Oraux-MAPLE - 2009

TD-info-maths MAPLE 2 juin 2009

Sujet 1 : Résolution approchée d'une équation ; méthode de Newton :

Avec MAPLE, vérifier que l'équation $x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 10x - 9 = 0$ admet une unique solution réelle, et en calculer une valeur approchée à 10^{-20} près par la méthode de Newton, avec un nombre d'itérations minimum.

Comparer avec le résultat donné directement par MAPLE.

Sujet 2 : Développements asymptotiques :

1- Montrer que pour tout $y > 0$, il existe un unique réel z tel que $z\,e^z = \dfrac{1}{y}$

On notera f l'application qui à $y \in]0, +\infty[$ associe z.

2- Tracer le graphe de f sur $[0, 8]$ avec MAPLE.

Puis tracer simultanément les graphes de f et de $g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ sur une même figure en faisant apparaitre une propriété géométrique .

3- Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de f au point $y_0 = e^{-1}$

On écrira $f(x_0 + h) = f(x_0) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 hs + o(h^3)$

DLf:=h-> ? + add(a[k]*h^k,k=1..3);

et on pourra utiliser le developpement limité de $g_o f$

Sujet 3 : Minimiser une intégrale :

En vous aisant de MAPLE pour les calculs, calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ par deux méthodes différentes.

Avec MAPLE, tracer sur un même schéma les graphes de la fonction sinus et du polynôme

$P = at^2 + bt + c$ qui réalise ce minimum.

Sujet 4 : Séries de Fourier :

On appelle f la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = x^3$

1- a) Avec MAPLE, tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$

(on pourra utiliser la fonctions **piecewise**)

b) avec MAPLE, calculer les coefficients de Fourier de f.

b:=n-> .... à compléter

Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$

2- Définir une fonction S de la variable $n \in \mathbb{N}^*$ et du réel $x \in \mathbb{R}$ qui au couple (n, x) fait correspondre la somme partielle de la série de Fourier de rang n, prise au point x.

S:=(n,x)-> ..... à compléter

Tracer sur un même graphe a) les fonctions f et S_2

b) les fonctions f et S_5

b) les fonctions f et S_{10}

Sujet 5 : Matrice ayant des vecteurs propres imposés :

Déterminer les scalaires a, b, c, d, e, f pour que la matrice $A := \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & -2 \end{pmatrix}$ admette pour vecteurs propres

$V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sujet 6 : Valeur approchée de π (1) :

1- Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$?

Avec MAPLE déterminer une valeur approchée de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Quel résultat peut on conjecturer ?

2- Démontrer cette conjecture. Pour cela,

- en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1}dt$, exprimer S comme une intégrale.
- décomposer avec MAPLE la fraction rationnelle $R(x) = 16\frac{(4-2x^3-x^4-x^5)}{16-x^8}$ en éléments simples.
- terminer la démonstration

3- Calculer une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

Sujet 7 : Valeur approchée de π (2) :

1- Calculer le développement en série entière de la fonctions Arcsin, qu'on écrira sous la forme :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{2n+1}$$

Montrer que $0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$

2- Montrer que $0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}} \leq \frac{1}{(2n+3)2^{2n}}$

Avec MAPLE, trouver le plus petit entier qui vérifie $\frac{1}{(2n+3)2^{2n}} \leq 10^{-100}$

Utiliser les résultats précédents pour calculer de façon élémentaire les 100 premières décimales de π. Comparer le résultat trouvé avec la valeur de π connue de MAPLE.

Sujet 8 : Centrale - maths II avec MAPLE

Exercice 1 : L'outil MAPLE peut être utilisé

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

Déterminer les sous espace de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Sujet 9 : Somme de série :

Domaine de définition et calcul de $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

Sujet 10 : ENSAM avec MAPLE

Exercice 1 : Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ de coefficient général $a_{i,j}$ tel que : $\begin{cases} a_{i,j} = 3 \text{ si } i = j \\ a_{i,j} = -1 \text{ sinon} \end{cases}$

1- A est elle diagonalisable ?
Si oui, la diagonaliser

2- Trouver une formule donnant A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$?

Exercice 2 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$

1- Montrer que f est de classse C^2 sur $\mathbb{R}$.

2- Calculer $f''(x)$

3- En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Sujet 11 : ENSAM (avec MAPLE)

Trouver un polynôme P de degré minimal tel que $P(X+1) - P(X) = X^8$

En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^8$

Sujet 12 : ENSAM (avec MAPLE)

a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

b) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Calculer le polynôme $Q(X)$, projeté orthogonal de la fonction $q : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ sur $\mathbb{R}_4[X]$.

Sujet 13 : Centrale - maths I

1- En utilsant une fonction qui à $x \in [-\pi, \pi]$ associe x^2, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2- Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$

3- Utiliser les résultats précédents pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

Vérifier le résultat avec MAPLE.

Sujet 14 : Centrale - maths II avec MAPLE

1- Soit $f : x \mapsto 1 + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}} dt$

Montrer que f est une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ à l'aide du logiciel.

Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$

2- Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Montrer que g est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que g est prolongeable en une fonction C^1 sur $[0,+\infty[$.

Donner sa limite quand $x \to +\infty$

3- Tracez grâce au logiciel f et g sur le même graphe et commentez.

CORRIGÉ

Sujet 1 : Résolution approchée d'une équation ; méthode de Newton :

Avec MAPLE, vérifier que l'équation $x^5-2x^4+5x^3-4x^2-10x-9=0$ admet une unique solution réelle, et en calculer une valeur approchée à 10^{-20} près par la méthode de Newton, avec un nombre d'itérations minimum.

Comparer avec le résultat donné directement par MAPLE.

SOLUTION **:**

>f:=x->x^5-2*x^4+5*x^3-4*x^2-10*x-9;

Le graphe de f "montre" l'existence d'une racine comprise entre 2et 3.

Si on appelle α cette racine, en appliquant le théorème des accroissements finis sur le segment $[x,\alpha]$, $f(x)-\underbrace{f(\alpha)}_{=0}=(x-\alpha)f'(c)$ où $c\in]x,\alpha[$

donc $|x-\alpha|=\left|\dfrac{f(x)}{f'(c)}\right|$

f1:=D(f); f1(2);

f' est croissante sur $[2,3]$, donc $0\leq f'(2)=50\leq f'(c)$ et $|x-\alpha|=\left|\dfrac{f(x)}{f'(c)}\right|\leq\dfrac{|f(x)|}{50}$

La méthode de Newton consiste à prendre x_0 assez près de la racine pressentie pour que f' et f'' gardent un signe constant et de calculer un certain nombre de termes de la suite (u_n) qui suit la relation de récurrence : $u_{k+1}=u_k-\dfrac{f(u_k)}{f'(u_k)}$

La boucle sera close par un test d'arrèt cherchant à voir si $|u_k-\alpha|\leq\left|\dfrac{f(u_k)}{50}\right|<10^{-20}$

Digits:=50; u[0]:=3.0; k:=0;

while f(u[k])/50 > 10^(-20) do u[k+1]:=u[k]-f(u[k])/f1(u[k]);k:=k+1; od;

$\boxed{u_7=2,0901394009683592734043043989289786440063204022973}$

Comparons avec la valeur calculée par MAPLE :

s:=fsolve(f(a)=0,a); (voir **?fsolve** dans l'aide en ligne.)

On peut aussi voir l'écart entre les deux résultats trouvés : **evalf(u[7]-s);**

Sujet 2 : Développements asymptotiques :

1- Montrer que pour tout $y>0$, il existe un unique réel z tel que $z\,e^z=\dfrac{1}{y}$

On notera f l'application qui à $y\in]0,+\infty[$ associe z.

2- Tracer le graphe de f sur $[0,8]$ avec MAPLE.

Puis tracer simultanément les graphes de f et de $g:x\ \mapsto\ \frac{e^{-x}}{x}$ sur une même figure en faisant apparaitre une propriété géométrique .

3- Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de f au point $y_0=e^{-1}$

On écrira $f(x_0+h)=f(x_0)+a_1h+a_2h^2+a_3hs+o(h^3)$

DLf:=h-> ? + add(a[k]*h^k,k=1..3);

et on pourra utiliser le developpement limité de g_of

SOLUTION **:**

1- Soit $g:\begin{cases}]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\quad\mapsto\quad\frac{e^{-x}}{x}\end{cases}$

g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ g'(x)=-\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

g est stricetement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc injective. Etant continue, l'image de l'intervalle $]0,+\infty[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, qui est $]0,+\infty[$ puisque $\lim\limits_{0}g=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}g=0$.

g est donc une bijection strictement décroissante et continue de $]0,+\infty[$ sur lui-même.

Par sujectivité, pour tout $y \in]0,+\infty[$, il existe $z \in]0,+\infty[$ tel que $y = g(z)$, c'est à dire tel que $z\,e^z = \dfrac{1}{y}$, et ce réel z est unique par injectivité de g. Enfin, $y = g(z) \iff z = g^{-1}(y)$

La fonction cherchée f est g^{-1}.

Comme g, $f = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante et continue de $]0,+\infty[$ sur lui-même. Son tableau de variation s'obtient en lisant "à l'envers" celui de g :

y	0		$+\infty$
	$\Vert$ $+\infty$		
$f(y)$	$\Vert$	$\searrow$	
	$\Vert$		0

2- >**g:=x->exp(-x)/x;**
f:=y->solve(g(z)=y,z);
plot(f(x),x=0..8);

Remarque : la commande **plot(f,0..8);** renvoie, elle, un message d'erreur (?)

On peut visualiser simultanément les graphes de g et de $f = g^{-1}$ qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice :

plot({f(x),g(x),x},x=0..8,y=0..8,scaling=constrained,numpoints=100);

Il convient pour cela d'imposer un repère orthonormé, par la commande "**scaling=constrained**" , et en augmenatnt éventuellement le nombre de points, "**numpoints=100**", qui est de 50 par défaut.

3- • g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = -\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$ ne s'annule pas.

Donc $f = g^{-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(y) = (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

g^{-1} est continue, g' est continue et ne s'annule pas, cette formule montre que f' est continue, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

L'égalité $f' = \dfrac{1}{g'_0 f}$ montre alors que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ car f et g' le sont. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$

A nouveau l'égalité $f' = \dfrac{1}{g'_0 f}$ montre que f' est de classe $\mathcal{C}^2$ car f et g' le sont. Donc f est de classe $\mathcal{C}^3$.

Ce raisonnement permet de montrer par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

• Etant $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, la fonction f admet en tout point un développement limité à tout ordre. Donc g admet un développement limité à l'ordre 3 au point $x_0 = e^{-1}$

De plus $g(1) = e^{-1}$ donc $f(x_0) = f(e^{-1}) = 1$

On peut écrire le DL de f en x_0 avec le terme constant $a_0 = f(x_0) = 1$ et des coefficients suivants inconnus :

DLf:=h-> 1 +add(a[k]*h^k,k=1..3);

On calule le DL de la composée $g_o f = Id$:

series(g(DLf(h)),h=0,4);

On récupère la partie polynomiale du DL composé :

P:=convert(",polynom);

L'aide en ligne **?coeff** nous montre comment récupérer les coefficients de la partie polynomiale du DL.

On identifie le DL avec celui de $g_o f = Id$: $g_o f(1+h) = 1+h$

s:=solve(coeff(P,h,1)=1,coeff(P,h,2)=0,coeff(P,h,3)=0,seq(a[i],i=1..3));

On affecte les valeurs trouvées aux coefficients a_1, a_2, a_3 : **assign(s);**

Enfin **DLf(h);**

$$\boxed{f(x_0+h) = 1 - \frac{1}{2}eh + \frac{5}{16}e^2h^2 - \frac{43}{192}e^3h^3 + O(h^3)}$$

Sujet 3 : Minimiser une intégrale :

En vous aisant de MAPLE pour les calculs, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ par deux méthodes différentes.

Avec MAPLE, tracer sur un même schéma les graphes de la fonction sinus et du polynôme
$P = at^2 + bt + c$ qui réalise ce minimum.

SOLUTION **:**

1- Considérons la fonction $J : (a,b,c) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt$ avec MAPLE :

>J:=int((sin(t)-(a*t*t+b*t+c))^2,t=0..Pi);

$J := \frac{2}{3}ac\pi^3 + \frac{1}{2}Pi + \frac{1}{3}b^2\pi^3 - 2a\pi^2 + 8a + bc\pi^2 - 2b\pi + c^2\pi - 4c + \frac{1}{5}a^2\pi^5 + \frac{1}{2}ab\pi^4$

Recherchons les points critiques de la fonction J, c'est dire les points où les dérivées partielles premières par rapport à a, b et c s'annulent :

on résoudra le système $\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial b}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial c}(a,b,c) = 0 \end{cases}$

```
E[1]:=diff(J,a);
E[2]:=diff(J,b);
E[3]:=diff(J,c);
s:=solve({E[1]=0,E[2]=0,E[3]=0},{a,b,c});
```

$$s := \left\{ c = 12\frac{(\pi^2 - 10)}{\pi^3}, b = -60\frac{(\pi^2 - 12)}{\pi^4}, a = 60\frac{(\pi^2 - 12)}{\pi^5} \right\}$$

```
assign(s); P:=a*t*t+b*t+c;
```

$$P = 60\frac{(\pi^2 - 12)t^2}{\pi^5} - 60\frac{(\pi^2 - 12)t}{\pi^4} + 12\frac{(\pi^2 - 10)}{\pi^3}$$

```
plot(sin(t),P,t=0..Pi);
```

2- Deuxième méthode : l'application $\Phi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$

Quand (a,b,c) décrit $\mathbb{R}^3$, la polynôme $P(t) = at^2 + bt + c$ décrit le sous espace $\mathbb{R}_2[t]$ de l'espace $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$

$\displaystyle\int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt - c)^2 dt = \| \sin(t) - (at^2 + bt + c) \|^2$

D'après le théorème de la projection, on sait que cette norme est minimale lorsque $P(t) = at^2 + bt + c$ est le projeté orthogonal de la fonction sinus sur le sous espace $\mathbb{R}_2[t]$. Recherchons une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[t]$ et nous calculerons le projeté par la formule :

$\text{Proj}(P) = < Q_0, \sin > Q_0 + < Q_1, \sin > Q_1 + < Q_2, \sin > Q_2$

Pour calculer une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[t]$, utilisons le procédé de Schmitt, en commençant par orthogonaliser la base canonique $(1, t, t^2)$

$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_1 = t + a_{1,0}Q_0 \\ Q_2 = t^2 + a_{2,1}Q_1 + a_{2,0}Q_0 \end{cases}$ le coefficient $a_{k,j}$ est donnée par la relation : $a_{k,j} = -\dfrac{< t^k, Q_j >}{< Q_j, Q_j >}$

```
>PS:=(f,g)->int(f*g,t=0..Pi);
Q[0]:=1;
for k from 0 to 2 do
    for j from 0 to k-1 do a[k,j]:=-PS(t^k,Q[j])/PS(Q[j],Q[j]) od;
    Q[k]:=t^k+add(a[k,j]*Q[j],j=0..k-1);od;
```

Normons les vecteurs obtenus :

```
for k from 0 to 2 do QN[k]:=Q[k]/sqrt(PS(Q[k],Q[k])) od;
```

$$QN_0 = \frac{1}{\sqrt{(\pi)}} \qquad QN_1 = 2\frac{(t - \frac{1}{2}\pi)\sqrt{(3)}}{\pi^{3/2}} \qquad QN_2 = 6\frac{(t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{6})\sqrt{(5)}}{\pi^{\frac{5}{2}}}$$

```
Proj:=add(PS(QN[k],sin(t))*QN[k],k=0..2);
```

On vérifie qu'on trouve le même résultat que par la première méthode : **collect(%,t);**

Sujet 4 : Séries de Fourier :

On appelle f la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi,\pi[, f(x) = x^3$

1- a) Avec MAPLE, tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$

(on pourra utiliser la fonctions **piecewise**)

b) avec MAPLE, calculer les coefficients de Fourier de f.

b:=n-> .... à compléter

Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$

2- Définir une fonction S de la variable $n \in \mathbb{N}^*$ et du réel $x \in \mathbb{R}$ qui au couple (n,x) fait correspondre la somme partielle de la série de Fourier de rang n, prise au point x.

S:=(n,x)-> ..... à compléter

Tracer sur un même graphe a) les fonctions f et S_2

b) les fonctions f et S_5

b) les fonctions f et S_{10}

SOLUTION :

1- **>restart; pi:=evalf(Pi);**
f:=x->if -pi <= x and x <= pi then x^3 elif pi<=x then f(x-2*Pi) elif x<=-pi then f(x+2*Pi) fi;
plot(f,-3*pi..3*pi);

Remarque : Si on se contente d'écrire des tests booléens du type " if (**-Pi <= x and x<= Pi**)", MAPLE retourne souvent le message d'erreur suivant : *Error, (in f) cannot evaluate boolean*

C'est pourquoi il est préférable de demander à MAPLE de comparer des décimaux flottants avec l'instruction : **pi:=evalf(Pi);**

• Autre possibilité, en utilisant l'instruction **piecewise** ("par morceaux") :
f:=x->piecewise(x>=-Pi and x<= Pi,x^3,x>Pi,f(x-2*Pi), x<-Pi, f(x+2*Pi));
plot(f,-3*pi..3*pi);

b) La fonction f est impaire, ses coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls.

On calcule les $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$

b:=k->int(t^3*sin(k*t),t=-Pi..Pi)/Pi;

On peut vérfier que le calcul est correct sur les petites valeurs de n :

b(1);b(2);

On calcule ensuite b_n pour n quelconque : **b(n);**

Mais MAPLE ne sait pas que n est un entier. On peut donc simplifier encore ce calcul :

assume(n,integer); b(n); $b_n = (-1)^n\left(\dfrac{12}{n^3} - \dfrac{2\pi^2}{n}\right)$

La série de Fourier est $S_f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(nx)$

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(n\frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{2\pi^2}{2p+1} - \frac{12}{(2p+1)^3}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{8} = 2\pi^2\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}}_{=\frac{\pi}{4}} - 12\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{\pi^3}{32}$$

2- **S:=(n,x)->add(b(k)*sin(k*x),k=1..n);** On peut tester ce calcul :
S(1,x); S(3,x);
Tracé des graphes :
Gf:=plot(f,-3*Pi..3*Pi):
Graf:=k->plot(S(k,x),x=-3*pi..3*pi,color=blue);
On teste : **Graf(2);**
a) **with(plots);**
display(Gf,Graf(2));
b) **display(Gf,Graf(5));**
c) **display(Gf,Graf(10));**

Sujet 5 : Matrice ayant des vecteurs propres imposés :

Déterminer les scalaires a, b, c, d, e, f pour que la matrice $A := \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & -2 \end{pmatrix}$ admette pour vecteurs propres $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

***SOLUTION* :**

définissons d'abord les acteurs de ce drame :
>with(linalg);
v[1]:=vector([1,-2,1]);v[2]:=vector([0,1,1]);v[3]:=vector([1,-1,3]);
A:=matrix(3,3,[a,1,b,2,c,d,e,f,-2]);

Construisons aussi la matrice P dont les colonnes sont V_1, V_2 et V_3 : $P = \left(\begin{array}{c|c|c} V_1 & V_2 & V_3 \end{array}\right)$

P:=concat(v[1],v[2],v[3]);

(on aurait pu aussi construire diectement la matrice P par :
P:=matrix(3,3,[1,0,1,-2,1,-1,1,1,3]);

On s'assure que (V_1, V_2, V_3) est libre en calculant le déterminant de P : **det(P);**

(V_1, V_2, V_3) sont des vecteurs propres de A si et seulement si la matrice P est une matrice passage qui diagonalise la matrice A, ssi $P^{-1}.A.P$ est une matrice diagonale.

On va calculer la matrice $B = P^{-1}.A.P$ et exprimer qu'elle est diagonale, c'est à dire que ses coefficients $b_{1,2}, b_{1,3}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{3,1}, b_{3,2}$ sont nuls :
B:=multiply(inverse(P),A,P);
syst:={B[1,2]=0,B[1,3]=0,B[2,1]=0,B[2,3]=0,B[3,1]=0,B[3,2]=0};
s:=solve(syst,{a,b,c,d,e,f});

On attribue effectivement les valeurs trouvées aux paramètres a, b, c, d, e, f par l'instruction :
assign(s);
voir **?assign** pour plus d'explications

On peut s'assurer alors que a a bien la valeur trouvée : **eval(a);**

On reporte dans la matrice A : seulement, on constate que l'instruction $evalm(A)$ n'est pas suffisante, les valeurs de a, b, c, d, e, f n'ont pas été reportées dans A.

Pour cela, on écrira : **map(eval,A);** qui fait opérer la fonction eval à tous les coefficients qui composent la matrice A.

Sujet 6 : Valeur approchée de π (1) :

1- Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1} - \dfrac{2}{8n+4} - \dfrac{1}{8n+5} - \dfrac{1}{8n+6}\right)$?

Avec MAPLE déterminer une valeur approchée de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Quel résultat peut on conjecturer ?

2- Démontrer cette conjecture. Pour cela,

- en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}dt$, exprimer S comme une intégrale.
- décomposer avec MAPLE la fraction rationnelle $R(x) = 16\dfrac{(4 - 2x^3 - x^4 - x^5)}{16 - x^8}$ en éléments simples.
- terminer la démonstration

3- Calculer une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

SOLUTION **:**

1- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1} + \dfrac{2}{8n+4} + \dfrac{1}{8n+5} + \dfrac{1}{8n+6}\right) \leq \dfrac{1}{16^n}(1+1+1+1) = \dfrac{4}{16^n}$

La série géométrique $\sum \frac{4}{16^n}$ converge et par majoration $\sum u_n$ converge absolument.
>sum((4/(8*n+1)-2/(8*n+4)-1/(8*n+5)-1/(8*n+6))/16^n,n=0..infinity);evalf(");

En comparant avec la valeur de π connue de MAPLE, on peut conjecturer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \pi$

2- • $u_n = \dfrac{1}{16^n}\left(\dfrac{4}{8n+1} - \dfrac{2}{8n+4} - \dfrac{1}{8n+5} - \dfrac{1}{8n+6}\right)$

$$= \frac{1}{16^n}\left(4\int_0^1 t^{8n}dt - 2\int_0^1 t^{8n+3}dt - \int_0^1 t^{8n+4}dt - \int_0^1 t^{8n+5}dt\right)$$

$$= \int_0^1 \left(4\frac{t^{8n}}{16^n} - 2\frac{t^{8n+3}}{16^n} - \frac{t^{8n+4}}{16^n} - \frac{t^{8n+5}}{16^n}\right) dt$$

La série de fonctions dans l'intégrale converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(4\frac{t^{8n}}{16^n} - 2\frac{t^{8n+3}}{16^n} - \frac{t^{8n+4}}{16^n} - \frac{t^{8n+5}}{16^n}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{2t^3}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{t^4}{1-(\frac{t}{16})^8} - \frac{t^5}{1-(\frac{t}{16})^8}\right) dt$$

$$= 16\int_0^1 \frac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{1 - t^8}dt$$

• **>convert(16*(4-2*t^3-t^4-t^5)/(16-t^8), parfrac,t);**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \left(\frac{4t}{t^2-2} - \frac{4(t-2)}{t^2-2t+2}\right) dt = \left[2\ln|t^2-2|\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(4t-4)+2}{(t-1)^2+1}dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left[2\ln|t^2-2|\right]_0^1 - 2\left[\ln(t^2-2t+2)\right]_0^1 - 2\left[\mathrm{Arctan}(t-1)\right]_0^1 = \pi$$

3- On approche π par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. L'erreur commise est $\pi - S_n = r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

>normal(4/(8*n+1)-2/(8*n+4)-1/(8*n+5)-1/(8*n+6));

$$\frac{120n^2+151n+47}{(8n+1)(2n+1)(8n+5)(4n+3)}$$

15/8*(8*n+6)*(8*n+5);expand(");

$$120n^2+165n+\frac{225}{4}$$

donc $120n^2+151n+47 \leq 120n^2+165n+\frac{225}{4} = \frac{15}{8}(8n+6)(8n+5)$

et $16^n u_n \leq \frac{15}{8}\frac{(8n+6)(8n+5)}{(8n+1)(2n+1)(8n+5)(4n+3)} = \frac{15}{4}\frac{1}{(8n+1)(2n+1)} \leq \frac{15}{64n^2}$

d'où $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{15}{64}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{16^k k^2} \leq \frac{15}{64(n+1)^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{16^k}$

$$r_n \leq \frac{15}{64(n+1)^2}\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{15}{64(n+1)^2}\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\frac{1}{15} = \frac{1}{4(n+1)^2 16^{n+1}}$$

Cherchons le plus petit entier n tel que $\frac{1}{4(n+1)^2 16^{n+1}} < 10^{-100}$, c'est à dire le plus petit entier n tel que $4(n+1)^2 16^{n+1} > 10^{100}$

n:=0; while 4*n^2*16^n<10^100 do n:=n+1;od;

On obtient $n = 80$. ($r_{80} < 10^{-100}$)

Donc $S_{79} = \sum_{k=0}^{79} u_k$ est une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

>S:=0;

for k from 0 to 79 do S:=S+(4/(8*k+1)-2/(8*k+4)-1/(8*k+5)-1/(8*k+6))/16^k od;

Vérification : **evalf(S-Pi,120);**

Sujet 7 : Valeur approchée de π (2) :

1- Calculer le développement en série entière de la fonctions Arcsin, qu'on écrira sous la forme :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{2n+1}$$

Montrer que $0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$

2- Montrer que $0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{2^{2k}} \leq \frac{1}{(2n+3)2^{2n}}$

Avec MAPLE, trouver le plus petit entier qui vérifie $\frac{1}{(2n+3)2^{2n}} \leq 10^{-100}$

Utiliser les résultats précédents pour calculer de façon élémentaire les 100 premières décimales de π. Comparer le résultat trouvé avec la valeur de π connue de MAPLE.

SOLUTION :

1- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}...(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,...\,(\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n x^{2n}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}}{n!}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n-2).2n}x^{2n}$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n-2).2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\forall x \in]-1,1[, \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{2n+1}$ où

$$\boxed{A_n = \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2(2n+1)} = \frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\,4.\,6\,....\,(2n-2).\,2n}\frac{1}{(2n+1)}}$$

2- • Arcsin(x) est somme d'une série à termes positifs : $\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^{2k+1}$

donc, pour tout n, la somme de la série est supérieure ou égale à la somme partielle d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \text{Arcsin}(x)$$

• $A_n = \underbrace{\dfrac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\,4.\,6\,....\,(2n-2).\,2n}}_{\leq 1} \dfrac{1}{(2n+1)} \leq \dfrac{1}{(2n+1)}$

$$0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} A_k x^{2k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2n+3} = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$$

$$0 \leq \text{Arcsin}(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{2k+1} \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$$

$$0 \leq 6\text{Arcsin}(\tfrac{1}{2}) - 6\sum_{k=0}^{n} A_k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \leq \frac{6.4}{3(2n+3)2^{2n+3}}$$

$$0 \leq \pi - 3\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}} \leq \frac{8}{(2n+3)2^{2n+3}} = \frac{1}{(2n+3)2^{2n}}$$

>n:=0; while (2*n+3)*4^n < 10^100 do n:=n+1 ; od:

Le plus petit entier qui vérifie $\dfrac{1}{(2n+3)2^{2n}} \leq 10^{-100}$ est 162.

Pour avoir $0 \leq \pi - 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}} \leq 10^{-100}$, il suffit de prendre $n \geq 162$

La somme $S = 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{2^{2k}}$ est alors une valeur approchée par défaut à 10^{-100} près de π.

On va calculer par une récurrence simple $B_n = \dfrac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.\,4.\,6\,....\,(2n-2).\,2n}$ en remarquant que $B_0 = 1$ et que $B_n = \dfrac{2n-1}{2n} B_{n-1}$

>B[0]:=1; for n from 1 to 162 do B[n]:=B[n-1]*(2*n-1)/2/n od;

Puis on calcule S :

S:=add(3*B[n]/(2*n+1)/4^n,n=0..162);

Le résultat est donné sous forme d'un nombre rationnel. Cette somme est donc donnée par sa valeur exacte.

On peut vérifier que c'est bien une valeur approchée de π à 10^{-100} près :

evalf(Pi-S,120);

Sujet 8 : Centrale - maths II avec MAPLE

Exercice 1 : L'outil MAPLE peut être utilisé

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

Déterminer les sous espace de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

SOLUTION :

Exercice 1 :

• $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

>with(linalg);
A:=matrix(3,3,[-2,1,1,8,1,-5,4,3,-3]);
eigenvects(A);

$[0, 1, \{[3, 1, 5]\}], [-2, 2, \{[1, -1, 1]\}]$

• Soit (D) une droite vectorielle, engendrée par un vecteur w non nul. (D) est stable par u si et seulement si $u(w) \in (D)$, ssi w est un vecteur propre de A.

Les droites stables par A sont celles qui sont dirigées par un vecteur non nul de $E_A(0)$ ou de $E_A(-2)$.

Il y a donc deux droites stables par u, les droites $E_A(0) = \ker(u)$, dirigée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $E_A(-2)$, dirigée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque : Si f avait été diagonalisable, on aurait pu rechercher les plans stables par f selon la méthode vue en exercice (voir fichier "Diagonalisation", exercice 6.1 pages 37-38). Cette méthode n'est pas applicable ici : -2 est valeur propre double, mais le sous espace propre associé n'est que de dimension 1, suivant les résultats donnés par MAPLE. f n'est donc pas diagonalisable.

On va alors utiliser la méthode exposée dans l'exercice 6.2 pages 38-39 :

Montrons qu'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$.

- Supposons que le vecteur $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de ${}^tA$: $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ {}^tA.C = \lambda C$

  Soit x un vecteur de $\mathcal{H}$, de vecteur colonne $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

  alors $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = {}^tX.C = 0$

  Son image $f(x)$ a pour vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A.X$

  $$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n = (y_1, y_2, ..., y_n).\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^tY.C = {}^t(A.X).C = {}^tX.{}^tA.C = {}^tX.\lambda C$$
  $$= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = 0$$

  donc $f(x) \in \mathcal{H}$, ce qui montre que $\mathcal{H}$ est stable par f.

- Réciproquement, supposons que $\mathcal{H}$ est stable par f.

  $\mathcal{H}$ est le noyau de la forme linéaire φ qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre $\varphi(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$

  φ a pour matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ${}^tC = (a_1, a_2, ..., a_n)$

  Par hypothèse, $\forall x \in \mathcal{H},\ f(x) \in \mathcal{H}$, c'est à dire,

  $$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$$

  Soit ψ la forme linéaire qui à $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ fait correspondre ${}^tC.(AX)$

  La stabilité de $\mathcal{H}$ par f se traduit par :

  $\forall X \in \mathbf{K}^n,\ {}^tC.X = 0 \implies {}^tC.(AX) = 0$

  soit aussi : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = 0 \implies \psi(x) = 0$

  ou encore $\ker \varphi \subset \ker \psi$

  donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \psi = \lambda\varphi$, ce qui se traduit matriciellement par : ${}^tC.A = \lambda\, {}^tC$

  et en passant à la transposée, $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ {}^tA.C = \lambda C$

  donc C est vecteur propre de ${}^tA$.

- **>B:=transpose(A);**

  eigenvects(B);

  $[0, 1, \{[2, 1, -1]\}], [-2, 2, \{[3, 1, -2]\}]$

  f admet donc deux plans stables, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ d'équations respectives :

  $2x + y - z = 0$ et $3x + y - 2z = 0$

Sujet 9 : Somme de série :

Domaine de définition et calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

***SOLUTION*:** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$ et $S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

$$S''(x) + S'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

S est la solution de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

>dsolve({diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+y(x) = exp(x), y(0)=1, D(y)(0)=0}, y(x));

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

Sujet 10 : ENSAM avec MAPLE

Exercice 1 : Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ de coefficient général $a_{i,j}$ tel que : $\begin{cases} a_{i,j} = 3 & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = -1 & \text{sinon} \end{cases}$

1- A est elle diagonalisable ?
Si oui, la diagonaliser

2- Trouver une formule donnant A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$?

Exercice 2 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$

1- Montrer que f est de classse C^2 sur $\mathbb{R}$.

2- Calculer $f''(x)$

3- En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

***SOLUTION* :**

Exercice 1 :

1- La matrice A étant symétrique et réelle, est diagonalisable.

Puisqu'on a MAPLE à disposition, on peut tester le comportement pour les petites valeurs de n :

>with(linalg):
A:=n->matrix(n,n,(i,j)-> if i=j then 3 else -1 fi);
for i from 2 to 8 do eigenvals(M(i)) od;

Dans le cas présent, $n = 5$.

eigenvals(A(5));
vp:=eigenvects(A(5));

$$[4, 4, \{[0, 0, 1, -1, 0], [0, 1, 0, -1, 0], [0, 0, 0, -1, 1], [1, 0, 0, -1, 0]\}], [-1, 1, \{[1, 1, 1, 1, 1]\}]$$

-1 est valeur propre simple, le sous espace propre associé étant la droite engendrée par le vecteur $U = (1, 1, 1, 1, 1)$

4 est valeur propre d'ordre 4, le sous espace propre associé étant l'hyperplan d'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$, orthogonal au premier sous espace.

On récupère les vecteurs propres, qui fournirons les colonnes de la matrice de passage P :

>seq(op(vp[i][3]),i=1..2);
P:=transpose(matrix([seq(op(vp[i][3]),i=1..2)]));
Delta:=multiply(inverse(P),A(5),P);

Les matrices P et Δ aisi calculées permettent de diagonaliser la matrice A, c'est à dire d'écrire l'égalité : $A = P.\Delta.P^{-1}$

2- $A = P.\Delta.P^{-1}$ donc, pour tout n, $A^n = P.\Delta^n.P^{-1}$

Le résultat demandé est donné par :

multiply(P,diag(4^n,4^n,4^n,4^n,(-1)^n),inverse(P));

La formule qui permet de calculer Δ^n étant vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, cette formule l'est aussi.

Exercice 2 :

1-2- Notons $H(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}$

Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Quand $t \to 0$, $\frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{(xt)^2}{2}}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{x^2}{2}$

La fonction $t \mapsto H(x,t)$ peut être prolongée en une fonction continue sur le fermé $[0, +\infty[$. Elle est intégrable sur tout segment et en particulier sur $[0, 1]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \le H(x,t) \le \frac{1+1}{t^2} e^{-t} \le 2e^{-t}$

Cette majoration montre que la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par additivité, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

- Notons $J = \mathbb{R}$ et $I =]0, +\infty[$
  - pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur J. (H_1)
  - pour tout $x \in J$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2)

- La fonction H admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ continue sur $J \times I$ et

$$\forall (x,t) \in J \times I,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$$

Soit $a > 0$,

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-a,a]$. (H_1')
- pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur I. (H_2')
- Rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$.

Pour tout $(x,t) \in [-a,a] \times I$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{|xt|}{t} e^{-t} = ae^{-t}$ avec $(t \mapsto ae^{-t})$ continue et intégrable sur I. (H_3')

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que f est de classe $[-a,a]$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in [-a,a],\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

On applique le même raisonnement à la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$, en utilisant la majoration :

$$\forall (x,t) \in [-a,a] \times I \quad \left|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-t} \quad (H_3'')$$

On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-a,a]$ et que :

$$\forall x \in [-a,a],\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt$$

Ce raisonnement étant valable pour tout réel $a > 0$, la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Avec MAPLE, l'intégrale se calcule ainsi :

>int(cos(x*t)*exp(-t),t=0..infinity);

Ce calcul peut s'effectuer ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

On peut aussi effectuer une double intégration par parties

3- $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

donc $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{Arctan}(x) + c$

Or on a vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ donc $f'(0) = 0$ et $c = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \mathrm{Arctan}(t)dt = [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$\boxed{f(x) = x\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

Sujet 11 : ENSAM (avec MAPLE)

Trouver un polynôme P de degré minimal tel que $P(X+1) - P(X) = X^8$

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^8$

SOLUTION : Si $P(X)$ a pour terme dominant $a_m X^m$, $P(X)$ s'écrit $a_m X^m + Q(X)$ avec $d°(Q) < m$

alors $P(X+1) - P(X) = a_m(X+1)^m + Q(X+1) - (a_m X^m + Q(X))$

$$P(X+1) - P(X) = a_m(X^m + \tbinom{n}{1}X^{m-1} + \underbrace{R(X)}_{d° \leq n-2})^m - a_m X^m + \underbrace{Q(X+1) - Q(X)}_{d° \leq n-2}$$

$P(X+1)-P(X)=a_m\binom{n}{1}X^{m-1}+\underbrace{S(X)}_{d^\circ\leq n-2}$ a pour terme dominant $a_m m X^{m-1}$.

Un polynôme P dqui vérifie la relation $P(X+1)-P(X)=X^8$ devra donc être de degré 9 et avoir pour terme dominant $\frac{1}{9}X^9$

>restart;

On définit le polynôme, sous forme de fonction poltnoliale pour pouvoir ensuite remplacer X par $X+1$.

a[9]:=1/9;

p:=x->add(a[k]*xk,k=0..9);**

On calcule $P(X+1)-P(X)$ et on réordonne suivant les puissances de X :

p(x+1)-p(x);q:=collect(%,x);

On identifie les coefficiebts de $P(X+1)-P(X)$ avec ceux de X^8, et on résoud le système obtenu :

systequa:=seq(coeff(q,x,k)=0,k=0..7);

sol:=solve(systequa,seq(a[k],k=0..8));

On remarque que a_0 est quelconque.

On substitue les coefficients trouvés dans le polynôme $P(X)$:

p2:=subs(sol,p(x));

p3:=unapply(p2,x);

Vérification : **p3(y+1)-p3(y); expand(%);**

• Pour tout k, $k^8=P(k+1)-P(k)$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^8=\sum_{k=1}^{n}(P(k+1)-P(k))=P(n+1)-P(1)$ (somme "téléscopique")

>p3(n+1)-p3(1);expand(%);factor(%);

On peut vérifier ce résultat que connait MAPLE par l'instruction :

>sum(k^8,k=1..m);

$$\sum_{k=1}^{n}k^8=\frac{1}{90}n(2n+1)(n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

Sujet 12 : ENSAM (avec MAPLE)

a) Montrer que l'application $(f,g)\ \mapsto\ \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

b) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Calculer le polynôme $Q(X)$, projeté orthogonal de la fonction $q:x\mapsto|x-\frac{1}{2}|$ sur $\mathbb{R}_4[X]$.

SOLUTION : a) Voir le cours

b) On définit le produit scalaire :

>restart;

PS:=(f,g)->int(f*g,x=0..1);

Orthogonalisons la base canonique $(1,X,X^2,X^3,X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ par le procédé de Schmidt, en un système (P_0,P_1,P_2,P_3,P_4).

Pour tout k, $P_k=X^k+\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}a_{k,i}P_i$ avec $a_{k,i}=-\dfrac{<x^k,P_i>}{<P_i,P_i>}$:

```
p[0]:=1;
for k from 1 to 4 do
        for i from 0 to k-1 do a[k,i]:=-PS(x^k,p[i])/PS(p[i],p[i]) ;od;
        p[k]:=x^k+add(a[k,i]*p[i],i=0..k-1); od;
```

Normons enfin les polynômes trouvés :

for k from 0 to 4 do pn[k]:=p[k]/sqrt(PS(p[k],p[k])) od;

c) **g:=abs(x-1/2);**

Q:=add(PS(pn[k],g)*pn[k],k=0..4);

plot(g,Q,x=0..1);

Sujet 13 : Centrale - maths I

1- En utilisant une fonction qui à $x\in[-\pi,\pi]$ associe x^2, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

2- Pour $x\in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_{1-x}^1\frac{\ln t}{1-t}dt$

3- Utiliser les résultats précédents pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$

Vérifier le résultat avec MAPLE.

SOLUTION :

1- En considérant la fonction f 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2$, on montre que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{et} \quad a_n(f) = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

En appliquant le théorème de Dirichlet au point $x = \pi$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2- • La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]0, x]$ lorsque $x \in]0, 1[$.

Par ailleurs, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{t} = -1$

En posant $f(0) = -1$ on prolonge f en une fonction continue sur le segment $[0, x]$ et donc intégrable.

Raisonnement analogue pour la deuxième intégrale $\displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{\ln t}{1-t} dt$

• Le changement de variable $u = 1 - t$ donne :

$$\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_1^{1-x} \frac{\ln u}{1-u}(-du) = \int_{1-x}^{1} \frac{\ln u}{1-u} du$$

3- • $\forall t \in [0, 1[,\ \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$

donc pour tout $x \in [0, 1[,\ \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\right) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (on peut intégrer une série entière terme à terme sur tout segment inclus dans son ouvert de convergence)

On en déduit que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$

d'après la question 2, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$

Pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1[,\ \dfrac{\ln(t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)$,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)\right) dt$

Notons $u_n(t) = t^n \ln(1-t)$

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et a pour somme $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$

- Chaque fonction u_n est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} u_n(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} u_n(t)dt = \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}$$

- La fonction u_n étant toujours négative sur $[\frac{1}{2}, 1[$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |u_n(t)|dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} u_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} |u_n(t)|dt$ converge donc.

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, on en conclut que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} u_n(t)dt\right) \text{, c'est à dire :}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}\right)$$

$$= \ln 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$$

$$= \ln 2\,(-\ln(1-\tfrac{1}{2})) - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \ln^2(2) - \frac{\pi^2}{6} + S$$

• Reportons dans le calcul de S :

$$S = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = -\ln^2(2) + \frac{\pi^2}{6} - S$$

d'où $S = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$ $\qquad \boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$

• Vérification avec MAPLE :

>S:=sum(1/n/n/2^n,n=1..infinity); evalf(");
T:=Pi^2/12-ln(2)*ln(2)/2; evalf(");

Sujet 14 : Centrale - maths II avec MAPLE

1- Soit $f:\ x \mapsto 1 + \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt$

Montrer que f est une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ à l'aide du logiciel.

Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$

2- Soit $g:\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Montrer que g est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que g est prolongeable en une fonction C^1 sur $[0,+\infty[$.

Donner sa limite quand $x \to +\infty$

3- Tracez grâce au logiciel f et g sur le même graphe et commentez.

SOLUTION :

• Soit $(x,t) \mapsto H(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

et soit $\Phi(x,y) = \displaystyle\int_y^{+\infty} H(x,t)dt$

Sous réserve que pour tout x la fonction $t \mapsto H(x,t)$ soit continue, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -H(x,y)$

(dérivation d'une intégrale fonction de la borne inférieure)

et sous réseve que l'on puisse apliquer la théorème de dérivation sous le signe $\int$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \int_y^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt$$

• Notons $H(x,t) = \dfrac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t) = \dfrac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+e^{-t}$ ne s'annule pas)

donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} H(x,t)dt = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$

et $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -H(x,y) = -\dfrac{e^{-y}\sin(x-y)}{1+e^{-y}}}$

• Soit $y \in R$, fixé.

- pour tout $t \in [y,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\qquad (H_1)$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. $\qquad (H_2)$
- La fonction H admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}\times[y,+\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[y,+\infty[,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-t}\cos(t-x)}{1+e^{-t}}$$

- pour tout $t \in [y,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\qquad (H_1')$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. $\qquad (H_2')$
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[y,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{e^{-t}\cos(t-x)}{1+e^{-t}}\right| \le e^{-t}$

avec $t \mapsto e^{-t}$ continue et intégrable sur $[y,+\infty[$. $\qquad (H_3')$

Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$ on en déduit que la fonction

$x \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt = \Phi(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\int_y^{+\infty}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt=-\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}dt}$$

• Par application des règles de dérivation de composées de fonctions de plusieurs variables,

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=1+\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(t-x)}{1+e^{-t}}dt1=1+\Phi(x,x)$$

$$\Longrightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,x).1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,x).1=\int_x^{+\infty}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)dt-\underbrace{H(x,x)}_{=0}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}dt$$

En posant $G(x,t)=\dfrac{e^{-t}\cos(x-t)}{1+e^{-t}}$, et en appliquant le même raisonnement, f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)dt-G(x,x)$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt-\frac{e^{-x}\cos(x-x)}{1+e^{-x}}=-(f(x)-1)-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(x)=1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E):\ y''+y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

• **Avec MAPLE :**

>f:=x->int(exp(-t)*sin(x-t)/(1+exp(-t)),t=x..infinity);

Les dérivées première et seconde sont calculées par :

diff(f(x),x); ou **D(f);**

diff(f(x),x,x); ou **diff(f(x),x$2);** ou **D(D(f));**

Après simplification on retrouve bien l'égalité :

$$\boxed{f''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$$

et on termine le calcul comme ci-dessus pour trouver l'équation différentielle dont f est solution.

• $f(x)=1+\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt$

$$\forall x>0,\left|\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt\right|\le\int_x^{+\infty}\left|\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}\right|dt\le\int_x^{+\infty}e^{-t}dt=e^{-x}$$

donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(x-t)}{1+e^{-t}}dt=0$

d'o'l'on conclut que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$

2- Soit $g:\ x\ \mapsto\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Cette série converge si et seulement si $x\in[0,+\infty[$ $\quad(\forall x\ge0,\left|(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|\le\dfrac{1}{n^2+1})$

Pour tout $x\ge0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Chacune des fonctions u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et, $\forall p\in\mathbb{N},\ u_n^{(p)}(x)=(-1)^{n+p}n^p\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Soit $a>0$ quelconque. $\|u_n^{(p)}\|_{[a,+\infty[}^{\infty}=n^p\dfrac{e^{-na}}{n^2+1}$. cette série converge car $n^p\dfrac{e^{-na}}{n^2+1}\overset{x\to0}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Pour tout p, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement et donc uniformément sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Cela permet de montrer par récurrence sur p que la fonction somme, g, est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p sur l'intervale $[a,+\infty[$

a étant un réel >0 quelconque, g est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervale $]0,+\infty[$ et, $\forall x>0, g^{(p)}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{n^pe^{-nx}}{n^2+1}$

• Pour tout $x\ge0$, la série $\sum u_n'=\sum(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}$ est alternée, la suite $(\frac{ne^{-nx}}{n^2+1})$ est décroissante et de limite nulle. La série vérifie donc le critère de Leibniz des séries alternées.

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)-\sum_{k=0}^{n}u_k'(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k'(x)=r_n(x)$$

D'après le théorème de majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère, pour tout n,

$$\forall x\ge0,\ |r_n(x)|\le|u_{n+1}'(x)|=\tfrac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1}\le\tfrac{n+1}{(n+1)^2}\le\tfrac{1}{n+1}$$

donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |r_n(x)| = \|r_n\|_{[0,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \|r_n\| = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{ne^{-nx}}{n^2+1}$

• Puisque la convergence est uniforme sur $[1,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} u_n(x)\right) = 1+0+0+....$$

(car $u_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1,\ \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$)

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$

3- $\forall x > 0,\ g''(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \dfrac{n^2e^{-nx}}{n^2+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n^2+1)e^{-nx}}{n^2+1}$

$$g''(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

La fonction g est donc solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y''+y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

• f et g sont deux solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y''+y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Par différence, la fonction $f-g$ est solution de l'équation homogène (E_0) : $y''+y=0$

Donc il existe λ et μ réels tels que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x)-g(x) = \lambda\cos x + \mu \sin x$

Or on a vu que $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = 1$ donc $\lambda = \mu = 0$, ce qui entraîne finalement que

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = g(x)$

• Ceci peut être vérifié **avec MAPLE** :

```
>f:=x->int(exp(-t)*sin(x-t)/(1+exp(-t)),t=x..infinity);
plot(f,0..10);
g:=x->sum((-1)^n*exp(-n*x)/(n*n+1),n=0..infinity);
plot(g,0..10);
```

On peut aussi tracer les deux graphes sur une même figure :

```
>with(plots);
G1:=plot(f,0..10,color = red); G2:=plot(g,0..10,color=blue);
display(G1,G2);
```