Révisions d'analyse

1 ** Démonstration des théorème de Fejer et de Weierstrass :

Dans toute l'étude, pour tout $k \in \mathbb{Z}, e_k$ est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = e^{ikx}$$

1- Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodique.

On définit leur produit de convolution par :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

a) Montrer que $f * g$ est continue, 2π-périodique, et que $f * g = g * f$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g)$
c) Calculer $f * e_k$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e_k = e_{-n} + e_{-n+1} + ... + e_{-1} + e_0 + e_1 + ... + e_{n-1} + e_n$

(L'application D_n est appelée "noyau de Dirichlet")

et $K_n = \dfrac{D_0 + D_1 + ... + D_n}{n+1}$

a) Montrer que si $x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

et que $K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$

En déduire que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -a]$ et sur $[a, \pi]$ pour tout $a \in]0, -\pi[$

b) Montrer que $f * D_n$ est un polynôme trigonométrique. Que représente-t-il pour la fonction f ?

3 - a) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$

b) Montrer que la suite de fonctions $(f * K_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

4 - **Polynômes de Tchebychev :**

Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer une expression de $\cos(nx)$ en fonction de $\cos x$, et en déduire l'existence d'un polynôme T_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.

Montrer qu'il existe un seul polynôme vérifiant cette dernière propriété . En donner un développement explicite.

b) Montrer que : $\forall n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2X\, T_n(X) - T_{n-1}(X)$.

5 - **Théorème de Weïerstrass :**

L'objet est de démontrer le téhorème de Weïerstrass : Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Une application f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ étant donnée, on se ramène au segment $[-1, 1]$ par la fonction composée $g = f_o\varphi$ où $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$. (ainsi $g(-1) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$)

Soit g une fonction réelle définie et continue sur le segment $[-1, 1]$.

a) Montrer que la fonction $h = g_o \cos$ $(\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = g(\cos(x)))$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ h * K_n$ est un polynôme trigonométrique pair, qui peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie des fonctions $(x \mapsto \cos(kx)),\ k \in \mathbb{N}$

b) En déduire que toute fonction continue sur le segment $[-1, 1]$ est la limite pour la norme uniforme $\|\ \ \|_\infty^{[-1,1]}$ d'une suite de fonction polynomiales.

2 Exercises de révision :

2.1 * Zéros d'une fonction. Fonction nulle :

1-a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ telle que : $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}, \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur l'ouvert $]a, b[$.

b) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0.$ Montrer que f est la fonction nulle.

2- Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(xt)dt = 0.$

Montrer que f est nulle.

2.2 *Egalité de deux séries doubles :

Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}} e^{inx}.$

2.3 Calculs de $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\sin\lambda t\, dt\right)$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt\right)$:

1- Théorème de Lebesgue

a) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

b) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

On pourra d'abord montrer ce résultat pour des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

En déduire $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\sin\lambda t\, dt\right)$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\cos\lambda t\, dt\right)$

2- a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$

2.4 * Suite ayant deux limites :

On note E_n l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré n, c'est à dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ où $(c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_{n-1}, c_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, et $E = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré quelconque (mais fini, à ne pas confondre avec les séries trigonométriques)

Par définition, un polynôme trigonométrique est nul si tous ses coefficients sont nuls, deux polynômes trigonométriques sont égaux si tous leurs coefficients sont respectivement égaux.

1- Montrer que l'application N_1 qui à $P \in E$ fait correspondre $N_1(P) = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$ est une norme sur E.

Même question pour $N_2 : P \mapsto \displaystyle\sup_{x\in[-1,0]}|P(x)|$

2- On considère la fonction g , 2π-périodique telle que :

- $\forall x \in [-1, 0],\ g(x) = 1$
- $\forall x \in]0, 1[,\ g(x) = e^{2ix}$

Déterminer la série de Fourier exponentielle de g et étudier sa convergence.

Montrer que la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3- On note $S_{n,\,g}(x)$ le polynôme trigonométrique $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikx}$

Etudier la convergence de la suite $(S_{n,\,g})_{n\geq 0}$ dans les espaces vectoriel normés (E, N_1) et (E, N_2).

Commentaires ?

CORRIGE :

3 ** Démonstration des théorème de Fejer et de Weierstrass :

Dans toute l'étude, pour tout $k \in \mathbb{Z}, e_k$ est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = e^{ikx}$$

1- Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodique.

On définit leur produit de convolution par :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

a) Montrer que $f * g$ est continue, 2π-périodique, et que $f * g = g * f$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g)$
c) Calculer $f * e_k$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e_k = e_{-n} + e_{-n+1} + ... + e_{-1} + e_0 + e_1 + ... + e_{n-1} + e_n$

(L'application D_n est appelée "noyau de Dirichlet")

et $K_n = \dfrac{D_0 + D_1 + ... + D_n}{n+1}$

a) Montrer que si $x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

et que $K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$

En déduire que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -a]$ et sur $[a, \pi]$ pour tout $a \in]0, -\pi[$

b) Montrer que $f * D_n$ est un polynôme trigonométrique. Que représente-t-il pour la fonction f ?

3 - a) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$

b) Montrer que la suite de fonctions $(f * K_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

4 - **Polynômes de Tchebychev :**

Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer une expression de $\cos(nx)$ en fonction de $\cos x$, et en déduire l'existence d'un polynôme T_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.

Montrer qu'il existe un seul polynôme vérifiant cette dernière propriété . En donner un développement explicite.

b) Montrer que : $\forall n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2X\, T_n(X) - T_{n-1}(X)$.

5 - **Théorème de Weïerstrass :**

L'objet est de démontrer le téhorème de Weïerstrass : Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Une application f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ étant donnée, on se ramène au segment $[-1, 1]$ par la fonction composée $g = f_o\varphi$ où $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$. (ainsi $g(-1) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$)

Soit g une fonction réelle définie et continue sur le segment $[-1, 1]$.

a) Montrer que la fonction $h = g_o \cos$ $(\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = g(\cos(x)))$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ h * K_n$ est un polynôme trigonométrique pair, qui peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie des fonctions $(x \mapsto \cos(kx)),\ k \in \mathbb{N}$

b) En déduire que toute fonction continue sur le segment $[-1, 1]$ est la limite pour la norme uniforme $\|\ \ \|_\infty^{[-1,1]}$ d'une suite de fonction polynomiales.

Solution :

1- a) • f et g étant continues sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$,
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi,\pi]$, $|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty^{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_\infty^{\mathbb{R}}$ (f et g sont bornées sur $\mathbb{R}$ car sont continues et périodiques)

On en déduit, par le théorème de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre, que la fonction $f * g$: $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x+2\pi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi-t)g(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt = (f*g)(x)$

(car f est 2π-périodique).

donc $f*g$ est 2π-périodique.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ (g*f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{x+\pi}^{x-\pi} g(u)f(x-u)(-du)$

(par le changement de variable $x-t=u$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} g(u)f(x-u)(-du) \quad \text{(la fonction intégrée est } 2\pi\text{-périodique)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)du = (f*g)(x)$$

b) $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f*g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(x)e^{-inx}dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt\right)e^{-inx}dx$

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dt\right)dx$$

La fonction $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)e^{-inx}$ étant continue sur $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ comme composée de fonctions continues, d'après le théorème de Fubini,

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dx\right)dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t)e^{-in(t+u)}du\right)dt$$

(par le changement de variable $x-t=u$ dans l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dx$)

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}g(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}g(t)c_n(f)dt$$

d'où finalement, $c_n(f*g) = \dfrac{c_n(f)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt = c_n(f).c_n(g)$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ (f*e_k)(x) = (e_k*f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x-t)f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)}f(t)dt$

$$(f*e_k)(x) = \frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = c_k(f)\,e_k(x)$$

ainsi, $f*e_k = c_k(f)\,.e_k$

2 - a)• $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ e^{ix} \neq 1$, on peut sommer les premiers de la suite géométrique comme suit :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}(1+e^{ix}+e^{2ix}+e^{3ix}+...+e^{2inx}) = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$D_n(x) = \underbrace{e^{-inx}\frac{e^{i(\frac{2n+1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}}}_{=1}\ \frac{e^{-i(\frac{2n+1}{2})x}-e^{i(\frac{2n+1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{-2i\sin(n+\frac{1}{2})x}{-2i\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$$

• $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \dfrac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$$

• Soit $a \in]0,\pi[$. Pour tout $x \in [a,\pi]$, $\frac{a}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \sin(\frac{a}{2}) \leq \sin(\frac{x}{2}) \leq 1$

et donc $0 \leq K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \leq \dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{1}{\sin^2(\frac{a}{2})}$

d'où $\|K_n\|_\infty^{[a,\pi]} \leq \dfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{a}{2})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,\pi]$ pour tout $a \in]0,-\pi[$.

K_n étant paire, cette démonstration vaut aussi pour l'intervalle $[-\pi,-a]$

b) L'application $(f,g) \mapsto f * g$ est clairement bilinéaire.

$$f * D_n = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right) = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

$f * D_n(x)$ représente donc la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f prise au point x.

C'est un polynôme trigonométrique.

3 - a) • $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad k=0 \\ \left[\dfrac{e^{ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik} = 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$

• On en déduit que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = 2\pi$

(seul le terme pour $k=0$ a une contribution non nulle)

puis que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt)}_{=2\pi} = \frac{1}{2\pi(n+1)}(n+1)2\pi = 1$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f * K_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - f(x) \,.\, \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt}_{=1}$

$$\Longrightarrow |f * K_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$ donc est uniformément continue sur ce segment, et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

ainsi $\exists\eta > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

donc pour tout $t \in [-\eta,\eta]$, $|f(x-t)-f(x)| < \varepsilon$ (puisqu'alors $|(x-t)-x| = |t| < \eta$)

donc $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\underbrace{|f(x-t)-f(x)|}_{\leq\varepsilon}K_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}K_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt = \varepsilon \qquad (1)$

par ailleurs, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt$

$\displaystyle\leq \frac{\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|dt + \int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dt\right) \qquad (K_n \text{ est paire})$

$\displaystyle\leq \frac{\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}dt \leq 2\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}$

Or la suite de fonctions $(K_n(\ ))$ converge uniformément sur $[\eta,\pi]$ vers la fonction nulle.

Donc $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0, \|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty} \leq \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}}$

et donc $\forall n \geq n_0$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \leq \varepsilon \qquad (2)$

En sommant (1) et (2), pour tout x réel,

$\forall n \geq n_0, |f * K_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et donc $\|f * K_n - f\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq 2\varepsilon$

On a ainsi montré que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|f * K_n - f\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq 2\varepsilon$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f * K_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

4- a) • $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^n) = \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)^n)$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos x)^{n-k}(i\sin x)^k\right)$$

$$= \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})}\binom{n}{2h}(\cos x)^{n-2h}(-1)^h(\sin^2 x)^h = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})}\binom{n}{2h}(-1)^h(\cos x)^{n-2h}(1-\cos^2 x)^h$$

En posant $\displaystyle T_n(X) = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})}\binom{n}{2h}(-1)^h X^{n-2h}(1-X^2)^h$ on définit bien un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie la propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.

• Si un autre polynôme $U_n(X)$ vérifie la même propriété, alors,

$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) - U_n(\cos x) = \cos(nx) - \cos(nx) = 0$.

Le polynôme $T_n - U_n$, ayant une infinité de racines, est le polynôme nul et $T_n = U_n$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+1}(\cos x) + T_{n-1}(\cos x) = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos(nx) = 2\cos x\ T_n(\cos x)$
(d'après la relation $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$)

Le polynôme $T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X) - 2X\,T_n(X)$ admettant une infinité de racines, est le polynôme nul donc $T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$

5- a) $h = g_o \cos$ est 2π-périodique car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ l'est, et continue comme composée de deux fonctions continues.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

On sait que $h * D_n$ est la somme partielle de rang n de la série de Fourier de la fonction h .
(d'après la question 2-b)

donc $h * D_n$ s'écrit aussi :

$h * D_n(x) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ a_k(h)\cos(kx) + b_k(h)\sin(kx)\ ) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(h)\cos(kx)$ puisque les coefficients b_n sont nuls par parité de la fonction h.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h * D_n(x) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(h) T_k(\cos(x))$

En posant $P_n(X) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(h) T_k(X)$, $P_n(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h * D_n(x) = P_n(\cos(x))$

et alors $\forall x \in \mathbb{R},\ h * K_n(x) = h * \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k\right)(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} h * D_k(x)\right) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(\cos(x))$

En posant $Q_n(X) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(X)$, $Q_n(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h * K_n(x) = Q_n(\cos(x))$

Or $\|h * K_n - h\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h * K_n(x) - h(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |Q_n(\cos x) - g(\cos x)| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |Q_n(t) - g(t)| = \|Q_n - g\|_\infty^{[-1,1]}$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h * K_n - h\|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$ (d'après 3-b) , il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Q_n - g\|_\infty^{[-1,1]} = 0$, ce qui montre que la suite des fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction g.

4 Exercises de révision :

4.1 * Zéros d'une fonction. Fonction nulle :

1-a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ telle que :

$\forall k \in \{0,1,2,...,n\},\ \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur l'ouvert $]a,b[$.

b) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f est la fonction nulle.

2- Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(xt)dt = 0.$

Montrer que f est nulle.

Solution :

1- a) Supposons que f admette moins de n zeros sur $]a,b[$, qu'on notera $x_1, x_2, ..., x_p$, $p < n$, rangés par ordre croissant.

f garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (sinon, étant continue, elle s'annulerait entre x_i et x_{i+1} en vertu du théorème des valeurs intermédiaires)

De ses racines, ne retenons que celles où f s'annule en changeant de signe, que nous renumérotons en $x_1, x_2, ..., x_q$, $q \leq p < n$

alors la fonction produit $x \longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, puisque les changements de signe en traversant x_i de la fonction f sont compensés par ceux du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)$

Si $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$, alors

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_a^b t^k f(t)dt = 0$$

donc $\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)dx = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction intégrande $x \longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ est continue, non identiquement nulle et de signe constant sur le segment $[a,b]$.

Donc f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

b) Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$, par linéarité, pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

Or toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Donc il existe une suite de polynômes $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$ et par ailleurs, $\int_a^b P_n(t)f(t)dt = 0$ pour tout n.

f étant continue sur le segment $[a,b]$ est bornée.

Donc $\forall t \in [a,b]$, $|P_n(t)f(t) - f(t).f(t)| = |P_n(t) - f(t)|.|f(t)| \leq \|f - P_n\|_\infty^{[a,b]}.\|f\|_\infty^{[a,b]}$

d'où $\|f^2 - f.P_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \|f - P_n\|_\infty^{[a,b]}.\|f\|_\infty^{[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui montre que la suite de fonctions $(P_n.f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la segment $[a,b]$ vers la fonction f^2.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b P_n(t)f(t)dt\right) = \int_a^b f^2(t)dt$ d'où $\int_a^b f^2(t)dt = 0$

La fonction f^2 étant continue, positive, et d'intégrale nulle, est la fonction nulle. Donc $f = 0$.

2- Prolongeons f par parité à $[-\pi, 0]$, puis à $\mathbb{R}$ par périodicité.

f est alors 2π-périodique continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge alors en tout point x de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_f(x) = f(x)$

Les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls car f est paire, et $\forall n \in \mathbb{R}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$ par hypothèse.

Tous les coefficients de Fourier de f sont donc nuls, la série de Fourier est identiquement nulle et $S_f(x) = 0$.

D'où $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = S_f(x) = 0$.

4.2 *Egalité de deux séries doubles :

Montrer que : $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}} e^{inx}.$$

Solution :

a) • Etudions la fonction $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2n\pi)^2}$

Pour cela introduisons les deux séries simples :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} e^{-(x-2n\pi)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x+2n\pi)^2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n(x) = e^{-(x-2n\pi)^2} = e^{-(2n\pi-x)^2}$ et $v_n(x) = e^{-(x+2n\pi)^2}$

Soit $[a,b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit n_0 tel que $2n_0\pi - b \geq 0$

$\forall x \in [a,b]$, $\forall n \geq n_0$, $-b \leq -x \leq -a$, donc $0 \leq 2n_0\pi - b \leq 2n\pi - b \leq 2n\pi - x$

donc $(2n\pi - b)^2 \leq (2n\pi - x)^2$ et $e^{-(2n\pi-x)^2} \leq e^{-(2n\pi-b)^2}$

ce dernier majorant étant indépendant de x, on en déduit que $\|u_n(\ )\|_\infty^{[a,b]} \leq e^{-(2n\pi-b)^2}$, ce qui montre par majoration la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ sur le segment $[a,b]$.

Il s'ensuit la convergence simple de $\sum u_n(x)$ en tout point $x \in [a,b]$. $[a,b]$ étant quelconque, f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, chaque fonction u_n étant continue sur $[a,b]$, la convergence uniforme de la série entraîne la continuité de la fonction somme f_1 sur le segment $[a,b]$.

Un raisonnement analogue montre la continuité de la fonction f_2 sur le segment $[a,b]$ et finalement celle de $f = f_1 + f_2$ sur tout segment $[a,b]$ et en fin de compte sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x+2\pi-2n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2(n-1)\pi)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2m\pi)^2} = f(x)$

(par le changement d'indice $m = n-1$)

La fonction f est donc 2π-périodique.

b) Calcul des coefficients de Fourier de f :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2n\pi)^2}\right)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2n\pi)^2-ikt}\right)dt$$

Par convergence normale donc uniforme des deux séries de fonctions $\sum e^{-(x-2n\pi)^2-ikt}$ et $\sum e^{-(x+2n\pi)^2-ikt}$ sur le segment $[0,2\pi]$, on peut écrire :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} e^{-(t-2n\pi)^2-ikt}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} e^{-u^2-ik(u+2n\pi)}du\right)$$

(par le changement de variable $u = t - 2n\pi$ dans chaque intégrale)

Compte tenu de l'égalité $e^{-2ikn\pi} = 1$ et en regroupant les intégrales sur des intervalles successifs $[-2n\pi, -2(n-1)\pi] = [-2n\pi, -2n\pi + 2\pi]$ par la relation de Chasles, on obtient :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-iku}du$$

- Pour calculer cette intégrale, introduisons la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-ixu}du$

La domination $|e^{-u^2-ixu}| \leq e^{-u^2}$ montre que l'intégrale est absolument convergente pour tout x réel.

On vérifie que les hypothèses de dérivation sous le signe $\int$ sont satisfaites et l'on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -iue^{-u^2-ixu}du = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} -2ue^{-u^2}e^{-ixu}du$$

$$g'(x) = \frac{i}{2}\left(\left[e^{-u^2}e^{-ixu}\right]_{u\to-\infty}^{u\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)e^{-u^2}e^{-ixu}du\right) = \frac{-x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{-ixu}du$$

$$g'(x) = \frac{-x}{2}g(x)$$

donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \lambda\exp\left(\displaystyle\int_0^x -\frac{t}{2}dt\right) = \lambda e^{\frac{-x^2}{4}}$

mais $g(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss)

donc $\lambda = g(0) = \sqrt{\pi}$ et $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-ixu}du = \sqrt{\pi}e^{\frac{-x^2}{4}}$

d'où l'on déduit finalement que $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}g(k) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{\frac{-k^2}{4}}$ et que la série de Foureier de f est :

$$S_f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}}e^{ikx}$$

c) La fonction f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Comme dans la première question, on établit la convergence normale de la série dérivée $\sum u_n'(x) = \sum -2xe^{-(x-2n\pi)^2}$ sur tout intervalle $[a,b]$ (par la majoration $\|u_n'(\ )\|_\infty^{[a,b]} \leq 2\max(|a|,|b|)\ e^{-(2n\pi-b)^2}$), ce qui montre par le théorème de dérivation des séries de fonctions que la fonction f_1 est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$. Raisonnement analogue pour la fonction f_2 et on en conclut finalement que la fonction f esst de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On peut alors utiliser le théorème de Dirichlet pour affirmer que la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme f : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}}e^{ikx}$

4.3 Calculs de $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right)$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt\right)$:

1- Théorème de Lebesgue

a) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$.

b) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$.

On pourra d'abord montrer ce résultat pour des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

En déduire $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right)$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt\right)$

2- a) Montrer que $\displaystyle\forall t\in\mathbb{R},\ |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$

Solution :

1- a) Les fonctions f et exponentielle étant de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties comme suit :

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \left[f(t)\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b + i\int_a^b f'(t)\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda}dt$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left|\frac{f(b)e^{i\lambda b}-f(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| + \left|i\int_a^b \frac{f'(t)e^{i\lambda t}}{i\lambda}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)e^{i\lambda b}| + |f(a)e^{i\lambda a}| + \int_a^b |f'(t)e^{i\lambda t}|dt\right)$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\underbrace{\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right)}_{independant\ de\ \lambda}$$

cette majoration montre que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| = 0$ et établit le résultat demandé.

b) • Si la fonction f est constante sur $[a,b]$, de valeur $c\in\mathbb{C}$, alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \int_a^b c\,e^{i\lambda t}dt = c\left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b = -i\,c\frac{e^{i\lambda b}-e^{i\lambda a}}{\lambda} \text{ donc } \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{2|c|}{|\lambda|}\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

• Si la fonction f est en escalier sur $[a,b]$, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ..... < x_{m-1} < x_m = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_1, x_{i+1}[$.

alors $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)e^{i\lambda t}dt$

et d'après l'étude qui précède, f étant constante sur chaque intervalle $]x_1, x_{i+1}[$,

pour tout $i\in\{0,1,....,m-1\}$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$

d'où par addition, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

• Supposons enfin que la fonction f est continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Donc il existe une fonction g en escalier sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\|f-g\|_\infty^{[a,b]} \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\circ\circ\circ$ $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \int_a^b (f(t)-g(t))e^{i\lambda t}dt + \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left|\int_a^b (f(t)-g(t))e^{i\lambda t}dt\right| + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \int_a^b \underbrace{|f(t)-g(t)|}_{\le\|f-g\|^\infty}.\underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1}dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \|f-g\|^\infty\int_a^b dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$\circ\circ\circ$ g étant une fonction en escalier, d'après l'étude précédente, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\lambda| \geq A \implies \left| \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq A \implies \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| \geq A \implies \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq \varepsilon$ c'est à dire que :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0}$$

En écrivant $\cos(\lambda t) = \dfrac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}$ et $\sin(\lambda t) = \dfrac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i}$ et en appliquant le résultat précédent, on en déduit que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right) \text{ et } \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt \right)$$

2- a) La fonction $t \mapsto |\sin t|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, ses coefficients de Fourier sont donc définis. Les coefficients b_n sont nuls puisque la fonction est paire.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt)dt$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\ \sin(t + nt) + \sin(t - nt)\ )dt \qquad (\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)\ )$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{1\},\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{-\cos((1 + n)t)}{1 + n} + \dfrac{-\cos((1 - n)t)}{1 - n} \right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{(-1)^n + 1}{1 + n} + \dfrac{(-1)^n + 1}{1 - n} \right]$

d'où $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{4}{\pi(1 - 4p^2)}$

Enfin, $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$ et $a_1 = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos t \ dt = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t)dt = 0$

La série de Fourier de la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est donc : $S(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2pt)}{1 - 4p^2}$

La fonction $g : t \mapsto |\sin t|$ est 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On en conclut, par le théorème de Dirichlet, que sa série de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R},\ S_g(t) = g(t)$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2pt)}{1 - 4p^2} = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nt)}{4n^2 - 1}}$

b) • Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \int_a^b f(t) \left(\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n\lambda t)}{4n^2 - 1} \right) dt$

$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \dfrac{2}{\pi} \int_a^b f(t)dt - \dfrac{4}{\pi} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(t) \dfrac{\cos(2n\lambda t)}{4n^2 - 1} \right) dt$

$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \dfrac{2}{\pi} \int_a^b f(t)dt - \dfrac{4}{\pi} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt$ en posant $u_n(t) = \dfrac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2 - 1}$

La fonction f est continue et donc bornée sur le segment $[a, b]$: $\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leq \|f\|_\infty^{[a,b]}$

$\forall t \in [a, b],\ |u_n(t)| = \dfrac{|\cos(2n\lambda t)\ f(t)|}{4n^2 - 1} \leq \dfrac{|f(t)|}{4n^2 - 1} \leq \dfrac{\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2 - 1}$ ce dernier majorant étant indépendant de t, on en déduit :

$\|u_n\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |u_n(t)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2 - 1}$

donc, par majoration, la série $\sum \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge et la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$.

Il s'ensuit que $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\ dt \right)$

d'où $\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \dfrac{2}{\pi} \int_a^b f(t)dt - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b \dfrac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2 - 1} \right) dt$

• en posant $v_n(\lambda) = \int_a^b \dfrac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2 - 1} dt$, on obtient :

$$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda) \qquad (1)$$

- d'après la question 1, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(2n\lambda t)dt=0$ donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} v_n(\lambda)=0$

- $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*, |v_n(\lambda)| = \left|\displaystyle\int_a^b \frac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2-1}dt\right| \leq \frac{(b-a)\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2-1}$, ce qui montre la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum v_n(\ )$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{\lambda\to+\infty} v_n(\lambda)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

En reportant dans l'égalité (1), on en déduit finalement que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt\right)=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt-\frac{4}{\pi}\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n(\lambda)\right)=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt\right)=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt}$

4.4 * Suite ayant deux limites :

On note E_n l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré n, c'est à dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$ où $(c_{-n},c_{-n+1},...,c_{-1},c_0,c_1,...,c_{n-1},c_n)\in\mathbb{R}^{2n+1}$, et $E=\displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré quelconque (mais fini, à ne pas confondre avec les séries trigonométriques)

Par définition, un polynôme trigonométrique est nul si tous ses coefficients sont nuls, deux polynômes trigonométriques sont égaux si tous leurs coefficients sont respectivement égaux.

1- Montrer que l'application N_1 qui à $P\in E$ fait correspondre $N_1(P)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|P(x)|$ est une norme sur E.

Même question pour $N_2 : P\mapsto\sup\limits_{x\in[-1,0]}|P(x)|$

2- On considère la fonction g , 2π-périodique telle que :
- $\forall x\in[-1,0],\ g(x)=1$
- $\forall x\in]0,1[,\ g(x)=e^{2ix}$

Déterminer la série de Fourier exponentielle de g et étudier sa convergence.
Montrer que la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3- On note $S_{n,\,g}(x)$ le polynôme trigonométrique $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)e^{ikx}$

Etudier la convergence de la suite $(S_{n,\,g})_{n\geq0}$ dans les espaces vectoriel normés (E,N_1) et (E,N_2).
Commentaires ?

Solution :

1- • Soit $P(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}\in E$ tel que $N_1(P)=0$

alors $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}=e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}c_{k-n}e^{ikx}=0$

donc $\forall x\in[0,1],\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}c_{k-n}(e^{ix})^k=0$. Le polynôme $Q(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}c_{k-n}(X)^k$ admet donc une infinité de racines, à savoir tous les complexes de la forme e^{ix} lorsque x décrit $[0,1]$. C'est donc le polynôme nul , ce qui signifie que tous ses coefficienst sont nuls, c'est à dire $\forall k\in\{-n,-(n-1),...,n-1,n\},\ c_k=0$.

P est donc le polynôme trigonométrique nul.

• Les relations : $\forall P\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\ N_1(\lambda.P)=\lambda.N_1(P)$
et : $\forall P,Q\in E,\ N_1(P+Q)\leq N_1(P)+N_1(Q)$
se démontrent comme pour toute norme uniforme.

Donc N_1 est une norme sur E.

• Un raisonnement analogue montre que N_2 est une norme sur E.

2- • $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^{-int}dt+\int_0^{\pi}e^{2it}e^{-int}dt\right)$

si $n\neq0$ et $n\neq2$, $c_n(g)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\dfrac{e^{-i(n-2)t}}{-i(n-2)}\right]_0^{\pi}\right)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{-in}+\dfrac{(-1)^{n-2}-1}{-i(n-2)}\right)$

d'où $c_{2p}(g) = 0$

et $c_{2p+1}(g) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{2}{-i(2p+1)} + \dfrac{2}{i(2p-1)}\right) = \dfrac{2i}{\pi(1-4p^2)}$

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dt + \int_0^{\pi} e^{2it}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}$$

$$c_2(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{-2it}dt + \int_0^{\pi} dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{-\pi}^{0} + \pi\right) = \frac{1}{2}$$

La série de Fourier de g est $S_g(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{2ix} + \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{2i}{\pi(1-4p^2)} e^{i(2p+1)x}$

La restriction de g à chacun des ouverts $]-\pi,0[$ et $]0,\pi[$ est prolongeable au fermé correspondant en une fonction de classe C^1 (la fonction constante 1 pour le premier intervalle, la fonction $x \mapsto e^{2ix}$ pour le second). g est donc C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Par ailleurs, • $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1 = g(0)$ (car $g(x) = 1$ sur $[-\pi, 0]$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ (car $g(x) = e^{2ix}$ sur $]0,\pi[$)

g est donc continue au point 0.

• $\lim\limits_{x\to \pi^-} g(x) = e^{2i\pi} = 1$ (car $g(x) = e^{2ix}$ sur $]0,\pi[$)

• $\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^+} g(x) = 1 = g(-\pi) = g(\pi)$ (car $g(x) = 1$ sur $[-\pi, 0]$ et périodique)

g est donc continue au point π.

Finalement, par périodicité, g est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux.

D'après le théorème de Dirichlet, on peut affirmer que la série de Fourier de g converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa somme est $g(x)$ en tout point. Par ailleurs la série converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

3- On vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{\mathbb{R}}^{\infty} = 0$

donc, par majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{[-\pi,0]}^{\infty} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{[0,\pi]}^{\infty} = 0$

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g}(x) - 1\|_{[-\pi,0]}^{\infty} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g}(x) - e^{2ix}\|_{[0,\pi]}^{\infty} = 0$

soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(S_{n,\,g} - 1) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(S_{n,\,g} - e^{2ix}) = 0$

On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n,\,g} = 1$ dans (E, N_1) et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n,\,g} = e^{2ix}$ dans (E, N_2)

La même suite $(S_{n,\,g})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc pas la même limite dans l'espace vectoriel E suivant qu'on le munisse de la norme N_1 ou de la norme N_2.

Les normes N_1 et N_2 ne sont donc pas équivalentes. (ce qui est possible puisque E n'est pas de dimension finie)