Oraux - 2009

Sujet 1 : Centrale maths I

Exercice 1 : Que peut on dire d'une fonction f à valeurs réelles, convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, pour laquelle il existe trois réels a, b et c dans I tels que :
$a < b < c$ et $f(a) = f(b) = f(c)$

Exercice 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$

SOLUTION :

Exercice 1 : • Soit $x \in [a, c]$. $\exists t \in [0,1], x = (1-t)a + tc.$
Puisque f est convexe, $f(x) = f((1-t)a + tc) \leq (1-t)f(a) + tf(c) = (1-t)f(a) + tf(a) = f(a)$
donc $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq f(a)$

• Soit $x \in [a, b]$
- si $a < x < b < c$, alors $\exists t \in [0,1], b = (1-t)x + tc.$
  Par convexité, $f(b) = f((1-t)x + tc) \leq (1-t)f(x) + tf(c)$
  donc $f(a) =\leq (1-t)f(x) + tf(a)$
  $\Longrightarrow\ (1-t)f(a) =\leq (1-t)f(x) \Longrightarrow\ f(a) \leq f(x)$
- si $a < b < x < c$, alors $\exists t \in [0,1], b = (1-t)a + tx.$
  Par convexité, $f(b) = f((1-t)a + tx) \leq (1-t)f(a) + tf(x)$
  donc $f(a) =\leq (1-t)f(a) + tf(x)$
  $\Longrightarrow\ tf(a) =\leq tf(x) \Longrightarrow\ f(a) \leq f(x)$

On a montré que dans rous les cas, $f(a) \leq f(x)$ et donc $f(x) = f(a)$ en teanat compte de la première inégalité.

En conclusion, $\boxed{\text{si } f(a) = f(b) = f(c), \text{ alors } f \text{ est constante sur le segment } [a, b]}$

Exercice 2 :

• La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
$\dfrac{\sin^3 x}{x^2} \overset{x \to 0}{\sim} x$ donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Elle est intégrable sur tout segment de la forme $[0, a], a > 0$ puisque continue.
de plus $\forall x > 0,\ \left|\dfrac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Par addditivité, g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

• Par intégration par parties sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2} \sin^3 x dx = \left[\frac{-1}{x} \sin^3 x\right]_a^b + \int_a^b \frac{3\sin^2 x \cos x}{x} dx$
puis en passant à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin^3 x dx = 0 + 3 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos x}{x} dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x \cos x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 . \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{ix} + e^{-ix})}{-8}$$
$$= \frac{e^{3ix} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-3ix}}{-8} = -\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin^3 x dx = -\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos x}{x} dx$

• Pour tous a, b tels que $0 < a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\cos 3x - \cos x}{x} dx = \int_a^b \frac{\cos 3x}{x} dx - \int_a^b \frac{\cos x}{x} dx =$

$$= \int_{3a}^{3b} \frac{\cos u}{u} du - \int_a^b \frac{\cos x}{x} dx \text{ (par le changement de variable } u = 3x)$$
$$= \int_{3a}^{b} \frac{\cos u}{u} du + \int_b^{3b} \frac{\cos u}{u} du - \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx - \int_{3a}^{b} \frac{\cos x}{x} dx$$
$$= \int_b^{3b} \frac{\cos u}{u} du - \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx$$

• On sait que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ est convergente et que

$$\int_b^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx - \int_1^b \frac{\cos x}{x} dx \xrightarrow[b \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

Quand $b \to +\infty$, $\displaystyle\int_b^{3b} \frac{\cos u}{u} du = \int_b^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx - \int_{3b}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$

• Pour a assez pztit $(0 < a < 3a < \frac{\pi}{2})$, la fonctions cos étant décroisante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\int_a^{3a} \frac{\cos 3a}{x} dx \leq \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx \leq \int_a^{3a} \frac{1}{x} dx$$

$$\Longrightarrow \cos 3a \ln 3 \leq \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx \leq \int_a^{3a} \frac{1}{x} dx = \ln 3$$

$$\Longrightarrow \lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx = \ln 3$$

• Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin^3 x dx = -\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos x}{x} dx = \frac{3}{4} \ln 3}$

Sujet 2 : Centrale - maths I

Exercice 1 : a) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Existe-t-il une fonction g telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xg'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$?

SOLUTION :

a) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists A > 0$, $\forall x > A, 1 - \frac{1}{2} \leq x.f'(x) \leq 1 + \frac{1}{2}$

donc $\forall x \geq A, \dfrac{1}{2x} \leq f'(x)$

$$\forall x \geq A, f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)dt \geq f(A) + \int_A^x \frac{dt}{2t} = f(A) + \tfrac{1}{2}(\ln x - \ln A)$$

Cette minoration montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Prenons une fonctions f telle que $g'(x)$ soit "légèrement" négligeable par rapport à $\frac{1}{x}$ de façon à ce que $\lim\limits_{x\to+\infty} xg'(x) = 0$

On a $g'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ lorsque $g(x) = \ln(\ln(x))$

Les deux hypothèses : $\lim\limits_{x\to+\infty} xg'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ sont alors satisfaites.

Exercice 2 : 1 - On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$ où u_n est la partie entière de π^n

Quel est son rayon de convergence ?

2 - On considère une suite réelle (a_n) telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence R strictement positif.

On note R' le rayon de convergence de la série $\sum \sin(a_n)x^n$

Peut on affirmer que $R \leq R'$? que $R' \leq R$?

3 - Montrer que si $R > 1$, alors $R' = R$.

4 - Donner toutes les valeurs possibles du rapport $\dfrac{R}{R'}$

SOLUTION :

1- u_n étant la partie entière de π^n, on a $u_n \leq \pi^n < u_n + 1$ et $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \pi^n$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \pi$ et le rayon de convergence est $\boxed{R = \dfrac{1}{\pi}}$.

2- On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(a_n)x^n| \leq |a_n x^n|$.

Cette majoration montre que si $\sum a_n x^n$ converge absolument, alors $\sum \sin(a_n)x^n$ converge aussi absolument.

donc $R' \geq R$

3- Si $R > 1$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $x = 1$. Donc $\lim a_n = 0$, donc $\sin(a_n) \overset{n\to+\infty}{\sim} a_n$

L'équivalence $|\sin(a_n)x^n| \overset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n|$ montre que l'une des séries entières converge absolument si et seulement si l'autre converge absolument. Donc $R = R'$.

4- La relation $R' \geq R$ toujours vérifiée montre que $\dfrac{R}{R'} \leq 1$

Réciproquement , soit b un réel inférieur ou égal à 1 et $a_n = 2n\pi + b^n$

Dans ce cas $R = 1$, $\sin(a_n) = \sin(2n\pi + b^n) = \sin(b^n) \overset{n\to+\infty}{\sim} b^n$ et $R' = \dfrac{1}{b}$

donc $\dfrac{R}{R'} = b$

Le rapport $\dfrac{R}{R'}$ peut donc prendre toute valeur entre 0 et 1.

Sujet 3 : Centrale - maths II

Exercice 1 : a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

On suppose que A^2 possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

Montrer que A est diagonalisable.

b) Avec MAPLE Résoudre l'équation : $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

Sujet 4 : CCP

Exercice 1 : f et g sont deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E ayant n valeurs propres distinctes.

Montrer que : $\quad f_o g = g_o f \iff f$ et g ont mêmes vecteurs propres.

Exercice 2 : Montrer la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

SOLUTION : $u_n - u_{n-1} = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \ln^2(n-1)\right)$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \ln^2\left(n(1-\tfrac{1}{n})\right)\right) = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \left(\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})\right)^2\right)$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \ln^2(n) - 2\ln(n)\ln(1-\frac{1}{n}) - \ln^2(1-\frac{1}{n})\right)$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} + \ln n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \ln n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\right) = -\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon_n$$

$$u_n - u_{n-1} \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ est absolument convergente et la suite (u_n) également.

Sujet 5 : CCP

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation : $\quad X + {}^tX = \mathrm{tr}(X).A$

Exercice 2 : Existence, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{th}^\alpha x)dx$

Sujet 6 : TPE

Exercice 1 : Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$$

Exercice 2 : Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+...+t^n}$

a) Montrer que la suite (u_n) converge, calculer sa limite L.

(on pourra remarquer que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$)

b) Etudier la convergence de la série $\sum(u_n - L)$

SOLUTION :

Soit $\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+...+x^n}$, qui est bien défini car $1+x+x^2+...+x^n > 0$

$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$

$f_2(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, de même que $f_n(x)$ pour $n \geq 2$ car alors $f_n(x) \leq f_2(x)$.

La suite (u_n) est donc définie à partir du rang 2.

$\forall x \in [0,+\infty[-\{1\}, f_n(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$

- si $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1-x$
- si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$
- si $1 < x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers la fonction g.

- pour $n \geq 2$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g, qui est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car nulle sur intégrable sur $[1,+\infty[$).
- $\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{f_2(x)}_{\text{intégrable sur } [0,+\infty[}$.

Par application du théorème de convergence majorée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

Rappelons la formule de Taylor avec reste-intégrale à l'ordre 2 :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2!}f^{(3)}(t)dt$$

Sujet 7 : Centrale - maths I

Exercice 1 : Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ impair, $\exists Q_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(nx) = Q_n(\sin(x))$

Exercice 2 : Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $E_1 = \text{Vect}(\cos, \sin)$, sous-espace de E.

a) Soit $D_1 \ : \ \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_1 \\ y & \longrightarrow & y' \end{array}$

Montrer que $\exists f \in \mathcal{L}(E_1), \ f_o f = D_1$

b) Soit $D \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ y & \longrightarrow & y' \end{array}$

Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_o f = D$?

SOLUTION :

a) $D(\cos) = -\sin, \ D(\sin) = \cos$.

Puisque les images de cos et de sin par D sont dans $\text{Vect}(\cos, \sin)$.

Le sous espace $E_1 = \text{Vect}(\cos, \sin)$ est stable par D. Soit D_1 l'endomorphisme induit par D sur E_1.

La matrice de D_1 dans la base $(\cos, \sin)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

Or $A=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2})\\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}^2$

donc $D_1=f_of$ où f est l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $(\cos,\sin)$ est

$B=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

b) Supposons qu'il existe $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f_of=D$.

- Soit $g\in\ker f$: $f(g)=0 \implies f[f(g)]=f_of(g)=D(g)=0$
  donc g est une fonction constante k.
- Notons u la fonction constante de valeur 1.
  $D(u)=0=f[f(u)]$ donc $f(u)\in\ker f$, donc $f(u)$ est une constante : $\exists a\in\mathbb{R},\ f(u)=a.u$
  alors $D(u)=0=f[f(u)]=f(a.u)=af(u)=a^2u$ donc $a=0$ et finalement $f(u)=0$
- On a ainsi montré que $\boxed{\ker f=\text{Vect}(u) \text{ est l'ensemble des fonctions constantes.}}$
- Notons X la fonction polynomiale $(x\mapsto x)$
  $f_of(X)=D(X)=u$ donc $f_of_of(X)=f_oD(X)=f(u)=0$ donc $f_of_of(X)=D_of(X)=0$

donc $f(X)$ est une fonction constante de la forme $b.u$ et $D(X)=f[f(X)]=f(b.u)=b.f(u)=0$

On a ainsi obtenu contradiction entre $D(X)=u$ et $D(X)=0$

L'hypothèse de départ comme quoi il existait $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f_of=D$ s'est donc révélée absurde.

Sujet 8 : Centrale - maths II

1- Définir les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$

Tracer les boules unités sur MAPLE.

2- On redéfinit la notion de médiatrice de la façon suivante :

Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^2)^2$, $\Delta(a,b)=\{c\in\mathbb{R}^2,\ \|c-a\|_\infty=\|c-b\|_\infty\}$

Expliciter $\Delta(a,b)$ et le tracer dans les différents cas avec MAPLE.

3- Même question dans $\mathbb{R}^3$ où pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\Delta(a,b)=\{c\in\mathbb{R}^3,\ \|c-a\|_\infty=\|c-b\|_\infty\}$

SOLUTION **:**

1- L'aide en ligne **?plot** permet de trouver le bon outil pour chacun des tracés :

- $\|(x,y)\|_1=|x|+|y|$
  >plot([x+1,x-1,-x+1,-x-1], x=-2..2,y=-2..2,color=[violet,blue,black,navy],scaling = constrained);
- $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$
  plot([1,x,x=0..2*Pi],coords=polar,scaling = constrained);
- $\|(x,y)\|_2=\max|x|,|y|$
  with(plots);
  implicitplot(x=1,y=1,x=-1,y=-1, x=-2..2,y=-2..2,scaling = constrained);

Sujet 9 : CCP

Exercice 1 : Comparer pour l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$, $\sin(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ après les avoir exprimés sous forme de sommes de séries.

Contrôler le résultat obtenu avec MAPLE (question rajoutée)

SOLUTION :

- La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et $\forall z\in\mathbb{C},\ \sin(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

  En particulier, $\sin(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}+...$
- La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et $\forall z\in\mathbb{C},\ \exp(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right) dx$$

Notons $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$

$$\|u_n(\ )\|_\infty^{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{2^n n!}$$

La série $\sum \frac{1}{2^n n!}$ est convergente. La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge donc normalement et donc uniformément sur le segment $[0,1]$.

On sait qu'alors $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$

donc $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)n!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - ...$

• Dans chaque série regroupons les termes deux par deux :

$$\sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{ avec } \ a_n = \frac{1}{(4n+1)!} - \frac{1}{(4n+3)!} = \frac{(4n+3)(4n+2)-1}{(4n+3)!}$$

$$a_n = \frac{16n^2+20n+5}{(4n+3)!}$$

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \text{ avec } \ b_n = \frac{1}{2^{2n}(4n+1)(2n)!} - \frac{1}{2^{2n+1}(4n+3)(2n+1)!}$$

$$b_n = \frac{2(2n+1)(4n+3)-(4n+1)}{2^{2n+1}(4n+1)(4n+3)(2n+1)!} = \frac{16n^2+16n+5}{2^{2n+1}(4n+1)(4n+3)(2n+1)!}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{16n^2+16n+5}{2^{2n+1}(4n+1)(4n+3)(2n+1)!}.\frac{(4n+3)!}{16n^2+20n+5}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{16n^2+16n+5}{16n^2+20n+5}.\frac{(2n+2)(2n+3)...(4n-1)4n(4n+2)}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{16n^2+16n+5}{16n^2+20n+5}.(n+1)(n+\tfrac{3}{2})(n+2)(n+\tfrac{5}{2})...(2n-\tfrac{1}{2})2n(n+\tfrac{1}{2}) \geq 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$ donc, par addition

$$\sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

• Vérification avec **MAPLE** :

```
>sin(1);evalf(%);
  .8414709848
int(exp(-x*x/2),x=0..1);evalf(%);
  .8556243915
```

Exercice 2 : Tracer la courbe de paramétrisation polaire $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{2}$

Sujet traité en cours

Sujet 10 : TPE

Exercice 1 : On considère la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n(n+1)}$ où $R(n)$ est le reste de la division de n par 5.

1- Etudier la convergence de la série.

2- Calculer la somme partielle $S_{5n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3- En déduire la somme de la série.

Exercice 2 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a \neq b,\ c \neq 0$ et $P(X) = (X-a)(X-b)(X^2+X+c)$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$

Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ et que $\det(A) \geq 0$

SOLUTION :

Exercice 1 :

1- $0 \leq \dfrac{R(n)}{n(n+1)} \leq \dfrac{4}{n^2}$

donc $\sum \dfrac{R(n)}{n(n+1)}$ converge par majoration par une série de Riemann convergente.

2-3- Pour tout k, $\begin{cases} R(5k) = 0 \\ R(5k+1) = 1 \\ R(5k+2) = 2 \\ R(5k+3) = 3 \\ R(5k+4) = 4 \end{cases}$, Sachant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$,

$$S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} R(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[1.\left(\frac{1}{5k+1} - \frac{1}{5k+2}\right) + 2.\left(\frac{1}{5k+2} - \frac{1}{5k+3}\right) + 3.\left(\frac{1}{5k+3} - \frac{1}{5k+4}\right) + 4.\left(\frac{1}{5k+4} - \frac{1}{5k+5}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} - \underbrace{\frac{5}{5k+5}}_{\frac{1}{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{5n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_{5n} - H_n$$

On sait que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

D'où $\quad S_{5n} = \ln(5n) + \gamma + \varepsilon_{5n} - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 5 + \varepsilon_{5n} - \varepsilon_n$

Finalement, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{R(n)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_{5n} = \ln 5}$

Exercice 2 :

Le trinôme $X^2 + X + c$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4c < 0$ puisque $c \in \mathbb{N}^*$. Il admet deux racines complexes non réelles α et β qui vérifient $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha.\beta = c$ (relations coefficients-racines) De plus $\beta = \overline{\alpha}$

Le polynôme annulateur $P(X) = (X-a)(X-b)(X^2+X+c) = (X-a)(X-b)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racines distinctes.

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sa réduite diagonale, B n'a sur la diagonale que des nombres pris parmi $a, b, \alpha, \overline{\alpha}$, puisque les valeurs propres de A sont parmi les racines de son polynôme annulateur.

Notons respectivement p, q et r le nombre de fois que figurent respectivement $a, b, \alpha, \overline{\alpha}$ sur cette diagonale. Remarquons que α et $\overline{\alpha}$ figurent le même nombre de fois r (puisqu'ils sont complexes conjugués et que A est réelle).

Alors $\operatorname{tr}(A) = p.a + q.b + r(\alpha + \overline{\alpha}) = p.a + q.b - r \in \mathbb{Z}$

$\det(A) = a^p.b^q(\alpha.\overline{\alpha})^r = a^p.b^q.c^r > 0$

Sujet 11 : Centrale - maths I

Exercice 1 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{C})$:

" P est divisible par $X-1$ et a le même reste dans la division euclidienne par $(X-2)$, par $(X-3)$, et par $(X-4)$ "

1- Déterminer tous les éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $(\mathcal{C})$.

2- Donner la structure de l'ensemble constitué des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{C})$.

3- Donner tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $(\mathcal{C})$.

SOLUTION :

1- • Soit $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $(\mathcal{C})$. Soit a le reste commun à la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-2)$, $(X-3)$ et $(X-4)$

Le polynôme $P(X)-a$ est donc divisible par $(X-2)$, $(X-3)$, $(X-4)$ et par leur produit puisque ces trois polynômes sont deux à deux premiers entre eux.

$\exists Q(X) \in \mathbb{R}[X],\ P(X)-a=(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)$

$(X-2)(X-3)(X-4)$ est de degré 3 et $P(X)-a \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $Q(X)$ est de degré 0 : $\exists b \in \mathbb{R}, P(X)=(X-2)(X-3)(X-4)b+a$

Par ailleurs, $P(X)$ est divisible par $X-1$, donc $P(1)=0$ et donc $-6b+a=0$

Donc $P(X)=b[(X-2)(X-3)(X-4)+6]=b(X^3-9X^2+26X-18)$

• Réciproquement, si P est de la forme $P(X)=b(X^3-9X^2+26X-18)$, on vérifie facilement que $P(1)=0, P(2)=P(3)=P(4)=6b$, c'est à dire que P vérifie la condition $(\mathcal{C})$.

2- Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la condition $(\mathcal{C})$.

Il est clair que $\mathcal{A}$ est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire. $\mathcal{A}$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3- Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(\mathcal{C})$. Par un raisonnement analogue à la première question, on montre que :

$\exists Q(X) \in \mathbb{R}[X],\ P(X)-a=(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)$

La condition $P(1)=0$ entraîne alors que $a=6Q(1)$

Donc $P(X)=(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)+6Q(1)$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que tout polynôme de a forme

$P(X)=(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)+6Q(1)$ où $Q(X)$ est un polynôme réel quelconque, est bien solution de $(\mathcal{C})$.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et G un sous groupe fini de $GL(E)$.

On pose $h=\dfrac{1}{\text{card}(G)}\displaystyle\sum_{g\in G} g$ et $F=\displaystyle\bigcap_{g\in G}\ker(g-Id_E)$

1- Montrer que $\forall f \in G,\ h_o f=h$

2- Montrer que $h_o h=h$

3- Montrer que $\text{Im}(h)=F$

4- Montrer que $\text{Card}(G)\times\dim(F)=\displaystyle\sum_{g\in G}\text{tr}(g)$

5- Donner G et F pour $n=2,3$

SOLUTION :

1- Soit $f \in G$. L'application $\left\{\begin{array}{lcl} G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & g_o f\end{array}\right.$

est bien une application de G dans G (G est stable pour la loi o),

injective ($g_o f=g'_o f \implies g=g'$ en composant par f^{-1}),

surjective ($\forall g \in G, g=\underbrace{(g_o f^{-1})}_{\in G}\ {}_o f$)

$h_o f=\dfrac{1}{\text{card}(G)}\displaystyle\sum_{g\in G} g_o f$. D'après ce qui précède, quand g décrit G, $g_o f$ décrit aussi G,

donc $h_o f=\dfrac{1}{\text{card}(G)}\displaystyle\sum_{g'\in G} g'=h$

2- $h_o h=\left(\dfrac{1}{\text{card}(G)}\displaystyle\sum_{g\in G} g\right)_o\left(\dfrac{1}{\text{card}(G)}\displaystyle\sum_{g'\in G} g'\right)=\dfrac{1}{\text{card}(G)^2}\displaystyle\sum_{g\in G}\sum_{g'\in G} g_o g'$

Pour g fixé dans G, lorsque g' décrit G, alors $g_o g'$ décrit G, et $\displaystyle\sum_{g'\in G} g_o g'=\sum_{g''\in G} g''=\text{card}(G).h$

Donc $h_o h=\dfrac{1}{\text{card}(G)^2}\displaystyle\sum_{g\in G}(\text{card}(G).h)=\dfrac{1}{\text{card}(G)}\sum_{g\in G} h=\dfrac{1}{\text{card}(G)}\text{card}(G)h=h$

h est donc un projecteur de E.

3- • Soit $y \in \text{Im}(h)$. $\exists t \in \mathbb{R}^n, y = h(t)$

Pour tout $g \in G, (g - Id_E).y = g_o h(t) - h(t)$

Or $g_o h = h$ (démonstration analogue à la première question), donc $(g - Id_E).y = 0$ et $y \in \ker(g - Id_E)$

Ceci étant vrai pour tout $g \in G$, $\text{Im}(h) \subset F = \bigcap_{g \in G} \ker(g - Id_E)$

• Supposons que $y \in F = \bigcap_{g \in G} \ker(g - Id_E)$

alors $\forall g \in G, g(y) = y$ donc $h(y) = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} g(y) = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} y = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \text{card}(G).y = y$

donc $y = h(y) \in \text{Im}(h)$

On a ainsi montré que $F \subset \text{Im}(h)$ et l'égalité par double inclusion.

4- On a montré en 2- que h est un projecteur.

Donc $\dim(F) = \dim(\text{Im}(h)) = \text{rg}(h) = \text{tr}(h) = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$

Ceci montre bien que $\text{Card}(G) \times \dim(F) = \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$

Sujet 12 : CCP

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et soit $f \in L(E)$ tel que $\text{rg}(f) = 2$ et $f^3 = 0$

1- Montrer que $\text{rg}(f^2) = 1$

2- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f soit :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3- En déduire l'ensemble des endomorphismes commutant avec f.

SOLUTION :

1- $\text{Im}(f^2) = f(\text{Im}(f))$

Notons f' la restriction de f à $\text{Im}(f)$. Son image est $f(\text{Im}(f))$ $=\text{Im}(f^2)$

$$f' : \begin{cases} \text{Im}(f) \longrightarrow \text{Im}(f^2) \\ \quad x \mapsto f(x) \end{cases}$$

$\ker f' = \text{Im}(f) \cap \ker(f)$ avec $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$ par le théorème du rang.

Si $\ker f'$ était réduit à $\{0\}$, f' serait injective, f'^2 et f'^3 aussi et on n'aurait pas $f^3 = 0$

donc $\ker f' = \ker f$ par inclusion et égalité des dimensions.

En appliquant le théorème du rang à f' on obtient alors :

$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f')) + \dim(\text{Im}(f^2))$

d'où l'on déduit que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) - \dim(\ker(f')) = 2 - 1 = 1$

2- $\dim(\text{Im}(f^2)) = 1$, donc $\text{Im}(f^2)$ est une droite. Soit e_3 un vecteur non nul de cette droite.

$e_3 \in \text{Im}(f^2)$ donc $\exists e_1 \in E,\ e_3 = f^2(e_1)$

Soit enfin $e_2 = f(e_1)$

Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$

$$ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0 \implies af^2(e_1) + b\underbrace{f^3(e_1)}_{=O} + c\underbrace{f^4}_{=O}(e_1) = 0$$

$$\implies ae_3 = 0 \quad \implies a = 0$$

On a ainsi $be_2 + ce_3 = 0$. En composant par f^2, on obtient de la même manière $b = 0$. Puis $ce_3 = 0$ entraîne $c = 0$ puisque e_3 n'est pas nul.

Le système (e_1, e_2, e_3) est donc libre. Il comporte trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de E.

Notons $\mathcal{B}$ cette base.

Les égalités $f(e_1)=e_2,\ f(e_2)=f^2(e_1)=e_3,\ f(e_3)=f^3(e_1)=0$ montrent que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

3- Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=A$

Soit $g\in\mathscr{L}(E)$, de matrice $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$g_o f=f_o g \iff M.A=A.M \iff \begin{pmatrix}b&c&0\\e&f&0\\h&j&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases}b=c=f=0\\a=e=j\\d=h\end{cases} \iff M=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix}=aI_3+dA+gA^2$

$\iff g=aId_E+df+gf^2$

En conclusion, le commutant de f est l'espace vectoriel engendré par (Id_E,f,f^2). Il est de dimension 3. (il est clair que les matrices (I_3,A,A^2) forment un système libre)

Exercice 2 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et g soient paires, continues, 2π-périodiques, et égales à leur séries de fourier. Ainsi,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)\ \text{ et }\ g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\cos(nx)$$

On définit la fonction h telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{a_0b_0}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n\cos(nx)$$

1- Montrer que les séries $\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ et $\left(\frac{b_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ convergent.

2- Montrer que h est continue.

3- Montrer que h est égale à sa série de Fourier.

SOLUTION :

1- Soit $\mathcal{CPP}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires , 2π-périodiques et continues. Elles forment un espace vectoriel réel. (sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par exemple)

L'application $(f,g)\mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{CPP}$ (vérification sans difficulté)

$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2, <\cos(nx),\cos(mx)>=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt).\cos(mt)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(n+m)t+\cos(n-m)t)dt$

si $n\neq m, <\cos(nx),\cos(mx)>=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+m)t}{n+m}+\frac{\sin(n-m)t}{n-m}\right]_0^{2\pi}=0$

de manière générale, $<\cos(nx),\cos(mx)>=\begin{cases}0 \text{ si } m\neq n\\1 \text{ si } m=n\neq 0\\2 \text{ si } m=n=0\end{cases}$

En posant $\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\forall n\geq 1,\gamma_n=(x\mapsto\cos(nx))$, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{CPP}$ (ça n'en n'est pas une base)

$\forall n\in\mathbb{N}^*, <\gamma_n,f>=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)dt=a_n(f)$

(coefficients de Fourier de la fonction f)

$<\gamma_0,f>=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}a_0(f)$

Soit $\mathcal{W}_n = \text{Vect}(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$. $(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{W}_n$. La projection orthogonale de f sur $\mathcal{W}_n$ est donc :

$$p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} < \gamma_i, f > \gamma_i = < \frac{1}{\sqrt{2}}, f > \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^{n} a_i(f)\cos(ix) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx)$$

$f = \underbrace{p_n(f)}_{\in \mathcal{W}_n} + \underbrace{(f - p_n(f))}_{\in {\mathcal{W}_n}^{\perp}}$, par le théorème de Pythagore,

$$\|f\|^2 = \|p_n(f)\|^2 + \|f - p_n(f)\|^2$$

donc, pour tout n, $\|p_n(f)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} < \gamma_k, f >^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2 \leq \|f\|^2$

La majoration des sommes partielles montre que la série $\sum a_n^2$ converge. Même raisonnement pour la convergence de la série $\sum b_n^2$

2- Pour tout n, $|a_n b_n| \leq \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$. Cette majoration entraîne la convergence de la série $\sum |a_n b_n|$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ |a_n b_n \cos(x)| \leq |a_n b_n|$

La série $\sum a_n b_n \cos(x)$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

De plus $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n b_n \cos(x)| = |a_n b_n|$, la série de fonctions $\sum a_n b_n \cos(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction $x \mapsto a_n b_n \cos(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction h l'est aussi.

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0 b_0}{4}\cos(nt) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \cos(kt)\cos(nt) \right) dt$

la majoration $|a_k b_k \cos(kx)\cos(nt)| \leq |a_k b_k|$ montre la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_k a_k b_k \cos(kt)\cos(nt)$ sur le segment $[0, 2\pi]$

d'où $\displaystyle a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_k b_k \cos(kt)\cos(nt)dt$

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(nt)dt}_{=0 \ si \ k\neq n} = a_n b_n \qquad \text{(calcul analogue pour } a_0(h)\text{)}$$

On a ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle h(x) = \frac{a_0 b_0}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \cos(nx) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(h)\cos(nx)$,

ce qui montre que h est égale à sa série de Fourier.

Sujet 13 : Mines - Ponts

Passage immédiat au tableau sans préparation.

Exercice 1 : Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1..3 \\ j=1..3}}$

On dit que A vérifie la propriété (P) si : $\quad \chi_A(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{3}(a_{i,i} - X)$

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & -\alpha \\ 1 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

1- A quelle condition sur α, la matrice M vérifie-t-elle la propriété (P) ?

(réponse : pour tout α)

2- Trouver une CNS pour qu'une matrice quelconque $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P).

Exercice 2 : On définit une fonction f par l'égalité : $\displaystyle f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

1- Montrer que f est définie sur $I = [-1, 1]$

2- f est-elle C^∞ ?

3- f admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

Cours : Continuité des applications linéaires dans un espace vectoriel de dimension finie ; norme subordonnée.

Sujet 14 : Centrale - maths II avec MAPLE

1- Soit $f : x \mapsto 1 + \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt$

Montrer que f est une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ à l'aide du logiciel.

Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$

2- Soit $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Montrer que g est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que g est prolongeable en une fonction C^1 sur $[0,+\infty[$.

Donner sa limite quand $x \to +\infty$

3- Tracez grâce au logiciel f et g sur le même graphe et commentez.

SOLUTION :

• Soit $(x,t) \mapsto H(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

et soit $\Phi(x,y) = \displaystyle\int_y^{+\infty} H(x,t)dt$

Sous réserve que pour tout x la fonction $t \mapsto H(x,t)$ soit continue, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -H(x,y)$

(dérivation d'une intégrale fonction de la borne inférieure)

et sous réseve que l'on puisse apliquer la théorème de dérivation sous le signe $\int$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \int_y^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt$$

• Notons $H(x,t) = \dfrac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t) = \dfrac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+e^{-t}$ ne s'annule pas) donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} H(x,t)dt = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$

et $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -H(x,y) = -\dfrac{e^{-y}\sin(x-y)}{1+e^{-y}}}$

• Soit $y \in R$, fixé.

- pour tout $t \in [y,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. (H_1)
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. (H_2)
- La fonction H admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}\times[y,+\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[y,+\infty[,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-t}\cos(t-x)}{1+e^{-t}}$$

- pour tout $t \in [y,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. (H_1')
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. (H_2')
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[y,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{e^{-t}\cos(t-x)}{1+e^{-t}}\right| \leq e^{-t}$

avec $t \mapsto e^{-t}$ continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt = \Phi(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \int_y^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = -\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}dt}$$

• Par application des règles de dérivation de composées de fonctions de plusieurs variables,

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=1+\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}dt1=1+\Phi(x,x)$$

$$\Longrightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,x).1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,x).1=\int_x^{+\infty}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt-\underbrace{H(x,x)}_{=0}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}dt$$

En posant $G(x,t)=\dfrac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}$, et en appliquant le même raisonnement, f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt-G(x,x)$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt-\frac{e^{-x}\cos(x-x)}{1+e^{-x}}=-(f(x)-1)-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(x)=1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y''+y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

- **Avec MAPLE :**

  >**f:=x->int(exp(-t)*sin(x-t)/(1+exp(-t)),t=x..infinity);**

  Les dérivées première et seconde sont calculées par :

  diff(f(x),x); ou **D(f);**

  diff(f(x),x,x); ou **diff(f(x),x$2);** ou **D(D(f));**

  Après simplification on retrouve bien l'égalité :

$$\boxed{f''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$$

  et on termine le calcul comme ci-dessus pour trouver l'équation différentielle dont f est solution.

- $f(x)=1+\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt$

$$\forall x>0,\left|\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt\right|\le\int_x^{+\infty}\left|\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}\right|dt\le\int_x^{+\infty}e^{-t}dt=e^{-x}$$

  donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt=0$

  d'o'l'on conclut que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$

2- Soit $g:\ x\ \mapsto\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Cette série converge si et seulement si $x\in[0,+\infty[$ $\quad\left(\forall x\ge0,\left|(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|\le\dfrac{1}{n^2+1}\right)$

Pour tout $x\ge0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Chacune des fonctions u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et, $\forall p\in\mathbb{N}$, $u_n^{(p)}(x)=(-1)^{n+p}n^p\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Soit $a>0$ quelconque. $\|u_n^{(p)}\|_{[a,+\infty[}^{\infty}=n^p\dfrac{e^{-na}}{n^2+1}$. cette série converge car $n^p\dfrac{e^{-na}}{n^2+1}\overset{x\to 0}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Pour tout p, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement et donc uniformément sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Cela permet de montrer par récurrence sur p que la fonction somme, g, est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p sur l'intervale $[a,+\infty[$

a étant un réel >0 quelconque, g est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervale $]0,+\infty[$ et, $\forall x>0, g^{(p)}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{n^pe^{-nx}}{n^2+1}$

- Pour tout $x\ge0$, la série $\sum u_n'=\sum(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}$ est alternée, la suite $\left(\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}\right)$ est décroissante et de limite nulle. La série vérifie donc le critère de Leibniz des séries alternées.

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)-\sum_{k=0}^{n}u_k'(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k'(x)=r_n(x)$$

  D'après le théorème de majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère, pour tout n,

$\forall x \geq 0,\ |r_n(x)| \leq |u'_{n+1}(x)| = \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1}$

donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |r_n(x)| = \|r_n\|_{[0,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\| = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u'_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{ne^{-nx}}{n^2+1}$

• Puisque la convergence est uniforme sur $[1,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} u_n(x)\right) = 1+0+0+....$$

(car $u_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

3- $\forall x > 0,\ g''(x) + g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\dfrac{n^2e^{-nx}}{n^2+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n^2+1)e^{-nx}}{n^2+1}$

$$g''(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

La fonction g est donc solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

• f et g sont deux solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Par différence, la fonction $f-g$ est solution de l'équation homogène (E_0) : $y'' + y = 0$

Donc il existe λ et μ réels tels que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) - g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$

Or on a vu que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} g = 1$ donc $\lambda = \mu = 0$, ce qui entraîne finalement que

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = g(x)$

• Ceci peut être vérifié **avec MAPLE** :

```
>f:=x->int(exp(-t)*sin(x-t)/(1+exp(-t)),t=x..infinity);
plot(f,0..10);
g:=x->sum((-1)^n*exp(-n*x)/(n*n+1),n=0..infinity);
plot(g,0..10);
```

On peut aussi tracer les deux graphes sur une même figure :

```
>with(plots);
G1:=plot(f,0..10,color = red); G2:=plot(g,0..10,color=blue);
display(G1,G2);
```

Sujet 15 : Centrale - maths I

Exercice 1 :

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ on appelle (E) la relation : $A^5 + 2A^4 + 2A^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

1-a) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (E).

Montrer que A n'est jamais inversible.

b) Est ce le cas dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? Exemple ?

2- Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifie (E).

SOLUTION :

1-a) Le polynôme $X^5 + 2X^4 + 2X^3 = X^3(X^2 + 2X + 2)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

Ses racines sont $0, \alpha = -1+i$ et $\overline{\alpha} = -1-i$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0,\alpha,\overline{\alpha}\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$

Puisque $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est de degré 3, de terme dominant $-X^3$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_A(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_A(x) = -\infty$. Puisque χ_A est une fonction continue, qui prend des valeurs négatives et des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule quelque par sur $\mathbb{R}$. Donc $\chi_A(X)$ admet au moins une racine réelle. ce ne peut être que 0 car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

La matrice A qui admet 0 pour valeur propre n'est donc pas inversible.

b) Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, la matrice $A = \alpha I_3$ vérifie bien la relation (E) mais est inversible.

2- • Par un raisonnement analogue à celui de $1-a)$, si n est impair, le polynôme caractéristique d'une matrice A vérifiant la relation (E), de degré impair, admet nécessairement une racine réelle, qui ne peut être que 0, et A n'est pas inversible.

Dans ce cas, aucune matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ ne peut vérifier (E).

• La matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifie (E).

Recherchons une matrice réelle C qui lui est semblable. Il suffit pour cela que C admette pour valeurs propres α et $\overline{\alpha}$, c'est à dire que $\mathrm{tr}(C) = \alpha + \overline{\alpha} = -2$ et $\det(C) = \alpha.\overline{\alpha} = 2$

Si $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il faut trouver a, b, c et d tels que $\begin{cases} a+d = -2 \\ ad - bc = 2 \end{cases}$

On peut prendre par exemple $a = -2, d = 0, b = 2, c = -1$, soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Si $n = 2p$ est pair, la matrice M diagonale par blocs, définie par blocs $2-2$, $M = \mathrm{diag}(\underbrace{C, C, ..., C}_{p\ fois})$ est inversible et vérifie la relation (E).

En conclusion, les entiers $n \in \mathbb{N}^*$, pour lesquels il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ qui vérifie (E), sont les entiers pairs.

Exercice 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbf{K}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(F, E)$

Soit alors $W = \{g \in \mathscr{L}(E, F) \ / \ f_o g_o f = \omega\}$

Montrer que W est un espace vectoriel et que $\dim W = \dim E \times \dim F - (\mathrm{rg}(f))^2$

Sujet 16 : Centrale - maths II avec MAPLE

Soit $F \ : \ x \ \mapsto \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$

1- Domaine de définition de F ? parité ?

Montrer que F est C^1 et calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F'(x)$

Montrer que $F'(x) = |x| \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2} dt$ lorsque $x \in \mathbb{R}^*$

2- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ F'(x) = \dfrac{2}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$

Montrer que f est C^2

3- Avec MAPLE : Déterminer l'expression de F à l'aide de fonctions usuelles en résolvant une équation différentielle.

Graphe de F ?

SOLUTION :

1- F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

On pose $H(x,t) = \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$ et on applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ grâce à la majoration : $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ (arguments à détailler)

On en conclut que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt}$$

- Si $x > 0$, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{1+\left(\frac{u}{x}\right)^2}\frac{1}{x}du = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{x^2+u^2}du$$

- Si $x < 0$, le changement de variable $u = -xt$ donne :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{1+\left(\frac{u}{x}\right)^2}\left(\frac{-1}{x}\right)du = -x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{x^2+u^2}du$$

Dans tous les cas, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'(x) = |x|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{x^2+u^2}du$

Cette formule n'est pas valable si $x = 0$.

2- En intégrant par parties sur l'intervalle $[0, b]$ et en passant à la limite quand $b \to +\infty$ dans l'égalité qui définit $F'(x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx).\frac{1}{1+t^2}dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x}\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$$

On applique à nouveau le théorème de dérivation sous le signe $\int$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$$

grâce à la majoration $\left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leq \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \underbrace{\dfrac{t^2}{1+t^2}}_{\leq 1}\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

d'où $F''(x) = \dfrac{-2}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$

$$F''(x) = \frac{-1}{x}F'(x) + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$$

En intégrant à nouveau par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}.(t\cos(xt))dt$$

$$= \left[\frac{-1}{1+t^2}.(t\cos(xt))\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}(\cos(xt) - xt\sin(xt))dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt}_{F'(x)} - x\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$$

d'où $F''(x) = \dfrac{-1}{x}F'(x) + \dfrac{1}{x}\left(F'(x) - x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt\right)$

$$F''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{((t^2+1)-1)\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt}_{F(x)}$$

$$\forall x > 0,\ F''(x) - F(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$$

(par le changement de variable $u = xt$, lorsque $x > 0$)

En posant $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$, F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y = -J \qquad \text{(E)}$$

La solution générale de l'équation homogène (E_0) est : $y(x) = A.e^x + Be^{-x}$

La fonction constante J est solution de l'équation complète.

La solution générale de l'équation complète est donc : $y(x) = A.e^x + Be^{-x} + J$

Donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ F(x) = A.e^x + Be^{-x} + J$

Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en passant à la limite en 0, on obtient :

$$F(0) = 0 = A + B + J$$

en passant à la limite en 0 dans l'égalité $F(x) = A.e^x - Be^{-x}$, on obtient :

$$F'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(0.t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} = A - B$$

Nous avons deux équations pour calculer A et B, mais cela ne suffit pas si on veut aussi calculer J et pas seulement exprimer A et B en fonction de J.

remarquons que $|F'(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x.t)}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

La fonction F' et donc bornée quand $x \to +\infty$. Donc $A = 0$.

Dès lors, $B = -\frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{2}$

Finalement, $\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = -\frac{\pi}{2} e^{-x} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})}$

Remarque : By the way, on a aussi montré l'égalité suivante, obtenue par dérivation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x.t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

Avec MAPLE :

```
>F:=x->int(sin(x*t)/t/(1+t*t),t=0..infinity);
G1:=plot(F,-0..10,clor=red);
G2:=plot(Pi/2*(1-exp(-x)),x=-0..10,color=blue);
with(plots):
display(G1,G2);
```

Sujet 17 : Centrale - maths I

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions positives continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $fg \geq 1$

Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right) \geq 1$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 2 :

Soit $\gamma \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{\gamma}$ et $b_n = a_n + a_{n+1}$

1- Etudier la convergence de la suite (a_n).

2- Montrer qu'il existe une suite (c_n) telle que $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k$

3- Montrer que la suite (b_n) converge vers une limite positive.

4- ?

***SOLUTION* :**

Exercice 2 :

• L'application $(f,g) \longrightarrow \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Par application de la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)} \right)^2 \leq \int_0^1 \sqrt{f(t)}^2 \int_0^1 \sqrt{g(t)}^2 dt = \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right)$$

or, par hypothèse, $\forall t \in [0,1], f(t)g(t) \geq 1$,

donc $\left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right) \underbrace{\geq}_{(1)} \left(\int_0^1 \underbrace{\sqrt{f(t)g(t)}}_{\geq 1} \right)^2 \underbrace{\geq}_{(2)} \int_0^1 1.dt = 1$

• Il y a égalité si et seulement si les inégalités (1) et (2) sont des égalités.

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1) si et seulement si les deux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ forment un système lié, si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sqrt{g} = \lambda.\sqrt{f}$, c'est à dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R},\ g = \lambda^2 f$

La condition $f.g \geq 1$ s'écrit alors $\lambda^2 f^2 \geq 1$ soit encore $\lambda f \geq 1$ puisque $f \geq 0$ et $\lambda \geq 0$.

Il y a alors égalité dans l'inégalité (2) si et seulement si $\int_0^1 \sqrt{f(t)g(t)} dt = 1$

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 \sqrt{\lambda^2 f(t)^2} dt = 1 \Longleftrightarrow \int_0^1 \lambda f(t) dt = 1 \Longleftrightarrow \int_0^1 (\lambda f(t) - 1) dt = 0$$

Or l'application $t \mapsto (\lambda f(t) - 1)$ est continue sur $[0,1]$ et positive. Son intégrale étant nulle, c'est la fonction nulle : $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \frac{1}{\lambda}$ et alors $g(t) = \lambda^2 f = \lambda$

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que si f est une fonction constante de valeur $c > 0$ et g une fonction constante de valeur $\frac{1}{c}$, alors $\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) = 1$

Exercice 2 :

1- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^\gamma$

a_n apparait donc comme la somme partielle de rang n de la série de terme général $\sum(-1)^{k-1}k^\gamma$

Or, puisque $\gamma > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma = +\infty \neq 0$.

La série $\sum(-1)^{k-1}k^\gamma$ diverge donc grossièrement et $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est divergente.}}$

2- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^\gamma \ = 1^\gamma - 2^\gamma + 3^\gamma - 4^\gamma + ... + (-1)^{n-2}(n-1)^\gamma + (-1)^{n-1}n^\gamma$

$a_n + a_{n+1} = 1^\gamma + 1^\gamma - 2^\gamma - 2^\gamma + 3^\gamma + 3^\gamma - 4^\gamma - 4^\gamma + ...$
$\quad ... + (-1)^{n-1}n^\gamma + (-1)^{n-1}n^\gamma + (-1)^n(n+1)^\gamma$

$a_n + a_{n+1} = 1^\gamma - (2^\gamma - 1^\gamma) + (3^\gamma - 2^\gamma) - (4^\gamma - 3^\gamma) + (5^\gamma - 4^\gamma) + ...$
$\quad ... + (-1)^{n-1}(n^\gamma - (n-1)^\gamma) + (-1)^n((n+1)^\gamma - n^\gamma)$

En posant $c_0 = 1,\ c_1 = 2^\gamma - 1^\gamma,\ c_2 = 3^\gamma - 2^\gamma, ...\quad c_n = (n+1)^\gamma - n^\gamma$, on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k.$$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n apparait comme la somme partielle de rang n de la série de terme général $\sum(-1)^k c_k$.

• Chaque c_k est positif $\ (c_k = (k+1)^\gamma - k^\gamma > 0)$

La série $\sum(-1)^k c_k$ est donc une série alternée.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = (n+1)^\gamma - n^\gamma = n^\gamma\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\gamma - 1\right] \overset{n\to+\infty}{\sim} n^\gamma.\gamma\frac{1}{n} = \frac{\gamma}{n^{1-\gamma}}$

Puisque $\gamma \in]0,1[, 1-\gamma > 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{\gamma}{n^{1-\gamma}} = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$

• $|c_{n+1}| - |c_n| = (n+2)^\gamma - 2(n+1)^\gamma + n^\gamma$

$|c_n| - |c_{n-1}| = (n+1)^\gamma - 2n^\gamma + (n-1)^\gamma = n^\gamma\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\gamma - 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\gamma\right]$

Rappelons que $\ (1+u)^\gamma = 1 + \gamma u + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}u^2 + o(u^2)$

donc $|c_{n+1}| - |c_n| = n^\gamma\left(1 + \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2n^2} - 2 + 1 - \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$

$|c_n| - |c_{n-1}| = n^\gamma\left(\frac{\gamma(\gamma-1)}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma(\gamma-1)}{n^2} < 0$ (puisque $\gamma \in]0,1[$)

La suite $(|c_n|)$ est donc décroissante à partir d'un certain rang. .

La série $\sum(-1)^k c_k$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées, elle est donc convergente.

• En admettant que $(|c_n|)$ est décroissante à partir du rang 0, le signe de la somme de la série est alors celui du premier terme, c'est à dire 1.

Donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k > 0$.

Sujet 18 : Centrale - maths II avec MAPLE

Exercice 1 : L'outil MAPLE peut être utilisé

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

Déterminer les sous espace de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Exercice 2 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\ A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$

Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite en fonction de A.

SOLUTION :

Exercice 1 :

• $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

>**with(linalg);**
A:=matrix(3,3,[-2,1,1,8,1,-5,4,3,-3]);
eigenvects(A);

$[0, 1, \{[3, 1, 5]\}], [-2, 2, \{[1, -1, 1]\}]$

• Soit (D) une droite vectorielle, engendrée par un vecteur w non nul. (D) est stable par u si et seulement si $u(w) \in (D)$, ssi w est un vecteur propre de A.

Les droites stables par A sont celles qui sont dirigées par un vecteur non nul de $E_A(0)$ ou de $E_A(-2)$.

Il y a donc deux droites stables par u, les droites $E_A(0) = \ker(u)$, dirigée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $E_A(-2)$, dirigée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque : Si f avait été diagonalisable, on aurait pu rechercher les plans stables par f selon la méthode vue en exercice (voir fichier "Diagonalisation", exercice 6.1 pages 37-38). Cette méthode n'est pas applicable ici : -2 est valeur propre double, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension 1, suivant les résultats donnés par MAPLE. f n'est donc pas diagonalisable.

On va alors utiliser la méthode exposée dans l'exercice 6.2 pages 38-39 :

Montrons qu'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$.

• Supposons que le vecteur $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de ${}^tA$: $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ {}^tA.C = \lambda C$

Soit x un vecteur de $\mathcal{H}$, de vecteur colonne $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

alors $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = {}^tX.C = 0$

Son image $f(x)$ a pour vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A.X$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n = (y_1, y_2, ..., y_n).\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^tY.C = {}^t(A.X).C = {}^tX.{}^tA.C = {}^tX.\lambda C$$

$$= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = 0$$

donc $f(x) \in \mathcal{H}$, ce qui montre que $\mathcal{H}$ est stable par f.

• Réciproquement, supposons que $\mathcal{H}$ est stable par f.

$\mathcal{H}$ est le noyau de la forme linéaire φ qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre
$\varphi(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$

φ a pour matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ${}^tC = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Par hypothèse, $\forall x \in \mathcal{H},\ f(x) \in \mathcal{H}$, c'est à dire,

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$$

Soit ψ la forme linéaire qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre ${}^tC.(AX)$

La stabilité de $\mathcal{H}$ par f se traduit par :

$\quad \forall X \in \mathbf{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$

soit aussi : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = 0 \implies \psi(x) = 0$

ou encore $\ker\varphi \subset \ker\psi$

donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \psi = \lambda\varphi$, ce qui se traduit matriciellement par : ${}^tC.A = \lambda\, {}^tC$

et en passant à la transposée, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ {}^tA.C = \lambda C$

donc C est vecteur propre de ${}^tA$.

- >**B:=transpose(A);**
  eigenvects(B);

  $\quad [0, 1, \{[2, 1, -1]\}], [-2, 2, \{[3, 1, -2]\}]$

  f admet donc deux plans stables, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ d'équations respectives :

  $\quad 2x + y - z = 0$ et $3x + y - 2z = 0$

Exercice 2 :

Le polynôme $Q(X) = X^3 - X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

>**solve(x^3 -x^2 -1/4*x+1/4 = 0);** $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$

$Q(X) = (X-1)(X+\frac{1}{2})(X-\frac{1}{2})$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (si on ne dispose pas de MAPLE, on remarque que 1 est racine et on poursuit la factorisation après avoir factorisé par (X-1))

Donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = P.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\Delta}.P^{-1}$$

$\Delta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, .., 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{\tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}}_{q \text{ fois}}, \underbrace{-\tfrac{1}{2}, ..., -\tfrac{1}{2}}_{r \text{ fois}})$

$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P.\mathrm{diag}(1^k, .., 1^k, (\frac{1}{2})^k, ..., (\frac{1}{2})^k, (-\frac{1}{2})^k, ..., (-\frac{1}{2})^k).P^{-1}$

Par continuité du produit matriciel,

$\quad \lim\limits_{n\to+\infty} A^k = P.\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diag}(1^k, .., 1^k, (\frac{1}{2})^k, ..., (\frac{1}{2})^k, (-\frac{1}{2})^k, ..., (-\frac{1}{2})^k).P^{-1}$

$\quad \lim\limits_{n\to+\infty} A^k = P.\mathrm{diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0).P^{-1} = P.\Delta_0.P^{-1} = B$

$$\text{où } \Delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $R(X) \in \mathbb{R}[X]$, $R(\Delta) = \text{diag}(R(1), ..., R(1), R(\frac{1}{2}), ..., R(\frac{1}{2}), R(-\frac{1}{2}), ..., R(-\frac{1}{2}))$

Pour avoir l'égalité $R(\Delta) = \Delta_0$, il suffit que $\begin{cases} R(1) = 1 \\ R(\frac{1}{2}) = 0 \\ R(-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

Les deux dernières conditions entraînent que $R(X)$ est divisible par $(X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2}) = X^2 - \frac{1}{4}$

Donc $R(X) = \frac{4}{3}(X^2 - \frac{1}{4})$ convient. En multipliant l'égalité $R(\Delta) = \Delta_0$ à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient : $P.R(\Delta).P^{-1} = P.\Delta_0.P^{-1}$ soit $R(P.\Delta.P^{-1}) = R(A) = B$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^k = B = \frac{4}{3}\left(A^2 - \frac{1}{4}I_n\right) = \frac{4}{3}A^2 - \frac{1}{3}I_n}$$

Sujet 19 : TPE

Exercice 1 :

Déterminer les fonctions 2π-périodiques solutions de l'équation différentielle : $y'' + ye^{it} = 0$

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit f un endomorphisme de E.

Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\text{rg}(f) + \text{rg}(Id_E - f) = \dim E$

SOLUTION :

Exercice 2 : Soit f une fonction 2π-périodique solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + ye^{it} = 0$$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$$

L'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)e^{ix}$ montre que la fonction f'' est elle aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f'')e^{inx}$$

Or on sait que $c_n(f') = inc_n(f)$ et donc $c_n(f'') = -n^2c_n(f)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x)e^{ix} = 0 \implies -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n(f)e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{i(n+1)x} = 0$$

$$\implies -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n(f)e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-1}(f)e^{inx} = 0$$

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_{n-1}(f) - n^2c_n(f))e^{inx} = 0$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^4$, $c_n(f^{(4)}) = n^4c_n(f)$. On sait que $\lim\limits_{|n|\to\infty} c_n(f^{(4)}) = 0$ donc $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

La série $\sum |c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f)|$ est convergente car $c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or on sait que lorsque la série $\sum |\gamma_n|$ converge, $\gamma_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)e^{-inx}dx$ où

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$$

L'égalité $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f))e^{inx} = 0$ vraie pour tout x réel entraîne alors :

$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f) = 0$

Pour $n = 0$, on obtient $c_{-1}(f) = 0$

Pour $n = -1$, on obtient alors $c_{-2}(f) = 0$ et par récurrence immédiate, $\forall n \geq 0,\ c_n(f) = 0$

Pour $n = 1$, on obtient $c_1(f) = c_0(f)$

puis, pour $n = 2$, $c_2(f) = \frac{1}{2^2}c_1(f) = \frac{1}{2^2}c_0(f)$

pour $n = 3$, $c_3(f) = \frac{1}{3^2}c_2(f) = \frac{1}{(2.3)^2}c_0(f)$

et, par récurrence immédiate, $\forall n > 0,\ c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2}c_0(f)$

• Réciproquement, la série $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!^2}$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (puisque $\frac{1}{n!^2} = o(\frac{1}{n^k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) et vérifie la condition $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f) = 0$, qui est suffisante pour que S soit solution de (E).

Exercice 2 :

• Si f est un projecteur alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$, on montre que $\mathrm{Im}(Id_E - f) = \ker f$, et en passant aux dimensions,

$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(Id_E - f) = \dim E$

• Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(Id_E - f) = \dim E$

Pour tout $x \in E$, $\quad x = f(x) + (Id_E - f)(x)$

donc $E \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(Id_E - f)$. L'inclusion inverse étant vraie, il y a égalité.

D'après la formule de Grassmann,

$$\underbrace{\dim\Big(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(Id_E - f)\Big)}_{=n} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Im}(Id_E - f))}_{=n \text{ par hypothese}} - \underbrace{\dim\Big(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f)\Big)}_{\geq 0}$$

Donc $\quad \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Im}(Id_E - f)) = n \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

Pour tout $x \in E$,

$f^2(x) - f(x) = f\big(f(x) - x\big) = (Id_E - f)\big(-f(x)\big) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(Id_E - f) = \{0\}$

donc $f^2(x) = f(x)$ et f est un projecteur.

Sujet 20 : CCP

Exercice 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}t + \mathrm{ch}\alpha}$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)dt \quad$ (on posera $e^t = u$)

Exercice 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$

Justifier les propositions suivantes :

1- A est inversible

2- A est diagonalisable.

Exercice rajouté : $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

f admet-elle sur E des extrema globaux ? des extrema locaux ?

SOLUTION :

Exercice 1:

• La fonction $f\ :\ t\ \mapsto\ \dfrac{1}{\text{ch}t+\text{ch}a}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (la fonction au dénominateur est continue et ne s'annule pas)

et de plus $f(t)\overset{t\to+\infty}{\sim}2e^{-t}$, donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$

• $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{2}{e^t+e^{-t}+e^a+e^{-a}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2e^t}{e^{2t}+1+(e^a+e^{-a})e^t}dt$

$\displaystyle=\int_1^{+\infty}\frac{2du}{u^2+(e^a+e^{-a})u+1}$ (par le changement de variable $u=e^t$)

Le polynôme $u^2+(e^a+e^{-a})u+1$ a pour discriminant

$$\Delta=(e^a+e^{-a})^2-4=e^{2a}+e^{-2a}+2-4=(e^a-e^{-a})^2$$

et pour racines $u_1=\dfrac{-(e^a+e^{-a})+(e^a-e^{-a})}{2}=-e^a$ et $u_2=-e^{-a}$

d'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}f(t)dt=\int_1^{+\infty}\frac{2du}{(u+e^a)(u+a^{-a})}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\text{sh}a(u+e^{-a})}-\frac{1}{\text{sh}a(u+e^a)}du$

$\displaystyle=\frac{1}{\text{sh}a}\ln\left[\frac{u+e^{-a}}{u+e^a}\right]_1^{+\infty}=\frac{-1}{\text{sh}a}\ln\left(\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}\right)=\frac{-1}{\text{sh}a}\ln\left(\frac{e^{-a}(1+e^a)}{1+e^a}\right)=\frac{a}{\text{sh}a}$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{\text{ch}t+\text{ch}a}dt=\frac{a}{\text{sh}a}}$$

Exercice 2:

1- $2A^3+3A^2-6A-I_n=0\implies 2A^3+3A^2-6A=I_n$

$\implies A(2A^2+3A-6I_n)=I_n$

$\implies A$ est inversible et a pour inverse $A^{-1}=2A^2+3A-6I_n$

2- Le polynôme $P(X)=2X^3+3X^2-6X-1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

$\forall x\in\mathbb{R},P'(x)=6x^2+6x-6=6(x^2+x-1)$

$\Delta=1+4=5$. Le polynôme dérivée a pour racines $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(x_2)$	$\searrow$	$P(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Le calcul de $P(x_2)$ (à la calculatrice ou avec MAPLE ou à la main) montre que $P(x_2)<0$ et que $P(x_1)>0$

La continuité de P et ses variations montrent que P admaet 3 racines réelles α,β et γ telles que $\alpha<x_2<\beta<x_1<\gamma$

$P(X)$ est donc un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples. On en conclut que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Sujet 21 : Mines - Ponts

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\text{Argch}(\frac{n+1}{n})$

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé d'origine O, un triangle est formé des points A,B et C d'affixes respectives z,z^2 et z^3

Déterminer le complexe z pour que O soit l'othocentre du triangle ABC.

Exercice 3 : Déterminer une primitive de la fonction $f\ :\ x\ \mapsto\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

SOLUTION **:**

Exercice 1 :

Rappelons que la fonction ch restreinte à $[0,+\infty[$ est une bijections strictement croissante et continue de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, et que sa réciroque est la fonction Argch.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{n} \geq 1,\ u_n = \text{Argch}(\frac{n+1}{n})$ est bien défini, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \text{Argch}(1) = 0$.

Rappelons que le développement limité de la fonction ch en 0 est : $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (penser au DSE)

et donc $\text{ch}(x) - 1 \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$\text{ch}(u_n) = 1 + \frac{1}{n} \implies \text{ch}(u_n) - 1 = \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$

On en conclut que $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{n^{1/2}}$ ce qui montre que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente.}}$

Exercice 2 :

Soient $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} a \\ b\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} c \\ d\end{matrix}\right.$ deux vecteurs d'affixes $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff ac + bd = 0$

Or $\alpha.\overline{\beta} = (a + ib)(c - id) = ac + bd + i(bc - ad)$, $\overline{\alpha}.\beta = (a - ib)(c + id) = ac + bd - i(bc - ad)$

donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff ac + bd = 0 \iff \alpha.\overline{\beta} + \overline{\alpha}.\beta = 0$

• Soit $z \in \mathbb{C}$ et les points A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3

O est othocentre du triangle $ABC \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$

$\iff z(\overline{z}^3 - \overline{z}^2) + \overline{z}(z^3 - z^2) = 0$ et $z^3(\overline{z}^2 - \overline{z}) + \overline{z}^3(z^2 - z) = 0$

$\iff \overline{z}^2 - \overline{z} + (z^2 - z) = 0$ et $z^2(\overline{z} - 1) + \overline{z}^2(z - 1) = 0$

(en simplifiant par $z\overline{z} = |z|^2$ qui n'est pas nul, sinon $A = B = C = O$)

$\iff \overline{z}(\overline{z} - 1) = -z(z - 1)$ et $z^2(\overline{z} - 1) = -\overline{z}^2(z - 1)$

Si $z = 1$, alors $z = z^2 = z^3$ et les points A, B, C sont confondus. On peut donc diviser par z et par $z - 1$ qui sont non nuls :

O est othocentre du triangle $ABC \iff \dfrac{z}{\overline{z}^2} = \dfrac{\overline{z}}{z^2} \iff \left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^3 = 1$

Ecrivons z sous forme trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$

O est othocentre du triangle $ABC \iff \left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^3 = 1 \iff e^{3i\theta} = 1$

$\iff 3\theta = 0\ [2\pi] \iff \theta = 0\ [\dfrac{2\pi}{3}] \iff \theta \in \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Le cas $\theta = 0$ donne trois points alignés. Les z solutions sont donc $z = \rho e^{i\frac{2\pi}{3}} = \rho j$ et $z = \rho e^{i\frac{4\pi}{3}} = \rho\overline{j}$ où ρ est un réel > 0 quelconque.

Exercice 3 : La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ est définie et continue sur $J_1 =]-\infty, -1]$ et sur $J_2 = [1, +\infty[$.

Effectuons le changement de variable $x = \eta\,\text{ch}t$ où $\eta = -1$ si $x \in J_1$ et $\eta = 1$ si $x \in J_2$

alors $dx = \eta\,\text{sh}t\,dt$ et quand x décrit J_k, t décrit $[0, +\infty[$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\text{sh}\,t}{\text{ch}\,t\sqrt{\text{ch}^2\,t - 1}}\,dt = \int \frac{\text{sh}\,t}{\text{ch}\,t|\text{sh}\,t|}\,dt = \int \frac{dt}{\text{ch}\,t} = \int \frac{2\,dt}{e^t + e^{-t}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 2\int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1} = 2\text{Arctan}(e^t)$$

$x = \eta\,\text{ch}t \implies e^t + e^{-t} = 2\,\eta\,x \implies e^{2t} - 2\,\eta\,x\,e^t + 1 = 0$

$\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) \geq 0$ puisque $x \in J_k$

donc $e^t = \dfrac{2\,\eta\,x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = \eta\,x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

Sujet 22 : Centrale - Supelec

Exercice 1 : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \text{Arc cos}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\sum\limits_{n\geq 1} u_n x^n$ converge.

Exercice 2 : Justifier que l'intégrale $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1 + x^2)}dx$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1- Montrer que f est de classe C^2, calculer f' et f'' (on pourra utiliser une intégration par parties dans le calcul de f'')

Montrer que f est solution d'une équation différentielle du type $y - y'' = C$

$$\text{avec } C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx$$

(on ne cherchera pas à calculer C pour l'instant)

2- Calculer $f(0)$ et $f''(0)$ et en déduire f.

3- En remarquant que $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, calculer C.

4- ?

SOLUTION :

Exercice 1 : • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \text{Arc}\cos\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \text{Arc}\cos(1) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(u_n) = 1 - \dfrac{1}{n^2} \implies 1 - \cos(u_n) = \dfrac{1}{n^2}$

$$\implies \frac{u_n^2}{2} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \implies u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

La série entière $\sum\limits_{n\geq 1} u_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge (absolument) pour tous les $x \in]-1, 1[$ et diverge (grossièrement) pour tous les $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Reste à étudier la convergence aux points -1 et 1.

• L'équivalence $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ montre que la série diverge au point 1.

Mais cette équivalence ne dit rien du point -1, la série $(-1)^n u_n$ n'étant pas de signe constant, le théorème des équivalents ne s'applique pas.

Recherchons un développement de u_n avec un terme supplémentaire :

On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

donc $1 - \cos(x) - \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

d'où $1 - \cos(u_n) - \dfrac{u_n^2}{2} = -\dfrac{u_n^4}{24} + o(u_n^4) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^4}{24}$

$$\implies \frac{1}{n^2} - \frac{u_n^2}{2} \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^4}{24} \implies \left(\frac{1}{n} - \frac{u_n}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{u_n}{\sqrt{2}}\right)}_{\sim\frac{2}{n}} \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^4}{24} \sim -\frac{1}{6n^4}$$

$$\implies \frac{1}{n} - \frac{u_n}{\sqrt{2}} \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^3}$$

donc $\dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{12n^3} + o\left(\dfrac{1}{12n^3}\right)$ et $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n} + \dfrac{\sqrt{2}}{12n^3} + o\left(\dfrac{1}{12n^3}\right)$

d'où $u_n(-1)^n = \dfrac{\sqrt{2}(-1)^n}{n} + \dfrac{\sqrt{2}(-1)^n}{12n^3} + o\left(\dfrac{1}{12n^3}\right)$

La série $\sum \dfrac{\sqrt{2}(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées et les deux séries suivantes convergent absolument. La série $\sum(-1)^n u_n$ est donc convergente.

Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum u_n x^n \text{ converge si } x \in [-1, 1[\text{ et diverge sinon.}}$

Exercice 2 :

Justifier que l'intégrale $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)| \leq |\theta|$

Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \left|\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}\right| \leq \left|\frac{tx}{x(1+x^2)}\right| = |t|\frac{1}{1+x^2}$$

la fonction $x \mapsto |t|\dfrac{1}{1+x^2}$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

1-2- Notons $H(t,x) = \dfrac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}$

• Notons $J = \mathbb{R}$ et $I =]0,+\infty[$

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto H(t,x)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)

• La fonction H admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ continue sur $J \times I$ et

$$\forall (t,x) \in J \times I,\ \frac{\partial H}{\partial t}(t,x) = \frac{\cos(tx)}{1+x^2}$$

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x)$ est continue sur $J = \mathbb{R}]$. (H_1')
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x)$ est continue et intégrable sur I. (H_2')

Pour tout $(t,x) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x)\right| = \dfrac{|\cos(tx)|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ avec $(x \mapsto \frac{1}{1+x^2})$ continue et intégrable sur I. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial t}(t,x)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx$$

ATTENTION, le même raisonnement ne peut pas être uitilisé pour la dérivée seconde car $\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{x\sin(tx)}{1+x^2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin(tx)}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$

En intégrant par parties entre 0 et $a > 0$ puis en passant à la limite quand $a \to +\infty$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)\frac{1}{1+x^2}dx = \left[\frac{\sin(tx)}{t}.\frac{1}{1+x^2}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$f'(t) = \frac{2}{t}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{(1+x^2)^2}dx$$

Posons alors $g(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{(1+x^2)^2}dx$

La majoration $\left|\dfrac{x^2\cos(tx)}{(1+x^2)^2}\right| \leq \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ permet d'appliquer la théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction g, et d'en conclure qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos(tx)}{(1+x^2)^2}dx$$

Appliquons à nouveau une intégration par parties sur l'intervalle $[0,a], a > 0$ quelconque :

$$\begin{aligned}
g_a'(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^a \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,(x\cos(tx))dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1+x^2}\,(x\cos(tx))\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,(\cos(tx) - tx\sin(tx))dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{a\cos(ta)}{1+a^2} - \int_0^a \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^a \frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{a\cos(ta)}{1+a^2} - \int_0^a \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^a \frac{(x^2+1-1)\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{a\cos(ta)}{1+a^2} - \int_0^a \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^a \frac{\sin(tx)}{x}dx - t\int_0^a \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{a\cos(ta)}{1+a^2} - \int_0^a \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^{ta} \frac{\sin(u)}{u}du - t\int_0^a \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx\right)
\end{aligned}$$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$ est convergente (sans être absolument convergente)

Les deux autres intégrales figurant dans le calcul sont absolument convergentes quand $a \to +\infty$. En passant à la limite quand $a \to +\infty$, on obtient :

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du - t\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}(f'(t) - tC + tf(t)) \ \text{ avec } \ C = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$$

$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f'(t) = \frac{2}{t}g(t)$.

Puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}$, f' l'est aussi et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f''(t) = \frac{2}{t}g'(t) - \frac{2}{t^2}g(t) = \frac{1}{t}(f'(t) - tC + tf(t)) - \frac{2}{t^2}\frac{t}{2}f'(t) = f(t) - C$

La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$, l'égalité ci-dessus montre que $\lim\limits_{t\to 0} f''(t) = f(0) - C$, donc f' est dérivable en 0 et $f''(0) = f(0) - C$.

Par continuité des deux membres, l'égalité $f''(t) = f(t) - C$ est encore valable en 0 et f est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' - y = -C$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation (E) est du second ordre, linéaire, à coefficients constants.

L'équation homogène associé, $(E_0) : y'' - y = 0$ a pour solution générale :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$$

La fonction constante $t \mapsto C$ est une solution particulière de l'équation complète (E). La solution générale de (E) est donc de la forme :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} + C \quad \text{où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

En particulier, $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} + C$

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx$ donc $f(0) = 0 = \lambda + \mu + C$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx$ donc $f'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

Le système $\left\{\begin{array}{c}\lambda + \mu + C = 0\\ \lambda - \mu = \frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ donne : $\lambda = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2}$ et $\mu = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2}$

d'où $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2}\right)e^t - \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{C}{2}\right)e^{-t} + C = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}t - C\,\mathrm{ch}t + C$

3- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}dx - \int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx$

En reprenant l'égalité

$g_a'(t) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\cos(ta)}{1+a^2} - \displaystyle\int_0^a\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx + t\int_0^a\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx\right)$ et en passant à la limite quand $a \to +\infty$, on obtient :

$$g'(t) = (\tfrac{t}{2}f(t))' = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx - t\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx\right)$$

donc $tf'(t) + f(t) = f'(t) - t\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left((1-t)f'(t) - f(t)\right)$

. . . .

Sujet 23 : Mines - Ponts (sans préparation)

Exercice 1 : Soit $a \in]-1,1[$ et $g : x \mapsto \dfrac{1 - a\cos x}{1 + a^2 - 2a\cos x}$

1- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\cos(nx)$

Préciser le mode de convergence.

2- On considère une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

On pose $h(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$

a) Donner un développement en série trigonométrique de h

Montrer que la convergence est uniforme.

b) Montrer que f est C^1 et 2π-périodique.

3- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, trouver une fonction f telle que :

$$\lambda f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Exercice 2 :

Soient $a, b, c_k, k = 1..n$ des éléments de $\mathbf{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b & ... & b \\ a & c_2 & \ddots & b \\ a & \ddots & \ddots & b \\ a & ... & a & c_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(X) = A + X.J \quad \text{avec} \quad J = (1)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$$

1- Calculer $P(x) = \det(A(x))$ à l'aide de $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(c_i - x)$

et montrer que $\det(A) =$???????

2- Si $a = b$?

3- (pas abordée)

***SOLUTION* :**

Exercice 1 : 1- Lorsque $a \in]-1,1[$, la majoration $|a^n \cos(nx)| \leq |a|^n$ montre que la série de fonctions $\sum a^n \cos(nx)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$$(\|a^n \cos(nx)\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |a^n \cos(nx)| \leq |a|^n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(nx) = \text{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{inx}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right)$$

$$= \text{Re}\left(\frac{1-ae^{-ix}}{(1-ae^{ix})(1-ae^{-ix})}\right) = \text{Re}\left(\frac{1-ae^{-ix}}{a^2 - 2a\cos x + 1}\right) = \frac{1-a\cos x}{a^2-2a\cos x+1}$$

2- a) $h(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n f(t)\cos(n(x-t))\right)dt$

La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue par morceaux et 2π-périodique.

donc $\sup_{t\in[0,2\pi]} |a^n f(t)\cos(n(x-t))| \leq \|f\|_\infty |a|^n$ et la série de fonctions de la variable t , $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n f(t)\cos(n(x-t))$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$

L'intégrale de la série est alors égale à la série des intégrales :

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} a^n f(t)\cos(n(x-t))dt\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\left(\int_0^{2\pi} f(t)(\cos nx \cos nt - \sin nx \sin nt)dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a^n\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt\right)\cos nx - a^n\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt\right)\sin nx\right]$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a^n a_n(f)\cos nx - a^n b_n(f)\sin nx)}$$

(en notant $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt$)

• Les suites $(a_n(f))_n$ et $(b_n(f))_n$ sont bornées : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n |a_n(f)| \leq M$ et $|b_n(f)| \leq M$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\underbrace{a^n a_n(f)\cos nx - a^n b_n(f)\sin nx}_{u_n(x)}\right| \leq 2Ma^n$

$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \leq 2Ma^n$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. (puisque $|a| < 1$)

b) • de plus chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n'(x) = -n\, a^n a_n(f)\sin nx - n\, a^n b_n(f)\cos nx$$

$\|u_n'\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| \leq 2Mn\, a^n$ Cette série converge (on sait que la série entière $\sum n\, x^n$ a pour rayon de convergence 1 et converge pour tout $x \in]-1,1[$)

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que la somme de la série, la fonction $h = \sum u_n$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• **Remarque :** on peut aussi utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme à partir de l'expression $h(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$

• Chaque fonction u_n étant 2π-périodique, la somme de la série l'est aussi.

3- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On a vu qu'alors la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Si la fonction f vérifie l'égalité $\lambda f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, alors elle doit être continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, puisque le second membre l'est.

D'après le théorème de Dirichlet, elle est alors égale en tout point à sa série de Fourier, qui converege normalement sur $\mathbb{R}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$

Par ailleurs $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a^n a_n(f)\cos nx - a^n b_n(f)\sin nx)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\frac{a_0(f)}{2} + \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx = \sum_{n=0}^{+\infty}(a^n a_n(f)\cos nx - a^n b_n(f)\sin nx) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$\Longrightarrow\ a_0(f)\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((\lambda - a^n)a_n(f) - \frac{1}{n^2}\right)\cos nx + b_n(f)(\lambda + a^n)\sin nx = 0$$

On sait que lorque les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converegent absolument, les coefficients a_n et b_n sont uniques car donnés par les formules des coefficients de Fourier rappelées en question 2-a)

L'égalité précédente entraîne donc que :

$$a_0(f)\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) = 0$$

et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda - a^n)a_n(f) - \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $b_n(f)(\lambda + a^n) = 0$

. . . .

Sujet 24 : CCP

Exercice 1 :

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthnormale.

Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ /\ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$

Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer la matrice de la projection orthogonale sur G dans la base B.

Exercice 2 :

On considère une suite (u_n) telle que $u_0 \in]0,1[$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$. Montrer que la série des u_n converge et calculer $\lim(2^n u_n)$ quand $n \to +\infty$.

Sujet 25 : "Petites Mines", concours Spé

Exercice 1 :

Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

1- Prolonger $\widetilde{f}$ par continuité sur $[0, +\infty[$.

On appellera encore $\widetilde{f}$ la fonction prolongée.

2- Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $u \ : \ f \ \mapsto \ \widetilde{f}$.

Exercice 2 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin a + X\cos a)^n$ par X^2+1.

Sujet 26 : Saint Cyr

Exercice 1 :

1- Montrer que $\pi = 4(\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3})$

2- Développer la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ en série entière en précisant son domaine de convergence.

3- Avec MAPLE, élaborer un programme pour calculer les n premières décimales de π.

Exercice 2 :

1- Déterminer deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$

2- Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

SOLUTION :

Exercice 1 : 1 - $\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}\right) = \dfrac{\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{2}\right) + \tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{3}\right)}{1-\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{2}\right)\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$

Par ailleurs $0 < \frac{1}{2} < 1 \implies 0 < \text{Arctan}\frac{1}{2} < \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

de même $0 < \text{Arctan}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$

et donc $0 < \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$

l'égalité $\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}\right) = 1$ entraine alors $\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3} = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

2- On sait que $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Par application du théorème d'intégration terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Donc $\forall x \in]-1,1[,\ \text{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

On peut remarque que la série converge aussi pour les bornes -1 et 1 (série vérifiant le critère de Leibniz des séries alternées), et que l'égalité est encore vraie en ces points.

3- En appliquant l'égalité ci-dessus en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \frac{1}{3}$, on obtient :

$$\pi = 4\left(\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}\right) = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

On approchera π par : $\text{Vap} = 4\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(\frac{1}{2})^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(\frac{1}{3})^{2k+1}}{2k+1}\right)$

D'après la règle de majoration du reste dans une série alternée qui vérifie le critère de Leibniz, $|\text{Vap} - \pi| \leq 4\dfrac{(\frac{1}{2})^{2n+3} + (\frac{1}{3})^{2n+3}}{2n+3}$

On écrira une boucle qui ajoutera $(-1)^k\dfrac{(\frac{1}{2})^{2k+1} + (\frac{1}{3})^{2k+1}}{2k+1}$ à la somme s tant que $|\text{Vap} - \pi|$ reste supérieur à 10^{-n}

```
>Digits:=50; n:=10
signe:=1; k:=0; s:=0;
while (1/2^(2*k+1)+1/3^(2*k+1))/(2*k+1)>10^(-n)/4 do
        s:=s+signe*(1/2^(2*k+1)+1/3^(2*k+1))/(2*k+1);
        k:=k+1;signe:=-signe;
```

od;

Vap:=evalf(4*s);

Vérification : **evalf(Vap-Pi);**

Exercice 2 :

1- Déterminer deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}$

2- Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)dt=\left[(at^2+bt)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(2at+b)\frac{\sin nt}{n}dt$$
$$=-\int_0^{\pi}(2at+b)\frac{\sin nt}{n}dt=\left[(2at+b)\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\underbrace{2a\frac{\cos nt}{n^2}\,dt}_{=0}$$
$$\boxed{\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}((-1)^n(2a\pi+b)-b).}$$

2- En prenant $b=-1$ et $a=\dfrac{1}{2\pi}$, on obtient : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\frac{t(t-2\pi)}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kt dt$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{n}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\right)=\frac{\cos\frac{(n+1)t}{2}\sin(n\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}$$

En utilisant la formule $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{1}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}-\sin(\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\frac{t(t-2\pi)}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right)dt$

$$=\int_0^{\pi}\frac{t(t-2\pi)}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{(2n+1)t}{2}dt-\int_0^{\pi}\frac{t(t-2\pi)}{4\pi}dt$$
$$=\int_0^{\pi}g(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}dt-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{t^3}{3}-\pi t^2\right]_0^{\pi}$$
$$=\int_0^{\pi}g(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}dt+\frac{\pi^2}{6}$$

La fonction $g\ :\ t\mapsto\begin{cases}\dfrac{t(t-2\pi)}{2\pi\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t\in]0,\pi]\\ -2 & \text{si } t=0\end{cases}$ est continue sur $[0,\pi]$, dérivable sur $]0,\pi]$ et

$$\forall t\in]0,\pi],g'(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{2(t-\pi)\sin\frac{t}{2}-(t^2-2\pi t)\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$g'(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{2(t-\pi)(\frac{t}{2}+o(t^2))-\frac{1}{2}(t^2-2\pi t)(1+o(t))}{\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$g'(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{t^2-\pi t+o(t^2)-\frac{1}{2}t^2+\pi t+o(t^2)}{\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$g'(t)\overset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{1}{2}t^2}{(\frac{t}{2})2}=\frac{1}{\pi}$$

donc $\displaystyle\lim_{t\to0}g'(t)=\frac{1}{\pi}$, g est dérivable en 0 et g' est continue en 0. g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$.

Alors $\displaystyle\int_0^{\pi}g(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=\left[-g(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}g'(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\,dt$

$$\Longrightarrow \left|\int_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\right| \leq \frac{|g(0)|+|g(\pi)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi |g'(t)|dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En passant à la limite dans l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}dt + \frac{\pi^2}{6}$, on en conclut que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Sujet 27 : Ecole de l'air

Pour tout $n \geq 1$, on définit $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

et $S\ :\ x \ \mapsto\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

1- Déterminer le rayon de convergence de S.

2- Calculer $S(x)$ sur le domaine de convergence.

(on pourra calculer $(1-x)S(x)$)

3- ? ? ? ?

SOLUTION : 1- $\forall n \geq 1,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)a_n}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ puisque la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

On en conclut que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{1} = 1$

2- $\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$

$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})x^n$$

$$(1-x)S(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

donc, $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}.}$

Remarque : autre méthode : utiliser les séries produits.

Sujet 28 : CCP

Exercice 1 :

1- Montrer que $\forall x \in]0,\pi[,\ x(\pi-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$

2- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit s une symétrie. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r}\end{array}\right)$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ telle que $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = s_o f + f_o s$

1- Déterminer les complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi(f) - \lambda f = 0$

2- En déduire les valeurs propres de φ, leur sous espace propre associé ainsi que leur dimension.

3- En déduire que φ est diagonalisable.

SOLUTION :

Exercice 1 : Soit f la fonction impaire et 2π-périodique telle que $\forall x \in]0,\pi[,\ x(\pi-x)$. Une telle fonction existe bien, elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ses coefficients de Fourier-cosinus sont nuls car f est impaire et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{4}{\pi}\ \frac{1-(-1)^n}{n^3}$$

(après intégration par parties)

d'où, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3}$

• La fonction f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le téhorème de Dirichlet, sa série de Fourier converege en tout point de $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = f(x)$ et en particulier,

$\forall x \in]0,\pi[,\ \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = x(\pi - x)$

2- Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{4}$, ce qui donne : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.}$

Exercice 2 :

s étant une symétrie, $E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E)$.

dans une base formée de la réunion d'une base de $\ker(s - Id_E)$ et d'une base de $\ker(s + Id_E)$, la matrice de s est de la forme : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = J = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r}\end{array}\right)$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ telle que $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = s_o f + f_o s$

• Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, qu'on écrit par blocs sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right)$

$$\varphi(f) - \lambda f = 0 \iff s_o f + f_o s = \lambda f \iff J.M + M.J = \lambda M$$

$$\iff \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r}\end{array}\right) = \lambda\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -C & -D\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline C & -D\end{array}\right) = \lambda\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{c|c} (2-\lambda)A & -\lambda B \\ \hline -\lambda C & (-2-\lambda)D\end{array}\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} (2-\lambda)A = 0 \\ \lambda B = 0 \\ \lambda C = 0 \\ (2+\lambda)D = 0 \end{cases}.$$

• Si $\lambda \notin \{-2, 0, 2\}$, le système entraîne que $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ et $D = 0$, donc $M = 0$ et λ n'est pas valeur propre de φ.

(attention, toutes ces matrices A, B, C, D, M sont en général de dimensions différentes)

• Si $\lambda = 0, \varphi(f) = 0.f \iff A = 0$ et $D = 0$

$\iff M$ est de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0\end{array}\right)$

L'ensemble des matrices de type forment un sous espace de dimension $2r(n-r)$

• Si $\lambda = 2, \varphi(f) = 2.f \iff B = 0,\ C = 0$ et $D = 0$

$\iff M$ est de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$

L'ensemble des matrices de type forment un sous espace de dimension r^2

• Si $\lambda = -2, \varphi(f) = -2.f \iff A = 0,\ B = 0$ et $C = 0$

$\iff M$ est de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\end{array}\right)$

L'ensemble des matrices de type forment un sous espace de dimension $(n-r)^2$

Donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-2, 0, 2\}$.

La somme des dimensions des osus espaces propres est égale à :

$r^2 + 2r(n-r) + (n-r)^2 = (r + (n-r))^2 = n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$

Donc l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Sujet 29 : ENSAM avec MAPLE

Exercice 1 : Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ de coefficient général $a_{i,j}$ tel que : $\begin{cases} a_{i,j} = 3 \text{ si } i = j \\ a_{i,j} = -1 \text{ sinon} \end{cases}$

1- A est elle diagonalisable ?
Si oui, la diagonaliser

2- Trouver une formule donnant A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$?

Exercice 2 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$

1- Montrer que f est de classse C^2 sur $\mathbb{R}$.

2- Calculer $f''(x)$

3- En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

***SOLUTION* :**

Exercice 1 :

1- La matrice A étant symétrique et réelle, est diagonalisable.

Puisqu'on a MAPLE à disposition, on peut tester le comportement pour les petites valeurs de n :

```
>with(linalg):
A:=n->matrix(n,n,(i,j)-> if i=j then 3 else -1 fi);
for i from 2 to 8 do eigenvals(M(i)) od;
```

Dans le cas présent, $n = 5$.

```
eigenvals(A(5));
vp:=eigenvects(A(5));
```

$$[4, 4, \{[0, 0, 1, -1, 0], [0, 1, 0, -1, 0], [0, 0, 0, -1, 1], [1, 0, 0, -1, 0]\}], [-1, 1, \{[1, 1, 1, 1, 1]\}]$$

-1 est valeur propre simple, le sous espace propre associé étant la droite engendrée par le vecteur $U = (1, 1, 1, 1, 1)$

4 est valeur propre d'ordre 4, le sous espace propre associé étant l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, orthogonal au premier sous espace.

On récupère les vecteurs propres, qui fournirons les colonnes de la matrice de passage P :

```
>seq(op(vp[i][3]),i=1..2);
P:=transpose(matrix([seq(op(vp[i][3]),i=1..2)]));
Delta:=multiply(inverse(P),A(5),P);
```

Les matrices P et Δ aisi calculées permettent de diagonaliser la matrice A, c'est à dire d'écrire l'égalité : $A = P.\Delta.P^{-1}$

2- $A = P.\Delta.P^{-1}$ donc, pour tout n, $A^n = P.\Delta^n.P^{-1}$

Le résultat demandé est donné par :

```
multiply(P,diag(4^n,4^n,4^n,4^n,(-1)^n),inverse(P));
```

La formule qui permet de calculer Δ^n étant vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, cette formule l'est aussi.

Exercice 2 :

1-2- Notons $H(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}$

Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Quand $t \to 0$, $\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{(xt)^2}{2}}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} \dfrac{x^2}{2}$

La fonction $t \mapsto H(x,t)$ peut être prolongée en une fonction continue sur le fermé $[0, +\infty[$. Elle est intégrable sur tout segment et en particulier sur $[0, 1]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \le H(x,t) \le \dfrac{1+1}{t^2} e^{-t} \le 2e^{-t}$

Cette majoration montre que la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par additivité, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

• Notons $J = \mathbb{R}$ et $I =]0, +\infty[$

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur J. (H_1)

- pour tout $x \in J$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)

• La fonction H admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ continue sur $J \times I$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$$

Soit $a > 0$,

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-a,a]$. (H_1')

- pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2')

- Rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$.

Pour tout $(x,t) \in [-a,a] \times I$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{|xt|}{t}e^{-t} = ae^{-t}$ avec $(t \mapsto ae^{-t})$ continue et intégrable sur I. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que f est de classe $[-a,a]$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in [-a,a],\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$$

On applique le même raisonnement à la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$, en utilisant la majoration :

$$\forall (x,t) \in [-a,a] \times I \quad \left|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-t} \quad (H_3'')$$

On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-a,a]$ et que :

$$\forall x \in [-a,a],\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt$$

Ce raisonnement étant valable pour tout réel $a > 0$, la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Avec MAPLE, l'intégrale se calcule ainsi :

```
>int(cos(x*t)*exp(-t),t=0..infinity);
```

Ce calcul peut s'effectuer ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

On peut aussi effectuer une double intégration par parties

3- $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

donc $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{Arctan}(x) + c$

Or on a vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ donc $f'(0) = 0$ et $c = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \mathrm{Arctan}(t)dt = [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$\boxed{f(x) = x\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

Sujet 30 : CCP

Exercice 1 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$

$(a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et est nul sinon$)$

Déterminer les valeurs propres de A

En déduire son déterminant.

Exercice 2 : On considère la fonction $g\ :\ x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$

g est elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Sujet 31 : Mines - Ponts

Exercice 1 : (sans préparation)

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$q(x) = 2 + 3x + 5x^2 + x^3 + 7x^4 + x^5 + 5x^6 + 3x^7 + 2x^8$

Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on définit $\phi(k) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{q(x)} dx$

Pour quelle valeur de k, la valeur de $\phi(k)$ est elle minimale ?

SOLUTION :

• La fonction q est continue sur $[0, +\infty[$ et ne s'annule pas ($\forall x \in [0, +\infty[, q(x) \geq 2 > 0$)

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^k}{q(x)}$ est donc continue sur $[0, +\infty[$.

$\dfrac{x^k}{q(x)} \sim \dfrac{x^k}{2x^8} = \dfrac{1}{2x^{8-k}}$ quand $x \to +\infty$

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\dfrac{1}{2x^{8-k}} \leq \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \geq 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{q(x)} dx$ est convergente.

• Soient k et $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que $k < p$.

$$\phi(k) - \phi(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^k - x^p}{q(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx$$

faisons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ dans la deuxième intégrale :

$$\phi(k) - \phi(p) = \int_0^1 \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx - \int_1^0 \frac{\frac{1}{t^k}(1 - \frac{1}{t^{p-k}})}{q(\frac{1}{t})} \frac{dt}{t^2} \qquad \text{or } t^8 q(\tfrac{1}{t}) = q(t)$$

$$\phi(k) - \phi(p) = \int_0^1 \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx + \int_0^1 \frac{t^{6-k}(1 - \frac{1}{t^{p-k}})}{q(t)} dt \qquad \text{(en multipliant haut et bas par } t^8)$$

$$\phi(k) - \phi(p) = \int_0^1 \frac{x^k(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx + \int_0^1 \frac{t^{6-p}(t^{p-k} - 1)}{q(t)} dt = \int_0^1 \frac{(x^k - x^{6-p})(1 - x^{p-k})}{q(x)} dx$$

$$\phi(k) - \phi(p) = \int_0^1 \frac{\overbrace{x^k}^{\geq 0}(1 - x^{6-p-k})\overbrace{(1 - x^{p-k})}^{\geq 0}}{\underbrace{q(x)}_{\geq 0}} dx$$

$\phi(k) - \phi(p) \geq 0 \iff 6 - p - k \geq 0 \iff p + k \leq 6$

donc $\phi(0) \geq \phi(1) \geq \phi(2) \geq \phi(3)$ et $\phi(3) \leq \phi(4) \leq \phi(5) \leq \phi(6)$

La valeur minimale de $\phi(k), k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est donc $\phi(3)$.

Remarque : Le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ permet de montrer que $\phi(k) = \phi(6 - k)$

Exercice 2 : Etudier la quadrique (Σ) d'équation :

$xy + yz + xz + 2y - 1 = 0$

SOLUTION :

• $q(x, y, z) = xy + yz + xz = (x\ y\ z).\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tX.A.X$

La réduction de la matrice A s'écrit $A = P.\Delta.P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Soit M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) dans la base de départ $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et de ccordonnées (x', y', z') dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ telle que :

$$\overrightarrow{I}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{-1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{J}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{K}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

La formule de changement da base appliquée au vecteur $\overrightarrow{OM}$ donne :

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P.X'=\begin{pmatrix}0&\frac{-2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\text{ d'où l'on tire : } y=\frac{1}{\sqrt2}x'+\frac{1}{\sqrt6}y'+\frac{1}{\sqrt3}z'$$

$$M\in(\sum)\iff xy+yz+xz+2y-1=0$$
$$\iff (x\ y\ z).\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ \frac12&\frac12&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+2y-1=0\iff {}^tX.A.X+2y-1=0$$
$$\iff {}^tX'\,{}^tP.A.P.X'+2y-1=0$$
$$\iff {}^tX'\Delta.X'+2y-1=0$$
$$\iff -\tfrac12x'^2-\tfrac12y'^2+z'^2+2\left(\tfrac{1}{\sqrt2}x'+\tfrac{1}{\sqrt6}y'+\tfrac{1}{\sqrt3}z'\right)-1=0$$
$$\iff -\tfrac12(x'^2-2\sqrt2x')-\tfrac12(y'^2-\tfrac{4}{\sqrt6}y')+z'^2+\tfrac{2}{\sqrt3}z'-1=0$$
$$\iff -\tfrac12(x'-\sqrt2)^2+1-\tfrac12(y'-\tfrac{2}{\sqrt6})^2+\tfrac13+(z'+\tfrac{1}{\sqrt3})^2-\tfrac13-1=0$$
$$\iff -\tfrac12(x'-\sqrt2)^2-\tfrac12(y'-\tfrac{2}{\sqrt6})^2+(z'+\tfrac{1}{\sqrt3})^2=0$$

Soit Ω le point de composantes $X'_0=(\sqrt2,\frac{2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt3})$ dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$

(qui a aussi pour compsantes $X_0=P.X'_0=(-1,1,-1)$ dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$)

Dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$, (Σ) a pour équation :

$$-\tfrac12x''^2-\tfrac12y''^2+z''^2=0$$

Il est invariant par toutes les homothéties de centre Ω, sa section par un plan d'équation $z''=cte$ est un cercle. C'est donc un cône de révolution, un cône circulaire d'axe $(\Omega z'')$.

Sujet 32 : Centrale - maths I

Exercice 1 : Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$, $J=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\dots&1\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\det(A+\lambda J)=\det(A)+\lambda\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\Delta_{i,j}(A)$

Discuter, selon A, du cardinal de l'ensemble des $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $A+\lambda J$ soit inversible.

Exercice 2 : Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace de dimension n.

Notons $p=\dim(\ker(f-Id_E))$

1- Montrer que f est la composée d'au plus $n-p$ réflexions de E.

2- Trouver un endomorphisme orthogonal qui soit la composée de moins de n réflexions de E.

3- Soit f la composée de k réflexions de E.

Montrer que $n-p\le k$

Sujet 33 : Centrale maths II

Exercice 1 : Soit $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}^+\\ x&\mapsto&e^{-x^2}\end{array}\right.$

On définit $g\ :\ x\ \mapsto\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(x+n)$

1- Montrer que g est une fonction continue et périodique.

2- ??? (Equation différentielle ??)

Sujet 34 : ENSI

Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-[x]}dx$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Sujet 35 : ENSI

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

a) Etudier la convergence de la série $\sum u_n$. On note f la fonction somme.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$ sous forme de série.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(0)$

Exercice 2 :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

a) Exprimer z_n en fonction du module et de l'argument de z_0.

b) Représenter z_{n+1} en fonction de z_n.

c) Etudier la convergence de la suite (z_n).

SOLUTION :

Exercice 1 :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| = \left|\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right| \leq \dfrac{|x|}{n^2}$ car $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$

Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument en tout point de $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $a > 0$, $\forall x \in [-a,a], |u_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{n^2} \leq \dfrac{|a|}{n^2}$

donc $\|u_n\|_{[-a,a]}^\infty \leq \dfrac{|a|}{n^2}$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[-a,a]$.

b) La convergence étant uniforme sur le segment $[0,\pi]$,

$$\int_0^\pi f(t)dt = \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\pi u_n(t)dt\right) = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\pi \frac{1}{n}\sin\left(\frac{t}{n}\right)dt\right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left[-\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^\infty \left[1 - \cos\frac{\pi}{n}\right]$$

Remarque : cette dernière série en bien convergente puisque $\left[1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right] \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2n^2}$

c) On a vu que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$,

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n'(x) = \dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{x}{n}$

La majoration $\|u_n'\|_{\mathbb{R}}^\infty \leq \dfrac{1}{n^2}$ montre que la série des dérivées $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut alors appliquer le théorème de dériavtion des séries de fonctions et affirmer que la fonction somme $f = \sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty u_n'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n}$

En particulier $f'(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2 : • Si $z_0 = 0$, alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 0$

Sinon, soit $\rho = |z_0| > 0$

• Soit $\theta = \text{Arg}(z_0)\ \in]-\pi,\pi]$

Si $\theta = \pi$ alors $z_0 = -|z_0|$, $z_1 = 0$ et $\forall n \geq 1; z_n = 0$

• Supposons désormais que $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$

Pour $n \geq 0$, soient $\rho_n = |z_n|$ et $\theta_n = \text{Arg}(z_n)$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n}{2} = \rho_n e^{i\frac{\theta_n}{2}}\,\frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2} = \rho_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)e^{i\frac{\theta_n}{2}}.$$

Cette formule permet de montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,$ $\begin{cases} \theta_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& (1) \\ \theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} & (2) \\ \rho_{n+1} = \rho_n\cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & (3) \end{cases}$

$$(2) \implies \theta_n = \frac{\theta}{2^n}$$

$$(3) \implies \rho_n = \rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}})}$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-2}})}$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^2}\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-3}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-3}})}$$

$$..... \implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\rho}{2^n}\sin\theta$$

$$\implies \rho_n = \rho\frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \underset{}{\overset{n\to+\infty}{\sim}} \rho\frac{\sin\theta}{2^n\frac{\theta}{2^n}} = \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Ainsi, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0 \end{cases}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta}e^{i0} = \dfrac{\rho\sin\theta}{\theta}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{\rho\sin\theta}{\theta}}$$

Sujet 36 : Centrale maths I

Exercice 1 : $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. (e_1, e_2, e_3) en est une base orthonormée.

$\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$

$\mathscr{D}$ est la droite d'équations $\begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 1 \end{cases}$

Déterminer la droite $\mathscr{D}'$, symétrique orthogonale de $\mathscr{D}$ par rapport à $\mathscr{P}$.

Exercice 2 : ??????

Sujet 37 : Centrale maths II (avec MAPLE)

Exercice 1 : On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(t+1)}dt$

a) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+xt^2)(t+1)}dt = \frac{1}{1+x}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{t+1} + \frac{\frac{1}{x}+t}{\frac{1}{x}+t^2}\right)dt$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\left[-\ln(1+t) + \frac{1}{x}\sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}t) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+t^2\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1}{x}+t^2}{(1+t)^2}\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{2(1+x)}$$

. . . .

Sujet 38 : CCP

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite qui vérifie : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} \leq 2 - \dfrac{1}{u_n}$

Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 3$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 2$ sinon.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Sans calculer le polynôme caractéristique, trouver toutes les valeurs propres et les sous espaces propres.

SOLUTION :

puisque par hypothèse pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > 0$, il s'ensuit que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n \leq 2$

Soit g la fonction $x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x} - x$

$\forall x \in]0,2]$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{x^2}$

d'où le tableau de variations :

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$+$
			0		
		$-$		$-$	

qui montre que $\forall x \in]0,2], g(x) \leq 0$ c'est à dire $\forall x \in]0,2], 2 - \dfrac{1}{x} \leq x$

On en déduit que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{u_n} \leq u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante. Etant minorée par 0, elle est convergente.

Soit L sa limite. En passant à la limite dans l'inégalité $0 < u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{u_n}$ on en déduit que $0 \leq L \leq 2 - \frac{1}{L}$

d'où $L^2 - 2L + 1 \leq 0$ donc $(L-1)^2 \leq 0$ et donc $L = 1$.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 3$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 2$ sinon.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Sans calculer le polynôme caractéristique, trouver toutes les valeurs propres et les sous espaces propres.

SOLUTION :

a) A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

b) La matrice $A - I_n$ a tous ses coefficients égaux à 2. Elle est donc de rang 1. On en déduit que 1 est valeur propre de A et que le sous espace propre associé a pour dimension $n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$. c'est un hyperplan, d'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$

la matrice étant diagonalisable, la dimension de tout sous espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre considérée. Donc 1 est valeur propre d'ordre $n-1$.

Il nous reste à trouver une dernière valeur propre λ_n.

On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice. Donc $(n-1) \times 1 + \lambda_n = 3n$ et $\lambda_n = 3n - n + 1 = 2n + 1$

Remarquons que $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = [3 + 2(n-1)] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (2n+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc le sous espace propre relatif à la valeur propre $2n+1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} x^n$

SOLUTION : $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n})}$

$\sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \overset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = e^0 = 1$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Sujet 39 : ENSEA

Exercice 1 : Soit $f(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-x^2}dx$

Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est solution d'une équation différentielle et calculer $f(a)$.

SOLUTION :

• la majoration $|\sin(ax)e^{-x^2}|\leq e^{-x^2}$ montre que la fonction $x\mapsto\sin(ax)e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ quelque soit $a\in\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

• Notons $F(a,x)=\sin(ax)e^{-x^2}$ pour $(a,t)\in\underbrace{\mathbb{R}}_{J}\times\underbrace{[0,+\infty[}_{I}$

- pour tout $t\in I$, la fonction $a\mapsto F(a,x)$ est continue sur J. (H_1)
- pour tout $a\in J$, la fonction $x\mapsto F(a,x)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)

• La fonction F admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial a}$ continue sur $J\times I$ et

$$\forall(a,x)\in J\times I,\ \frac{\partial F}{\partial a}(a,x)=-x\cos(ax)e^{-x^2}$$

- pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,x)$ est continue sur J. (H'_1)
- pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,x)$ est continue et intégrable sur I. (H'_2)
- pour tout $(a,x)\in J\times I$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,x)\right|=\left|-x\cos(ax)e^{-x^2}\right|\leq xe^{-x^2}$ avec $x\mapsto xe^{-x^2}$ continue et intégrable sur I. (H'_3)

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial a}(a,x)dx$$

$$f'(a)=\int_0^{+\infty}x\cos(ax)e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(ax)(-2xe^{-x^2})dx$$

$$f'(a)=-\frac{1}{2}\left[\cos(ax)e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}-\frac{a}{2}\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-x^2}dx$$

$$f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}f(a)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E):\ 2y'+xy=1}$$

• L'équation homogène associée (E_0) : $2y'+xy=0$ a pour solution générale $y(x)=\lambda e^{-\int\frac{x}{2}dx}$

$$y(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Notons $y_0(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$ et appliquons la méthode de variation de la constante pour calculer la solution générale de (E) : on recherche cette solution sous la forme $y(x)=\lambda(x)y_0(x)$

alors $y'(x)=\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)y_0'(x)$

y est solution de (E) si et seulement $\forall x\in\mathbb{R},\ 2y'(x)+xy(x)=1$

$$\iff\forall x\in\mathbb{R},\ 2(\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)y_0'(x))+x\lambda(x)y_0(x)=1$$

$$\iff\forall x\in\mathbb{R},\ 2\lambda'(x)y_0(x)+\lambda(x)\underbrace{(2y_0'(x)+xy_0(x))}_{=0}=1$$

$$\iff\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda'(x)=\frac{1}{2y_0(x)}=\frac{1}{2}\,e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$\iff\lambda(x)=\frac{1}{2}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}dt+\mu \text{ où } \mu \text{ est une constante réelle.}$$

La solution générale de l'équation (E) est donc :

$$y(x)=\left(\frac{1}{2}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}dt+\mu\right)e^{-\frac{x^2}{4}}$$

La condition $f(0)=0$ donne finalement : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(a)=\frac{1}{2}\,e^{-\frac{a^2}{4}}\int_0^a e^{\frac{t^2}{4}}dt}$

Exercice 2 : Soit A une matrice réelle symétrique de classe n telle que $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX.A.X\geq 0$

a) Soient $x_1, x_2, ..., x_k$ des réels deux à deux distincts et $y_1, y_2, ..., y_k$ des réels quelconques. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, 2, ..., k\},\ P(x_i) = y_i$.

b) Soit $B = A^2 + A + I_n$.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(B) = A$

Sujet 40 : Centrale - maths I

Exercice 1 : Soient f et g deux formes linéaires d'une même espace vectoriel E.

On suppose que $\forall x \in E, f(x).g(x) = 0$.

Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 2 : $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. On considère deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ orthogonales mais non coplanaires.

On note $d(M, \mathscr{D})$ la distance d'un point M de $\mathscr{E}$ à la droire $\mathscr{D}$.

Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathscr{E},\ d(M, \mathscr{D}_1) = d(M, \mathscr{D}_2)\}$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$. Montrer qu'il s'agit d'une quadrique, en préciser la nature et l'équation réduite. La tracer avec MAPLE.

Indication : On pourra se placer dans un repère bien adapté au problème.

SOLUTION : Supposons que f et g soient deux formes linéaires non nulles de E.

a) Si $\ker f = \ker g$, alors f et g sont proportionnelles : $\exists \lambda \in \mathbf{K}^*,\ g = \lambda f \quad (\lambda \neq 0$ car $g \neq 0)$

Soit $x \in E - \ker f$. Alors $f(x) \neq 0$ car $x \notin \ker f$ et $g(x) \neq 0$ car $x \notin \ker g$. Donc $f(x).g(x) \neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

b) Supposons $\ker f \neq \ker g$. Alors g', restriction de g à $\ker f$, est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\ker f$. Si elle était nulle, on aurait $\forall x \in \ker f, g(x) = g'(x) = 0$, donc $\ker f \subset \ker g$ et l'égalité des dimensions ($\ker f$ et $\ker g$ sont deux hyperplans de E) entrainerait que $\ker f = \ker g$.

Donc $\ker g'$ est un hyperplan de $\ker f$, donc un sous espace de E de dimension $(n-1) - 1 = n-2$.

Soit alors $(e_1, e_2, ..., e_{n-2})$ une base de $\ker g' = \ker f \cap \ker g$

Complètons la d'une part en une base $(e_1, e_2, ..., e_{n-2}, e_{n-1})$ de $\ker f$ et d'autre part en une base $(e_1, e_2, ..., e_{n-2}, e_n)$ de $\ker g$.

$e_n \notin \ker f$ sinon, $\ker g =$Vect$(e_1, e_2, ..., e_{n-2}, e_n) \subset \ker f$. Donc le système $(e_1, e_2, ..., e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ est libre, et c'est une base de E puisqu'il possède n éléments.

Soit alors $x = e_{n-1} + e_n$.

$f(x) = \underbrace{f(e_{n-1})}_{=0} + f(e_n) = f(e_n) \neq 0$ puisque $e_n \notin \ker f$.

$g(x) = g(e_{n-1}) + \underbrace{g(e_n)}_{=0} = g(e_{n-1}) \neq 0$ puisque $e_{n-1} \notin \ker g$ (même raison).

Donc $f(x).g(x) \neq 0$

Exercice 2 : $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. On considère deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ orthogonales mais non coplanaires.

On note $d(M, \mathscr{D})$ la distance d'un point M de $\mathscr{E}$ à la droire $\mathscr{D}$.

Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathscr{E},\ d(M, \mathscr{D}_1) = d(M, \mathscr{D}_2)\}$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$. Montrer qu'il s'agit d'une quadrique, en préciser la nature et l'équation réduite. La tracer avec MAPLE.

Indication : On pourra se placer dans un repère bien adapté au problème.

SOLUTION :

Soient $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire directeur de la droite $\mathscr{D}_2$. $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux par hypothèse.

Soit $\mathscr{D}_3$ la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, qui les coupe respectivement en des points A et B, et O le milieu de (A, B). Soit $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_3$.

• La droite $\mathscr{D}_1$ a pour équations : $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -a \end{array} \right.$ et la droite $\mathscr{D}_2$: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = a \end{array} \right. \quad (\|\overrightarrow{AB}\| = 2a)$

Soit $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ un point quelconque de l'espace, et $M_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array} \right.$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}_1$.

alors $y_1 = 0$ et $z_1 = -a$ puisque $M_1 \in \mathscr{D}_1$

Le vecteur $\overrightarrow{M_1M}\left|\begin{matrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{matrix}\right.$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$ qui dirige $\mathscr{D}_1$, donc $x_1 = x$.

d'où finalement $M_1\left|\begin{matrix} x \\ 0 \\ -a \end{matrix}\right.$

• Un calcul analogue donne les coordonnées de $M_2\left|\begin{matrix} 0 \\ y \\ a \end{matrix}\right.$ projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}_2$.

• $M \in \mathcal{S} \iff d(M, \mathscr{D}_1) = d(M, \mathscr{D}_2)\} \iff \|\overrightarrow{MM_1}\| = \|\overrightarrow{MM_2}\|$
$\iff \|\overrightarrow{MM_1}\|^2 = \|\overrightarrow{MM_2}\|^2 \iff x^2 + (z-a)^2 = y^2 + (z+a)^2$
$\iff x^2 - y^2 = 4az$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc un paraboloïde hyperbolique.

• Tracé de la surface avec MAPLE :

with(plots);
implicitplot3d(4*z=x*x-y*y,x=-5..5,y=-5..5, z=-5..5);

Sujet 41 : TPE (Hajdrych)

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 3.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\begin{cases} \mathrm{tr}(A) = 0 \\ \mathrm{rg}(A) = 2 \\ A \text{ n'est pas nilpotente} \end{cases}$ (hypothèse oubliée dans le texte)

Quelle sont les valeurs propres de A ?

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2 : Soit $x > 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)dt = \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2}dt$

SOLUTION :

L'hypothèse $\mathrm{rg}(A) = 2$ montre que 0 est valeur propre de A et que le sous espace propre associé est de dimension $n-2$. L'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est donc supérieur ou égal à $n-2$. (l'ordre est supérieur ou égal à la dimension du sous espace propre)

Reste à déterminer dans $\mathbb{C}$ deux valeurs propres restantes α et β. (l'une ou les deux pouvant éventuellement être nulles)

La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, $\alpha + \beta + (n-2) \times 0 = 0$

Donc $\alpha = -\beta$

Si $\alpha = \beta = 0$, A étant trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T comportant sur sa diagonale les valeurs propres de la matrice A, c'est à dire que des 0. T est alors une matrice triangulaire supérieure stricte et est nilpotente. A qui lui est semblable est aussi nilpotente, ce qui est exclu.

Donc α ni β ne sont nulles.

Ainsi, le spectre de A est composé de deux complexes non nuls opposés, qui sont des valeurs propres simples, et de 0, qui est valeur propre d'ordre $n-2$.

La somme des dimensions des sous espaces propres est alors $1+1+(n-2) = n$ et A est diagonalisable.

Exercice 2 : Soit $x > 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)dt = \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2}dt$

SOLUTION :

Posons $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)dt$

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}\frac{1}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)(x^2+u)}du$$

(par le changement de variable $u = t^2$)

$$g'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u+x^2} - \frac{1}{1+u} \right) du \qquad \text{(après décomposition en éléments simples)}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)} \left[\ln\left(\frac{u+x^2}{u+1} \right) \right]_{u=0}^{u\to+\infty} = \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x^2) = \frac{\ln x}{1-x^2}$$

Sujet 42 : ENS Cachan

Matrices nilpotentes cycliques : Soit N la matrice carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et 0 sinon.

1- Calculer N^k pour tout entier naturel k.
Montrer que pour tout réel λ non nul, N est semblable à $\lambda.N$

2- Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
a) pour tout $1 \leq k \leq n$, $\operatorname{rg}(A^k) = n-k$
b) les valeurs propres de A sont toutes nulles et il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(X, A.X, ..., A^{n-1}X)$ soit libre.
c) A est semblable à N.
d) $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

3- On suppose que A satisfait les conditions précédentes, et l'on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A.M = M.A$
Montrer que $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$ puis expliciter $\mathcal{C}(A)$.

SOLUTION :

1- • $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & & ... & 0 \end{pmatrix}$

Soient $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à N :
$f(e_1) = 0$ et $\forall k \geq 2, f(e_k) = e_{k-1}$
puis, $f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0$ et $\forall k \geq 3, f^2(e_k) = e_{k-2}$
et par une récurrence immédiate,
$\forall k \leq n-1,\ \ f^k(e_1) = f^k(e_k) = 0$ et $\forall j \geq k, f^k(e_j) = e_{j-k}$
Il en résulte que si $A^k = (b_{i,j}),\ \ b_{i,j} = 1$ si $j = i+k$ et 0 sinon.

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & & ... & 0 \end{pmatrix}$ ... $N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & & ... & 0 \end{pmatrix}$, $\forall k \geq n,\ N^k = 0$.

• Soit toujours f l'endomorphisme canoniquement associé à N.

Alors $g = \lambda.f$ est associé à $\lambda.N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & ... & 0 & \lambda \\ 0 & ... & & ... & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $g(e_1) = 0,\ g(e_2) = \lambda.e_1,\ ...\ , g(e_n) = \lambda.e_{n-1}$
Posons alors $v_n = e_n,\ \ v_{n-1} = \lambda.e_{n-1},\ \ ...\ , v_2 = \lambda^{n-2}e_2, v_1 = \lambda^{n-1}e_1$ et notons $\mathcal{B}'$ la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$
alors $g(v_n) = g(e_n) = \lambda.f(e_n) = \lambda.e_{n-1} = v_{n-1}$
$g(v_{n-1}) = \lambda f(\lambda.e_{n-1}) = \lambda^2.e_{n-2} = v_{n-2}$
. . . .
$g(v_2) = \lambda f(\lambda^{n-2}.e_2) = \lambda^{n-1}.e_1 = v_1$
$g(v_1) = \lambda f(\lambda^{n-1}.e_1) = \lambda^n.f(e_1) = 0$
donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = N$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \lambda.N$

La formule de changement de base pour des endomorphismes nous montre alors que les matrices N et $\lambda.N$ sont semblables.

2- • $c) \implies a)$, en effet, si A est semblable à N, alors A^k est semblable à N^k pour tout entier k et $\text{rg}(A^k) = \text{rg}(N^k)$. Or le calcul de la matrice N^k effectué dans la première question montre qu'elle est de rang $n-k$ (elle possède $n-k$ lignes non nulles qui sont échelonnées).

• $a) \implies d)$, puisque $a) \implies \text{rg}(A^{n-1}) = 1$ et $\text{rg}(A^n) = 0$

• Montrons que $d) \implies b)$:

Supposons que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Puisque $A^{n-1} \neq 0$, $\exists X \in \mathbb{R}^n,\ A^{n-1}.X \neq 0$.

Montrons alors que le système $(X, A.X, A^2.X, ..., A^{n-1}.X)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_0.X + \lambda_1.A.X + \lambda_2.A^2.X + ... + \lambda_{n-1}.A^{n-1}.X = 0$

En multipliant par A^{n-1}, et en tenant compte du fait que $A^n = 0$, on obtient $\lambda_0.A^{n-1}.X = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ puisque $A^{n-1}.X \neq 0$.

En reprenant la même égalié et en la multipliant par A^{n-1}, on obtient $\lambda_1.A^{n-1}.X = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$

En répétant le procédé, on aura successivement $\lambda_2 = 0$, ... etc jusqu'à $\lambda_{n-1} = 0$.

Le système $(X, A.X, A^2.X, ..., A^{n-1}.X)$ est donc un système libre.

• Montrons que $b) \implies c)$: Supposons qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que le système $(X, A.X, A^2.X, ..., A^{n-1}.X)$ soit libre.

Soit f l'endomorpg=hisme canoniquement associé à la matrice A. Soit $v_n = x$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne est X.

Soient de même les vecteurs $v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_2, v_1$ dont les vecteurs colonnes sont respectivement $A.X, A^2.X, ..., A^{n-2}.X, A^{n-1}.X$.

$f(v_1) = 0$ puisque $A.(A^{n-1}.X) = A^n.X = 0$

$f(v_2) = v_1$ puisque $A.(A^{n-2}.X) = A^{n-1}.X$

. . . .

$f(v_n) = v_{n-1}$ puisque $A.X = A.X$

La matrice de f dans la base est donc : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & & ... & 0 \end{pmatrix} = N$ et A est semblable à la matrice N puisque A et N représentent le même endomorphisme f sans deux bases différentes.

3- • On suppose que A satisfait les conditions précédentes, et $\mathcal{C}(A)$ désigne l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A.M = M.A$

Les matrices $I_n, A, A^2, ..., A^{n-1}$ appartiennent à $\mathcal{C}(A)$ (immédiat) et forment un système libre (démonstration analogue à celle par laquelle on a montré préécdemment que $(X, A.X, A^2.X, ..., A^{n-1}.X)$ était un système libre, à partir des hypothèses $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.)

donc $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$.

• Soit à nouveau f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

Soit v_n tel que $f^{n-1}(v_n) \neq 0$. On sait qu'alors $(v_n, f(v_n), f^2(v_n), ..., f^{n-1}(v_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Notons $v_{n-1} = f(v_n), v_{n-2} = f^2(v_n), ..., v_1 = f^{n-1}(v_n)$

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. $g(v_n)$ se décompose sur la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$: $g(v_n) = \lambda_0 v_n + \lambda_1 f(v_n) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v_n)$

$$\begin{aligned} g(v_{n-1}) = g(f(v_n)) = f(g(v_n)) &= f(\lambda_0 v_n + \lambda_1 f(v_n) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v_n)) \\ &= \lambda_0 v_{n-1} + \lambda_1 f(v_{n-1}) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v_{n-1}) \end{aligned}$$

en itéranrt ce procédé, on montre que pouir tout k,

$$g(v_k) = \lambda_0 v_k + \lambda_1 f(v_k) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v_k)$$

Les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$. Ils sont donc égaux.

Finalement, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}_{n-1}[A] = \text{Vect}(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})$

Sujet 43 : X-ENS

Exercice 1 : 1- Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(r^2-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+1)$

2- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)dt$

Exercice 2 : Résoudre l'équation $A^n=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

SOLUTION :

1- • $r^2-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+1=\left(r-\cos(\frac{k\pi}{n})\right)^2-\cos^2(\frac{k\pi}{n})+1$

$$=\left(r-\cos(\tfrac{k\pi}{n})\right)^2+\sin^2(\tfrac{k\pi}{n})=\left(r-\cos(\tfrac{k\pi}{n})+i\sin(\tfrac{k\pi}{n})\right)\left(r-\cos(\tfrac{k\pi}{n})-i\sin(\tfrac{k\pi}{n})\right)$$

$$=\left(r-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(r-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(r^2-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+1)=\prod_{k=1}^{n}\left(r-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(r-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)$

Or les racines $2n$ de l'unité sont $u_k=e^{2i\frac{k\pi}{2n}}=e^{i\frac{k\pi}{n}},\ \ k=0,....,(2n-1)$

Pour tout k, $e^{-i\frac{k\pi}{n}}=e^{-i\frac{k\pi}{n}+2i\pi}=e^{-i\frac{k\pi}{n}+\frac{2in\pi}{n}}=e^{-i\frac{(2n-k)\pi}{n}}$

$$X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})\ (X+1)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})$$

$$=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})\prod_{k=n+1}^{2n-1}(X-e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}})$$

$$=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{i\frac{k\pi}{n}})\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{-i\frac{k\pi}{n}})\ \ \text{(changement } k=2n-k' \text{ dans le dernier produit)}$$

$$=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos(\tfrac{k\pi}{n})X+1)=\frac{X-1}{X+1}\prod_{k=1}^{n}(X^2-2\cos(\frac{k\pi}{n})X+1)$$

donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(r^2-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+1)=(r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}$

2- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)dt$

Soit $t\in[0,\pi]$. $r^2-2r\cos(t)+1=(r-\cos t)^2+\sin^2(t)\geq 0$

d'où : $r^2-2r\cos(t)+1=0\iff\begin{cases}r=\cos t\\ \text{et }\sin t=0\end{cases}\iff\begin{cases}t=0\\ \text{et }\ r=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}t=\pi\\ \text{et }\ r=-1\end{cases}$

Dons, si $r\notin\{-1,1\}$, la fonction $t\mapsto r^2-2r\cos(t)+1$ est continue et strictement positive sur $[0,\pi]$

La fonction $t\mapsto\ln(r^2-2r\cos(t)+1)$ est alors définie et sur $[0,\pi]$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)dt$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

• Soit $x_k=k\frac{\pi}{n},k\in\{1,2,...,n-1\}$. On a ainsi : $0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<\pi$

La somme de Riemann associée à la fonction $f\ :\ t\mapsto\ln(1-2t\cos t+r^2)$ et à la subdivision $(x_k)_{1\leq k\leq n-1}$ est alors :

$$S_n=\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-2t\cos k\tfrac{\pi}{n}+r^2)=\frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1-2t\cos k\frac{\pi}{n}+r^2)\right)$$

On sait que, puisque f est continue sur le segment $[0,\pi]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)dt$

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}.\frac{1}{(r+1)^2}\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)$$

- si $|r|<1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=0$

donc, dans ce cas, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)dt=0.}$

- si $|r| > 1$, $\dfrac{r^{2n}-1}{r^2-1} \overset{n\to+\infty}{\sim} r^{2n-2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(2n-2)\pi}{n} \ln|r|$

donc, dans ce cas, $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \ln(1-2r\cos t + r^2)dt = 2\pi \ln|r|.}$

Exercice 2 : Résoudre l'équation $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Formulation un peu laconique (mais c'est l'X ...) à comprendre comme :

Rechercher les couples (A, n), $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit (A, n) une solution. Puisque $A^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, la matrice A est nilpotente donc non inversible, donc $\text{rg}(A) < 2$. Mais puisque $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A n'est pas nulle, donc $\text{rg}(A) \geq 1$

On en conclut que $\text{rg}(A) = 1$.

Si on considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à la matrice A, $\text{rg}(f) = 1$

Or $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. S'il y a égalité, alors $\forall k \geq 1, \ker f^k = \ker f$

(en effet $\forall x \in \ker f^k, f^2(f^{k-2}(x)) = 0 \Rightarrow f^{k-2}(x) \in \ker f^2 \Rightarrow f^{k-2}(x) \in \ker f \Rightarrow f^{k-1}(x) = 0$

d'où il résulte que $\ker f^k \subset \ker f^{k-1}$ et que $\ker f^k = \ker f^{k-1}$

puisque l'inclusion réciproque est évidente, et par récurrence,

on redescend jusqu'à $\ker f^k = \ker f$)

sous cette hypothèse, on alors $\forall k \geq 1, \dim(\ker f^k) = \dim(\ker f)$, et par le théorème du rang, $\forall k \geq 1, \text{rg}(A^k) = \text{rg}(A) = 1$. A ne peut pas alors être nilpotente.

Donc l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est stricte, de même que l'inégalité $\text{rg}(A^2) < \text{rg}(A)$

donc $\text{rg}(A^2) = 0$ et $A^2 = 0$. Donc $n = 1$. Et donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En conclusion, il n'y a qu'un seul couple qui vérifie $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $n = 1$.

Sujet 44 : Mines - Ponts

Exercice 1 : Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est lié

Exercice 2 : La suite définie par :

$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n + nu_{n+1}}{n+1}$ converge-t-elle ?

Si oui, préciser sa limite.

SOLUTION :

Exercice 1 : Voir fichier "Algèbre linéaire 1", exercise 1.11

Exercice 2 : On peut commencer par étudier les variations de (u_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + nu_{n+1} - nu_{n+1} - u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{n+1}$

On voit alors qu'on a intérêt à poser : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{v_n}{n+1}$

Cette relation montre par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} v_0$

$$\left\{\begin{array}{l} v_n = u_{n+1} - u_n \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \\ \quad .... \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_0 = u_1 - u_0 \end{array}\right. \quad \text{en ajoutant terme à terme, on obtient :}$$

$$u_{n+1} = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} + v_n + u_0 = \sum_{k=0}^{n} v_k + u_0$$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}(u_1 - u_0)$$

On sait que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$

Donc la suite (u_n) converge et a pour limite $L = u_0 + e^{-1}(u_1 - u_0) = \dfrac{(e-1)u_0 + u_1}{e}$

Sujet 45 : CCP

Exercice 1 : A l'aide de manipulations élémentaires simples, sans développer le calcul, déterminer le polynôme carctéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2009 & -1 & -1 \\ -4 & 2009 & 2 \\ -4 & 2 & 2009 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable ?

Exercice 2 : $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$

Déterminer h pour que le Laplacien de la fonction f soit nul.

SOLUTION :

Exercice 1 : $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2009-x & -1 & -1 \\ -4 & 2009-x & 2 \\ -4 & 2 & 2009-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2007-x & -1 & -1 \\ 2007-x & 2009-x & 2 \\ 2007-x & 2 & 2009-x \end{vmatrix}$

(en ajoutant les colonnes 2 et 3 à la première)

$\chi_A(X)$ est donc divisble par $X - 2007$ et 2007 est valeur propre de A.

$A - 2007\, I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1.

On en déduit que le sous espace propre $E_A(1)$ a pour dimension $3 - 1 = 2$ et que 2007 est une valeur propre au moins double. Reste à trouver la troisième valeur propre λ_3.

La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, $2 \times 2007 + \lambda_3 = 3 \times 2009$ donc $\lambda_3 = 2013$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à 3, la matrice A est diagonalisable.

Exercice 2 : h étant $\mathcal{C}^2$, f l'est aussi par composition et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} h'\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2} h''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2} h'\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3} h'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4} h''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Delta(f) = 0 \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{y^2} h''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} h'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4} h''\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x^2+y^2}{y^4} h''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} h'\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Quand (x,y) décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $t = \dfrac{x}{y}$ décrit $\mathbb{R}$. En multipliant la condition précédente par y^2 et en remplaçant $\dfrac{x}{y}$ par t, on obtient :

$\Delta(f) = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ (t^4+1)h''(t) + 2th'(t) = 0$

La fonction h est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) :

$$(t^4+1)y' + 2ty = 0$$

La solution générale de (E) est : $y(t) = \lambda \exp(-\int_0^t \frac{2u}{u^4+1} du)$

$$\int_0^t \frac{2u}{u^4+1} du = \int_0^t \frac{d(u^2)}{(u^2)^2+1} du = \text{Arctan}(t^2)$$

donc $\boxed{h(t) = \lambda \exp(\text{Arctan}(t^2)),\ \lambda \in \mathbb{R}.}$

Sujet 46 : Centrale - Supelec

Φ est l'application définie sur $\mathcal{M}_4(\mathbf{K})$ par : $\Phi\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & b & c & a \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ q & n & p & d \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

SOLUTION :

On remarque que $\forall M \in M_4(K)$, $\Phi^4(M) = M$, donc $\Phi^4 = Id$ et le polynôme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de Φ.

- Si $K = \mathbb{C}$, $X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, et Φ est diagonalisable.

- Si $K = \mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\phi) \subset \{-1, 1\}$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

• $\Phi(M) = 1.M \iff \begin{cases} a = d \\ d = q \\ q = m \\ m = a \end{cases} \iff a = d = q = m$

$\iff M$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & a \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & n & p & a \end{pmatrix}$

Ces matrices forment un sous espace de dimension 13. Donc $\dim(E_\Phi(1)) = 13$

• $\Phi(M) = -1.M \iff \begin{cases} a = -d \\ d = -q \\ q = -m \\ m = -a \\ x = -x \text{ pour les autres coefficients} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d = q = -m \\ \text{et les autres coefficients} \\ \text{sont nuls} \end{cases}$

$\iff M$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Ces matrices forment un sous espace de dimension 1. Donc $\dim(E_\Phi(-1)) = 1$

La somme des dimensions des sous-espaces propres $(13 + 1 = 14)$ est strictement inférieure à la dimension de l'espace $M_4(\mathbb{R})$ qui vaut 16.

Donc Φ n'est pas diagonalisable.

Sujet 47 : ENSAM (avec MAPLE)

Trouver un polynôme P de degré minimal tel que $P(X+1) - P(X) = X^8$

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^8$

SOLUTION : Si $P(X)$ a pour terme dominant $a_m X^m$, $P(X)$ s'écrit $a_m X^m + Q(X)$ avec $d°(Q) < m$

alors $P(X+1) - P(X) = a_m(X+1)^m + Q(X+1) - (a_m X^m + Q(X))$

$$P(X+1) - P(X) = a_m(X^m + \tbinom{n}{1}X^{m-1} + \underbrace{R(X)}_{d° \leq n-2})^m - a_m X^m + \underbrace{Q(X+1) - Q(X)}_{d° \leq n-2}$$

$$P(X+1) - P(X) = a_m\tbinom{n}{1}X^{m-1} + \underbrace{S(X)}_{d° \leq n-2} \text{ a pour terme dominant } a_m m X^{m-1}.$$

Un polynôme P dqui vérifie la relation $P(X+1) - P(X) = X^8$ devra donc être de degré 9 et avoir pour terme dominant $\dfrac{1}{9}X^9$

>restart;

On définit le polynôme, sous forme de fonction poltnoliale pour pouvoir ensuite remplacer X par $X+1$.

a[9]:=1/9;

p:=x->add(a[k]*xk,k=0..9);**

On calcule $P(X+1)-P(X)$ et on réordonne suivant les puissances de X :

p(x+1)-p(x);q:=collect(%,x);

On identifie les coefficiebts de $P(X+1)-P(X)$ avec ceux de X^8, et on résoud le système obtenu :

systequa:=seq(coeff(q,x,k)=0,k=0..7);

sol:=solve(systequa,seq(a[k],k=0..8));

On remarque que a_0 est quelconque.

On substitue les coefficients trouvés dans le polynôme $P(X)$:

p2:=subs(sol,p(x));

p3:=unapply(p2,x);

Vérification : **p3(y+1)-p3(y); expand(%);**

- Pour tout k, $k^8 = P(k+1)-P(k)$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^8 = \sum_{k=1}^{n}(P(k+1)-P(k)) = P(n+1)-P(1)$ (somme "téléscopique")

>p3(n+1)-p3(1);expand(%);factor(%);

On peut vérifier ce résultat que connait MAPLE par l'instruction :

>sum(k^8,k=1..m);

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{90}n(2n+1)(n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

Sujet 48 : ENSAM (avec MAPLE)

a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

b) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Calculer le polynôme $Q(X)$, projeté orthogonal de la fonction $q : x \mapsto |x-\frac{1}{2}|$ sur $\mathbb{R}_4[X]$.

SOLUTION : a) Voir le cours

b) On définit le produit scalaire :

>restart;

PS:=(f,g)->int(f*g,x=0..1);

Orthogonalisons la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ par le procédé de Schmidt, en un système $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Pour tout k, $P_k = X^k + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}P_i$ avec $a_{k,i} = -\dfrac{< x^k, P_i >}{< P_i, P_i >}$:

p[0]:=1;

for k from 1 to 4 do

for i from 0 to k-1 do a[k,i]:=-PS(x^k,p[i])/PS(p[i],p[i]) ;od;

p[k]:=x^k+add(a[k,i]*p[i],i=0..k-1); od;

Normons enfin les polynômes trouvés :

for k from 0 to 4 do pn[k]:=p[k]/sqrt(PS(p[k],p[k])) od;

c) **g:=abs(x-1/2);**

Q:=add(PS(pn[k],g)*pn[k],k=0..4);

plot(g,Q,x=0..1);

Sujet 49 : CCP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 3A^2 - 5A + 3I_n$

1- Montrer que A est inversible

2- A quelle condition A est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

3- Montrer que $\det(A) > 0$

SOLUTION :

1- $A^3 = 3A^2 - 5A + 3I_n \implies A^3 - 3A^2 + 5A = 3I_n \implies \frac{1}{3}A(A - 3A + 5I_n) = I_n$

$\implies A$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 3A + 5I_n)$

2- Le polynôme $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 5X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

On remarque que 1 est racine donc $Q(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 3)$

$\Delta = 4 - 12 < 0$ donc $Q(X)$ n'a qu'une racine réelle, 1, et deux racines complexes conjuguées, α et $\overline{\alpha}$.

Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles, et se trouvent parmi les racines du polynôme annulateur $Q(X)$. Seule la valeur 1 rempli ces conditions. Donc A est semblable à la matrice diagonale qui n'a que 1 pour valeur propre, c'est à dire à I_n, donc $A = P.I_n.P^{-1} = I_n$

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \iff A = I_n}$$

3- Le polynôme annulateur $Q(X) = (X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = P.\Delta.P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale, qui a sur sa diagonale les valeurs propres de A, qui sont parmi les nombres $1, \alpha$ et $\overline{\alpha}$

$\Delta = \text{diag}(\underbrace{1,...,1}_{p\ fois}, \underbrace{\alpha,...,\alpha}_{q\ fois}, \underbrace{\overline{\alpha},...,\overline{\alpha}}_{r\ fois})$ $\quad p, q, r$ entiers positifs ou nuls, $q = r$ puisque A est réelle.

$\det(A) = \det(\Delta) = 1^p.\alpha^q.\overline{\alpha}^r = (\alpha.\overline{\alpha})^q = |\alpha|^{2q} > 0$

Sujet 50 : CCP

Exerxice 2 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$

f est elle continue, dérivable ? Est elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$?

Si oui, calculer $f^{(n)}(0)$

SOLUTION : La fonction $(x \mapsto 1 - \cos x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^2})$ l'est sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, la fonctions f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$

La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ prend dond au point 0 la valeur $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$

La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En identifiant avec la relation $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ valable pour toute série entière, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Sujet 51 : ENS

Soit n un entier naturel non nul, $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \text{ avec les } a_k \text{ tous strictement positifs.}$$

1- Montrer que Q admet une unique racine dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2- On considère des réels b_i tels que $0 < b_0 < b_1 < b_2 < ... < b_n$, les polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $Q(X) = (X-1)P(X)$

Montrer que si z est une racine complexe de P , alors $Q(|z|) \leq 0$ et en déduire que $|z| \leq 1$.

SOLUTION :

1- Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : Tout polynôme de degré n de la forme $Q_n(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ avec les a_k tous strictement positifs admet une et une seule racine dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

• Pour $n = 1$, $Q_1(X) = a_1 X - a_0$ admet une et une seule racine réelle, $\alpha = \frac{a_0}{a_1}$, et celle ci est bien dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

• Supposons que $\mathscr{P}_{n-1}$ soit vérifiée, et soit $Q_n(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré n avec les a_k tous strictement positifs.

alors $Q_n'(X) = n a_n X^n - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1}$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie la propriété $\mathscr{P}_{n-1}$: il admet une et une seule racine β dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Remarquant que $Q_n'(0) = -a_1 < 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} Q_n'(x) = \lim\limits_{+\infty} n a_n x^n = +\infty$, on peut dresser le tableau de signe de la fonction polynomiale Q_n' et le tableau de variations de Q_n :

x	0		β		$+\infty$
$Q_n'(x)$	$-a_1$	$-$	0	$+$	
$Q_n(x)$	$-a_0$	$\searrow$	$m < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction Q_n est strictement négative sur le segment $[0, \beta]$.

Négative en β, de limite $+\infty$ et $+\infty$, elle s'annule par continuité sur l'ouvert $]\beta, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Elle ne s'annule qu'une seule fois puisqu'elle est strictement croissante.

On ainsi montré que $\mathscr{P}_{n-1} \Longrightarrow \mathscr{P}_n$ et, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

2- $Q(X) = (X-1)P(X) = (X-1)\sum_{k=0}^{n} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = b_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (b_{k-1} - b_k) X^k - b_0$$

$$Q(X) = b_n X^{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(b_k - b_{k-1})}_{>0} X^k + b_0 \right)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Alors $Q(z) = (z-1)P(z) = 0$

donc $b_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(b_k - b_{k-1})}_{>0} z^k + b_0$

$$\Longrightarrow |b_n z^{n+1}| = \left| \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) z^k + b_0 \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k-1}|.|z|^k + |b_0|$$

$\Longrightarrow b_n |z|^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}).|z|^k + b_0$ (compte tenu des hypothèses sur les b_i)

$$\Longrightarrow b_n |z|^{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}).|z|^k + b_0 \right) \leq 0$$

$$\Longrightarrow Q(|z|) \leq 0$$

Or $Q(|z|) = (|z| - 1)P(|z|)$ et $P(|z|) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{b_k}_{>0} |z|^k > 0$

Donc $|z| - 1 \leq 1$ et $|z| \leq 1$

Sujet 52 : ENS

On considère la fonction définie par $f(x) = x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}dt$

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Donner une relation entre $f(\frac{1}{x})$ et $f(x)$.

3- Montrer que f est développable en série entière. Quel est son rayon de convergence ? Expliciter son développement.

4- Trouver une expression simple de f. Tracer son graphe.

***SOLUTION* :**

1- $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 - \cos^2 t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t$

d'où : $x^2 - 2x\cos t + 1 = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} x - \cos t = 0 \\ \text{et} \\ \sin t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} t = 0 \text{ et } x = 1 \\ \text{ou} \\ t = \pi \text{ et } x = -1 \end{array}\right.$

donc, si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ car le numérateur et le dénominateur sont continus et ce dernier ne s'annule pas. L'intégrale est définie, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Donc $\mathbb{R} - \{1\} \subset \mathscr{D}_f$

• Pour $x = 1$, $\dfrac{t\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1} = \dfrac{t\sin(t)}{2(1 - \cos(t))}$

Cette fonction de t est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\dfrac{t\sin(t)}{2(1 - \cos(t))} \overset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2\frac{t^2}{2}} = 1$

La fonction est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc est intégrable.

Finalement, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$

2- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin(t)}{\frac{1}{x}^2 - 2\frac{1}{x}\cos(t) + 1}dt = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}dt = f(x)$

Décomposons en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1}$:

$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1} = \frac{1}{(x - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{1}{(x - e^{it})(x - e^{-it})} = \frac{a}{x - e^{it}} + \frac{b}{x - e^{-it}}$$

$$a = \frac{1}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{1}{2i\sin t} = \frac{-i}{2\sin t} \text{ et } b = \overline{a} = \frac{i}{2\sin t}$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1} = \frac{i}{2\sin t}\left(\frac{-1}{x - e^{it}} + \frac{1}{x - e^{-it}}\right) = \frac{i}{2\sin t}\left(\frac{e^{-it}}{1 - xe^{-it}} - \frac{e^{it}}{1 - xe^{it}}\right)$$

On sait que pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$, $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$

donc, si $|x| < 1$, $\dfrac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1} = \dfrac{i}{2\sin t}\left(e^{-it}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-it})^n - e^{it}\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{it})^n\right)$

$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1} = \frac{i}{2\sin t}\sum_{n=0}^{\infty} x^n(e^{-i(n+1)t} - e^{i(n+1)t})$$

$$= \frac{i}{2\sin t}\sum_{n=0}^{\infty} -2i\sin(n+1)t\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}x^n$$

• $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}dt = x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t\sin(n+1)t\, x^n\right)dt$

La majoration $|t\sin(n+1)t\, x^{n+1}| \leq |x|^{n+1}$ montre la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum x^{n+1}t\sin(n+1)t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}t\sin(n+1)t\, dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(nt)dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(nt)\, dt = \left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nt)}{n}dt = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(nt)\,dt = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n} + \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2}$$

Si $n = 2p$ est pair, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2pt)\,dt = -\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^p}{2p} + \frac{\sin(p\pi)}{4p^2} = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$

Si $n = 2p+1$ est impair, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2p+1)t\,dt = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos(p\pi+\frac{\pi}{2})}{2p+1} + \frac{\sin(p\pi+\frac{\pi}{2})}{(2p+1)^2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}$

Finalement, $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} x^{2p+1}$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p} x^{2p} = -\frac{\pi}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^p}{p} = \frac{\pi}{4}\ln(1+x^2)$$

Soit $T(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}x^{2p+1}$ alors $T'(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p} = \frac{1}{x}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} = \frac{1}{x}\mathrm{Arctan}(x)$

finalement, $f(x) = \dfrac{\pi}{4}\ln(1+x^2) + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t}\mathrm{Arctan}(t)dt$

Sujet 53 : ENS

On considère la suite de fonction (f_n) définies par :

$$f_n(x) = \int_0^n \frac{x\cos u}{u^2+x^2}du$$

1- Montrer que f_n converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ vers une limite Φ que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

2- Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle vérifie une équation différentielle simple.

(on pourra montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2+u^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{x}{x^2+u^2}\right)$)

3- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |\Phi(x)| \le \pi/2$

Calculer la limite de Φ en 0, puis en déduire une expression simple de Φ. (réponse : $\pi e^{-x}/2$)

SOLUTION **:**

1- Pour tout x réel, la fonction $u \mapsto \dfrac{x\cos u}{u^2+x^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$

car $\left|\dfrac{x\cos u}{u^2+x^2}\right| \le \dfrac{|x|}{u^2+x^2}$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{x\cos u}{u^2+x^2}du = \Phi(x)$

De plus $\forall x \in [a,b], |f_n(x)-\phi(x)| = \left|\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{x\cos u}{u^2+x^2}du\right| \le \int_n^{+\infty}\frac{|x|}{u^2+x^2}du \le \int_n^{+\infty}\frac{\max(|a|,|b|)}{u^2+\min(|a|,|b|)^2}du$

$\forall x \in [a,b], |f_n(x)-\phi(x)| \le \displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{M}{u^2+m^2}du = \frac{M}{m}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{m}\right)\right]_n^{+\infty} = \frac{M}{m}\mathrm{Arctan}\left(\frac{m}{n}\right)$,

ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Sujet 54 : CCP

Existence et calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right)dx$

Sujet 55 : Centrale-Supélec

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ($n < m$), et $B \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ données.

On considère le système linéaire $\mathcal{S} : A.X = B$ où $X \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

$M_{m,1}(\mathbb{R})$, identifié à $\mathbb{R}^m$ est muni de la norme euclidienne canonique $\|\ \|$

On dira que $X_0 \in \mathbb{R}^m$ est une pseudo-solution de $\mathcal{S}$ si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^m,\ \|A.X_0 - B\| \le \|A.X - B\|$$

1- Montrer que X_0 est une pseudo-solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si $A.X_0$ est un projeté orthogonal que l'on précisera.

2- En déduire que X_0 est une pseudo-solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si ${}^tA.A.X_0 = {}^tA.B$

3- Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^m,\ A.X = 0 \Longleftrightarrow {}^tA.A.X = 0$
En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA.A)$

Sujets avec MAPLE :

****

Sujet 1 : Résolution approchée d'une équation ; méthode de Newton :

Avec MAPLE, vérifier que l'équation $x^5-2x^4+5x^3-4x^2-10x-9=0$ admet une unique solution réelle, et en calculer une valeur approchée à 10^{-20} près par la méthode de Newton, avec un nombre d'itérations minimum.

Comparer avec le résultat donné directement par MAPLE.

SOLUTION **:**

>f:=x->x^5-2*x^4+5*x^3-4*x^2-10*x-9;

Le graphe de f "montre" l'existence d'une racine comprise entre 2et 3.

Si on appelle α cette racine, en appliquant le théorème des accroissements finis sur le segment $[x,\alpha]$, $\quad f(x)-\underbrace{f(\alpha)}_{=0}=(x-\alpha)f'(c)$ où $c\in]x,\alpha[$

donc $|x-\alpha|=\left|\dfrac{f(x)}{f'(c)}\right|$

f1:=D(f); f1(2);

f' est croissante sur $[2,3]$, donc $0\leq f'(2)=50\leq f'(c)$ et $|x-\alpha|=\left|\dfrac{f(x)}{f'(c)}\right|\leq\dfrac{|f(x)|}{50}$

La méthode de Newton consiste à prendre x_0 assez près de la racine pressentie pour que f' et f'' gardent un signe constant et de calculer un certain nombre de termes de la suite (u_n) qui suit la relation de récurrence : $u_{k+1}=u_k-\dfrac{f(u_k)}{f'(u_k)}$

La boucle sera close par un test d'arrêt cherchant à voir si $|u_k-\alpha|\leq\left|\dfrac{f(u_k)}{50}\right|<10^{-20}$

Digits:=50; u[0]:=3.0; k:=0;

while f(u[k])/50 > 10^(-20) do u[k+1]:=u[k]-f(u[k])/f1(u[k]);k:=k+1; od;

$\boxed{u_7=2,0901394009683592734043043989289786440063204022973}$

Comparons avec la valeur calculée par MAPLE :

s:=fsolve(f(a)=0,a); (voir **?fsolve** dans l'aide en ligne.)

On peut aussi voir l'écart entre les deux résultats trouvés : **evalf(u[7]-s);**

Sujet 2 : Développements asymptotiques :

1- Montrer que pour tout $y>0$, il existe un unique réel z tel que $z\,e^z=\dfrac{1}{y}$

On notera f l'application qui à $y\in]0,+\infty[$ associe z.

2- Tracer le graphe de f sur $[0,8]$ avec MAPLE.

Puis tracer simultanément les graphes de f et de $g:x\ \mapsto\ \frac{e^{-x}}{x}$ sur une même figure en faisant apparaitre une propriété géométrique .

3- Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de f au point $y_0=e^{-1}$

On écrira $f(x_0+h)=f(x_0)+a_1h+a_2h^2+a_3hs+o(h^3)$

DLf:=h-> ? + add(a[k]*h^k,k=1..3);

et on pourra utiliser le developpement limité de $g_o f$

SOLUTION **:**

1- Soit $g:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{e^{-x}}{x}\end{array}\right.$

g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=-\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	
	$\|\|$ $+\infty$		
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	
	$\|\|$		0

g est stricetement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc injective. Etant continue, l'image de l'intervalle $]0,+\infty[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, qui est $]0,+\infty[$ puisque $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

g est donc une bijection strictement décroissante et continue de $]0,+\infty[$ sur lui-même.

Par sujectivité, pour tout $y \in]0,+\infty[$, il existe $z \in]0,+\infty[$ tel que $y = g(z)$, c'est à dire tel que $z\,e^z = \dfrac{1}{y}$, et ce réel z est unique par injectivité de g. Enfin, $y = g(z) \iff z = g^{-1}(y)$

La fonction cherchée f est g^{-1}.

Comme g, $f = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante et continue de $]0,+\infty[$ sur lui-même. Son tableau de variation s'obtient en lisant "à l'envers" celui de g :

y	0		$+\infty$
	$\|\|$ $+\infty$		
$f(y)$	$\|\|$	$\searrow$	
	$\|\|$		0

2- **>g:=x->exp(-x)/x;**
f:=y->solve(g(z)=y,z);
plot(f(x),x=0..8);

Remarque : la commande **plot(f,0..8);** renvoie, elle, un message d'erreur (?)

On peut visualiser simultanément les graphes de g et de $f = g^{-1}$ qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice :

plot({f(x),g(x),x},x=0..8,y=0..8,scaling=constrained,numpoints=100);

Il convient pour cela d'imposer un repère orthonormé, par la commande "**scaling=constrained**" , et en augmenatnt éventuellement le nombre de points, "**numpoints=100**", qui est de 50 par défaut.

3- • g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = -\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$ ne s'annule pas.

Donc $f = g^{-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(y) = (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

g^{-1} est continue, g' est continue et ne s'annule pas, cette formule montre que f' est continue, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

L'égalité $f' = \dfrac{1}{g'_0 f}$ montre alors que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ car f et g' le sont. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$

A nouveau l'égalité $f' = \dfrac{1}{g'_0 f}$ montre que f' est de classe $\mathcal{C}^2$ car f et g' le sont. Donc f est de classe $\mathcal{C}^3$. Ce raisonnement permet de montrer par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

• Etant $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, la fonction f admet en tout point un développement limité à tout ordre. Donc g admet un développement limité à l'ordre 3 au point $x_0 = e^{-1}$

De plus $g(1) = e^{-1}$ donc $f(x_0) = f(e^{-1}) = 1$

On peut écrire le DL de f en x_0 avec le terme constant $a_0 = f(x_0) = 1$ et des coefficients suivants inconnus :

DLf:=h-> 1 +add(a[k]*h^k,k=1..3);

On calule le DL de la composée $g_o f = Id$:

series(g(DLf(h)),h=0,4);

On récupère la partie polynomiale du DL composé :

P:=convert(",polynom);

L'aide en ligne **?coeff** nous montre comment récupérer les coefficients de la partie polynomiale du DL.

On identifie le DL avec celui de $g_o f = Id$: $g_o f(1+h) = 1+h$

s:=solve(coeff(P,h,1)=1,coeff(P,h,2)=0,coeff(P,h,3)=0,seq(a[i],i=1..3));

On affecte les valeurs trouvées aux coefficients a_1, a_2, a_3 : **assign(s);**

Enfin **DLf(h);**

$$\boxed{f(x_0+h) = 1 - \frac{1}{2}eh + \frac{5}{16}e^2h^2 - \frac{43}{192}e^3h^3 + O(h^3)}$$

Sujet 3 : Minimiser une intégrale :

En vous aisant de MAPLE pour les calculs, calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ par deux méthodes differentes.

Avec MAPLE, tracer sur un même schéma les graphes de la fonction sinus et du polynôme $P = at^2 + bt + c$ qui réalise ce minimum.

SOLUTION :

1- Considérons la fonction $J : (a,b,c) \mapsto \int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

Calculons l'intégrale $\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ avec MAPLE :

>J:=int((sin(t)-(a*t*t+b*t+c))^2,t=0..Pi);

$J := \frac{2}{3}ac\pi^3 + \frac{1}{2}Pi + \frac{1}{3}b^2\pi^3 - 2a\pi^2 + 8a + bc\pi^2 - 2b\pi + c^2\pi - 4c + \frac{1}{5}a^2\pi^5 + \frac{1}{2}ab\pi^4$

Recherchons les points critiques de la fonction J, c'est dire les points où les dérivées partielles premières par rapport à a, b et c s'annulent :

on résoudra le système $\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial b}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial c}(a,b,c) = 0 \end{cases}$

E[1]:=diff(J,a);
E[2]:=diff(J,b);
E[3]:=diff(J,c);
s:=solve({E[1]=0,E[2]=0,E[3]=0},{a,b,c});

$$s := \left\{c = 12\frac{(\pi^2-10)}{\pi^3}, b = -60\frac{(\pi^2-12)}{\pi^4}, a = 60\frac{(\pi^2-12)}{\pi^5}\right\}$$

assign(s); P:=a*t*t+b*t+c;

$$P = 60\frac{(\pi^2-12)t^2}{\pi^5} - 60\frac{(\pi^2-12)t}{\pi^4} + 12\frac{(\pi^2-10)}{\pi^3}$$

plot(sin(t),P,t=0..Pi);

2- Deuxième méthode : l'application $\Phi : (f,g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$

Quand (a,b,c) décrit $\mathbb{R}^3$, la polynôme $P(t) = at^2 + bt + c$ décrit le sous espace $\mathbb{R}_2[t]$ de l'espace $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$

$$\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt = \| \sin(t) - (at^2 + bt + c)\|^2$$

D'après le théorème de la projection, on sait que cette norme est minimale lorsque $P(t) = at^2+bt+c$ est le projeté orthogonal de la fonction sinus sur le sous espace $\mathbb{R}_2[t]$. Recherchons une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[t]$ et nous calculerons le projeté par la formule :

$$\text{Proj}(P) = < Q_0, \sin > Q_0 + < Q_1, \sin > Q_1 + < Q_2, \sin > Q_2$$

Pour calculer une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[t]$, utilisons le procédé de Schmitt, en commençant par orthogonaliser la base canonique $(1, t, t^2)$

$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_1 = t + a_{1,0}Q_0 \\ Q_2 = t^2 + a_{2,1}Q_1 + a_{2,0}Q_0 \end{cases}$ le coefficient $a_{k,j}$ est donnée par la relation : $a_{k,j} = -\dfrac{< t^k, Q_j >}{< Q_j, Q_j >}$

```
>PS:=(f,g)->int(f*g,t=0..Pi);
Q[0]:=1;
for k from 0 to 2 do
    for j from 0 to k-1 do a[k,j]:=-PS(t^k,Q[j])/PS(Q[j],Q[j]) od;
    Q[k]:=t^k+add(a[k,j]*Q[j],j=0..k-1);od;
```

Normons les vecteurs obtenus :

```
for k from 0 to 2 do QN[k]:=Q[k]/sqrt(PS(Q[k],Q[k])) od;
```

$QN_0 = \frac{1}{\sqrt(\pi)} \qquad QN_1 = 2\frac{(t-\frac{1}{2}\pi)\sqrt(3)}{\pi^{3/2}} \qquad QN_2 = 6\frac{(t^2-\pi t+\frac{\pi^2}{6})\sqrt(5)}{\pi^{\frac{5}{2}}}$

Proj:=add(PS(QN[k],sin(t))*QN[k],k=0..2);

On vérifie qu'on trouve le même résultat que par la première méthode : **collect(%,t);**

Sujet 4 : Séries de Fourier :

On appelle f la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi,\pi[, f(x) = x^3$

1- a) Avec MAPLE, tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$

(on pourra utiliser la fonctions **piecewise**)

b) avec MAPLE, calculer les coefficients de Fourier de f.

b:=n-> .... à compléter

Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$

2- Définir une fonction S de la variable $n \in \mathbb{N}^*$ et du réel $x \in \mathbb{R}$ qui au couple (n,x) fait correspondre la somme partielle de la série de Fourier de rang n, prise au point x.

S:=(n,x)-> ..... à compléter

Tracer sur un même graphe a) les fonctions f et S_2

b) les fonctions f et S_5

b) les fonctions f et S_{10}

SOLUTION **:**

1- >**restart; pi:=evalf(Pi);**

f:=x->if -pi <= x and x <= pi then x^3 elif pi<=x then f(x-2*Pi) elif x<=-pi then f(x+2*Pi) fi;

plot(f,-3*pi..3*pi);

Remarque : Si on se contente d'écrire des tests booléens du type " if (**-Pi <= x and x<= Pi**)", MAPLE retourne souvent le message d'erreur suivant : *Error, (in f) cannot evaluate boolean*

C'est pourquoi il est préférable de demander à MAPLE de comparer des décimaux flottants avec l'instruction : **pi:=evalf(Pi);**

• Autre possibilité, en utilisant l'instruction **piecewise** ("par morceaux") :

f:=x->piecewise(x>=-Pi and x<= Pi,x^3,x>Pi,f(x-2*Pi), x<-Pi, f(x+2*Pi));

plot(f,-3*pi..3*pi);

b) La fonction f est impaire, ses coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls.

On calcule les $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$

b:=k->int(t^3*sin(k*t),t=-Pi..Pi)/Pi;

On peut vérfier que le calcul est correct sur les petites valeurs de n :

b(1);b(2);

On calcule ensuite b_n pour n quelconque : **b(n);**

Mais MAPLE ne sait pas que n est un entier. On peut donc simplifier encore ce calcul :

assume(n,integer); b(n); $\quad b_n = (-1)^n\left(\dfrac{12}{n^3} - \dfrac{2\pi^2}{n}\right)$

La série de Fourier est $S_f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(nx)$

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(n\frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{2\pi^2}{2p+1} - \frac{12}{(2p+1)^3}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{8} = 2\pi^2\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}}_{=\frac{\pi}{4}} - 12\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{\pi^3}{32}$$

2- **S:=(n,x)->add(b(k)*sin(k*x),k=1..n);** On peut tester ce calcul :
S(1,x); S(3,x);
Tracé des graphes :
Gf:=plot(f,-3*Pi..3*Pi):
Graf:=k->plot(S(k,x),x=-3*pi..3*pi,color=blue);
On teste : **Graf(2);**
a) **with(plots);**
display(Gf,Graf(2));
b) **display(Gf,Graf(5));**
c) **display(Gf,Graf(10));**

Sujet 5 : Matrice ayant des vecteurs propres imposés :

Déterminer les scalaires a, b, c, d, e, f pour que la matrice $A := \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & -2 \end{pmatrix}$ admette pour vecteurs propres $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

***SOLUTION* :**

définissons d'abord les acteurs de ce drame :
>with(linalg);
v[1]:=vector([1,-2,1]);v[2]:=vector([0,1,1]);v[3]:=vector([1,-1,3]);
A:=matrix(3,3,[a,1,b,2,c,d,e,f,-2]);

Construisons aussi la matrice P dont les colonnes sont V_1, V_2 et V_3 : $P = \left(\begin{array}{c|c|c} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \right)$

P:=concat(v[1],v[2],v[3]);
(on aurait pu aussi construire diectement la matrice P par :
P:=matrix(3,3,[1,0,1,-2,1,-1,1,1,3]);

On s'assure que (V_1, V_2, V_3) est libre en calculant le déterminant de P : **det(P);**

(V_1, V_2, V_3) sont des vecteurs propres de A si et seulement si la matrice P est une matrice passage qui diagonalise la matrice A, ssi $P^{-1}.A.P$ est une matrice diagonale.

On va calculer la matrice $B = P^{-1}.A.P$ et exprimer qu'elle est diagonale, c'est à dire que ses coefficients $b_{1,2}, b_{1,3}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{3,1}, b_{3,2}$ sont nuls :
B:=multiply(inverse(P),A,P);
syst:={B[1,2]=0,B[1,3]=0,B[2,1]=0,B[2,3]=0,B[3,1]=0,B[3,2]=0};
s:=solve(syst,{a,b,c,d,e,f});
On attribue effectivement les valeurs trouvées aux paramètres a, b, c, d, e, f par l'instruction :
assign(s);
voir **?assign** pour plus d'explications
On peut s'assurer alors que a a bien la valeur trouvée : **eval(a);**

On reporte dans la matrice A : seulement, on constate que l'instruction $evalm(A)$ n'est pas suffisante, les valeurs de a, b, c, d, e, f n'ont pas été reportées dans A.

Pour cela, on écrira : **map(eval,A);** qui fait opérer la fonction eval à tous les coefficients qui composent la matrice A.

Sujet 6 : Valeur approchée de π :

1- Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1} - \dfrac{2}{8n+4} - \dfrac{1}{8n+5} - \dfrac{1}{8n+6}\right)$?

Avec MAPLE déterminer une valeur approchée de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Quel résultat peut on conjecturer ?

2- Démontrer cette conjecture. Pour cela,

• en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}dt$, exprimer S comme une intégrale.

• décomposer avec MAPLE la fraction rationnelle $R(x) = 16\dfrac{(4-2x^3-x^4-x^5)}{16-x^8}$ en éléments simples.

• terminer la démonstration

3- Calculer une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

SOLUTION :

1- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1}+\dfrac{2}{8n+4}+\dfrac{1}{8n+5}+\dfrac{1}{8n+6}\right) \leq \dfrac{1}{16^n}(1+1+1+1) = \dfrac{4}{16^n}$

La série géométrique $\sum \frac{4}{16^n}$ converge et par majoration $\sum u_n$ converge absolument.

>sum((4/(8*n+1)-2/(8*n+4)-1/(8*n+5)-1/(8*n+6))/16^n,n=0..infinity);evalf(");

En comparant avec la valeur de π connue de MAPLE, on peut conjecturer que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \pi$

2- • $u_n = \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1}-\dfrac{2}{8n+4}-\dfrac{1}{8n+5}-\dfrac{1}{8n+6}\right)$

$$= \frac{1}{16^n}\left(4\int_0^1 t^{8n}dt - 2\int_0^1 t^{8n+3}dt - \int_0^1 t^{8n+4}dt - \int_0^1 t^{8n+5}dt\right)$$

$$= \int_0^1 \left(4\frac{t^{8n}}{16^n} - 2\frac{t^{8n+3}}{16^n} - \frac{t^{8n+4}}{16^n} - \frac{t^{8n+5}}{16^n}\right)dt$$

La série de fonctions dans l'intégrale converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(4\frac{t^{8n}}{16^n} - 2\frac{t^{8n+3}}{16^n} - \frac{t^{8n+4}}{16^n} - \frac{t^{8n+5}}{16^n}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{2t^3}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{t^4}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{t^5}{1-(\frac{t}{16})^8}\right)dt$$

$$= 16\int_0^1 \frac{4-2t^3-t^4-t^5}{1-t^8}dt$$

• **>convert(16*(4-2*t^3-t^4-t^5)/(16-t^8), parfrac,t);**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \left(\frac{4t}{t^2-2} - \frac{4(t-2)}{t^2-2t+2}\right)dt = \left[2\ln|t^2-2|\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(4t-4)+2}{(t-1)^2+1}dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left[2\ln|t^2-2|\right]_0^1 - 2\left[\ln(t^2-2t+2)\right]_0^1 - 2\left[\mathrm{Arctan}(t-1)\right]_0^1 = \pi$$

3- On approche π par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. L'erreur commise est $\pi - S_n = r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

>normal(4/(8*n+1)-2/(8*n+4)-1/(8*n+5)-1/(8*n+6));

$$\frac{120n^2+151n+47}{(8n+1)(2n+1)(8n+5)(4n+3)}$$

15/8*(8*n+6)*(8*n+5);expand(");

$$120n^2+165n+\frac{225}{4}$$

donc $120n^2+151n+47 \leq 120n^2+165n+\dfrac{225}{4} = \dfrac{15}{8}(8n+6)(8n+5)$

et $16^n u_n \leq \dfrac{15}{8}\dfrac{(8n+6)(8n+5)}{(8n+1)(2n+1)(8n+5)(4n+3)} = \dfrac{15}{4}\dfrac{1}{(8n+1)(2n+1)} \leq \dfrac{15}{64n^2}$

d'où $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{15}{64}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{16^k k^2} \leq \frac{15}{64(n+1)^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{16^k}$

$$r_n \leq \frac{15}{64(n+1)^2}\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{15}{64(n+1)^2}\left(\frac{1}{16}\right)^n \frac{1}{15} = \frac{1}{4(n+1)^2 16^{n+1}}$$

Cherchons le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{4(n+1)^2 16^{n+1}} < 10^{-100}$, c'est à dire le plus petit entier n tel que $4(n+1)^2 16^{n+1} > 10^{100}$

n:=0; while 4*n^2*16^n<10^100 do n:=n+1;od;

On obtient $n = 80$. ($r_{80} < 10^{-100}$)

Donc $S_{79} = \sum_{k=0}^{79} u_k$ est une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

>S:=0;

for k from 0 to 79 do S:=S+(4/(8*k+1)-2/(8*k+4)-1/(8*k+5)-1/(8*k+6))/16^k od;

Vérification : **evalf(S-Pi,120);**

Sujet 7 : Valeur approchée de π :

1- Calculer le développement en série entière de la fonctions Arcsin, qu'on écrira sous la forme :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{2n+1}$$

Montrer que $0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$

2- Montrer que $0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n} \dfrac{A_k}{2^{2k}} \leq \dfrac{1}{(2n+3)2^{2n}}$

Avec MAPLE, trouver le plus petit entier qui vérifie $\dfrac{1}{(2n+3)2^{2n}} \leq 10^{-100}$

Utiliser les résultats précédents pour calculer de façon élémentaire les 100 premières décimales de π. Comparer le résultat trouvé avec la valeur de π connue de MAPLE.

***SOLUTION* :**

1- $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}...(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ ...\ (\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n x^{2n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}}{n!} x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n\ n!} x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n-2).2n} x^{2n}$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n-2).2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\forall x \in]-1,1[, \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{2n+1}$ où

$$\boxed{A_n = \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2(2n+1)} = \frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\ 4.\ 6\ ....\ (2n-2).\ 2n}\frac{1}{(2n+1)}}$$

2- • Arcsin(x) est somme d'une série à termes positifs : $\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^{2k+1}$

donc, pour tout n, la somme de la série est supérieure ou égale à la somme partielle d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \text{Arcsin}(x)$$

• $$A_n = \underbrace{\frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\ 4.\ 6\ ....\ (2n-2).\ 2n}}_{\leq 1}\frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{1}{(2n+1)}$$

$$0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} A_k x^{2k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2n+3} = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$$

$$0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$$

$$0 \leq 6\text{Arcsin}(\tfrac{1}{2}) - 6\sum_{k=0}^{n} A_k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \leq \frac{6.4}{3(2n+3)2^{2n+3}}$$

$$0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}} \leq \frac{8}{(2n+3)2^{2n+3}} = \frac{1}{(2n+3)2^{2n}}$$

>n:=0; while (2*n+3)*4^n < 10^100 do n:=n+1 ; od:

Le plus petit entier qui vérifie $\dfrac{1}{(2n+3)2^{2n}} \leq 10^{-100}$ est 162.

Pour avoir $0 \leq \pi - 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}} \leq 10^{-100}$, il suffit de prendre $n \geq 162$

La somme $S = 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}}$ est alors une valeur approchée par défaut à 10^{-100} près de π.

On va calculer par une récurrence simple $B_n = \dfrac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\,4.\,6\,....\,(2n-2).\,2n}$ en remarquant que $B_0 = 1$ et que $B_n = \dfrac{2n-1}{2n} B_{n-1}$

>B[0]:=1; for n from 1 to 162 do B[n]:=B[n-1]*(2*n-1)/2/n od;

Puis on calcule S :

S:=add(3*B[n]/(2*n+1)/4^n,n=0..162);

Le résultat est donné sous forme d'un nombre rationnel. Cette somme est donc donnée par sa valeur exacte.

On peut vérifier que c'est bien une valeur approchée de π à 10^{-100} près :

evalf(Pi-S,120);

Sujet 8 : Centrale - maths I

1- En utilsant une fonction qui à $x \in [-\pi, \pi]$ associe x^2, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2- Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln t}{1-t}dt$

3- Utiliser les résultats précédents pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

Vérifier le résultat avec MAPLE.

SOLUTION :

1- En considérant la fonction f 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2$, on montre que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{et} \quad a_n(f) = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

En appliquant le théorème de Dirichlet au point $x = \pi$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2- • La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]0,x]$ lorsque $x \in]0,1[$.

Par ailleurs, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{t} = -1$

En posant $f(0) = -1$ on prolonge f en une fonction continue sur le segment $[0,x]$ et donc intégrable.

Raisonnement analogue pour la deuxième intégrale $\displaystyle\int_{1-x}^1 \frac{\ln t}{1-t}dt$

• Le changement de variable $u = 1-t$ donne :

$$\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_1^{1-x} \frac{\ln u}{1-u}(-du) = \int_{1-x}^1 \frac{\ln u}{1-u}du$$

3- • $\forall t \in [0,1[,\ \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$

donc pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\right) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (on peut intégrer une série entière terme à terme sur tout segment inclus dans son ouvert de convergence)

On en déduit que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}dt$

d'après la question 2, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$

Pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1[$, $\displaystyle\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)$,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)\right) dt$

Notons $u_n(t) = t^n \ln(1-t)$

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et a pour somme $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$
- Chaque fonction u_n est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 u_n(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{n+1}dt = \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 u_n(t)dt = \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}$$

- La fonction u_n étant toujours négative sur $[\frac{1}{2}, 1[$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |u_n(t)|dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 u_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 |u_n(t)|dt$ converge donc.

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, on en conclut que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u_n(t)dt\right), \text{ c'est à dire :}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}\right)$$

$$= \ln 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$$

$$= \ln 2\left(-\ln(1-\tfrac{1}{2})\right) - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2} = \ln^2(2) - \frac{\pi^2}{6} + S$$

- Reportons dans le calcul de S :

$$S = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = -\ln^2(2) + \frac{\pi^2}{6} - S$$

d'où $S = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$ $\quad \boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$

- Vérification avec MAPLE :

>S:=sum(1/n/n/2^n,n=1..infinity);   evalf(");
T:=Pi^2/12-ln(2)*ln(2)/2;   evalf(");

Sujet 8 : Somme de série :

Domaine de définition et calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

SOLUTION: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$ et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

$$S''(x) + S'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

S est la solution de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

>dsolve({diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+y(x) = exp(x), y(0)=1, D(y)(0)=0}, y(x));

$$\boxed{S(x) = \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$