v}{v^4 - 1}4v^3 dv = \frac{4}{3}\int \frac{v^4 - 1 + 1}{v^4 - 1}dv = \frac{4}{3}\int \left(1 + \frac{1}{v^4 - 1}\right)dv$$

$$\frac{1}{v^4-1}=\frac{1}{(v^2-1)(v^2+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2-1}-\frac{1}{v^2+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)-\frac{1}{v^2+1}\right]$$
$$=\frac{1}{4(v-1)}-\frac{1}{4(v+1)}-\frac{1}{2(v^2+1)}$$
$$G(x)=\frac{1}{3}\int\left(4+\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}-\frac{2}{v^2+1}\right)dv=\frac{4v}{3}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|-\frac{2}{3}\text{Arctan } v$$
$$\boxed{G(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3+1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^3+1}-1}{\sqrt[4]{x^3+1}+1}\right|-\frac{2}{3}\text{Arctan }(\sqrt[4]{x^3+1})+cte}$$

Sujet 16-170 (ENSAM)

Exercice 1 : Avec MAPLE :

Diagonaliser ou trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}3&7&7\\3&-5&5\\3&-5&5\end{pmatrix}$

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 2 :

Calculer le rayon de convergence de la série $\sum\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$

Exprimer sa somme f à l'aide des fonctions usuelles et étudier le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

SOLUTION :

Exercice 1 :

• Réduction de A :

>with(linalg):

A:=matrix(3,3,[3,7,-7,3,-5,5,3,-5,5]); eigenvects(A);

$$A=\begin{bmatrix}3&7&7\\3&-5&5\\3&-5&5\end{bmatrix}$$
$[3,1,\{[1,1,1]\}],[0,2,\{[0,1,1]\}]$

0 est valeur propre double, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

On peut en obtenir une réduite de Jordan. Aller voir pour cela dans l'aide en ligne :

"> **jordan ?**"

>J := jordan(M, 'P'); print(P);

$$J:=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$
$$P:=\begin{bmatrix}0&\frac{7}{3}&-4\\12&4&-4\\12&5&-4\end{bmatrix}$$

alors $A=P.J.P^{-1}$

• Recherche du commutant de A :

$C(A)=\{M\in M_n(K)/AM=MA\}$ est une sous espace vectoriel de $M_n(K)$ (pas de difficulté)

Soit $M\in M_n(K)$. $M\in C(A)\iff AM=MA$

$M\in C(A)\iff P.J.P^{-1}M=MP.J.P^{-1}$

$\iff J.P^{-1}M.P=P^{-1}MP.J$

$\iff P^{-1}M.P\in C(J)$

Notons $N = P^{-1}M.P - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

$$N \in C(J) \iff J.N = N.J \iff \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 3a_3 \\ 0 & b_1 & 3b_3 \\ 0 & c_1 & 3c_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = 3a_3 \\ b_1 = 0 \\ 3b_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ 3c_2 = c_1 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = 0 \\ a_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \iff N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

Revenons à la matrice M :

$$M \in C(A) \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in K,\ M = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in K,\ M = P \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in K,\ M = \alpha P(E_{1,1} + E_{2,2})P^{-1} + \beta P E_{1,2} P^{-1} + \gamma P E_{3,3} P^{-1}$$

$C(A) = \mathrm{Vect}(P(E_{1,1} + E_{2,2})P^{-1},\ PE_{1,2}P^{-1},\ PE_{3,3}P^{-1})$

C'est un sous espace de $M_3(K)$ de dimension 3.

On peut remarquer aussi que $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2)}$ car ce dernier sous-espace est inclus dans $C(A)$ et de même dimension.

$((I_n, A, A^2)$ est libre car $(I_n, J, J^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ l'est)

Exercice 2 :

Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$ est $R = 1$ (immédiat par le critère de d'Alembert)

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

D'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$$

En dérivant à nouveau,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f''(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{-x}{1+x^2} + \frac{f'(x)}{x}$$

Donc f' est solution sur l'intervalle $]-1,1[$ de l'équation différentielle (E) :

$$xy' - y = \frac{-x^2}{1+x^2}$$

La solution générale de l'équation homogène associée $(E_0) : xy' - y = 0$ est : $y = \lambda\, x$

On recherche une solution paticulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante, c'est à dire de la forme : $y(x) = \lambda(x)\, x$

alors $y'(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x)$

y est solution de (E) si et seulement si ,

$$\forall x \in]-1,1[,\ x(\lambda'(x)\, x + \lambda(x)) - \lambda(x)\, x = \frac{-x^2}{1+x^2}$$

$$\iff \forall x \in]-1,1[,\ \lambda'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{d'où } \lambda(x) = -\mathrm{Arctan}\, x$$

La solution générale de l'équation (E) est donc : $y(x) = \mu\, x - x\text{Arctan}\, x$

Puisque $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1} = -x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$, on a :

$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = -x\text{Arctan}\, x$

En intégrant par parties, on obtient :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 - \int_0^x t\text{Arctan}\, t.dt = \left[-\frac{t^2}{2}\text{Arctan}\, t\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2}\text{Arctan}\, x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

et finalement, $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -\frac{x^2}{2}\text{Arctan}\, x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x}$

et $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}$

Sujet 17 (ENSEA)

Exercice 1 : Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ (ENSEA)

Etudier :

- le domaine de définition de f
- les variations de f
- les limites aux bornes.

Exercice 2 : (de tête)

A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

SOLUTION :

Exercice 1 : a) La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

- si $x \in]0,1[$, alors $0 < x^2 < x < 1$, $[x^2, x] \subset]0,1[$, la fonction g est continue et donc intégrable sur le segment $[x^2, x]$ et $f(x)$ est défini.

- si $x \in]1,+\infty[$, alors $1 < x < x^2$, $[x, x^2] \subset]0,+\infty[$, la fonction g est continue et donc intégrable sur le segment $[x, x^2]$ et $f(x)$ est défini.

- si $x < 0$, alors g n'est pas définie sur l'intervalle $][x, 0][$ et $f(x)$ n'est pas défini.

- enfin, $f(0)$ et $(f1)$ n'ont pas de sens car g n'est définie ni en 0 ni en 1.

Donc le dommaine de définition de la fonction f est $\boxed{D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[}$

b) La fonction g est continue sur chaque intervalle $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Elle admet donc une primitive sur chacun de ces intervalles, qu'on notera G dans les deux cas :

$$\forall t \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ G'(t) = g(t) = \frac{1}{\ln(t)}$$

d'après l'étude faite en a), selon laquelle $[x^2, x] \subset]0,1[$ si $x \in]0,1[$ et $[x, x^2] \subset]0,+\infty[$ si $x \in]1,+\infty[$, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f(x) = G(x^2) - G(x)$

G étant C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, par composition f l'est aussi, et

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Puisque sur $]0,1[, (x-1)$ et $\ln x$ sont négatifs, que sur $]1,+\infty[, (x-1)$ et $\ln x$ sont positifs, on peut alors dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

c) • $\forall x \in]0, e^{-1}], \forall t \in [x^2, x],\ 0 < x^2 \leq t \leq x < e^{-1}$ donc $2\ln x \leq \ln t \leq \ln x < -1$

$\Longrightarrow \dfrac{-1}{2\ln x} \leq \dfrac{-1}{\ln t} \leq \dfrac{-1}{\ln x}$, ce qui donne en intégrant entre x^2 et x :

$$\frac{x^2 - x}{2\ln x} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{\ln t} dt \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Quand $x \longrightarrow 0^+, x^2 - x \longrightarrow 0$ et $\ln x \longrightarrow +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x}{\ln x} = 0$, ce qui montre par encadrement que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$

• Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{1}{\ln(1+u)} du = \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{1}{u + u\varepsilon(u)} du \text{ avec } \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$$

$$f(x) = \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{1}{u(1+\varepsilon(u))} du = \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{1}{u}(1+\varepsilon_2(u)) du \text{ avec } \lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

$$f(x) = [\ln u]_{x-1}^{(x-1)^2} + \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{\varepsilon_2(u)}{u} du = \ln(x+1) + \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{\varepsilon_2(u)}{u} du \qquad (1)$$

$\ln(x+1) \longrightarrow \ln 2$ quand $x \longrightarrow 1^+$

$$\left| \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{\varepsilon_2(u)}{u} du \right| \leq \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{|\varepsilon_2(u)|}{u} du \leq \left(\sup_{u \in [(x-1),(x-1)^2]} |\varepsilon_2(u)| \right) . \int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{du}{u} = \Big(\sup_{[(x-1),(x-1)^2]} |\varepsilon_2| \Big). \ln 2$$

or, puisque $\displaystyle\lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$, quand $x \longrightarrow 1^+$, $\displaystyle\sup_{[(x-1),(x-1)^2]} |\varepsilon_2| \longrightarrow 0$

et par majoration, $\displaystyle\int_{x-1}^{(x-1)^2} \frac{\varepsilon_2(u)}{u} du \longrightarrow 0$

d'après l'égalité (1), on conclut que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2}$

Un calcul analogue montrerait le même résultat à gauche. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2}$

Exercice 2 : $\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 2-x & a & c \\ 0 & 1-x & b \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)^2$

2 est valeur propre simple et 1 est valeur propre double.

Dans tous les cas $\dim(E_2^A) = 1$ car 2 est valeur propre simple.

A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1^A) = 2$ car 1 est valeur propre double.

Or $\dim(E_1^A) = 3 - \mathrm{rg}(A - 1.I_3)$ et $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 si $b = 0$ et de rang 2 sinon (regarder les lignes)

Finalement, $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b = 0}$

Sujet 18 (ENSIIE)

Cours : Continuité des apllications linéaires en dimension finie

Exercice : Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f^2 + f = 0$ et qui ne possède pas de polynôme annulateur de degré inférieur à 3.

Soit A la matrice de f dans la base canonique.

1. A est elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?

2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f^2 + f + I)$

   Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + f + I)$

4. Montrer que $\forall x \in \ker(f^2+f+I),\ x \neq 0,\ (x, f(x))$ est une famille libre.

5. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

1. • Le polynôme $Q(X) = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ est un polynôme annulateur de f et donc aussi de A.

   Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, j, j^2\}$

   Si A était diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$, sa seule valeur propre réelle possible étant 0, elle serait semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc serait nulle. Mais alors le polynôme X serait un polynôme annulateur de A de degré 1, ce qui est exclu par hypothèse.

   Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}).}$

   • Le polynôme $Q(X) = X(X-j)(X-j^2)$ est un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et à racine simple. $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C}).}$

2. Si f était inversible (c.a.d. de rang 3), alors en composant par f^{-1}, on aurait $f^2+f+I=0$ et le polynôme de degré 2, X^2+X+1, serait un polynôme annulateur de f. Donc $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.

   Donc 0 est valeur propre de f.

   D'après la première question, A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, donc semblable à l'une des matrices $\mathrm{diag}(0,0,j)$, $\mathrm{diag}(0,0,j^2)$, $\mathrm{diag}(0,j,j^2)$, $\mathrm{diag}(0,j,j)$, $\mathrm{diag}(0,j^2,j^2)$. Or A étant réelle, sa trace l'est aussi. De toutes les matrice précédentes, seule $\mathrm{diag}(0,j,j^2)$ a une trace réelle. Donc A est sempblable dans $M_3(\mathbb{C})$ à $\mathrm{diag}(0,j,j^2)$ et son rang est 2. Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$

   De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, j, j^2\}$

3. • $\forall x \in \mathrm{Im}(f), \exists t \in \mathbb{R}^3, x = f(t)$. Alors $(f^2+f+I)(x) = (f^3+f^2+f)(t) = 0$ et $x \in \ker(f^2+f+I)$

   Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f^2+f+I)$

   • Soit $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2+f+I)$. Alors $f(x) = 0$ et $(f^2+f+I)(x) = 0 = \underbrace{f(f(x))}_{=0} + \underbrace{f(x)}_{=0} + x$

   Donc $x = 0$ et $\ker(f) \cap \ker(f^2+f+I) = \{0\}$

   La somme $\ker(f) + \ker(f^2+f+I)$ est directe, et est un sous espace de $\mathbb{R}^3$.

   Par ailleurs, $\dim(\ker(f)) = 1$ (th. du rang) et $\dim(\ker(f^2+f+I) \geq 2$ car $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f^2+f+I)$

   Mais $\dim(\ker(f^2+f+I)) < 3$ sinon, $f^2+f+I=0$ et X^2+X+1 serait un polynôme annulateur de f de degré 2. Donc $\dim(\ker(f^2+f+I)) = 2$

   Il s'ensuit que $\dim(\ker(f) \oplus \ker(f^2+f+I)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f^2+f+I)) = 1+2 = 3$

   L'inclusion $\ker(f) \oplus \ker(f^2+f+I) \subset \mathbb{R}^3$ et l'égalité des dimensions permet alors d'affirmer que $\boxed{\ker(f) \oplus \ker(f^2+f+I) = \mathbb{R}^3}$

4. Soit $x \in \ker(f^2+f+I)$, non nul.

   Considérons λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$

   alors $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0 = \lambda f(x) + \mu(-f(x)-x) = (\lambda-\mu)f(x) - \mu x$

   Ajoutons l'égalité $\lambda x + \mu f(x) = 0$ multipliée par $\mu - \lambda$

   et l'égalité $-\mu x + (\lambda-\mu)f(x) = 0$ multipliée par μ

   On obtient : $(\lambda(\mu-\lambda)-\mu^2)x = 0$, soit, puisque x est non nul, $\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu = 0$

   $\Longrightarrow (\lambda - \frac{\mu}{2})^2 + \frac{\mu^2}{4} = 0 \quad \Longrightarrow (\lambda - \frac{\mu}{2}) = \frac{\mu}{2} = 0$ (car λ et μ sont réels)

   $\Longrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$

   Donc la famile $(x, f(x))$ est une famille libre.

5. • Soit $x \in \ker(f^2+f+I)$, non nul. Alors $(f^2+f+I)(x) = 0$, donc $(f^3+f^2+f)(x) = 0$, donc

   $(f^2+f+I)[f(x)] = 0$ et $f(x) \in \ker(f^2+f+I)$

   $(x, f(x)))$ est un système libre de $\ker(f^2+f+I)$, qui est de dimension 2 d'après la question 3. $(x, f(x)))$ est donc une base de $\ker(f^2+f+I)$.

   • Soit y un vecteur non nul de $\ker(f)$. Il constitue à lui seul une base de $\ker(f)$ qui est de dimension 1.

   Et puisque $\ker(f) \oplus \ker(f^2+f+I) = \mathbb{R}^3$, $(y, x, f(x)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Les relations $f(y) = 0, f(x) = f(x), f(f(x)) = -x - f(x)$ permettent de voir que la matrice de f dans la base $(y, x, f(x)$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   $$\boxed{A \text{ est donc semblable à la matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Sujet 19 (Centrale Supelec)

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

A toute permutation σ de $[[1,n]] = \{1,2,...,n\}$, on associe l'endomorphisme f_σ de E défini par : pour tout i, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$

1. Montrer que l'application qui à σ associe f_σ est un morphisme injectif du groupe S_n dans le groupe $GL_n(E)$.
2. Montrer que $p = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur orthogonal et préciser son image.
3. Montrer que si $x \in \ker p - \{0\}$ alors la famille $(f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n}$ engendre $\ker p$

SOLUTION :

1. Pour tout $\sigma \in S_n$, l'application f_σ transforme la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ en une base orthonormée $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)})$. f_σ est donc un automorphisme orthogonal de E.

   Soient s et $\sigma \in S_n$.

   Pour tout i, $f_\sigma \, o \, f_s(e_i) = f_\sigma(f_s(e_i)) = f_\sigma(e_{s(i)}) = e_{\sigma(s(i))} = e_{\sigma o s(i))} = f_{\sigma o s}(e_i)$

   donc $f_\sigma \, o \, f_s = f_{\sigma o s}$

Si on note Φ l'application qui à σ associe l'endomorphisme f_σ, on a ainsi montré que pour tous $s, \sigma \in S_n$, $\Phi(\sigma)_o\Phi(s) = \Phi(\sigma_o s)$, c'est à dire que Φ est un morphisme du groupe (S_n, o) dans le groupe $(O_n(\mathbb{R}), o)$

2. • $p\,_o p = \left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right)_o \left(\frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} f_s\right) = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{s\in S_n} f_\sigma\ _o\ f_s\right)$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{s\in S_n} f_{\sigma_o s}\right)$$

Or, pour tout $\sigma \in S_n$ fixé, l'application $s \mapsto \sigma_o s$ est une bijection de S_n dans lui-même (dont la réciproque est $s \mapsto \sigma_o^{-1}s$). Donc, quand s décrit S_n, $\sigma_o s$ décrit également S_n

d'où $p_o p = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{s'\in S_n} f_{s'}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{s'\in S_n} f_{s'}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} p = \frac{1}{n!}(n!p) = p$ (puisque $\mathrm{Card}(S_n) = n!$)

On a ainsi montré que p est un projecteur.

• Pour tous $(i,j) \in [[1,n]]$, $< p(e_i), e_j >= \frac{1}{n!} < \sum_{s\in S_n} f_s(e_i), e_j >= \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} < e_{s(i)}, e_j >$

Or, la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ étant orthonormée, $< e_{s(i)}, e_j >= \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } s(i) = j \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right\} = \delta_{s(i),j}$

d'où $< p(e_i), e_j >= \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n}\delta_{s(i),j} = \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n}\delta_{i,s^{-1}(j)}$ (car $s(i) = j \Leftrightarrow i = s^{-1}(j)$)

$$< p(e_i), e_j >= \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} < e_i, e_{s^{-1}(j)} >= \frac{1}{n!}\sum_{s'\in S_n} < e_i, e_{s'(j)} >$$

(quand s décrit S_n, $s' = s^{-1}$ le décrit aussi)

$$< p(e_i), e_j >=< e_i, \frac{1}{n!}\sum_{s'\in S_n} e_{s'(j)} >=< e_i, \frac{1}{n!}\sum_{s'\in S_n} f_{s'}(e_j) >=< e_i, p(e_j) >=< p^*(e_i), e_j >$$

Donc pour tout$j$, $< p(e_i), e_j >=< p^*(e_i), e_j >$, les vecteurs $p(e_i)$ et $p^*(e_i)$ ont les mêmes composantes dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ils sont donc égaux. Donc $p^* = p$.

Enfin, puisque $p^* = p = p^{-1}$, $\boxed{p \text{ est un preojecteur orthogonal de l'espace euclidien } E.}$

• Pour tout $i, p(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} f_s(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{s\in S_n} e_{s(i)}$

Pour i fixé, quand s décrit S_n, $s(i)$ prend chacune des valeurs $1, 2, ...n$, $(n-1)!$ fois.

donc $p(e_i) = \frac{1}{n!}(n-1)!(e_1 + e_2 + ... + e_n) = \frac{e_1 + e_2 + ... + e_n}{n}$

Les images des vecteurs de base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ sont toutes égales à $\frac{e_1 + e_2 + ... + e_n}{n}$

Donc $\boxed{\text{l'image de } p \text{ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur } v = e_1 + e_2 + ... + e_n}$

Remarque : $\ker p$ est le sous espace supplémentaire orthogonal à cette droite, c'est à dire l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

3. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \ker(p)$. Alors $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ et $\exists i, x_i \neq 0$

Puisque l'un des x_i est non nul et que $\sum x_k = 0$, il existe un deuxième indice j tel que $x_j \neq 0$ et $x_i \neq x_j$ pour la même raison.

Les $n-1$ vecteurs $w2 = e_1 - e_2, w3 = e_1 - e_3, ..., wn = e_1 - e_n$ de $\ker p$ sont linéairement indépendants (immédiat) et forment donc une base $\ker p$ (puisque $\dim(\ker p) = n-1$).

Pour montrer que la famille $(f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n}$ engendre $\ker p$, il suffit de montrer qu'elle engendre chacun des vecteurs $w_2, w_3, ..., w_n$.

• $x = x_i e_i + x_j e_j + \sum_{k \neq i,j} x_k e_k$

Soit τ la transposition $\tau_{i,j}$. $f_\tau(x) = x_i \tau(e_i) + x_j \tau(e_j) + \sum_{k \neq i,j} x_k \tau(e_k)$

$$= x_i e_{\tau(i)} + x_j e_{\tau(j)} + \sum_{k \neq i,j} x_k e_{\tau(k)} = x_i e_j + x_j e_i + \sum_{k \neq i,j} x_k e_k$$

$\Longrightarrow f_I(x) - f_\tau(x) = x - f_\tau(x) = (x_i - x_j)e_i + (x_j - x_i)e_j = (x_i - x_j)(e_i - e_j)$

donc $e_i - e_j = \dfrac{1}{x_i - x_j}(f_I(x) - f_\tau(x)) \in \text{Vect}((f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n})$

• Puisque $f_\sigma \circ f_s = f_{\sigma_o s}$, $\text{Vect}((f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n})$ est stable par tout endomporphisme f_σ.

En prenant pour τ la transposition $\tau_{1,i}$,

$f_\tau(e_i - e_j) = e_{\tau(i)} - e_{\tau(j)} = e_1 - e_j \in \text{Vect}((f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n})$

Enfin, pour $k = 2, 3, .., n$, en prenant pour τ la transposition $\tau_{k,j}$,

$f_\tau(e_1 - e_j) = e_{\tau(1)} - e_{\tau(j)} = e_1 - e_k \in \text{Vect}((f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n})$

Donc les $n-1$ vecteurs $w_2, w_3, ..., w_n$ qui forment une base de $\ker p$ appartiennent à $\text{Vect}((f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n})$, ce qui montre que la famille $(f_\sigma(x))_{\sigma \in S_n}$ engendre $\ker p$.

Sujet 20-133 (CENTRALE)

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) + e^{-ix} y(x) = 0$

1- Montrer qu'une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $2\pi-$périodique si et seulement si :

$f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$

2- Soit f une telle solution. On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

Trouver une relation de récurrence entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$

En déduitre que (E) admet une solution $2\pi-$périodique non nulle.

3- Donner le développement en série de Fourier de la fonction $t \mapsto \exp(x\, e^{it})$ et interpréter la solution à l'aide de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \exp\left(2\cos(t)\, e^{-i\frac{x}{2}}\right) dt$

SOLUTION :

1- Si f est une solution de (E) $2\pi-$périodique, alors $f(0) = f(2\pi)$ et puisque f' est elle aussi $2\pi-$périodique, $f'(0) = f'(2\pi)$.

• Réciproquement, soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$

Considérons la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x + 2\pi)$

alors $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$

et on vérifie que g est également solution de (E) (calcul sans difficulté)

L'équation (E) est du second ordre, linéaire, et le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz aux solutions définies sur $\mathbb{R}$: f et g sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient les mêmes conditions initiales au point 0 :

$g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$

Elles sont donc égales : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$ et la fonction f est $2\pi-$périodique.

2- Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ $2\pi-$périodique.

Ses coefficients de Fourier sont alors définie. De plus, f est (au moins) de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{in}dt = \frac{1}{in}c_n(f')$$

donc, $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f') = inc_n(f)$ et cette égalité est encore valable pour $n=0$ ($c_0(f')=0$ car f est $2\pi-$périodique)

En appliquant ce résultat à f', on obtient : $c_n(f'') = inc_n(f') = (in)^2c_n(f) = -n^2c_n(f)$

Par ailleurs,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-it}e^{-i(n-1)t}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-i(n-1)t}dt$$

(car $f''(x) + e^{-ix}f(x) = 0$)

donc, $c_n(f) = -c_{n-1}(f'') = (n-1)^2c_{n-1}(f)$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = (n-1)^2c_{n-1}(f)$

soit aussi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n+1}(f) = n^2c_n(f)}$

- Pour $n=0$, on obtient alors $c_1 = 0$

Pour $n=1$, la relation $1^2c_1(f) = c_2(f)$ donne $c_2 = 0$.

Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0$

- Pour $n=-1$, on obtient $(-1)^2c_{-1} = c_0$ donc $c_{-1} = c_0$

puis $c_{-2} = \dfrac{c_{-1}}{2^2} = \dfrac{c_0}{2^2}$, $c_{-3} = \dfrac{c_{-2}}{3^2} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2}$, $c_{-4} = \dfrac{c_{-3}}{4^2} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2}$

et de manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{-n} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2.....n^2} = \dfrac{c_0}{(n!)^2}$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 0 \text{ et } c_{-n} = \dfrac{c_0}{(n!)^2}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}$

Réciproquement, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}$ cvge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $\left|\dfrac{e^{-inx}}{(n!)^2}\right| = \dfrac{1}{(n!)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

En conclusion, $\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe des solutions de } (E) \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ et } 2\pi\text{-périodiques non nulles ;}\\ \text{elles sont de la forme } x \mapsto \lambda\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}\end{array}}$

3- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)^n}{n!}$

(série exponentielle complexe convergente sur $\mathbb{C}$)

$$\exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}$$

Pour tout x, la fonction $t \mapsto \exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right)dt$

Pour tout x fixé, la majoration $\left|\dfrac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right| \leq \dfrac{2^n}{n!}$ montre que la série de fonctions de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,\pi]$.

On peut alors écrire : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}dt\right)$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}dt\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\int_0^{\pi}\cos^n(t)dt$

• Reste à calculer $w_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n(t)dt$, intégrale resemblant aux intégrales de Wallis ($\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt)$

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^{n-1}(t)\cos t dt=\underbrace{\left[\cos^{n-1}(t)\sin t\right]_0^{\pi}}_{=0}+(n-1)\int_0^{\pi}\cos^{n-2}t\,\sin^2 t dt$

$$w_n=(n-1)\int_0^{\pi}\cos^{n-2}t\,(1-\cos^2 t)dt=(n-1)(w_{n-2}-w_n)$$

$$\Longrightarrow\quad w_n=\frac{n-1}{n}w_{n-2}$$

Pour $n=2p$ pair, $w_0=\displaystyle\int_0^{\pi}dt=\pi$

$$w_2=\frac{1}{2}w_0=\frac{1}{2}\pi$$

$$w_4=\frac{3}{4}w_2=\frac{1.3}{2.4}\pi$$

..... $w_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p}w_{2p-2}=\dfrac{1.3....(2p-1)}{2.4.....2p}\pi$

et en multipliant haut et bas par $2.4.6...2p$, on obtient : $\boxed{w_{2p}=\dfrac{(2p)!}{(2^p\,p!)^2}}$

Pour n impair, $w_1=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos t\ dt=[\sin t]_0^{\pi}=0$ et par une récurrence immédiate, $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},w_{2p+1}=0}$

• d'où $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\int_0^{\pi}\cos^n(t)dt=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p}\,e^{-i\frac{2px}{2}}}{(2p)!}w_{2p}$

(seuls les indices pairs ont une contribution non nulle)

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p}\,e^{-ipx}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{(2^p\,p!)^2}\pi=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{e^{-ipx}}{(p!)^2}$$

En comparant au résultat obtenu dans la question 2, on en conclut que les solutions périodiques de l'équation (E) sont les fonctions de la forme : $\boxed{y(x)=\dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)dt}$

Sujet 21-135 (CENTRALE avec MAPLE)

On définit une suite par la donnée de son premier terme $u_0\in\mathbb{R}$ et par la relation récurrence

$$u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2-u_n}$$

1- Représenter la fonction associée à (u_n). La suite peut elle converger ?

2- Calculer les 30 premières valeurs pour différentes valeurs de u_0. Expliquer comment choisir astucieusement u_0 (?????)

Conjecturer le comportement de la suite puis prouver cette conjecture.

SOLUTION :

1- Si tous les termes de la suite (u_n) sont définis, alors pour tout $n,u_n\neq 2$. Si de plus elle converge vers un réel l, alors $l=\lim(u_n)=\lim u_{n+1}=\dfrac{l+1}{2-l}$ donc $l(2-l)=l+1\Rightarrow l^2-l+1=0$

Or le polynôme $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle ($\Delta = -3 < 0$)
Donc aucun réel ne vérifie la relation $l^2 - l + 1 = 0$ et la suite (u_n) ne peut pas converger.
$\boxed{\text{Dans tous les cas, la suite } (u_n) \text{ est divergente}}$

- La suite (u_n) vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{2-x}$

>f:=x->(x+1)/(2-x);
plot(f,x->x,-8..10,-10..10);
Le tracé du graphe de la fonction f et de la fonction $x \mapsto x$ montre par ailleurs qu'il n'existe pas de réel tel que $f(x) = x$ car les deux courbes ne se coupent pas.

2- **>u[0]:=80/53;**
n:=30; for k from 0 to n do u[k+1]:=(u[k]+1)/(2-u[k]); od;
L'algorithme qui précède permet de calculer les 30 premiers termes de la suite en fonction d'une valeur donnée de u_0. Il permet de constater que la suite (u_n) est périodique de période 6. En changeant la valeur initiale u_0, on constate toujours le même phénomène.
Puisque pour tout $n, u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n,\ u_{n+6} = f^6(u_n) = f(f(f(f(f(f(u_n))))))$. Pour montrer que $u_{n+6} = u_n$, il sufit de vérifier que $f_o f_o f_o f_o f_o f = Id$
La calcul "à la main" de $f_o f_o f_o f_o f_o f(x)$ étant fastidieux, on utilisera MAPLE :
(f@f@f@f@f@f)(x); simplify(%);
ou aussi :
f(f(f(f(f(f(x)))))); simplify(%);
On a ainsi vérifié que $f^6 = Id$. La suite (u_n) est donc périodique, de période 6.

Sujet 22-128 (CENTRALE avec MAPLE)

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3).

1- Soient $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ et $q : v \mapsto u \wedge v$
Déterminer la matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3)

2- Soit f la rotation d'axe dirigé par u, d'angle de mesure θ.
Montrer qu'on peut décomposer f sous la forme $f = \alpha Id_E + \beta p + \gamma q$ où p est le projecteur orthogonal sur Vect(u).
Exprimer α, β et γ en fonction de θ. On pourra utiliser la matrice de rotation canonique.
A l'aide de la décomposition précédente, calculer la matrice de la rotation d'axe dirigé par $4e_1 + 3e_3$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ relativement à la base (e_1, e_2, e_3).
Vérifier le résultat obtenu en calculant cette matrice à l'aide de MAPLE.

SOLUTION :

1- Sachant que $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$, par linéarité et anticommutativité, on obtient : $q(e_1) = (ae_1 + be_2 + ce_3) \wedge e_1 = be_2 \wedge e_1 + ce_3 \wedge e_1 = ce_2 - be_3$
de même, $q(e_2) = -c\,e_1 + ae_3$ et $q(e_3) = be_1 - ae_2$
La matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc $Q = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

2- • Soit p le projecteur orthogonal sur Vect(u). u n'est peut-être pas unitaire, mais $u' = \dfrac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire qui forme une base de la droite Vect(u).
Donc $\forall x \in E,\ p(x) = < u', x > u' = \dfrac{< u, x >}{\|u\|^2} u$

• Soit $x \in E$;

$\exists y \in \text{Vect}(u),\ \exists z \in \text{Vect}(u)^{\perp},\ x = y + z \qquad (y = p(x) = \frac{<u,x>}{\|u\|^2}u,\ z = x - p(x))$

$f(x) = f(y) + f(z) \quad$ et $\quad f(y) = y$ car y est sur l'axe de la rotation.

La base $\left(\dfrac{z}{\|z\|}, \dfrac{u}{\|u\|} \wedge \dfrac{z}{\|z\|}, \dfrac{u}{\|u\|}\right)$ est une BON directe de E.

La matrice de la restriction de f au plan $\text{Vect}(u)^{\perp} = \text{Vect}(\frac{z}{\|z\|}, \frac{u}{\|u\|} \wedge \frac{z}{\|z\|})$ est celle de la rotation plane d'angle θ, à savoir $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

d'où $f(\frac{z}{\|z\|}) = \cos\theta \frac{z}{\|z\|} + \sin\theta \left(\frac{u}{\|u\|} \wedge \frac{z}{\|z\|}\right)$

et $f(z) = \cos\theta.z + \sin\theta\left(\frac{u}{\|u\|} \wedge z\right) = \cos\theta(x - \frac{<u,x>}{\|u\|^2}u) + \sin\theta\left(\frac{u}{\|u\|} \wedge \left(x - \frac{<u,x>}{\|u\|^2}u\right)\right)$

$= \cos\theta.x - \cos\theta\frac{<u,x>}{\|u\|^2}u + \sin\theta\frac{u}{\|u\|} \wedge x$

et finalement, $f(x) = f(y) + f(z) = \cos\theta.x + (1-\cos\theta)\frac{<u,x>}{\|u\|^2}u + \sin\theta\frac{u}{\|u\|} \wedge x$

$$\boxed{f(x) = \cos\theta.x + (1-\cos\theta)\frac{< u, x >}{\|u\|^2}u + \sin\theta\left(\frac{u}{\|u\|} \wedge x\right)}$$

Soit aussi : $\boxed{f(x) = \cos\theta.x + (1-\cos\theta)p(x) + \dfrac{\sin\theta}{\|u\|}q(x)}$

f est bien de la forme $f = \alpha Id_E + \beta p + \gamma q$ avec $\alpha = \cos\theta, \beta = 1 - \cos\theta, \gamma = \dfrac{\sin\theta}{\|u\|}$

• $p(e_1) = \dfrac{< u, e_1 >}{\|u\|^2}u = \dfrac{a}{a^2+b^2+c^2}u$ et de même,

$p(e_2) = \dfrac{b}{a^2+b^2+c^2}u$ et $p(e_3) = \dfrac{c}{a^2+b^2+c^2}u$

La matrice de p dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

Si $u = 4e_1 + 3e_3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha = \cos\theta = 0, \beta = 1, \gamma = \dfrac{\sin\theta}{\|u\|} = \dfrac{1}{5}$

dans ce cas, $P = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de la rotation f est $M = 0.I_3 + P + \frac{1}{5}Q$

$$\boxed{M = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} & \frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{4}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}}$$

• **Vérification avec MAPLE :**

L'axe est dirigé par le vecteur normé $u' = \dfrac{4}{5}e_1 + \dfrac{3}{5}e_3$. les vecteurs $\overrightarrow{i} = e_2$ et $\overrightarrow{j} = -\dfrac{3}{5}e_1 + \dfrac{4}{5}e_3$ sont unitaires, orthogonaux à u' et entre eux.

Le système $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, u')$ forme une BON de E. La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à cette deuxième base est $P' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Son déterminant vaut $+1$, ce qui assure que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, u')$ est directe.

La matrice de la rotation dans cette base est $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La formule de changement de base nous permet d'affirmer que la matrice de f dans la première base (e_1, e_2, e_3) est $M = P'^{-1}.R.P'$

>with(linalg);

```
R:=matrix(3,3,[0,-1,0,1,0,0,0,0,1]);
P:=matrix(3,3,[0,-3/5,4/5,1,0,0,0,4/5,3/5]);det(P);
M:=multiply(P,R,inverse(P));
```

Sujet 23-131 (CENTRALE)

1- B est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes et bornées sur $\mathbb{R}^+$:

$B = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq k\}$

Soit $f \in B$. Montrer que l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - y + f = 0$ admet une et une seuele solution bornée sur $\mathbb{R}^+$, qu'on notera $\phi(f)$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme de B et qu'il induit un endomorphisme sur B_0, sous-espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.

2- Soit $f \in B_0$. On pose $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} = \phi(f_n)$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) \frac{t^n}{n!} dt$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur un intervalle J à préciser.

SOLUTION :

1- L'équation différentielle (E) est une équation du premier ordre, linéaire, à coefficients constants. L'équation homogène associée, $(E_0)\ :\ y' - y = 0$ a pour solution générale $y_0(x) = \lambda e^x,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Recherchons la solution générale de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x,\ \lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x$

y est solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - y(x) + f(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x + f(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = -f(x)e^{-x}$

$\iff \exists \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}dt + \mu$

$\iff \exists \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(-\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}dt + \mu\right)e^x$

La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est formée des fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto\ y(x) = \left(\mu - \int_0^x f(t)e^{-t}dt\right)e^x,\ \mu \in \mathbb{C}}$$

• Pour qu'une telle solution soit bornée, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, il **FAUT** que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mu - \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}dt\right) = 0$

Or $f \in B$ donc est bornée sur $\mathbb{R}^+$: $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq k$

donc $\forall t \in [0, +\infty[,\ |f(t)e^{-t}| \leq ke^{-t}$. Par majoration, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ est absolument convergente.

La condition $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mu - \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}dt\right) = 0$ sera réalisée si et seulement si $\mu = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$

Donc il existe au plus une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}^+$, et qui est :

$$x \mapsto g(x) = \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt - \int_0^x f(t)e^{-t}dt\right)e^x = e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$$

Réciproquement, montrons que cette solution g est bien bornée sur $\mathbb{R}^+$:

$\forall x \in \mathbb{R}^+, |g(x)| = e^x \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right| \leq e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt \leq e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} ke^{-t}dt$

$|g(x)| \leq ke^x[-e^{-t}]_x^{+\infty} = ke^xe^{-x} = k$ qui montre que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

En conclusion, il existe une et une seule solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}^+$, et qui est donnée par la formule :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt}$$

- Soit $f \in B_0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$, $\forall x > A, |f(x)| < \varepsilon$

$\forall x > A, \forall t \in [x, +\infty[,\ |f(t)| < \varepsilon$ donc $|g(x)| = e^x \left| \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt$

$\forall x > A,\ |g(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} \varepsilon e^{-t}dt = \varepsilon$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $g \in B_0$.

g laisse stable le sous espace B_0 et induit donc un endomorphisme de B_0.

2- Soit $f \in B_0,\ f_0 = f$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f_{k+1} = \phi(f_k)$

Soit H_n la proposition :

Pour tout $f \in B_0,\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\frac{t^n}{n!}dt$

- D'après la question précédente,

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_1(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \int_x^{+\infty} f(t)e^{x-t}dt = \int_0^{+\infty} f(u+x)e^{-u}du$

(par le changement de variable $u = t - x$)

La proposition H_0 est donc vraie.

- Supposons H_{n-1} vraie.

alors $f_n = \phi^n(f) = \phi^{n-1}(\phi(f)) = \phi^{n-1}(f_1)$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f_1(x+t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt$

La fonction $t \mapsto e^{-t}f_1(x+t)$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ puisque f_1 est solution d'une équation différentielle du premier ordre, et la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ est continue.

En intégrant par parties sur le segment $[0, A]$ et en passant à la limite quand $A \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} f_1(x+t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt \\
&= \left[e^{-t} f_1(x+t)\frac{t^n}{n!} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t}f_1(x+t) + e^{-t}f_1'(x+t))\frac{t^n}{n!}dt \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\frac{t^n}{n!}dt
\end{aligned}$$

(puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^n = 0$ et f est bornée d'une part, et que $f_1'(x+t) - f_1(x+t) = -f(x+t)$ d'autre part , f_1 étant solution de (E))

On a ansi prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\frac{t^n}{n!}dt$

??

Sujet 24-198 (MINES-PONTS)

Exercice 1 :

Soient f et g deux fonctions réelles monotones et continues sur $[a, b]$.

En étudiant $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dx \right) dy$, comparer $(b-a)\displaystyle\int_a^b fg$ et $\left(\displaystyle\int_a^b f \right) \left(\displaystyle\int_a^b g \right)$.

Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 2 :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des complexes non nuls. Etudier la diagonalisablité de la matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient général est $b_{i,j} = \dfrac{a_j}{a_i}$. Donner les valeurs propres et les sous espaces propres.

SOLUTION :

Exercice 1 :

• Dans tous les cas,

$$\int_a^b \left(\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_a^b (f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y))dx \right) dy$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b f(x)g(x)dx - f(y)\int_a^b g(x)dx - g(y)\int_a^b f(x)dx + (b-a)f(y)g(y) \right) dy$$
$$= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)dx \right)\left(\int_a^b g(y)dy \right) + (b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy$$
$$= 2(b-a)\int_a^b fg - 2\left(\int_a^b f \right)\left(\int_a^b g \right)$$

• Supposons que f et g soient croissantes sur$[a,b]$.

Pour tous $(x,y) \in [a,b]\times[a,b]$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$, $g(x) \leq g(y)$, et le produit $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$ est ≥ 0

si $x \geq y$ alors $f(x) \geq f(y)$, $g(x) \geq g(y)$, et le produit $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$ est encore positif ou nul.

Donc la fonction $(x,y) \mapsto (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$ est positive et continue sur $[a,b]\times[a,b]$ et son intégrale double $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy$ est positive ou nulle.

Donc dans ce cas, $(b-a)\displaystyle\int_a^b fg \geq \left(\int_a^b f \right)\left(\int_a^b g \right)$

La fonction à intégrer étant continue et positive, il y aura égalité si et seulement si la fonction $(x,y) \mapsto (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$ est identiquement nulle, si et seulement si f et g sont des fonctions constantes.

Le résultat est le même si f et g sont toutes les deux décroissantes, car on a encore $\forall (x,y) \in [a,b]\times[a,b],\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$

• Dans le cas où f et g ont des sens de variation opposés, alors $\forall (x,y) \in [a,b]\times[a,b],\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \leq 0$ et l'inégalité change de sens :

$$(b-a)\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f \right)\left(\int_a^b g \right)$$

Exercice 2 : Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$B.X = \lambda.X \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1} & \dots & \frac{a_n}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} & 1 & \frac{a_3}{a_2} & \dots & \frac{a_n}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_1}{a_{n-1}} & \frac{a_2}{a_{n-1}} & \dots & 1 & \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & \dots & \frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_1}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=\lambda x_1 \\ \dfrac{1}{a_2}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=\lambda x_2 \\ \quad\quad\quad\quad .... \\ \dfrac{1}{a_n}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=\lambda x_n \end{cases}$$

• Si $\lambda \neq 0$, le système équivaut à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \dfrac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$, $X = \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$, soit aussi $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\mu}{a_1} \\ x_2 = \dfrac{\mu}{a_2} \\ \quad\vdots \\ x_n = \dfrac{\mu}{a_n} \end{cases}$

réciproquement, soit $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

alors $B.X_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1} & \cdots & \frac{a_n}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} & 1 & \frac{a_3}{a_2} & \cdots & \frac{a_n}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_1}{a_{n-1}} & \frac{a_2}{a_{n-1}} & \cdots & 1 & \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{a_1} \\ \frac{n}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{n}{a_n} \end{pmatrix} = nX_0$

Donc la seule valeur propre non nulle est $\lambda = n$ et le sous espace associé est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

• Voyons maintenant si 0 est valeur propre :

$$B.X = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{a_1}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=0 \\ \dfrac{1}{a_2}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=0 \\ \quad\quad\quad\quad .... \\ \dfrac{1}{a_n}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)=0 \end{cases} \iff a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$$

Donc 0 est valeur propre de B et le sous espace propre associé est l'hyperplan d'équation $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$.

La somme des dimensions des sous espaces propres étant égale à n, B est diagonalisable.

Autre méthode : Le calcul de B^2 montre facilement que $B^2 = nB$

La polynôme $X(X-n)$, scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}$, est un polynôme annulateur de la matrice B.

Il s'ensuit que $\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C})}$ et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, n\}$

Si $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, étant diagonalisable, B serait semblable à $\mathrm{diag}(0,0,...,0) = 0$ donc serait la matrice nulle, ce qui n'est pas.

Si $\mathrm{Sp}(B) = \{n\}$, étant diagonalisable, B serait semblable à $\mathrm{diag}(n,n,...,n) = nI_n$ donc serait la matrice nI_n, ce qui n'est pas non plus.

donc $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{0, n\}}$

La détermination des sous espaces propres se fait ensuite comme par la première méthode.

Sujet 25-195 (MINES-PONTS)

Calculer un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n$ quand $x \to 1^-$

SOLUTION :

Par le critère de d'Alembert, la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

(immédiat)

Rappelons que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

alors $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n - \gamma x^n + \varepsilon_n x^n \right)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n - \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$$

- Définissons les suites (a_n) et (b_n) par : $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{n}$
  et $\forall n \geq 0,\ b_n = 1$

Soit (c_n) le produit de Cauchy de ces deux suites : $c_0 = a_0 b_0 = 0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1$ $\qquad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + \frac{1}{2}$

et $\forall n \geq 1,\ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n}$

Pour $x \in]-1,1[$, les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes, il en va de même de la série produit $\sum c_n x^n$, et

$\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$, c'est à dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = -\ln(1-x)\frac{1}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n = \frac{x}{1-x}$ (somme d'une série géométrique)

La suite (ε_n) étant de limite nulle, est bornée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, |\varepsilon_n| \leq M$

d'où, $\forall x \in]0,1[,\ \displaystyle\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| x^n \leq M \frac{x}{1-x}$

Dans la somme $S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} - \gamma \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$, les deux dernières fonctions sont équivalentes ou dominées par $M\dfrac{1}{1-x}$ et sont donc négligeables par rapport à $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \to 1^-$

On en conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \, x^n \underset{}{\overset{x\to 1^-}{\sim}} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$

Sujet 26-157 (MINES-PONTS)

Cours :

Montrer que dans espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.

Donner des exemples d'espaces vectoriels normés complets.

Exercice :

Représenter l'ensemble décrit par le complexe $u = 1 + z + z^2$ lorsque z décrit une fois le cercle unité.

SOLUTION :

• En posant $z = e^{i\theta}$, z décrit une fois le cercle unité lorque θ décrit $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.

Alors, $u = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

$u = 1 + \cos\theta + i\sin\theta + 2\cos^2(\theta) - 1 + 2i\sin(\theta)\cos(\theta)$

$u = \cos\theta(1 + 2\cos(\theta)) + i\sin\theta(1 + 2\cos(\theta))$

$u = (1 + 2\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = (1 + 2\cos\theta)e^{i\theta}$

u décrit donc la courbe de paramétrisation polaire $r(\theta) = 1 + 2\cos\theta,\ \theta \in [-\pi, \pi]$.

• $r(-\theta) = r(\theta)$. On reduit l'étude à $[0, \pi]$ et on obtient tte la courbe par symétrie d'axe (Ox).

$\forall\theta \in [0, \pi], r'(\theta) = -2\sin(\theta)$

Formons le tableau de variation et de signe de la fonction $r(\theta)$:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$r'(\theta)$	0		$-$	0
$r(\theta)$	2 ↘	1 ↘	0 ↘	-1

On poursuit alors le tracé sans difficulté.

Avec **MAPLE :**

>with(plots);

polarplot([1+2*cos(t),t,t=-Pi..Pi],scaling=constrained);

Sujet 27-158 (MINES-PONTS)

Cours :

Soit E un espace euclidien de dimension n, B une base orthonormée de E, u un endomorphisme de E, de matrice A dans la base B.

Montrer l'équivaklence des propositions suivantes :

(1) $u \in O(E)$

(2) ${}^tA.A = I_n$

(3) $A \in GL(E)$ et $A^{-1} = {}^tA$

Exercice :

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}$

Trouver suivant n le domaine de définition de la fonction f_n.

Etudier la convergence de $(\sum f_n)_{n\geq 1}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} fn(x)$

SOLUTION :

• Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_n\ :\ t\ \mapsto\ \dfrac{1}{(1+t^x)^n} = \dfrac{1}{(1+e^{x\ln t})^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

- Si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g_n(x) = 1$. Alors g_n n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $f_n(x)$ n'est pas défini.

- Si $x = 0$, alors $g_n(x) = \dfrac{1}{2^n}$, fonction constante qui n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $f_n(0)$ n'est pas défini.

- Si $x > 0$, alors $g_n(x) \overset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^{nx}}$. Alors g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $nx > 1$ c'est à dire que $x \in]\frac{1}{n}, +\infty[$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f_n \text{ est }]\frac{1}{n}, +\infty[.}$

• Pour que la série $(\sum f_n(x))_{n\geq 1}$ converge, il faut déjà que tous les termes $f_n(x), n \geq 1$, soient définis, donc que x appartienne à l'intersection de tous les domaines de définitiondes f_n, c'est à dire que $x > 1$.

Soit $x > 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^x)^k}\right) = \int_1^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+t^x)^k}\right)dt$

(linéarité de l'intégrale, il s'agit ici d'une somme finie)

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t^x)} + \frac{1}{(1+t^x)^2} + ... + \frac{1}{(1+t^x)^n}\right)dt$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+t^x}\right)^n}{1-\dfrac{1}{1+t^x}}dt = \int_1^{+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{(1+t^x)^n}}{t^x}dt = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x} - \frac{1}{t^x(1+t^x)^n}dt$$

Pour $x > 1$, les deux intégrales convergent, on peut écrire,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x} - \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t^x)^n}$$

$$0 \leq \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t^x)^n} \leq \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{(n+1)x}} = \int_1^{+\infty}t^{-(n+1)x}dt = \left[\frac{t^{-(n+1)x+1}}{-(n+1)x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{nx+x-1}$$

et par majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t^x)^n} = 0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty}t^{-x}dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x > 1$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x-1}}$

Sujet 28-148 (MINES-PONTS)

E est l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille d'éléments de E.

Montrer que cette famille est libre si et seulement il existe des réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{i=1..n,j=1..n}$ soit inversible.

SOLUTION : a) Supposons qu'il existe $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que la matrice $A = (f_i(x_j))_{i=1..n,j=1..n}$ soit inversible.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$

alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$ et cette égalité peut être écrite pour $x = x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_1) + ... + \lambda_n f_n(x_1) = 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \lambda_2 f_2(x_2) + ... + \lambda_n f_n(x_2) = 0 \\ \quad\quad\quad\quad .... \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \lambda_2 f_2(x_n) + ... + \lambda_n f_n(x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & ... & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & ... & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & ... & f_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad {}^tA. \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A étant inversible, ${}^tA$ l'est aussi. En multipliant par $({}^tA)^{-1}$ on obtient alors $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, ce qui montre bien que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille libre de E.

b) Montrons l'implication réciproque par récurrence sur n :

Soit H_n la proposition : Si la famille $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est libre, il existe des réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{i=1..n, j=1..n}$ soit inversible.

- Si (f_1) est une famille libre alors la fonction f_1 n'est pas la fonction nulle, donc il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) \neq 0$. La matrice $(f_1(x_1)) \in M_1(\mathbb{R})$ est alors une matrice 1-1 inversible.

La proposition H_1 est donc vérifiée.

- Supposons la proposition H_{n-1} vraie, et soit alors $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famile libre de E. Il s'agit de prouver l'existence de $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $(f_i(x_j))_{i=1..n, j=1..n}$ soit inversible.

Supposons au contraire que $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ la matrice $(f_i(x_j))_{i=1..n, j=1..n}$ soit singulière.

Alors $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\det(f_i(x_j)) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & ... & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & ... & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & ... & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$

donc $\forall (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & ... & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & ... & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & ... & f_n(x) \end{vmatrix} = 0$

En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$\forall (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} f_2(x_1) & .. & f_n(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_2(x_{n-1}) & .. & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_1(x) - \begin{vmatrix} f_1(x_1) & .. & f_n(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & .. & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_2(x) + ...$$

$$+(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & .. & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_1(x) & .. & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_n(x) = 0$$

ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{vmatrix} f_2(x_1) & .. & f_n(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_2(x_{n-1}) & .. & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_1 - \begin{vmatrix} f_1(x_1) & .. & f_n(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & .. & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_2 + ... + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & .. & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & .. & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} f_n = 0$$

La famille $(f_1, f_2, ..., f_n)$ étant libre, on en déduit que tous les coefficients devant $f_1, f_2, ...$ et f_n sont nuls, et en particulier que $\forall (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & .. & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & .. & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & .. & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$

D'après l'hypothèse de récurrence H_{n-1}, cela entraîne que le système $(f_1, f_2, ..., f_{n-1})$ est lié et que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ l'est aussi puique posédant un sous système lié.

On a ainsi prouvé par l'absurde la proposition H_n.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est vraie.

Sujet 29-180 (MINES-PONTS)

a) Montrer que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ n'ont aucune valeur propre commune si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

b) Montrer que si une matrice non nulle, $M \in M_n(\mathbb{C})$, vérifie $AM = MB$, alors, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A).M = M.P(B)$

En déduire que A et B ont une valeur propre commune.

SOLUTION :

a) Supposons que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Alors, les polynômes $\chi_A(X)$ et $\chi_B(X)$ n'ont aucune racine commune, donc n'ont aucun facteur premier de la forme $X - \lambda$ en commun et sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $U(X)\chi_A(X) + V(X)\chi_B(X) = 1$

En appliquant cette égalité à la matrice B, on obtient :

$U(B)\chi_A(B) + V(B)\chi_B(B) = I_n$ et donc $U(B)\chi_A(B) = I_n$ puisque $\chi_B(B) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton), ce qui montre que $\chi_A(B)$ est inversible (son inverse est $U(B)$)

• Réciproquement, supposons que $\chi_A(B)$ est inversible. Si A et B ont une valeur commune $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\exists V \in \mathbb{C}^n$, vecteur colonne non nul, $B.V = \lambda V$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X], P(B).V = P(\lambda).V$ et en particulier, $\chi_A(B).V = \chi_A(\lambda).V$

Or $\chi_A(\lambda) = 0$ puisque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, donc $\chi_A(B).V = 0$ qui entraîne que $V = 0$ en multipliant à gauche par la matrice $(\chi_A(B))^{-1}$, ce qui contredit la définition de V comme vecteur propre de B.

Donc A et B n'ont pas de valeur propre commune.

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle qui vérifie $AM = MB$.

Alors, $A^2M = A(AM) = A(MB) = (AM)B = (BM)M = B^2M$

plus généralement, si $A^kM = MB^k$, alors $A^{k+1}M = A(A^kM) = A(MB^k) = (AM)B^k = (MB)B^k = MB^{k+1}$

Ceci montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kM = MB^k$.

Soit alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_kX^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$.

$$P(A).M = \left(\sum_{k=0}^{m} a_kA^k\right).M = \sum_{k=0}^{m} a_kA^kM = \sum_{k=0}^{m} a_kM.B^k = M\left(\sum_{k=0}^{m} a_kB^k\right) = M.P(B)$$

• En appliquant l'égalité précédente au polynôme $\chi_A(X)$, on obtient :

$\underbrace{\chi_A(A)}_{=0}.M = M.\chi_A(B)$ ce qui montre qu'aucune des deux matrices M et $\chi_A(B)$ n'est inversible, puisque leur produit est nul. En particulier $\chi_A(B)$ n'est pas inversible, ce qui permet de conclure d'après la partie a) que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Sujet 30-182 (MINES-PONTS + CCP)

Exercice 1 : 1- Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est solution d'une équation différentielle sur un intervalle qu'on précisera.

En déduire la valeur de $f(x)$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 : Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$ et $AB + BA = 0$

Montrer que A et B sont inversibles.

Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres et trouver leurs ordres de multiplicité.

En déduire que n est pair.

Donner un exemple de matrices A et B vérifiant les conditions données.

SOLUTION :

Exercice 1 : • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $|e^{-t^2}\cos(xt)| \leq e^{-t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Par majoration $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Notons $H(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow e^{-t^2}\cos(xt)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

La fonction $f \ : \ x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$ est continue et et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|te^{-t^2}\sin(xt)\right| \leq te^{-t^2}$, fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)dt}$$

• En intégrant par parties sur $[0,A]$, puis en passant à la limite quand $A \rightarrow +\infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\frac{e^{-t^2}}{2}\cos(xt)dt$$

$$f'(x) = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt = -\frac{x}{2}f(x)$$

$\boxed{f \text{ est donc solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y' + \frac{x}{2}y = 0}$

La solution générale de cette équation est donnée par la formule $y(x) = \lambda\exp\left(-\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2}dt\right) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$

Donc $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$

Par ailleurs $f(0) = \lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}}$

Exercice 2 : Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$ et $AB + BA = 0$

• La relation $A^2 = I_n$ montre que A est inversible et est sa propre inverse. A est une matrice de symétrie (l'endomorphisme canoniquement associé à A est une symétrie vectorielle)

Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1,1\}$

Mêmes résultats pour la matrice B.

• Soit $X \in E_A^1 : A.X = X$

$\Longrightarrow\ ABX + BAX = ABX + BX = 0 \quad \Longrightarrow \quad A(BX) = -BX$

$\implies BX \in E_A^{-1}$

L'application $X \mapsto B.X$ est une application de E_A^1 dans E_A^{-1}

- elle est injective, puisque B est inversible

$$(B.X = B.X' \implies B^{-1}.B.X = B^{-1}.B.X' \implies X = X')$$

- elle est injective : $\forall Y \in E_A^{-1}, A.Y = -Y \implies ABY + BAY = 0 = ABY - BY$

$\implies A.(BY) = BY \implies BY \in E_A^1$ or $Y = B.(BY) = Y$ car $B^2 = I_n$, ce qui montre Y apour antécédent BY et que l'application est surjetive.

L'application $X \mapsto B.X$ est une application linéaire bijective de E_A^1 dans E_A^{-1}. Il s'ensuit que $\dim(E_A^1) = \dim(E_A^{-1})$

Toute symétrie vectorielle étant diagonalisable, $E_A^1 \oplus E_A^1 = \mathbb{R}^n$

donc $\dim(E_A^1 \otimes E_A^{-1}) = \dim(E_A^1) + \dim(E_A^{-1}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$

et finalement, $\dim(E_A^1) = \dim(E_A^{-1}) = \dfrac{n}{2}$, ce qui entraine que n est pair.

Mêmes résultats pour la matrice B.

• Il faut trouver deux symétries f et g telles que $f_o g = -g_o f$ dans le cas d'un espace de dimension paire. Essayons dans le cas le plus simple : $n = 2$.

Dans le plan, si f et g sont des symétries orthogonales par rapport à une droite (des réflexions), alors leur composée est une rotation, d'angle égal à deux fois l'angle des droites définissant les deux réflexions. Et il faut que ces deux rotations soient opoosées l'une de l'autre. Si l'angle des droites est $\dfrac{\pi}{4}$, alors $f_o g = r(\frac{\pi}{2})$ et $g_o f = r(-\frac{\pi}{2}) = -r(\frac{\pi}{2})$

Soeint donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

alors $A.B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Les trois conditions $A^2 = B^2 = I_n$, $AB + BA = 0$ sont bien vérifiées.

Sujet 31-194 (MINES-PONTS + CCP)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$ (réponse $\dfrac{\pi^2}{2}$)

SOLUTION :

• La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle est paire, il suffit donc d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$

• $\dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sh}(x)}\right) = 1$ et on peut prolonger la fonction par continuité en 0.

Elle est alors continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur tout segment $[0, A], A > 0$.

• $\dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Par domination, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Par additivité, g est intégrable sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, +\infty[$ par parité.

• $\forall x > 0, \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 2xe^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2x})^n$ (puisque $|e^{-2x}| < 1$)

$\forall x > 0, \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0, u_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$

- Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme g
- En intégrant par parties sur $[0, A]$, puis en passant à la limite quand $A \to +\infty$,

$$\int_0^{\infty} |u_n(x)| dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-(2n+1)x} dx = \left[-2x\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1} dx$$

$$= \left[-2\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$$

donc la série $\sum \int_0^{\infty} |u_n(x)|dx$ converge, on peut alors affirmer d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} u_n(x)dx\right) \text{ donc } \int_0^{\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}(x)}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}(x)}dx = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}}$

Sujet 32-183 (MINES-PONTS)

Exercice 1 :

Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe de dimension finie n.
Soient F et G deux sous espace vectoriel de E.
Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
et que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Exercice 2 : Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a,b]$.

On suppose que $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$.

Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$.

En déduire que f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

Que se passe-t-il si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$?

SOLUTION :

Exercice 1 :

• Soit $x \in (F+G)^{\perp}$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$ et donc à tout vecteur de F et à tout vecteur de G (puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$)
d'où $x \in F^{\perp}$ et $x \in G^{\perp}$ et finalement $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$

• Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Pour tout $y \in F+G$, $\exists (a,b) \in F \times G$, $y = a+b$

$<x,y>=<x,a+b>=<x,a>+<x,b>=0+0=0$

($<x,a>=0$ car $x \in F^{\perp}$ et $a \in F$, $<x,b>=0$ car $x \in G^{\perp}$ et $b \in G$)

Donc $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$ et la double inclusion donne l'égalité.

Ainsi, $\boxed{(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}}$

• Dans un espace de dimension finie, pour tout sous espace, $(F^{\perp})^{\perp} = F$

donc $(F \cap G)^{\perp} = ((F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp})^{\perp} \underset{(1)}{=} ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

((1) provient de l'égalité précédente appliquée à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$)

Donc, $\boxed{(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}}$

Exercice 2 : • Si $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$, alors, par combinaison linéaire,

$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$.

Supposons que f admette moins de n zeros sur $]a,b[$, qu'on notera $x_1, x_2, ..., x_p$, $p < n$, rangés par ordre croissant.

f garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (sinon, étant continue, elle s'annulerait entre x_i et x_{i+1} en vertu du théorème des valeurs intermédiaires)

De ses racines, ne retenons que celles où f s'annule en changeant de signe, que nous renumérotons en $x_1, x_2, ..., x_q$, $q \leq p < n$

alors la fonction produit $x \mapsto (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, puisque les changements de signe en traversant x_i de la fonction f sont compensés par ceux du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)$

Si $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, alors $\int_a^b P(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_a^b t^k f(t)dt = 0$

donc $\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)dx = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction intégrande est continue, non identiquement nulle et de signe constant sur le segment $[a,b]$.

Donc f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

• Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$, alors $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$.

f étant continue, d'après le théorème de Weïerstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors la suite $(P_n.f)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f^2 car $\|P_n.f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty.\|P_n - f\|_\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b P_n(t)f(t)dt = \int_a^b f^2(t)dt$

Or $\forall n$, $\int_a^b P_n(t)f(t)dt = 0$ donc $\int_a^b f^2(t)dt = 0$

La fonction f^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle, on en conclut que c'est la fonction nulle: et finalement, $\forall t \in [a,b], f(t) = 0$

Sujet 33-192 (MINES-PONTS)

Exercice 1 :

Soit $A_n = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(\text{ch}t)^n} dt$

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} A_n x^n$ et calculer sa somme sur son intervalle de convergence.

Exercice 2 :

Soient A et B deux matrices carrées réelles ou complexes telles que $\text{rg}A = \text{rg}B = \text{rg}(A+B) = 1$

Montrer que $\text{tr}(A.B) = \text{tr}(A)\ \text{tr}(B)$

SOLUTION :

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\text{ch}t)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$

Puisque $\forall t \in [0,+\infty[, \text{ch}t \geq 1$, pour tout n, $0 \leq \frac{1}{(\text{ch}t)^n} \leq \frac{1}{(\text{ch}t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \leq 2e^{-t}$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, par majoration la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\text{ch}t)^n}$ l'est aussi pour tout $n \geq 1$. Donc A_n est défini pour tout $n \geq 1$.

De plus $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{1}{(\text{ch}t)^n} \leq \frac{1}{(\text{ch}t)} \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A_n \leq A_1$

Donc $\forall x \in]-1,1[$, $|A_n x^n| \leq A_1 |x|^n$ et par majoration, la série $\sum_{n\geq 1} A_n x^n$ est absolument convergente. La série entière $\sum_{n\geq 1} A_n x^n$ a donc un rayon $R \geq 1$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{(\text{ch}t)^n} dt$

• Pour $x \in]-1,1[$, fixé, posons $u_n(t) = \frac{x^n}{(\text{ch}t)^n}$

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$ la série $\sum u_n(t) = \sum \frac{x^n}{(\text{ch}t)^n}$ converge (série géométrique de raison de module < 1 puisque $|x| < 1$ et $\text{ch}t \geq 1$)

- chaque fonction u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ comme montré plus haut

- la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}|u_n(t)|dt\right)$ converge car $\displaystyle\int_0^{\infty}|u_n(t)|dt = A_n|x|^n$ et $|x|<1$

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on peut affirmer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}u_n(t)dt\right) = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)dt\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(\mathrm{ch}t)^n}\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{x}{(\mathrm{ch}t)}\frac{1}{1-\dfrac{x}{(\mathrm{ch}t)}}dt = x\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{ch}t - x}$

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n = x\int_0^{+\infty}\frac{2dt}{e^t+e^{-t}-2x} = 2x\int_0^{+\infty}\frac{e^tdt}{e^{2t}-2xe^t+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n = 2x\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2-2xu+1} = 2x\int_1^{+\infty}\frac{du}{(u-x)^2+1-x^2}\quad (\text{chgmt de variable } u=e^t)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\mathrm{Arctan}\frac{u-x}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{u=1}^{u\to+\infty} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

On a vu que le rayon de converegence était supérieur ou égal à 1. S'il était strictement plus grand que 1, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$ serait continue au point 1 et $\displaystyle\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ aurait une limite finie quand $x\to 1$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{\text{le rayon de convergence est égal à 1.}}$

et $\boxed{\displaystyle\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

Exercice 2 :

Par hypothèse A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B = \mathrm{rg}(A+B) = 1$

Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement. (u est l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est A ...)

alors $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}v = \mathrm{rg}(u+v) = 1$

Par le théorème du rang, $\ker u$ et $\ker v$ sont deux hyperplans.

Par la formule de Grassmann, $\underbrace{\dim(\ker u+\ker v)}_{\leq n} = \underbrace{\dim(\ker u)}_{=n-1} + \underbrace{\dim(\ker v)}_{=n-1} - \dim(\ker u\cap\ker v)$

donc $\dim(\ker u\cap\ker v) = \underbrace{\dim(\ker u)+\dim(\ker v)}_{=2n-2} - \underbrace{\dim(\ker u+\ker v)}_{\leq n} \geq n-2$

par ailleurs $\dim(\ker u\cap\ker v)\leq n-1$ puisque $(\ker u\cap\ker v)\subset\ker u$

Il y a donc deux possibilités : $\dim(\ker u\cap\ker v) = n-1$ ou $\dim(\ker u\cap\ker v) = n-2$

1^{er} **cas :** $\dim(\ker u\cap\ker v) = n-1$

Compte tenu des inclusions $(\ker u\cap\ker v)\subset\ker u$ et $(\ker u\cap\ker v)\subset\ker v$ et des égalités de dimensions, $\ker u\cap\ker v = \ker u = \ker v$

Soit $(e_2,e_3,...,e_n)$ une base de $\ker u = \ker v$, qu'on complète en une base $(e_1,e_2,...,e_n)$ par un vecteur e_1 n'appartenant pas aux noyaux.

La matrice de u dans cette base est de la forme $A' = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & ... & 0\\ \alpha_2 & 0 & ... & 0\\ \vdots & \vdots & ... & \vdots\\ \alpha_n & 0 & ... & 0\end{pmatrix}$ et celle de v de la forme

$B' = \begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & ... & 0\\ \beta_2 & 0 & ... & 0\\ \vdots & \vdots & ... & \vdots\\ \beta_n & 0 & ... & 0\end{pmatrix}$ Ainsi $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A') = \alpha_1$
et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(B') = \beta_1$

La matrice de $u_o v$ est $A'.B' = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_2\beta_1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \alpha_n\beta_1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(u_o v) = \mathrm{tr}(A'B') = \alpha_1\beta_1$

dans ce cas l'égalité $\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(A)\ \mathrm{tr}(B)$ est bien vérifiée.

2^e **cas :** $\dim(\ker u \cap \ker v) = n - 2$

Cette fois, les inclusions $(\ker u \cap \ker v) \subset \ker u$ et $(\ker u \cap \ker v) \subset \ker v$ sont strictes.

Soit $(e_3, ..., e_n)$ une base de $\ker u \cap \ker v$, qu'on complète en une base $(e_1, e_3, ..., e_n)$ de $\ker u$ par un vecteur e_1 de $\ker u - \ker v$, et en une base $(e_2, e_3, ..., e_n)$ de $\ker v$ par un vecteur e_2 de $\ker v - \ker u$.

Alors $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ puisque, d'après l'étude des dimensions faite plus haut, $\ker u + \ker v = E$

La matrice de u dans cette base est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & \alpha_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ et celle de v de la forme $B' = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & ... & 0 \\ \beta_2 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \beta_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A') = \alpha_2$
et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(B') = \beta_1$

La matrice de $u_o v$ est $A'.B' = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_2\beta_2 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \alpha_n\beta_2 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(u_o v) = \mathrm{tr}(A'B') = \alpha_1\beta_2$

La matrice de $u + v$ est $A' + B' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \beta_n & \alpha_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$. Elle est elle aussi de rang 1 donc les deux premières colonnes sont proportionnelles.

En particulier la matrice $\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc son déterminant $\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2$ est nul.

Alors $\mathrm{tr}(A.B) = \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

dans ce cas l'égalité $\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(A)\ \mathrm{tr}(B)$ est encore vérifiée.

Sujet 34 (CENTRALE)

1-Montrer que l'application $\Phi :\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P\left(\frac{i}{n}\right) Q\left(\frac{i}{n}\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

2-a) Pour $n = 10$, déterminer la projection orthogonale de $Q = X^7$ sur $\mathbb{R}^3[X]$

R et S étant deux polynômes en **x**, on définira le produit scalaire par :

> **ProdScal:=(R,S)->sum(subs(x=i/10,R)*subs(x=i/10,S),i=0..10);**

$Q := X^7$. Le projeté de Q sur $\mathbb{R}^3[X]$ est :

projQ:=add(a[k]*x^ k,k=0..3);

Déterminer projQ en remarquant qu'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^3[X]$.

b) Tracer simultanément le graphe de Q et de son projeté sur [0,1], puis sur [-1,1], et enfin sur [0,2]. Que remarque-t-on ?

SOLUTION :

2-a) > **ProdScal:=(R,S)->sum(subs(x=i/10,R)*subs(x=i/10,S),i=0..10);**

Q:=x ^ 7;

Le projeté de Q sur $\mathbb{R}^3[X]$ est **projQ:=add(a[k]*x^k,k=0..3);**

projQ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^3[X]$.

>for j from 0 to 3 do eq[j]:=expand(ProdScal(projQ-Q,x^j));od;

coef:=solve({seq(eq[j],j=0..3)},{a[0],a[1],a[2],a[3]});

ProjQ:=subs(coef,projQ);

2-b) > **plot(Q,ProjQ,x=0..1);**

Sujet 35 : (CENTRALE)

Soit $f\ :\ x \mapsto \tan(x) + \mathrm{ch}(x)$

Montrer que f induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

Montrer que la fonction réciproque g admet un développement limité à l'ordre 5 au voisinage du point 1 et le calculer.

MOTS CLES: **?series**

SOLUTION :

• f est définie, continue et de classe C^∞ sur l'ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \mathrm{sh}(x)$

```
>restart;
plot(1+ tan(x)^2+sinh(x), x=-Pi/2..Pi/2);evalf(Pi/2);
plot(1+ tan(x)^2+sinh(x), x=-1.4..1.4,y=0..10);
```

Le graphe de f' montre que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc injective. Etant continue, elle prend toute valeur entre $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f = +\infty$.

C'est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

• Puisque f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que f' ne s'annule pas, $g = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

f étant $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f' ne s'annulant pas, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc un développement limité en tout point de $\mathbb{R}$ et à tout ordre.

$f(0) = 1$ donc $g(1) = f^{-1}(1) = 0$

$f'(0) = 1$ donc $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$

Le DL de g en 1 à l'ordre 1 est : $g(x) = g(0) + g'(0)(x-1) + o(x-1)$

ou aussi : $g(1+u) = 1 + u + o(u)$

• L'existence d'un DL de g en tout point à tout ordre étant établie, écrivons le DL de g à l'aide de coeficients indéterminés :

$$g(1+u) = a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + o(u^5)$$

On se ramènera en 0 en posant $h(u) = g(1+u) = a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + o(u^5)$

```
>restart;
f:=t->tan(t)+cosh(t); series(f(t),t);
h:=add(a[k]*u^k,k=1..5);
```

On écrira ensuite l'égalité $f(g(1+u)) = f(h(u)) = u$, on calculera le DL5 de cette composée avec MAPLE, et on identifiera les coefficients obtenus avec le développement $u + o(u^5)$

```
series(f(h),u): DL:=expand(");
```

$$DL := 1 + a_1u + (a_2 + \tfrac{a_1^2}{2})u^2 + (a_1a_2 + \tfrac{a_1^3}{3} + a_3)u^3 + (.....)u4 + (.....)u^5 + O(u^6)$$

L'identidication avec le DL $f(h(u)) = u + o(u^5)$ conduit à la résolution du système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 + \dfrac{a_1^2}{2} = 0 \\ a_1a_2 + \dfrac{a_1^3}{3} + a_3 = 0 \\ a_1a_3 + a_1^2a_2 + \dfrac{a_1^4}{24} + \dfrac{a_2^2}{2} + a_4 = 0 \\ ..... = 0 \end{cases}$$

```
sol:=solve({coeff(DL,u,1)=1,seq(coeff(DL,u,k)=0,k=2..5)},{a[1],a[2],a[3],a[4],a[5]});
```

$$sol := \{a_1 = 1, a_5 = -11/20, a_4 = 1/6, a_3 = 1/6, a_2 = -1/2\}$$

```
H:=subs(sol,h);
```

Le DL5 de g au point 1 est donc :

$$\boxed{g(1+u) = h(u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{6}u^4 - \frac{11}{20}u^5 + o(u^5)}$$

• *Vérification :*

series(f(H),u);
HH:=unapply(H,u); series(HH(f(x)-1),x);

Sujet 36 : **(CENTRALE)**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $]-\pi,\pi[$ et admet sur un voisinage de 0 un développement en série entière de la forme $\sum a_n x^{2n}$

Calculer a_0 et donner une relation de récurrence permettant de calculer a_n en fonction des coefficients précédents.

Minorer le rayon de convergence de la série trouvée.

b) Avec Maple, Calculer a_k, lorsque $0 \leq k \leq 10$

Comparer les premiers termes du DSE de f avec le développement limité à l'ordre 20 en 0 de f donné par Maple.

MOTS CLES: **?series** Boucle "**for**"

SOLUTION :

a) • $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. On prolonge f en une fonction continue sur $]-\pi,\pi[$ en posant $f(0)=1$.

• Analyse :

Supposons qu'il existe une SE $\sum a_n x^{2n}$ de rayon non nul telle que $\dfrac{x}{\sin x} = \sum a_n x^{2n}$ sur un voisinage de 0.

alors $x = \sin x.\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}\right)$

Faisons le produit de Cauchy des deux séries $\{u_n\} = \left\{(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}$ et $\{v_n\} = \{a_n x^{2n}\}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} a_{n-k} x^{2n-2k} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{a_{n-k}}{(2k+1)!}\right) x^{2n+1}$$

Or cette série produit est réduite à x.

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on peut identifier terme à terme les coefficients :

- pour $n=0$, on $a_0 = 1$ $\quad (R0)$
- pour $n \geq 1$, $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{a_{n-k}}{(2k+1)!}$, ce qui donne en transposant le terme d'indice $k=0$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \frac{a_{n-k}}{(2k+1)!} \qquad (R1)$$

Cette dernière relation permet de calculer le terme a_n en fonction des termes précédents.

• Synthèse : réciproquement le produit des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ où la suite (a_n) est définie par les relations $(R0)$ et $(R1)$ donne, pour tout x inférieur en module au rayon de convergence R de la deuxème série :

$w_0 = x$ et $\forall n \geq 1, w_n = 0$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = x$

soit encore $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \frac{x}{\sin x}$

• On vérifie par récurrence que $|a_n| \leq 2^n$, ce qui montre que $R \geq 1/2$

• Enfin, on calcule les 20 premiers coefficients par :

```
> N:=10;  a[0]:=1;
  for n from 1 to N do
    b:=0;
```

```
        for k from 1 to n do b:=b+(-1)^(1+k)*a[n-k]/(2*k+1)! od;
        a[n]:=b;
    od;
```

• On peut vérifier ce calcul par le DL directement donné MAPLE :

```
>series(x/sin(x),x=0,21);
```

Sujet 37-183 (ENSAM)

Déterminer la limite et un équivalent de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$$

SOLUTION :
Exercice 1 :

• Par recurrence, il est immédiat que $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{nu_n} > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Dès lors, il n'y a que deux possibilités :

- soit la suite converge vers une limite réelle l.
- soit la suite diverge vers $+\infty$

Si la suite convergeait vers un réel l, alors, par croissance, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_1 \leq u_n$ et en passant à le limite quand $n \to +\infty$, on obtiendrait l'inégalité $0 < u_1 \leq l$

L'égalité $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{nu_n}$ donnerait alors $u_{n+1} - u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{l}\dfrac{1}{n}$, ce qui entraînerait que par équivalence, la série $\{u_{n+1} - u_n\}$ divergerait (puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge) et la suite (u_n) aussi. De par cette contradiction avec l'hypothèse de départ, on en conclut que la suite (u_n) ne converge pas, et donc qu'elle diverge vers $+\infty$.

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall n \geq 1,\ (u_{n+1})^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n + \frac{1}{nu_n}\right)^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{1}{nu_n^2}\right)^\alpha - 1\right]$$

$$(u_{n+1})^\alpha - u_n^\alpha \overset{n\to+\infty}{\sim} u_n^\alpha\left(\frac{\alpha}{nu_n^2}\right) = \frac{\alpha}{nu_n^{2-\alpha}}$$

En prenant $\alpha = 2$, on obtient $(u_{n+1})^2 - u_n^2 \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$

Ce sont deux séries divergentes à termes positifs équivalentes. On sait qu'alors leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((u_{k+1})^2 - u_k^2\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k} \overset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$$

$$(u_{n+1})^2 - u_1^2 \overset{n\to+\infty}{\sim} (u_{n+1})^2 \overset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$$

d'où $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n-1)} \overset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}$

$$\boxed{u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}}$$

Sujet 38-183 (CENTRALE)

1- Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$

2- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln t\,dt$ est solution d'une équation différentielle sur un intervalle à préciser et en déduire la valeur de $f(x)$.

SOLUTION :
Exercice 1 :

1- • $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx = \int_0^1 (1-u)^n \ln(nu) n du$ (par le changement de variable $x = nu$)

$$= n\ln n \int_0^1 (1-u)^n du + n\int_0^1 (1-u)^n \ln u \, du$$
$$= n\ln n \left[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + n\left(\left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln u\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{(n+1)u}du\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{1-(1-u)}du$$
(en effet $1-(1-u)^{n+1} = P(u) \in \mathbb{R}[u]$ avec $P(0)=0$ et donc $\lim\limits_{u\to 0} P(u)\ln(u) = 0$)
$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \left(1+(1-u)+(1-u)^2+...+(1-u)^n\right)du$$
$$= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1}\right) \quad (\text{car } \int_0^1 (1-u)^k du = -\left[\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1})$$
$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}\right)$$
En utilisant le développement $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où $\lim(\varepsilon_n) = 0$,
$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) + \frac{1}{n+1}\right) = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\underbrace{\left(-\gamma - \varepsilon_n + \frac{1}{n+1}\right)}_{\to -\gamma}$$
donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx\right) = -\gamma}$

• Soit f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\forall t \in [0,n], f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t \quad \text{et} \quad \forall t \in]n,+\infty[, f_n(t) = 0$$
Soit $t \in]0,+\infty[$, fixé. Pour tout $n > t$, $t \in [0,n]$ et $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t = e^{n\ln(1-\frac{t}{n})}\ln t$

et puisque $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{t}{n}\right) = -t$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\ln t$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $g : t \mapsto e^{-t}\ln t$

- La fonction $h : u \mapsto \ln(1-u)$ est concave car $h''(u) = \dfrac{-1}{(u-1)^2} < 0$

La courbe de la fonction h est donc au dessus de la tangente au point 0.

donc $\forall u \in]-\infty, 1[$, $h(u) \leq -u \quad (h(0)=0$ et $h'(0) = -1)$

donc $\forall t \in [0,n]$, $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$, $\quad n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leq |e^{-t}\ln t|$, cette dernière fonction étant une fonction de la variable t seule, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt$$
or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)\ln t dt$ puisque f_n est nulle sur $[n,+\infty[$,

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)\ln t dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$

Compte tenu du calcul effectué précédemment, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = -\gamma}$

2- • Notons $h(x,t) = e^{-xt}\ln t$ et soit $a > 0$.

- $\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}\ln t$
- $\forall t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \to h(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,

de même que la fonction $x \to \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$
- $\forall x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \to h(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,

de même que la fonction $t \to \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$
- $\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |te^{-xt}\ln t| \leq te^{-at}|\ln t| \qquad (3)$

(fction intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$)

Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ nous permet alors d'affirmer que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et que $\quad \forall x\in[a,+\infty[,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt$

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}te^{-xt}\ln t dt$

• Soit $x>0$. Pour tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$,

$$\int_a^b e^{-xt}t\ln t dt=\left[\frac{e^{-xt}}{-x}t\ln t\right]_a^b+\frac{1}{x}\int_a^b e^{-xt}(\ln t+1)dt$$
$$=\frac{1}{x}(e^{-ax}a\ln a-e^{-bx}b\ln b)+\frac{1}{x}\left(\int_a^b e^{-xt}\ln t dt+\int_a^b e^{-xt}dt\right)$$

En passant à la limite quand $a\to 0^+$ et $b\to+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}t\ln t dt=0+\frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln t dt+\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt\right)$$

soit : $\displaystyle -f'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\quad\Longrightarrow\quad xf'(x)+f(x)=-\frac{1}{x}$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est solution sur l'intervalle }]0,+\infty[\text{ de l'équation difffférentielle } (E) :\ xy'+y=-\frac{1}{x}}$

• On peut intégrer cette équation par la méthode classique, en intégrant d'abord l'équation homogène associée, puis en recherchant une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante par exemple.

On peut aussi dans le cas présent remaquer que $x\mapsto xy'(x)+y(x)$ est la dérivée de $x\mapsto xy(x)$

donc : $\displaystyle\forall x\in]0,+\infty[, xy'(x)+y(x)=-\frac{1}{x}\quad\Longrightarrow\quad\exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in]0,+\infty[, xy(x)=-\ln x+\lambda$

$\displaystyle\Longrightarrow\quad\exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in]0,+\infty[,\ y(x)=\frac{\lambda-\ln x}{x}$

• f étant l'une des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=\frac{\lambda-\ln x}{x}$

Mais, d'après la première question, $\displaystyle f(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt=-\gamma$

donc $\displaystyle f(1)=-\gamma=\frac{\lambda-\ln 1}{1}$ et $\lambda=-\gamma$

et finalement $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=-\frac{\gamma+\ln x}{x}}$

Sujet 39-183 (ICNA)

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée des réels u_0 et u_1 et par la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}\,\frac{1+u_n}{1+u_{n+1}}$$

SOLUTION :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}(1+u_{n+1})=u_{n+1}(1+u_n)$

En notant $w_n=u_{n+1}(1+u_n)$, la relation précédente s'écrit : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=w_n$

La suite (w_n) est donc constante : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=w_0=u_1(1+u_0)=u_{n+1}(1+u_n)$

Si l'un des termes de la suite, u_p, est nul, alors $\displaystyle u_{p+1}=u_p\,\frac{1+u_{p-1}}{1+u_p}=0$ et la suite (u_n) est nulle à partir du rang p.

donc - si $w_0=0$, la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

- si $w_0\neq 0$, alors $\displaystyle\forall n\geq 1, u_{n+1}=\frac{w_0}{1+u_n}$

La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence homographique.

Les points fixes de la fonction homographique $\displaystyle t\mapsto\frac{w_0}{1+t}$ sont les racines de l'équation $x^2+x-w_0=0$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta=1+4w_0$

$\underline{1^{er} cas :}$ si $\Delta < 0$ (c'est à dire $w_0 < -\frac{1}{4}$), l'équation n'a pas de racine réelle et la suite réelle (u_n) ne peut pas converger. C'est une suite divergente.

$\underline{2^{me} cas :}$ $\Delta = 0$, c'est à dire $w_0 = -\frac{1}{4}$

alors l'équation $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ a une racine double, $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Si pour un certain p, $a_p = -\frac{1}{2}$, alors $\forall n \geq p, u_n = -\frac{1}{2}$ et la suite est stationnaire de valeur $-\frac{1}{2}$

Dans le cas général, considérons la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{2}}$

alors, $\forall n,\ v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{-\frac{1}{4}}{1+u_n} + \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{2 - \frac{1}{1+u_n}} = \dfrac{4(1+u_n)}{2u_n + 1} = \dfrac{2(u_n + \frac{1}{2}) + 1}{u_n + \frac{1}{2}} = 2 + v_n$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + 2n$.

Il s'ensuit que $\lim(v_n) = +\infty$ et $\boxed{\lim(u_n) = -\frac{1}{2}}$

$\underline{3^{me} cas :}$ $\Delta > 0$, c'est à dire $w_0 > -\frac{1}{4}$

alors l'équation $x^2 + x - w_0 = 0$ a deux racines réelles distinctes, qu'on notera α et β.

Si pour un certain p, $a_p = \beta$, alors $\forall n \geq p, u_n = \beta$ et la suite est stationnaire de valeur β

Dans le cas général, considérons la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

alors, $\forall n,\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{\frac{w_0}{1+u_n} - \alpha}{\frac{w_0}{1+u_n} - \beta} = \dfrac{w_0 - \alpha(1+u_n)}{w_0 - \beta(1+u_n)} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha - \alpha(1+u_n)}{\beta^2 + \beta - \beta(1+u_n)}$

$v_{n+1} = \dfrac{\alpha(\alpha - u_n)}{\beta(\beta - u_n)} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}\, v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n$.

Les racines α et β sont des réels ni égaux ni opposés. Notons α celui qui a la plus petite valeur absolue : $0 < |\alpha| < |\beta|$ $\quad (\alpha = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2})$

Alors $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ et donc $\lim(v_n) = 0$, qui entraîne finalement que $\boxed{\lim(u_n) = \alpha = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n}(f) = 0.}$

$\underset{x\to 0}{\sim}$

$\sim$

$x \to 0$

(1) $\circ$

$\leq$ Δ

$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$