Séries trigonométriques - Séries de Fourier

- - - - - - - - - - - - - - - - -

1 Calcul de séries de Fourier et étude de la convergence :

1.1 Exemple 1 :

1- On considère la fonction f , 2π-périodique, telle que $\forall x \in [0, 2\pi[, f(x) = x^2$

Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence, en partie au point 0 et retrouver un résultat classique de somme de série de Riemann.

2- a) Montrer que tout fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose et d'une manière unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

b) En déduire les sommes des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in]0, 2\pi[$

SOLUTION:

1- • $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 dt = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{8\pi^2}{3}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) + ib_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + i\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 e^{int}dt$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t^2\frac{e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2te^{int}}{in}dt = \frac{4\pi}{in} - \frac{1}{\pi}\left(\left[2t\frac{e^{int}}{-n^2}\right]_0^{2\pi} - 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{e^{int}}{-n^2}dt}_{=0}\right)$$

$$= \frac{-4i\pi}{n} + \frac{4}{n^2}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{4}{n^2} \text{ et } b_n(f) = \frac{-4\pi}{n}}$$

La série de Fourier de f est : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4\cos(nx)}{n^2} - \frac{4\pi\sin(nx)}{n}\right)$

• La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et continue partout sauf aux points de la forme $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^+} f\right]$

En particulier, $S_f(x) = f(x)$ en tout point où f est continue, c'est en dire si $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\forall x \in]0, 2\pi[,\ S_f(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4\cos(nx)}{n^2} - \frac{4\pi\sin(nx)}{n}\right) = x^2$

Au point 0, $S_f(0) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{0^-} f + \lim\limits_{0^+} f\right] = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{2\pi^-} f + \lim\limits_{0^+} f\right]$ (par périodicité)

$S_f(0) = \dfrac{1}{2}(4\pi^2 + 0) = 2\pi^2$

donc $\dfrac{4\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2$ d'où l'on tire : $\boxed{\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

2 - a) • **Analyse :**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et supposons qu'il exsite deux fonctions g et h respectivement paire et impaire telles que $f = g + h$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$ et

$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$

Par demi somme et demi différence,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

ce qui établit l'unicité d'un eventuel couple (g, h) de fonctions solutions.

• **Synthèse :**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et considérons les fonctions g et h définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Alors,

- $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)+h(x)=f(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$ donc g est une fonction paire,
- $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$ donc h est une fonction impaire.

b) La partie paire de la fonction S_f est la fonction S_0 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_0(x)=\dfrac{4\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$

La partie impaire de S_f est S_1 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_1(x)=-4\pi\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$

d'où $\forall x \in]0,2\pi[,\ S_0(x)=\dfrac{4\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\frac{f(x)+f(\overbrace{-x}^{\in]-2\pi,0[})}{2}=\frac{f(\overbrace{x}^{\in]0,2\pi[})+f(\overbrace{2\pi-x}^{\in]0,2\pi[})}{2}$

$=\dfrac{x^2+(2\pi-x)^2}{2}=x^2-2\pi x+2\pi^2$

donc $\boxed{\forall x \in]0,2\pi[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\frac{1}{4}\left(x^2-2\pi x+2\pi^2-\frac{4\pi^2}{3}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}}$

Remarque :

a) On retrouve, par continuité en 0 de la série de fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

b) Au point π, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$

De même, $\forall x \in]0,2\pi[,\ S_1(x)=-4\pi\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}=\frac{x^2-(2\pi-x)^2}{2}$

$\forall x \in]0,2\pi[,\ S_1(x)=2\pi x-2\pi^2$

et donc $\boxed{\forall x \in]0,2\pi[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}}$

1.2 Exemple 2 :

On considère la fonction f , 2π-périodique, telle que $\forall x \in [0,2\pi[, f(x)=e^{ax}$

Calculer sa série de Fourier et étudier sa convergence.

En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

SOLUTION:

• $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f)+ib_n(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)dt+i\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{int}dt$

$a_n(f)+ib_n(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{at+int}dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(a+in)t}}{a+in}\right]_0^{2\pi}=\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi(a+in)}=\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\times\frac{a-in}{a^2+n^2}$

Par identification des parties réelles et imaginaires,

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f)=\dfrac{a(e^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f)=\dfrac{-n(e^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)}$

La série entière de f est $S_f(x)=\dfrac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(e^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-n(e^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)}\sin(nx)$

$S_f(x)=\dfrac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a}+\dfrac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a\cos(nx)}{n^2+a^2}-\frac{n\sin(nx)}{n^2+a^2}\right)$

La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et continue partout sauf aux points de la forme $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\lim_{x^-}f+\lim_{x^+}f\right]$

En particulier, $S_f(x)=f(x)$ en tout point où f est continue, c'est en dire si $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\forall x \in]0,2\pi[,\ S_f(x) = \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a} + \frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a\cos(nx)}{n^2+a^2} - \frac{n\sin(nx)}{n^2+a^2}\right) = e^{ax}$$

$$\forall x \in]0,2\pi[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a\cos(nx)}{n^2+a^2} - \frac{n\sin(nx)}{n^2+a^2}\right) = \frac{\pi e^{ax}}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a} = \frac{\pi\, e^{ax}}{2e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a}$$

- Cette égalité est valavle pour $x=\pi$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(-1)^n}{n^2+a^2} - = \frac{\pi}{2\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a}$

soit aussi : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}}$

- En 0 , la fonction f n'est pas continue donc $S_f(0) = \dfrac{1}{2}\left[\lim_{0^-} f + \lim_{0^+} f\right] = \dfrac{e^{2a\pi}+1}{2} = e^{a\pi}\mathrm{ch}(a\pi)$

donc $\displaystyle S_f(0) = \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a} + \frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} = e^{a\pi}\mathrm{ch}(a\pi)$

soit aussi : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}}$

La série de fonctions $\{a \mapsto \frac{1}{n^2+a^2}\}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc est continue en 0.

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}\right)$

$$\frac{\pi\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi) - \mathrm{sh}(a\pi)}{2a^2\mathrm{sh}(a\pi)} = \frac{a\pi(1+\frac{a^2\pi^2}{2}+o(a^2)) - (a\pi + \frac{a^3\pi^3}{6}+o(a^3))}{2a^2\mathrm{sh}(a\pi)}$$

$$= \frac{\frac{a^3\pi^3}{3}+o(a^3)}{2a^2\mathrm{sh}(a\pi)} \underset{a\to 0}{\sim} \frac{\frac{a^3\pi^3}{3}}{2a^3\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

1.3 Une égalité :

Montrer que $\displaystyle\forall x \in]0,\pi[,\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$

***SOLUTION*:**

- L'idée est de trouver une fonction f telle que la somme $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ soit sa série de Fourier.

Pour cela, la fonction f devra être paire, puisque ne figurent que des cosinus dans la série.
Une fonction de classe C^1 par morceaux étant en presque tout point égale à la somme de sa série de Fourier (sauf en ses points de discontinuité, qui sont en nombre fini sur $[-\pi,\pi]$), on devra avoir en presque tous les points de $]0,\pi[$, $S_f(x) = f(x)$ donc $f(x) = x$.
Ainsi, il faut définir f comme étant $2\pi-$périodique, paire et vérifiant : $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = x$

- Un raisonnement analogue, destiné à trouver une fonction g telle que la somme $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$ soit sa série de Fourier, conduit à définir une fonction g $2\pi-$périodique, impaire et vérifiant : $\forall x \in [0,\pi],\ g(x) = x$

a) • Soit f la fonction $2\pi-$périodique et paire telle que : $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = x$
Ses coefficient b_n sont nuls et,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

donc $a_{2n}(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n+1}(f) = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}$

- $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) + ib_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt + i\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2e^{int}dt$

La série de Fourier de f est : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

• La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right] = f(x)$

En particulier, $\forall x \in [0,\pi],\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = x$

b) • Soit g la fonction $2\pi-$périodique et impaire telle que : $\forall x \in [0,\pi],\ g(x) = x$

Ses coefficient a_n sont nuls et,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt}_{=0}$$

$$= 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

La série de Fourier de g est : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_g(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$

• La fonction g est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et continue sauf aux points de la forme $\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ S_g(x) = \dfrac{1}{2}\left[\lim_{x^-} g + \lim_{x^+} g\right]$

En particulier, $\forall x \in]0,\pi[,\ 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n} = x$

• Finalement, $\boxed{\forall x \in]0,\pi[,\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}}$

1.4 Série cosinus :

Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\cos(nx)\ ?$$

SOLUTION:

• L'idée est de rechercher une fonction f telle que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\cos(nx)$ soit sa série de Fourier et telle que $\forall x \in]0,\pi[,\ S_f(x) = \sin(x)$.

Pour cela, la fonction f devra être paire, puisque ne figurent que des cosinus dans la série.

Une fonction de classe C^1 par morceaux étant en presque tout point égale à la somme de sa série de Fourier (sauf en ses points de discontinuité, qui sont en nombre fini sur $[-\pi,\pi]$), on devra avoir en presque tous les points de $]0,\pi[,\ S_f(x) = f(x)$ donc $f(x) = \sin(x)$.

Ainsi, il faut définir f comme étant $2\pi-$périodique, paire et vérifiant : $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \sin(x)$

• Soit donc f la fonction $2\pi-$périodique et paire telle que : $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \sin(x)$

Ses coefficient b_n sont nuls et,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt = \frac{2}{\pi}[-\cos(t)]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\forall n \geq 2,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)\ dt$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{\cos((1+n)t)}{1+n} + \frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{1+n}-1}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n}-1}{1-n}\right]$$

d'où $\quad a_{2n+1}(f) = 0$ et $a_{2n}(f) = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{1+2n} + \dfrac{1}{1-2n}\right] = \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)}$

• La fonction f vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\sin\ x|$

Elle est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge donc en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = |\sin\ x|$$

Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{2}{\pi}$,$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)}$

vérifie bien : $\forall x \in]0,\pi[,\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nx)$

1.5 Développement en série de la fonction cotangente ; Application au calcul de $\zeta(2p)$ pour les premières valeurs de p :

Soit α unréel non entier ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$) et la fonction f , 2π-périodique, telle que $\forall t \in [-\pi,\pi], f(t) = \cos(\alpha t)$

1- Développer f en série de Fourier (en précisant le sens à donner à cette question)

2- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$

et que $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(x-n\pi)^2}$

3- Soit g la fonction : $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{x+n\pi} + \dfrac{1}{x-n\pi} \right)$

a) Montrer que g est C^∞ sur $]-\pi,\pi[$ et exprimer $g^{(p)}(x)$.
Calculer en particulier $g^{(p)}(0)$ à l'aide de la fonction ζ.

b) En déduire une expression de $\zeta(2p)$ en fonction des coefficients du developpement limité de la fonction g en 0 : $g(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p x^p + o(x^n)$

Utiliser MAPLE pour calculer un developpement limité de la fonction g en 0, et en déduire les valeurs exactes de $\zeta(2p)$ pour $p = 1,2,3,4,5,6$.

Confirmer les résultats obtenus en comparant le résultat des calculs aves les valeurs de $\zeta(2p)$ données par MAPLE.

***SOLUTION*:**

1- • La fonction f étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{1+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}$$

$$a_0(f) = \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

• La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right] = f(x) \quad \text{(continuité)}$$

C'est parce que l'égalité $f(x) = S_f(x)$ est vérifiée en tout point de $\mathbb{R}$ que l'on peut dire que la fonction f est développable en série de Fourier.

En particulier,

$$\boxed{\forall t \in [-\pi,\pi], S_f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nt) = \cos(\alpha t)}$$

2- En appliquant cette égalité au point $t = \pi$, on obtient : $\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} = \cos(\alpha\pi)$

et en divisant par $\sin(\alpha\pi)$ qui n'est pas nul puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$: $\text{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

Cette égalité étant vraie pour tout α non entier, <u>pour tout $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$</u>, en considérant α tel que $x = \alpha\pi$, on obtient : $\boxed{\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2-\pi^2 n^2}}$

En dérivant terme à terme cette égalité (voir justification à la question suivante), on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\ \frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2}}$$

3- a) Notons $\forall n \geq 1,\ u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2-\pi^2n^2} = \dfrac{1}{x+n\pi} + \dfrac{1}{x-n\pi}$

La question précédente a montré qu'en particulier, $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $\text{cotan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ convergeant simplement sur l'ouvert $]-\pi,\pi[$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, chaque fonction u_n est de classe C^p sur $]-\pi,\pi[$.

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ u_n'(x) = \frac{-1}{(x+n\pi)^2} - \frac{1}{(x-n\pi)^2}.$$

$$u_n''(x) = \frac{2}{(x+n\pi)^3} + \frac{2}{(x-n\pi)^3}.$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{(p)}(x) = (-1)^p p! \left(\frac{1}{(x+n\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(x-n\pi)^{p+1}} \right)$

Pour éviter les problèmes de majoration pour $n=0$ et $n=1$, écrivons :

$$g(x) = u_0(x) + u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq 2,\ \forall x \in]-\pi,\pi[,\ |u_n^{(p)}(x)| = p! \left| \frac{1}{(x+n\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(x-n\pi)^{p+1}} \right|$$

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq p! \left(\frac{1}{|x+n\pi|^{p+1}} + \frac{1}{|n\pi - x|^{p+1}} \right) \leq p! \left(\frac{1}{((n-1)\pi)^{p+1}} + \frac{1}{((n-1)\pi)^{p+1}} \right)$$

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{\pi^{p+1}} \left(\frac{1}{(n-1)^{p+1}} + \frac{1}{(n-1)^{p+1}} \right) \leq \frac{2p!}{\pi^{p+1}} \frac{1}{(n-1)^{p+1}}$$

donc $\sup_{x \in]-\pi,\pi[} |u_n^{(p)}(x)| = \left\| u_n^{(p)} \right\|_\infty^{]-\pi,\pi[} \leq \frac{2p!}{\pi^{p+1}} \frac{1}{(n-1)^{p+1}}$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{(n-1)^{p+1}}$ est convergente pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc par majoration chaque série dérivée $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement et uniformément sur $]-\pi,\pi[$.

En appliquant le théorème de dérivation des séries de fonctions p fois, on en déduit que g est dérivable à tout ordre p sur $]-\pi,\pi[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-\pi,\pi[,\ g^{(p)}(x) = u_1^{(p)}(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n^{(p)}(x)$$

$$\boxed{g^{(p)}(x) = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+n\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(x-n\pi)^{p+1}} \right)}$$

En particulier, $g^{(p)}(0) = \frac{(-1)^p p!}{\pi^{p+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{p+1}}{n^{p+1}}$

d'où $g^{(2p)}(0) = 0$ et $g^{(2p+1)}(0) = \frac{-(2p+1)!}{\pi^{2p+2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2p+2}} = -\frac{2(2p+1)!}{\pi^{2p+2}} \zeta(2p+2)$

$$\boxed{g^{(2p)}(0) = 0 \ \text{ et } \ g^{(2p+1)}(0) = -\frac{2(2p+1)!}{\pi^{2p+2}} \zeta(2p+2)}$$

3- b) Si g admet en 0 un developpement limité de la forme : $g(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p x^p + o(x^n)$

alors, par unicité de ce DL (ou par identification des dérivées successives en 0 dans la formule de Taylor-Young), pour tout p , $a_{2p+1} = \frac{g^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}$ et donc $g^{(2p+1)}(0) = (2p+1)!\, a_{2p+1}$

Par identification avec les formules qui précèdent, $\boxed{\zeta(2p+2) = -\frac{a_{2p+1}}{2} \pi^{2p+2}}$

Or d'après la question 2, $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, $\text{cotan}(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \right) = g(x)$

>series(cot(x)-1/x,x=0,12);

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93555}x^9 - \frac{1382}{638512875}x^{11} + O(x^{13})$$

d'où
$$\boxed{\begin{array}{ll} \zeta(2) = -\frac{a_1}{2}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6} & \zeta(4) = -\frac{a_3}{2}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) = -\frac{a_5}{2}\pi^6 = \frac{\pi^6}{945} & \zeta(8) = -\frac{a_7}{2}\pi^8 = \frac{\pi^8}{9450} \\ \zeta(10) = -\frac{a_9}{2}\pi^{10} = \frac{\pi^{10}}{93555} & \zeta(12) = -\frac{a_{11}}{2}\pi^{12} = \frac{691\ \pi^{12}}{638512875} \end{array}}$$

Ces résultats peuvent être confirmés par MAPLE :

>for p from 1 to 6 do Zeta(2*p) od;

2 Coefficients de Fourier :

2.1 Egalité de fonctions ayant des coefficients égaux :

a) Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceaux.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = c_n(g)$
Montrer qu'alors $f(x) = g(x)$ en tout point de $\mathbb{R}$ où f et g sont continues.

b) En déduire que si la série de Fourier d'une fonction f, 2π-périodique et continue, converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors sa somme est égale à $f(x)$ en tout point de $\mathbb{R}$.

SOLUTION **:**

a) $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f-g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$

Or $f-g$ étant 2π-périodique et continue par morceaux, on peut écrire l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f-g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f-g)(t)|^2 dt$$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} |(f-g)(t)|^2 dt = 0$ et la fonction $t \longrightarrow |(f-g)(t)|^2$ étant positive, ceci entraîne que $|(f-g)(t)|^2 = 0$ en tout point où $f-g$ est continue. Donc $f(x) = g(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues.

• Remarquons que si on suppose de plus que f et g vérifient la relation de Dirichlet, à savoir,
$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^+} f\right) = f(x)$, les fonctions f et g sont alors égales en tout point.

b) Soit f une fonction 2π-périodique et continue.

On suppose que sa série de fourier $S_f(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } \forall k \in \mathbb{Z},\quad c_n(S_f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_f(t)e^{-inx}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}\right)e^{-inx}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(c_k(f)\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}dt}_{0\ si\ k\neq n}\right) \quad \text{(intervertion } \sum \int \text{ par cvgce normale donc uniforme sur } [0,2\pi])$$

$= c_n(f)$

f et S_f ont mêmes coefficients de Fourier, sont continues (f l'est hypothèse, S_f l'est par convergence normale donc uniforme), donc, d'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R},\quad S_f(x) = f(x)$.

2.2 Séries trigonométriques qui convergent uniformément :

1. Soit une série de fonctions $\sum u_n$ uniformément convergente sur un intervalle I.
Démontrer que les fonctions u_n sont toutes bornées sur I pour n assez grand, et que $\|u_n\|^\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

2. Soit I un intervalle fermé de longueur au moins égale à π, et a, b, deux réels quelconques.
Montrer que le maximum de $|a\cos x + b\sin x|$ sur I est $\sqrt{a^2+b^2}$

3. Soit $I = [\alpha, \beta]$ un segment de longueur strictement positive.
On suppose que la série de fonctions $\sum[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ converge uniformément sur I.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

SOLUTION **:** 1- Si on note S_n la somme partielle de rang n de la série de fonctions $\sum u_n$, et S la fonction somme, l'hypothèse de convergence uniforme entraîne que pour n asssz grand ($n \geqslant n_0$), la fonction $S - S_n$ est bornée et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_I^\infty = 0$

Pour tout $n \geqslant n_0$, $\forall x \in I,\ |u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = |(S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)|$

$\forall x \in I,\ |u_n(x)| \leqslant \|S - S_n\|_I^\infty + \|S - S_{n-1}\|_I^\infty$, ce qui montre bien que la fonction u_n est bornée sur I.

De plus, $\forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\|_I^\infty \leqslant \|S - S_n\|_I^\infty + \|S - S_{n-1}\|_I^\infty$, ce qui montre par majoration que
$\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_I^\infty = 0$

2. Ecrivons le complexe $z = a + ib$ sous forme trigonométrique :
$z = |z|e^{i\theta} = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta}$
donc $a = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta)$ et $b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta)$
alors $|a\cos x + b\sin x| = |\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta)\cos x + b\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta)\sin x| = |\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)|$

Puisque I est un intervalle fermé de longueur au moins égale à π, quand x décrit I, $x - \theta$ décrit lui aussi un intervalle fermé de longueur au moins égale à π, translaté du précédent. Donc $x - \theta$ passe par une valeur de la forme $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, pour laquelle $|\cos(x-\theta)|$ est maximum et vaut 1.

Donc le maximum de $|a\cos x+b\sin x|$ quand x décrit I est $\sqrt{a^2+b^2}$.

3. Soit $I=[\alpha,\beta]$ un segment de longueur strictement positive.
   On suppose que la série de fonctions $\sum \underbrace{[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]}_{u_n(x)}$ converge uniformément sur I.
   D'après la question 1, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|_I^\infty=0$
   Quand x décrit l'intervalle $[\alpha,\beta]$, de longueur non nulle $\beta-\alpha$, nx décrit l'intervalle $[n\alpha,n\beta]$, de longueur $n(\beta-\alpha)$.
   Pour n supérieur à un entier n_1, cette longueur est supérieure à π (il suffit de prendre $n_1>\frac{\pi}{\beta-\alpha}$).
   D'après la question 2, $\forall n\geqslant n_1,\ \|u_n\|_I^\infty=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=0$
   Les inégalités $0\leqslant|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et $0\leqslant|b_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ entraînent alors que :
   $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

2.3 Coefficients et série de Fourier

a) On définit $J_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{int}}{5+4\cos t}dt$. Calculer J_0 et J_1

b) Calculer $2J_n+5J_{n+1}+2J_{n+2}$
En déduire la valeur de J_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Existence et calcul du développement en série de Fourier de la fonction $f:t\mapsto\dfrac{1}{5+4\cos t}$.

d) Retrouver ce résultat en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{5+2x+2x^{-1}}$

***SOLUTION* :**

a) $J_0=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{5+4\cos t}dt$

Aucune des règles de Bioche ne convient, on fait le changement de variable $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour se ramener à une fonction rationnelle :

$$t=2\text{Arctan}(u),\ dt=\frac{2du}{1+u^2}\qquad \cos(t)=\frac{1-u^2}{1+u^2}\ du$$

$$J_0=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{5+4\cos t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{5+4\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}du=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{9+u^2}=\frac{2}{3}\left[\text{Arctan}\left(\frac{u}{3}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{3}$$

$$J_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}}{5+4\cos t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(t)}{5+4\cos t}dt+i\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin(t)}{5+4\cos t}}_{fction\ impaire}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t}{5+4\cos t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{5+4\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}du=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-u^2}{(9+u^2)(1+u^2)}du$$

or $\dfrac{1-y}{(9+y)(1+y)}=\dfrac{a}{9+y}+\dfrac{b}{1+y}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+y}-\dfrac{5}{9+y}\right)$

donc $J_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}-\frac{5}{9+u^2}du=\frac{1}{2}\left[\text{Arctan}(u)-\frac{5}{3}\ \text{Arctan}\left(\frac{u}{3}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}=-\frac{\pi}{3}$

$$\boxed{J_0=\frac{2\pi}{3}\qquad J_1=-\frac{\pi}{3}}$$

b) $2J_n+5J_{n+1}+2J_{n+2}=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{int}+5e^{i(n+1)t}+2e^{i(n+2)t}}{5+4\cos t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{int}+5e^{i(n+1)t}+2e^{i(n+2)t}}{5+2e^{it}+2e^{-it}}dt$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i(n+1)t}(2e^{-it}+5+2e^{-it})}{5+2e^{it}+2e^{-it}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n+1)t}dt=\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_{-\pi}^{+\pi}=\begin{cases}2\,\pi\ \text{ si }\ n=-1\\ 0\quad\text{sinon}\end{cases}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ 2J_n+5J_{n+1}+2J_{n+2}=0$

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une condition de récurrence linéaire. L'équation associée est : $2r^2+5r+2=0$ qui admet pour solutions $r_1=-2,\ r_2=-\frac{1}{2}$

donc $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ J_n=\lambda(-2)^n+\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Les conditions initiales $\begin{cases}J_0=\lambda+\mu=\frac{2\pi}{3}\\ J_1=-2\lambda-\frac{1}{2}\mu=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$ donnent : $\lambda=0,\mu=\dfrac{2\pi}{3}$

$$\text{donc }\ \forall n\in\mathbb{N},\ J_n=\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Remarquons que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$J_{-n}=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{-int}}{5+4\cos t}dt=\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{\left(\frac{e^{int}}{5+4\cos t}\right)}dt=\overline{J_n}=J_n\quad(\text{car } J_n \text{ est réel})$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = J_{-n} = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{5+4\cos t}dt = \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

c) La fonction $t \mapsto 5+4\cos(t)$ est définie, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule pas.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{5+4\cos(t)}$ est donc 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'ors et déja, on peut affirmer, d'après le théorème de Dirichlet, que sa série de Fourier converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et que sa somme $S_f(x)$ est égale à $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La question précédente montre que : $\begin{cases} c_0(f) = \frac{1}{2\pi}J_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi}J_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)(e^{-inx}+e^{inx})$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2\cos(nx)) = f(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{5+4\cos x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{2^n}}$$

d) $\dfrac{1}{5+2x+2x^{-1}} = \dfrac{x}{2(x+2)(x+\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{1+2x}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{5+4\cos x} = \frac{1}{5+2e^{ix}+2e^{ix}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{e^{ix}}{2}} - \frac{1}{1+2e^{-ix}}\right)$$

2.4 DSF de $t \mapsto \frac{1}{1+\cos^2 t}$:

1- Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux.

Montrer que si f est π-périodique, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{2k+1}(f) = 0$, $a_{2k+1}(f) = 0$ et $b_{2k+1}(f) = 0$

2- Soit f la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+\cos^2 t}$.

Trouver un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+2}(f) + m\,a_{2n}(f) + a_{2n-2}(f) = 0$

Avec MAPLE, calculer a_0 et a_2, puis a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$

En déduire le développememnt de f en série de Fourier.

SOLUTION **:**

1- $c_{2k+1}(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-i(2k+1)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)\,e^{-i(2k+1)t}\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\,e^{-i(2k+1)t}\,dt\right)$

$c_{2k+1}(f) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} f(u-\pi)\,e^{-i(2k+1)(u-\pi)}\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\,e^{-i(2k+1)t}\,dt\right)$

(par le changement de variable $u = t+\pi$ dans la première intégrale)

$$c_{2k+1}(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(u-\pi)}_{=f(u)}\,e^{-i(2k+1)u}\,\underbrace{e^{i(2k+1)\pi}}_{=-1}\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\,e^{-i(2k+1)t}\,dt\right) = 0$$

Les relations $a_n = (c_n + c_{-n})$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ montrent alors que $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1}(f) = b_{2k+1}(f) = 0$

2- $\forall t \in \mathbb{R},\ 1+\cos^2(t) = 1 + \dfrac{1+\cos(2t)}{2} = \dfrac{1}{2}(3+\cos(2t))$

Pour tout réel m,

$$a_{2n+2}(f) + m\,a_{2n}(f) + a_{2n-2}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos(2n+2)t + m\ \cos(2nt) + \cos(2n-2)t)$$

$$a_{2n+2} + m\,a_{2n} + a_{2n-2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(2\cos(2nt)\cos(2t) + m\ \cos(2nt))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(2nt)(2\cos(2t)+m)dt$$

Puisque $f(t) = \dfrac{1}{1+\cos^2 t} = \dfrac{2}{3+\cos(2t)} = \dfrac{4}{6+2\cos(2t)}$, en prenant $m = 6$, on obtient :

$$a_{2n+2} + 6\,a_{2n} + a_{2n-2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4}{6+2\cos(2t)}\cos(2nt)(2\cos(2t)+6)dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2nt)dt$$

$$a_{2n+2} + 6\,a_{2n} + a_{2n-2} = \left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_{2n+2} + 6\,a_{2n} + a_{2n-2} = 0}$

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2(t)}\,dt = \sqrt{2}$$

$$a_2(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(2t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = 4-3\sqrt{2}$$

Recherchons les suites (a_n) qui vérifent la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n+2} + 6\, a_{2n} + a_{2n-2} = 0$

L'équation associée, $X^2 + 6X + 1 = 0$, a pour racines $\alpha = \frac{-6+4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2}$ et $\beta = -3 - 2\sqrt{2}$

donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$

Les cosntantes λ et μ s'obtiennent par résolution du système :

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = a_0 = \sqrt{2} \\ \lambda\alpha + \mu\beta = a_2 = 4 - 3\sqrt{2} \end{array} \right.$, ce qui donne : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{2} \\ \mu = 0 \end{array} \right.$

et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \sqrt{2}(-3+2\sqrt{2})^n}$

• La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 0π-périodique, sa série de Fourier converge en tout point, et a pour somme la fonction f. Les coefficients b_n sont nuls puisque f est paire.

donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}\cos(2kx) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-3+2\sqrt{2})^k\cos(2kx)}$

2.5 Coefficients de Fourier (Oral CCP)

On considère l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{1+\cos^2 x}\,dx$

a) Calculer J_1

b) Montrer que pour tout n, $J_{2n} = 0$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

(indication : on pourra utiliser la fonction 2π-périodique impaire coïncidant sur $]0,\pi[$ avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$)

SOLUTION :

a) Calculer J_1

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_0^\pi (\mathrm{Arctan}(\cos x))'\,dx = -\left[\mathrm{Arctan}(\cos x)\right]_0^\pi$$

$$J_1 = -\mathrm{Arctan}(-1) + \mathrm{Arctan}(1) = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}, J_{2n} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_\pi^0 \frac{\sin 2n(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,(-du) = \int_0^\pi \frac{\sin 2n(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,du$ par le chgmnt de variable $u = \pi - x$

$$J_{2n} = \int_0^\pi \frac{-\sin 2nu}{1+\cos^2 u}du = -J_{2n} \quad \text{donc } J_{2n} = 0$$

c) Considérons la fonction f, 2π-périodique impaire et telle que $\forall x \in]0,\pi[, f(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{paire}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{1+\cos^2 t}dt = \frac{2}{\pi}J_n$$

La restriction de f à l'ouvert $]0,\pi[$ est prolongeable au segment $[0,\pi]$ en la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ qui est de classe C^1. Par imparité, il en va de même pour la restriction de f à l'ouvert $]-\pi,0[$. f est donc de classe C^1 par morceaux sur le segment $[-\pi,\pi]$ et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Par contre f n'est pas continue au point 0 car $f(0) = 0$ (fonction impaire) ,

et $\displaystyle\lim_{0^+} f = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}\right) = \frac{1}{2}$

On peut appliquer la version "faible" du théorème de Dirichlet et affirmer que la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right)$

f étant continue au point $\frac{\pi}{2}$, en appliquant cette égalité au point $\frac{\pi}{2}$, on obtient : $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

soit encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$

et puisque $b_{2n} = \frac{2}{\pi}J_{2n} = 0$, il ne reste que les termes impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}(f)\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}(-1)^p = 1$$

ce qui donne finalement en multipliant par $\frac{\pi}{2}$: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}}$

3 Formule de Parseval-Bessel et Inégalités

3.1 Inégalité de Wirtinger :

1- Soit f une fonction continue et C^1 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi-$ périodique et de valeur moyenne nulle.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$

Quand y a t-il égalité ?

2- Montrer que : $\quad \|f\|_\infty^2 \leq \dfrac{\pi}{6}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)^2dt$

SOLUTION :

1- f étant de valeur moyenne nulle, $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$

Par définition d'une fonction C^1 par morceaux, il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_p = 2\pi$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ soit prolongeable au segment $[x_k, x_{k+1}]$ en une fonction C^1 , ce qui équivaut à dire, puisque f est continue, que sa restriction à chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ est de classe C^1. On peut alors intégrer par parties sur chaque segment comme suit :

$$\begin{aligned}
\forall n \in Z,\ c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)e^{-int}dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\left[f(t)e^{-int}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} + in\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{-int}dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\sum_{k=0}^{p-1}\left(f(x_{k+1})e^{-inx_{k+1}} - f(x_k)e^{-inx_k}\right)}_{somme\ telescopique} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{(f(2\pi) - f(0))}_{=0} + inc_n(f) = inc_n(f)
\end{aligned}$$

Remarquons que $c_0(f') = i.0.c_0(f) = 0$

• f étant C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, f' est continue par morceaux et on peut appliquer la formule de Parseval-Bessel à f et à f' :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)dt = \sum_{n\in Z^*}|c_n(f')|^2 = \sum_{n\in Z^*}|n^2c_n(f)|^2 \geq \sum_{n\in Z^*}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$$

(car $c_0(f) = c_0(f') = 0$)

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$

• Il y a égalité si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in Z^*}|n^2c_n(f)|^2 = \sum_{n\in Z^*}|c_n(f)|^2$

si pour au moins un indice n_0 tel que $|n_0| \geq 2$ et $c_{n_0}(f) \neq 0$, alors l'inégalité

$|n_0^2\,c_{n_0}(f)|^2 > |c_{n_0}(f)|^2$ entraîne l'inégalité stricte $\displaystyle\sum_{n\in Z^*}|n^2c_n(f)|^2 > \sum_{n\in Z^*}|c_n(f)|^2$

Donc il y a égalité si et seulement si $\forall |n| \geq 2,\ c_n(f) = 0$

f étant 2π périodique continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, en tout point $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n\in Z} c_n(f)e^{inx} = c_1(f)e^{ix} + c_{-1}(f)e^{-ix} = a\cos x + b\sin x$$

Finalement, $\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt\\ \text{avec égalité si et seulement si } f \text{ est de la forme : } x \mapsto a\cos x + b\sin x\end{array}}$

2- Puisque f est continue et C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point de R et sa somme est égale à la fonction f. Par ailleurs, la série converge normalement sur $\mathbb{R}$, et converge donc absolument en tout point de $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} = f(x)$ (on peut sommer sur $\mathbb{Z}^*$ puisque $c_0(f) = 0$)

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(f)e^{ikx}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\left(\frac{-i}{k}\right)c_k(f')\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|}|c_k(f')|$

Pour deux une séries a_n et b_n de carrés sommables, la série $\sum a_nb_n$ converge et $(\sum a_nb_n)^2 \leq (\sum a_n^2)(\sum b_n^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) donc $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|^2 \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|}|c_k(f')|\right)^2 \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|^2}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f')|^2\right) = 2\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)^2dt$

$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|^2 \le \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} f'(t)^2dt$ ce dernier majorant ne dépendant pas de x, on en déduit que :

$$\boxed{\|f\|_\infty^2 \le \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} f'(t)^2dt}$$

3.2 Zéros d'une fonction. Fonction nulle :

1-a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ telle que :

$\forall k\in\{0,1,2,...,n\},\ \int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur l'ouvert $]a,b[$.

b) On suppose que $\forall k\in\mathbb{N},\ \int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f est la fonction nulle.

2- Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^\pi f(t)\cos(xt)dt = 0.$

Montrer que f est nulle.

SOLUTION :

1- a) Supposons que f admette moins de n zeros sur $]a,b[$, qu'on notera $x_1,x_2,...,x_p,\ \ p<n$, rangés par ordre croissant.

f garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i,x_{i+1}[$ (sinon, étant continue, elle s'annulerait entre x_i et x_{i+1} en vertu du théorème des valeurs intermédiaires)

De ses racines, ne retenons que celles où f s'annule en changeant de signe, que nous renumérotons en $x_1,x_2,...,x_q,\ \ q\le p<n$

alors la fonction produit $x \longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, puisque les changements de signe en traversant x_i de la fonction f sont compensés par ceux du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)$

Si $P=\sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$, alors

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\int_a^b t^kf(t)dt = 0$$

donc $\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)dx = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction intégrande $x\mapsto (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ est continue, non identiquement nulle et de signe constant sur le segment $[a,b]$.

Donc f admet au moins n zeros sur $]a,b[$.

b) Puisque $\forall k\in\mathbb{N},\ \int_a^b t^kf(t)dt = 0$, par linéarité, pour tout polynôme $P(X)\in\mathbb{R}[X]$,

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

Or toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Donc il existe une suite de polynômes $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\|f-P_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$ et par ailleurs, $\int_a^b P_n(t)f(t)dt = 0$ pour tout n.

f étant continue sur le segment $[a,b]$ est bornée.

Donc $\forall t\in[a,b],\ |P_n(t)f(t)-f(t).f(t)| = |P_n(t)-f(t)|.|f(t)| \le \|f-P_n\|_\infty^{[a,b]}.\|f\|_\infty^{[a,b]}$

d'où $\|f^2-f.P_n\|_\infty^{[a,b]} \le \|f-P_n\|_\infty^{[a,b]}.\|f\|_\infty^{[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui montre que la suite de fonctions $(P_n.f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la segment $[a,b]$ vers la fonction f^2.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b P_n(t)f(t)dt\right) = \int_a^b f^2(t)dt$ d'où $\int_a^b f^2(t)dt = 0$

La fonction f^2 étant continue, positive, et d'intégrale nulle, est la fonction nulle. Donc $f = 0$.

2- Prolongeons f par parité à $[-\pi, 0]$, puis à $\mathbb{R}$ par périodicité.

f est alors 2π-périodique continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge alors en tout point x de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = f(x)$

Les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls car f est paire, et $\forall n \in \mathbb{R},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$ par hypothèse.

Tous les coefficients de Fourier de f sont donc nuls, la série de Fourier est identiquement nulle et $S_f(x) = 0$.

D'où $\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = S_f(x) = 0$.

4 Application des séries de Fourier :

4.1 Série de Fourier ; application au calcul d'une intégrale

Soit $a \in]0, \pi[$ et f la fonction 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } a < |x| \leq 2\pi \end{cases}$

a) Etudier la série de Fourier de f et sa convergence.

b) Que vaut la série de Fourier en 0 et en a ?

en déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ en précisant le domaine de validité.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$

d)* Justifier l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ et retrouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

SOLUTION :

a) La fonction f étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt)dt$ (par parité)

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2\sin na}{n\pi}.$$

- $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi dt = \dfrac{2a}{\pi}$

La série de Fourier de f est donc : $S_f(x) = \dfrac{a}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin na}{n\pi}\cos(nx)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\ \cos(nx)}{n}}$$

• La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car est en escalier sur $[-\pi, \pi]$). Elle est continue en tout point de $[-\pi, \pi]$ sauf en $\pm a$.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f est donc convergente en tout point de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^+} f\right]$

En particulier, $S_f(x) = f(x)$ en tout point où f est continue, c'est en dire si $x \neq \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) • En 0 , f est continue, donc $S_f(0) = f(0)$, ce qui s'écrit : $\dfrac{a}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = 1$

et qui donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{a}{\pi}\right) = \frac{\pi - a}{2}$ pour tout $a \in]0, \pi[$.

• En 0 , f n'est pas continue, donc $S_f(a) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{a^-} f + \lim\limits_{a^+} f\right] = \dfrac{1}{2}$

donc $\dfrac{a}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\ \cos(na)}{n} = \frac{1}{2}$

$$\frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n} = \frac{1}{2}$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - a$

En prenant $b = 2a$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nb)}{n} = \frac{\pi - b}{2}$ pour tout $b \in]0, 2\pi[$, ce qui confirme et étend la validité de la formule obtenue en 0.

Finalement, $\boxed{\forall x \in]0, 2\pi[, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}}$

On remarque que cette formule n'est plus valable en 0 ni en 2π.

La fonction somme : $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ n'est pas continue en 0.

c) La formule de Parseval Bessel permet d'écrire :

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

donc $\displaystyle\frac{2a^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sin^2(na)}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dt$

$$\Longrightarrow \frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} dt = \frac{2a}{\pi}$$

d'où l'on tire $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2a}{\pi} - \frac{2a^2}{\pi^2}\right) = a\left(\frac{\pi - a}{2}\right)}$

d) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$, dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Considérons la somme de Riemann de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ lorsque le segment d'intégration $[0, A]$ est partagé en n segments égaux : $S_n = \dfrac{A - 0}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{(\frac{kA}{n})^2} = \frac{n}{A}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ étant continue sur $[0, A]$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$

$$S_n = \frac{n}{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right) = \frac{n}{A}\left(\frac{A}{n}\left(\frac{\pi - \frac{A}{n}}{2}\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right)$$

$$S_n = \frac{\pi - \frac{A}{n}}{2} - \frac{n}{A}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right) \qquad (1)$$

Pour A fixé , les termes S_n et $\dfrac{\pi - \frac{A}{n}}{2}$ ont chacun une limite finie quand $n \to +\infty$, qui est respectivement $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $\dfrac{\pi}{2}$. Donc par différence, le terme $\dfrac{n}{A}\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right)$ possède aussi une limite finie, qu'on notera $L(A)$.

En passant à la limite dans l'égalité (1), on obtient : $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - L(A)$

Pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle 0 \leq \frac{n}{A}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right) \leq \frac{n}{A}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n}{A}\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ (car $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$)

$$0 \leq \frac{n}{A}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kA}{n})}{k^2}\right) \leq \frac{n}{A}\frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

En passant à la limite pour A fixé quand $n \to +\infty$, on obtient : $0 \leq L(A) \leq \dfrac{1}{A}$

- En reprenant l'égalité $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - L(A)$ et en passant à la limite qd $A \to +\infty$, on obtient alors :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}}$$

- Par intégration par parties sur $[a, b] \subset]0, +\infty[$, puis par passage à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient :

$$\int_a^b (\sin^2 t)\frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2\sin t\cos t}{t} dt$$

et donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ (par le changement de variable $u = 2t$)

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}}$

4.2 Série trigonométrique - série de Fourier

1- Montrer que la série de fonctions $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$, lorsque $0 < a < \pi$

En déduire que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

2- Calculer $\displaystyle\int_a^{2\pi - a} f(t)\sin(nt)dt$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

La fonction f est elle continue par morceaux ?

SOLUTION :

1- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} - 2\pi Z$;

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \text{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \text{Im}\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right)$$

(car $e^{ix} \neq 1$ puisque $x \neq 0\ [2\pi]$)

$$S_n(x) = \text{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2i\sin(\frac{x}{2})}\right) = \frac{\sin(\frac{n}{2}x)\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}}$

• Majorons le reste $r_n(x)$ par la **transformation d'Abel** :

Pour $x \neq 0\ [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ et $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(S_k(x) - S_{k-1}(x)) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_{k-1}(x)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_k(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} S_k(x)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) - a_{n+1} S_n(x) + a_{n+p} S_{n+p}(x) \quad (1)$$

La suite $(S_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est bornée : $\forall k,\ |S_k(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} = M_x$

donc $|(a_k - a_{k+1})S_k(x)| \leq (a_k - a_{k+1})M_x$ et la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ est une série télescopique convergente puisque $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{n+p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} a_{n+1}$ (car $\lim\limits_{+\infty} a_p = 0$), et donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1}$

La série $\displaystyle\sum_k (a_k - a_{k+1}) S_k(x)$ est donc absolument convergente

par ailleurs, $\lim\limits_{p \to +\infty} a_{n+p} S_{n+p}(x) = 0$ car $(S_n(x))_n$ est bornée et $\lim\limits_{+\infty} a_p = 0$

En passant à la limite dans (1) pour n fixé quand $p \to +\infty$, on obtient la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx)$ et l'égalité :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) - a_{n+1} S_n(x)$$

d'où $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})|S_k(x)| + a_{n+1}|S_n(x)|$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx)\right| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1}\right) M_x = 2a_{n+1} M_x = \frac{2a_{n+1}}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

Pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$, $a \leq x \leq 2\pi - a \implies \frac{a}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{a}{2} \implies 0 < \sin\frac{a}{2} \leq \sin\frac{x}{2}$

donc $\sup\limits_{x\in[a,2\pi-a]}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)\right| = \|r_n\|_{[a,2\pi-a]}^{\infty} \le \frac{2a_{n+1}}{|\sin(\frac{a}{2})|} = \frac{2}{\sin(\frac{a}{2})\sqrt{n+1}}$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|r_n\|_{[a,2\pi-a]}^{\infty} = 0$,

et que $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx) \text{ converge donc uniformément sur } [a,2\pi-a].}$

• Chaque fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)$ étant continue sur $[a,2\pi-a]$, la fonction f l'est aussi.

Pour tout $x_0\in]0,2\pi[$, il existe a tel que $0<a<x_0<2\pi-a<2\pi$ et f est continue au point x_0. f est donc continue sur $]0,2\pi[$. Et par 2π-périodicité, elle est continue en tout point de $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en tout point de } \mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}}$

On peut noter aussi que f est impaire comme chacune des fonctions de la série qui la composent.

2- • $\int_a^{2\pi-a} f(t)\sin(nt)dt = \int_a^{2\pi-a}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\right)\sin(nt)dt = \int_a^{2\pi-a}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right)dt$

or $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right| = |\sin(nt)|\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\right| \le \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\right| = |r_n(t)|$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right| \le |r_n(t)| \le \frac{2a_{n+1}}{|\sin(\frac{t}{2})|} \le \frac{2a_{n+1}}{|\sin(\frac{a}{2})|} = \frac{2}{|\sqrt{n+1}\sin(\frac{a}{2})|}$$

$$\sup_{t\in[a\cdot 2\pi-a]}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right| \le \frac{2}{|\sqrt{n+1}\sin(\frac{a}{2})|}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right\|_{t\in[a\cdot 2\pi-a]}^{\infty} = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)$ converge uniformment sur $[a\cdot 2\pi-a]$.

• On peut alors écrire :

$$\int_a^{2\pi-a}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)\right)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_a^{2\pi-a}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)dt\right)$$

donc $\int_a^{2\pi-a} f(t)\sin(nt)dt = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\int_a^{2\pi-a}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kt)\sin(nt)dt\right)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\int_a^{2\pi-a}[\cos(k-n)t-\cos(k+n)t]dt\right)$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\int_a^{2\pi-a}[\cos(k-n)t-\cos(k+n)t]dt\right) + \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_a^{2\pi-a}\underbrace{(1-\cos(2nt))dt}_{k=n}$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\left[\frac{\sin(k-n)t}{k-n}\right]_a^{2\pi-a} - \left[\frac{\sin(k+n)t}{k+n}\right]_a^{2\pi-a}\right) + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(2\pi-2a-\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_a^{2\pi-a}\right)$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{-2\sin(k-n)a}{k-n}+\frac{2\sin(k+n)a}{k+n}\right)}_{u_k(a)} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(2\pi-2a+\frac{\sin(2na)}{n}\right) \quad (1)$$

$$\int_a^{2\pi-a} f(t)\sin(nt)dt = \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}u_k(a) + \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(2\pi-2a+\frac{\sin(2na)}{n}\right)$$

$\forall k>n, |u_k(a)| = \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{-\sin(k-n)a}{k-n}+\frac{\sin(k+n)a}{k+n}\right)\right| \le \frac{|\sin(n-k)a|}{\sqrt{k}(k-n)} + \frac{|\sin(n+k)a|}{\sqrt{k}(k+n)}$

$$|u_k(a)| \le \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{k-n}+\frac{1}{k-n}\right) \le \frac{2}{(k-n)\sqrt{k}}$$

$\sup\limits_{t\in[a\cdot\pi-a]}|v_k(a)| = \|v_k\|_{[a,\pi-a]}^{\infty} \le \frac{2}{(k-n)\sqrt{k}} \underset{}{\overset{n\to+\infty}{\sim}} \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}}$ (série de Riemann convergente)

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_k(\ )$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a,2\pi-a]$.

Alors $\lim\limits_{a\to 0}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k(a)\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\lim\limits_{a\to 0}u_k(a)\right)}_{=0} = 0$

En passant à la limite dans (1) quand $a\to 0^+$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \lim_{a\to 0}\int_a^{2\pi-a} f(t)\sin(nt)dt = \frac{\pi}{\sqrt{n}}}$$

• La fonction f est 2π-périodique. Etant impaire, tous ses coefficients $a_n(f)$ sont nuls.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{2\pi-a} f(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Si la fonction f admettait une limite finie en 0^+, par imparité elle en admettrait une aussi en 0^- et serait continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On pourrait alors appliquer la formule de Parseval-Bessel qui dit que :

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

La série $\sum b_n(f)^2$ devrait converger. Or ce n'est pas le cas puisque $b_n(f)^2 = \dfrac{1}{n}$

Donc la fonction f n'admet pas de limite finie en 0^+ ni en 0^-.

4.3 Série trigonométrique et équation différentielle :

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,2\pi[$ et que :

$$\forall x \in]0,2\pi[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$

1 - Montrer que f est C^1 sur$\mathbb{R}$ et C^2 sur $]0,2\pi[$. Calculer $f'(0)$.

2- Déterminer une équation différentielle satisfaite par f sur $]0,2\pi[$.

Résoudre cette équation à l'aide de MAPLE et en déduire la valeur de $f(x)$ sur $]0,2\pi[$

SOLUTION :

1 - Pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$

• Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la majoration $\|u_n(\ )\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n(n^2-1)}$

montre la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

• Chaque fonction u_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ et la majoration $\|u_n'(\ )\|_{\mathbb{R}}^{\infty} = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\cos(nx)}{n^2-1}\right| \leq \frac{1}{n^2-1}$

montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'(\ )$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2-1}$

En particulier,

$$f'(0) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{f'(0) = \frac{3}{4}}$$

• Ce raisonnement ne vaut plus pour la dérivée seconde car $\sum u_n''(x) = \sum \frac{n\sin(nx)}{n^2-1}$ ne converge plus normalement.

On écrit alors $u_n''(x) = -\dfrac{n\sin(nx)}{n^2-1} = -\dfrac{n^2\sin(nx)}{n(n^2-1)} = -\dfrac{(n^2-1+1)\sin(nx)}{n(n^2-1)} = -\dfrac{\sin(nx)}{n} - \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$

la série $\sum\dfrac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,2\pi[$ et la série $\sum\dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la série $\sum u_n''(x)$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,2\pi[$.

La fonction f est donc C^2 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,2\pi[$, c'est à dire sur $]0,2\pi[$.

Et $\forall x \in]0,2\pi[,\ f''(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\sin(nx)}{n^2-1}$

donc $\forall x \in]0,2\pi[,\ f''(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi - x}{2} - \sin x\right) - f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est solution sur }]0, 2\pi[\text{ de l'équation différentielle } (E) : y'' + y = \frac{x-\pi}{2} + \sin x}$$

• On sait résoudre cette équation du second ordre linéaire à coefficients constants. On peut s'épargner les calculs d'une solution particulière de l'équation complète grâce à MAPLE :

>?dsolve

>Equadiff := diff(y(x),x$2)+y(x)= (x - Pi)/2 + sin(x); dsolve(Equadiff); simplify(");

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\cos(x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$$

Ainsi, $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,2\pi[,\ f(x) = \lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\cos(x)$

Il reste à déterminer les constantes λ et μ .

• Par continuité de la fonction f en 0, on obtient $f(0) = 0 = \mu - \frac{1}{2}\pi$ donc $\mu = \frac{\pi}{2}$

• $\forall x \in]0,2\pi[,\ f'(x) = \lambda\cos(x) - \mu\sin(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$

et par continuité de la fonction f' en 0, on obtient $f'(0) = \frac{3}{4} = \lambda + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ donc $\lambda = \frac{3}{4}$

et finalement $\boxed{\forall x \in]0,2\pi[,\ f(x) = \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{\pi}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{x-\pi}{2}}$

cette égalité se prolongeant par continuité aux bornes de l'intervalle.

****

4.4 Egalité de deux séries doubles :

Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}} e^{inx}.$

SOLUTION :

a) • Etudions la fonction $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2n\pi)^2}$

Pour cela introduisons les deux séries simples :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} e^{-(x-2n\pi)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x+2n\pi)^2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n(x) = e^{-(x-2n\pi)^2} = e^{-(2n\pi-x)^2}$ et $v_n(x) = e^{-(x+2n\pi)^2}$

Soit $[a,b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit n_0 tel que $2n_0\pi - b \geq 0$

$\forall x \in [a,b],\ \forall n \geq n_0,\ -b \leq -x \leq -a,$ donc $0 \leq 2n_0\pi - b \leq 2n\pi - b \leq 2n\pi - x$

donc $(2n\pi-b)^2 \leq (2n\pi-x)^2$ et $e^{-(2n\pi-x)^2} \leq e^{-(2n\pi-b)^2}$

ce dernier majorant étant indépendant de x, on en déduit que $\|u_n(\ )\|_\infty^{[a,b]} \leq e^{-(2n\pi-b)^2}$, ce qui montre par majoration la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ sur le segment $[a,b]$.

Il s'ensuit la convergence simple de $\sum u_n(x)$ en tout point $x \in [a,b]$. $[a,b]$ étant quelconque, f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, chaque fonction u_n étant continue sur $[a,b]$, la convergence uniforme de la série entraîne la continuité de la fonction somme f_1 sur le segment $[a,b]$.

Un raisonnement analogue montre la continuité de la fonction f_2 sur le segment $[a,b]$ et finalement celle de $f = f_1 + f_2$ sur tout segment $[a,b]$ et en fin de compte sur $\mathbb{R}$.

• $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x+2\pi-2n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2(n-1)\pi)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2m\pi)^2} = f(x)$

(par le changement d'indice $m = n-1$)

La fonction f est donc 2π-périodique.

b) Calcul des coefficients de Fourier de f :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2n\pi)^2}\right)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2n\pi)^2-ikt}\right)dt$$

Par convergence normale donc uniforme des deux séries de fonctions $\sum e^{-(x-2n\pi)^2-ikt}$ et $\sum e^{-(x+2n\pi)^2-ikt}$ sur le segment $[0,2\pi]$, on peut écrire :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} e^{-(t-2n\pi)^2-ikt}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} e^{-u^2-ik(u+2n\pi)}du\right)$$

(par le changement de variable $u = t - 2n\pi$ dans chaque intégrale)

Compte tenu de l'égalité $e^{-2ikn\pi} = 1$ et en regroupant les intégrales sur des intervalles successifs $[-2n\pi, -2(n-1)\pi] = [-2n\pi, -2n\pi + 2\pi]$ par la relation de Chasles, on obtient :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - iku} du$$

• Pour calculer cette intégrale, introduisons la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - ixu} du$

La domination $|e^{-u^2-ixu}| \leq e^{-u^2}$ montre que l'intégrale est absolument convergente pour tout x réel.

On vérifie que les hypothèses de dérivation sous le signe $\int$ sont satisfaites et l'on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -iue^{-u^2-ixu} du = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} -2ue^{-u^2} e^{-ixu} du$$

$$g'(x) = \frac{i}{2} \left(\left[e^{-u^2} e^{-ixu} \right]_{u \to -\infty}^{u \to +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-u^2} e^{-ixu} du \right) = \frac{-x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-ixu} du$$

$$g'(x) = \frac{-x}{2} g(x)$$

donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \lambda \exp\left(\displaystyle\int_0^x -\frac{t}{2} dt \right) = \lambda e^{\frac{-x^2}{4}}$

mais $g(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss)

donc $\lambda = g(0) = \sqrt{\pi}$ et $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-ixu} du = \sqrt{\pi} e^{\frac{-x^2}{4}}$

d'où l'on déduit finalement que $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} g(k) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-k^2}{4}}$ et que la série de Foureier de f est :

$$S_f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}} e^{ikx}$$

c) La fonction f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Comme dans la première question, on établit la convergence normale de la série dérivée $\sum u_n'(x) = \sum -2xe^{-(x-2n\pi)^2}$ sur tout intervalle $[a, b]$ (par la majoration $\|u_n'(\ )\|_\infty^{[a,b]} \leq 2\max(|a|, |b|)\ e^{-(2n\pi - b)^2}$), ce qui montre par le théorème de dérivation des séries de fonctions que la fonction f_1 est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$. Raisonnement analogue pour la fonction f_2 et on en conclut finalement que la fonction f esst de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On peut alors utiliser le théorème de Dirichlet pour affirmer que la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme f : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k^2}{4}} e^{ikx}$

****

4.5 Solutions périodiques d'une équation différentielle (Oral CENTRALE)

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) + e^{-ix} y(x) = 0$

1- Montrer qu'une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $2\pi-$périodique si et seulement si :

$f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$

2- Soit f une telle solution. On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

Trouver une relation de récurrence entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$

En déduitre que (E) admet une solution $2\pi-$périodique non nulle.

3- Donner le développement en série de Fourier de la fonction $t \mapsto \exp(x\, e^{it})$ et interpréter la solution à l'aide de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \exp\left(2\cos(t)\, e^{-i\frac{x}{2}}\right) dt$

SOLUTION **:**

1- Si f est une solution de (E) $2\pi-$périodique, alors $f(0) = f(2\pi)$ et puisque f' est elle aussi $2\pi-$périodique, $f'(0) = f'(2\pi)$.

• Réciproquement, soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$

Considérons la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x + 2\pi)$

alors $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$

et on vérifie que g est également solution de (E) (calcul sans difficulté)

L'équation (E) est du second ordre, linéaire, et le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz aux solutions définies sur $\mathbb{R}$: f et g sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient les mêmes conditions initiales au point 0 :

$g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$

Elles sont donc égales : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$ et la fonction f est $2\pi-$périodique.

2- Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ $2\pi-$périodique.

Ses coefficients de Fourier sont alors définis. De plus, f est (au moins) de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{in}dt = \frac{1}{in}c_n(f')$$

donc, $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f') = inc_n(f)$ et cette égalité est encore valable pour $n = 0$ ($c_0(f') = 0$ car f est $2\pi-$périodique)

En appliquant ce résultat à f', on obtient : $c_n(f'') = inc_n(f') = (in)^2c_n(f) = -n^2c_n(f)$

Par ailleurs,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-it}e^{-i(n-1)t}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-i(n-1)t}dt$$

(car $f''(x) + e^{-ix}f(x) = 0$)

donc, $c_n(f) = -c_{n-1}(f'') = (n-1)^2c_{n-1}(f)$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = (n-1)^2c_{n-1}(f)$

soit aussi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n+1}(f) = n^2c_n(f)}$

• Pour $n = 0$, on obtient alors $c_1 = 0$

Pour $n = 1$, la relation $1^2c_1(f) = c_2(f)$ donne $c_2 = 0$.

Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0$

• Pour $n = -1$, on obtient $(-1)^2c_{-1} = c_0$ donc $c_{-1} = c_0$

puis $c_{-2} = \dfrac{c_{-1}}{2^2} = \dfrac{c_0}{2^2}$, $c_{-3} = \dfrac{c_{-2}}{3^2} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2}$, $c_{-4} = \dfrac{c_{-3}}{4^2} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2}$

et de manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{-n} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2.....n^2} = \dfrac{c_0}{(n!)^2}$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 0 \text{ et } c_{-n} = \dfrac{c_0}{(n!)^2}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}$

Réciproquement, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}$ cvge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $\left|\dfrac{e^{-inx}}{(n!)^2}\right| = \dfrac{1}{(n!)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

En conclusion, $\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe des solutions de } (E) \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ et } 2\pi\text{-périodiques non nulles ;} \\ \text{elles sont de la forme } x \mapsto \lambda\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{(n!)^2}\end{array}}$

3- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)^n}{n!}$

(série exponentielle complexe convergente sur $\mathbb{C}$)

$$\exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}$$

Pour tout x, la fonction $t \mapsto \exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\exp\left(2\cos(t)\,e^{-i\frac{x}{2}}\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right)dt$

Pour tout x fixé, la majoration $\left|\dfrac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right| \leq \dfrac{2^n}{n!}$ montre que la série de fonctions de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,\pi]$.

On peut alors écrire : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}dt\right)$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{2^n\cos^n(t)\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}dt\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\int_0^{\pi}\cos^n(t)dt$

• Reste à calculer $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n(t)dt$, intégrale ressemblant aux intégrales de Wallis ($\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \int_0^\pi \cos^{n-1}(t)\cos t dt = \underbrace{\left[\cos^{n-1}(t)\sin t\right]_0^\pi}_{=0} + (n-1)\int_0^\pi \cos^{n-2} t\ \sin^2 t dt$$

$$w_n = (n-1)\int_0^\pi \cos^{n-2} t\,(1-\cos^2 t)dt = (n-1)(w_{n-2} - w_n)$$

$$\Longrightarrow \quad w_n = \frac{n-1}{n} w_{n-2}$$

Pour $n = 2p$ pair, $w_0 = \displaystyle\int_0^\pi dt = \pi$

$$w_2 = \frac{1}{2}w_0 = \frac{1}{2}\pi$$

$$w_4 = \frac{3}{4}w_2 = \frac{1.3}{2.4}\pi$$

$$\text{.....}\ w_{2p} = \frac{2p-1}{2p}w_{2p-2} = \frac{1.3....(2p-1)}{2.4.....2p}\pi$$

et en multipliant haut et bas par $2.4.6...2p$, on obtient : $\boxed{w_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2}}$

Pour n impair, $w_1 = \displaystyle\int_0^\pi \cos t\, dt = [\sin t]_0^\pi = 0$ et par une récurrence immédiate, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, w_{2p+1} = 0}$

• d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\ e^{-i\frac{nx}{2}}}{n!}\int_0^\pi \cos^n(t)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p}\ e^{-i\frac{2px}{2}}}{(2p)!}w_{2p}$

(seuls les indices pairs ont une contribution non nulle)

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p}\ e^{-ipx}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{(2^p\ p!)^2}\pi = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{e^{-ipx}}{(p!)^2}$$

En comparant au résultat obtenu dans la question 2, on en conclut que les solutions périodiques de l'équation (E) sont les fonctions de la forme : $\boxed{y(x) = \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \exp\left(2\cos(t)\ e^{-i\frac{x}{2}}\right) dt}$

4.6 Calculs de $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\lambda t\ dt\right)$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt\right)$:

1- Théorème de Lebesgue

a) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$.

b) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$.

On pourra d'abord montrer ce résultat pour des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\lambda t\ dt\right)$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\cos\lambda t\ dt\right)$

2- a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

b) Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin\lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$

Solution :

1- a) Les fonctions f et exponentielle étant de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties comme suit :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \left[f(t)\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b + i\int_a^b f'(t)\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda}dt$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left|\frac{f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| + \left|i\int_a^b \frac{f'(t)e^{i\lambda t}}{i\lambda}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)e^{i\lambda b}| + |f(a)e^{i\lambda a}| + \int_a^b |f'(t)e^{i\lambda t}|dt\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\underbrace{\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right)}_{independant\ de\ \lambda}$$

cette majoration montre que $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \right| = 0$ et établit le résultat demandé.

b) • Si la fonction f est constante sur $[a, b]$, de valeur $c \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \int_a^b c\, e^{i\lambda t}dt = c\left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b = -i\, c\frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{\lambda} \text{ donc } \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{2|c|}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

• Si la fonction f est en escalier sur $[a, b]$, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ..... < x_{m-1} < x_m = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_1, x_{i+1}[$.

alors $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)e^{i\lambda t}dt$

et d'après l'étude qui précède, f étant constante sur chaque intervalle $]x_1, x_{i+1}[$,

pour tout $i \in \{0, 1, ..., m-1\}$, $\displaystyle\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$

d'où par addition, $\displaystyle\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

• Supposons enfin que la fonction f est continue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Donc il existe une fonction g en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - g\|_\infty^{[a,b]} \le \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\circ\circ\circ \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t}dt + \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left|\int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t}dt\right| + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \int_a^b \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\le \|f-g\|^\infty} . \underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1} dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \|f - g\|^\infty \int_a^b dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right|$$

$\circ\circ\circ$ g étant une fonction en escalier, d'après l'étude précédente, $\displaystyle\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$

donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\lambda| \ge A \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$

donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \ge A \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| \ge A \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \varepsilon$ c'est à dire que :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0}$$

En écrivant $\cos(\lambda t) = \dfrac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}$ et $\sin(\lambda t) = \dfrac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i}$ et en appliquant le résultat précédent, on en déduit que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)\sin \lambda t\, dt\right) \text{ et } \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)\cos \lambda t\, dt\right)$$

2- a) La fonction $t \mapsto |\sin t|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, ses coefficients de Fourier sont donc définis. Les coefficients b_n sont nuls puisque la fonction est paire.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos(nt)dt$

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\ \sin(t + nt) + \sin(t - nt)\ )dt$ $\qquad$ $(\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)\ )$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{1\},\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-\cos((1 + n)t)}{1 + n} + \dfrac{-\cos((1 - n)t)}{1 - n}\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^n + 1}{1 + n} + \dfrac{(-1)^n + 1}{1 - n}\right]$

d'où $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{4}{\pi(1 - 4p^2)}$

Enfin, $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$ et $a_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \cos t\ dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2t)dt = 0$

La série de Fourier de la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est donc : $S(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$

La fonction $g : t \mapsto |\sin t|$ est 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On en conclut, par le théorème de Dirichlet, que sa série de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R},\ S_g(t) = g(t)$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2pt)}{1-4p^2} = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nt)}{4n^2-1}}$

b) • Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \int_a^b f(t)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\lambda t)}{4n^2-1}\right)dt$

$$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(t)\frac{\cos(2n\lambda t)}{4n^2-1}\right)dt$$

$$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt \text{ en posant } u_n(t) = \frac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2-1}$$

La fonction f est continue et donc bornée sur le segment $[a,b]$: $\forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leq \|f\|_\infty^{[a,b]}$

$\forall t \in [a,b],\ |u_n(t)| = \dfrac{|\cos(2n\lambda t)\ f(t)|}{4n^2-1} \leq \dfrac{|f(t)|}{4n^2-1} \leq \dfrac{\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2-1}$ ce dernier majorant étant indépendant de t, on en déduit :

$$\|u_n\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |u_n(t)| \leq \frac{\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2-1}$$

donc, par majoration, la série $\sum \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge et la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$.

Il s'ensuit que $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\ dt\right)$

d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b \frac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2-1}\right)dt$

• en posant $v_n(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \frac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2-1}dt$, on obtient :

$$\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda) \qquad (1)$$

- d'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\cos(2n\lambda t)dt = 0$ donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} v_n(\lambda) = 0$

- $\forall\lambda \in \mathbb{R}^*, |v_n(\lambda)| = \left|\displaystyle\int_a^b \frac{\cos(2n\lambda t)\ f(t)}{4n^2-1}dt\right| \leq \dfrac{(b-a)\|f\|_\infty^{[a,b]}}{4n^2-1}$, ce qui montre la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum v_n(\ )$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{\lambda\to+\infty} v_n(\lambda)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

En reportant dans l'égalité (1), on en déduit finalement que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda)\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt$$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)|\sin \lambda t|dt\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt}$

4.7 Suite ayant deux limites :

On note E_n l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré n, c'est à dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ où $(c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_{n-1}, c_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, et $E = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré quelconque (mais fini, à ne pas confondre avec les séries trigonométriques)

Par définition, un polynôme trigonométrique est nul si tous ses coefficients sont nuls, deux polynômes trigonométriques sont égaux si tous leurs coefficients sont respectivement égaux.

1- Montrer que l'application N_1 qui à $P \in E$ fait correspondre $N_1(P) = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ est une norme sur E.

Même question pour $N_2 : P \mapsto \displaystyle\sup_{x\in[-1,0]} |P(x)|$

2- On considère la fonction g , 2π-périodique telle que :
- $\forall x \in [-1, 0],\ g(x) = 1$
- $\forall x \in]0, 1[,\ g(x) = e^{2ix}$

Déterminer la série de Fourier exponentielle de g et étudier sa convergence.
Montrer que la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3- On note $S_{n,\,g}(x)$ le polynôme trigonométrique $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikx}$

Etudier la convergence de la suite $(S_{n,\,g})_{n\geq 0}$ dans les espaces vectoriel normés (E, N_1) et (E, N_2).
Commentaires ?

Solution :

1- • Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \in E$ tel que $N_1(P) = 0$

alors $\forall x \in [0, 1],\ \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}e^{ikx} = 0$

donc $\forall x \in [0, 1], \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}(e^{ix})^k = 0$. Le polynôme $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}(X)^k$ admet donc une infinité de racines, à savoir tous les complexes de la forme e^{ix} lorsque x décrit $[0, 1]$. C'est donc le polynôme nul , ce qui signifie que tous ses coefficienst sont nuls, c'est à dire $\forall k \in \{-n, -(n-1), ..., n-1, n\},\ c_k = 0$.

P est donc le polynôme trigonométrique nul.

• Les relations : $\forall P \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ N_1(\lambda.P) = \lambda.N_1(P)$
et : $\forall P, Q \in E,\ N_1(P + Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$
se démontrent comme pour toute norme uniforme.

Donc N_1 est une norme sur E.

• Un raisonnement analogue montre que N_2 est une norme sur E.

2- • $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt = \dfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} e^{2it}e^{-int}dt\right)$

si $n \neq 0$ et $n \neq 2$, $c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\dfrac{e^{-i(n-2)t}}{-i(n-2)}\right]_{0}^{\pi}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{-in} + \dfrac{(-1)^{n-2}-1}{-i(n-2)}\right)$

d'où $c_{2p}(g) = 0$

et $c_{2p+1}(g) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{2}{-i(2p+1)} + \dfrac{2}{i(2p-1)}\right) = \dfrac{2i}{\pi(1-4p^2)}$

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dt + \int_{0}^{\pi} e^{2it}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2}$$

$$c_2(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{-2it}dt + \int_{0}^{\pi} dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{-\pi}^{0} + \pi\right) = \frac{1}{2}$$

La série de Fourier de g est $S_g(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{2ix} + \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{2i}{\pi(1-4p^2)}e^{i(2p+1)x}$

La restriction de g à chacun des ouverts $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ est prolongeable au fermé correspondant en une fonction de classe C^1 (la fonction constante 1 pour le premier intervalle, la fonction $x \mapsto e^{2ix}$ pour le second). g est donc C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Par ailleurs, • $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 = g(0)$ (car $g(x) = 1$ sur $[-\pi, 0]$)

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ (car $g(x) = e^{2ix}$ sur $]0, \pi[$)

g est donc continue au point 0.

• $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} g(x) = e^{2i\pi} = 1$ (car $g(x) = e^{2ix}$ sur $]0, \pi[$)

• $\displaystyle\lim_{x\to \pi^+} g(x) = \lim_{x\to -\pi^+} g(x) = 1 = g(-\pi) = g(\pi)$ (car $g(x) = 1$ sur $[-\pi, 0]$ et périodique)

g est donc continue au point π.

Finalement, par périodicité, g est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux.

D'après le théorème de Dirichlet, on peut affirmer que la série de Fourier de g converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa somme est $g(x)$ en tout point. Par ailleurs la série converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

3- On vient de voir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{\mathbb{R}}^{\infty} = 0$

donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{[-\pi,0]}^{\infty} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g} - g\|_{[0,\pi]}^{\infty} = 0$

c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g}(x)-1\|^{\infty}_{[-\pi,0]}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \|S_{n,\,g}(x)-e^{2ix}\|^{\infty}_{[0,\pi]}=0$
soit encore $\lim_{n\to+\infty} N_1(S_{n,\,g}-1)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} N_2(S_{n,\,g}-e^{2ix})=0$
On en conclut que $\lim_{n\to+\infty} S_{n,\,g}=1$ dans (E,N_1) et $\lim_{n\to+\infty} S_{n,\,g}=e^{2ix}$ dans (E,N_2)

La même suite $(S_{n,\,g})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc pas la même limite dans l'espace vectoriel E suivant qu'on le munisse de la norme N_1 ou de la norme N_2.

Les normes N_1 et N_2 ne sont donc pas équivalentes. (ce qui est possible puisque E n'est pas de dimension finie)

4.8 Théorème de Fejer :

Dans toute l'étude, pour tout $k\in\mathbb{Z}, e_k$ est la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e_k(x)=e^{ikx}$$

1- Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodique.
On définit leur produit de convolution par :

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

a) Montrer que $f*g$ est continue, 2π-périodique, et que $f*g=g*f$.
b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f*g)=c_n(f)\,c_n(g)$
c) Calculer $f*e_k$.

2 - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $D_n=\sum_{k=-n}^{n} e_k=e_{-n}+e_{-n+1}+...+e_{-1}+e_0+e_1+...+e_{n-1}+e_n$
(L'application D_n est appelée "noyau de Dirichlet")

et $K_n=\dfrac{D_0+D_1+...+D_n}{n+1}$

a) Montrer que si $x\notin 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(x)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

et que $K_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$

En déduire que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,-a]$ et sur $[a,\pi]$ pour tout $a\in\,]0,-\pi[$

b) Montrer que $f*D_n$ est un polynôme trigonométrique. Que représente-t-il pour la fonction f ?

3 - a) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt$ pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$.
Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt=1$
b) Montrer que la suite de fonctions $(f*K_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

4 - **Polynômes de Tchebychev :**
Soit $n\in\mathbb{N}$
a) Calculer une expression de $\cos(nx)$ en fonction de $\cos x$, et en déduire l'existence d'un polynôme T_n tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(nx)=T_n(\cos x)$.
Montrer qu'il existe un seul polynôme vérifiant cette dernière propriété . En donner un développement explicite.
b) Montrer que : $\forall n\geq 1, T_{n+1}(X)=2X\,T_n(X)-T_{n-1}(X)$.

5 - **Théorème de Weïerstrass :**
L'objet est de démontrer le téhorème de Weïerstrass : Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Une application f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ étant donnée, on se ramène au segment $[-1,1]$ par la fonction composée $g=f_o\varphi$ où $\varphi(t)=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$. (ainsi $g(-1)=f(a)$ et $g(1)=f(b)$)

Soit g une fonction réelle définie et continue sur le segment $[-1,1]$.
a) Montrer que la fonction $h=g_o\cos$ $(\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=g(\cos(x)))$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $h * K_n$ est un polynôme trigonométrique pair, qui peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie des fonctions $(x \mapsto \cos(kx))$, $k \in \mathbb{N}$

b) En déduire que toute fonction continue sur le segment $[-1,1]$ est la limite pour la norme uniforme $\| \quad \|_\infty^{[-1,1]}$ d'une suite de fonction polynomiales.

Solution :

1- a) • f et g étant continues sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$,
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$, $|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty^{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_\infty^{\mathbb{R}}$ (f et g sont bornées sur $\mathbb{R}$ car sont continues et périodiques)

On en déduit, par le théorème de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre, que la fonction $f * g$: $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f*g)(x+2\pi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi-t)g(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt = (f*g)(x)$

(car f est 2π-périodique).

donc $f * g$ est 2π-périodique.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g*f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} g(u)f(x-u)(-du)$

(par le changement de variable $x - t = u$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} g(u)f(x-u)(-du) \quad \text{(la fonction intégrée est } 2\pi\text{-périodique)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)du = (f*g)(x)$$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f*g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-inx}dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt\right)e^{-inx}dx$

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dt\right)dx$$

La fonction $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)e^{-inx}$ étant continue sur $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ comme composée de fonctions continues, d'après le théorème de Fubini,

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dx\right)dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t)e^{-in(t+u)}du\right)dt$$

(par le changement de variable $x - t = u$ dans l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dx$)

$$c_n(f*g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}g(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}g(t)c_n(f)dt$$

d'où finalement, $c_n(f*g) = \dfrac{c_n(f)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt = c_n(f).c_n(g)$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f*e_k)(x) = (e_k*f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x-t)f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)}f(t)dt$

$$(f*e_k)(x) = \frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = c_k(f)\, e_k(x)$$

ainsi, $f * e_k = c_k(f)\, .e_k$

2 - a)• $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$, on peut sommer les premiers de la suite géométrique comme suit :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}(1 + e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} + ... + e^{2inx}) = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$D_n(x) = \underbrace{e^{-inx}\frac{e^{i(\frac{2n+1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}}}_{=1}\frac{e^{-i(\frac{2n+1}{2})x} - e^{i(\frac{2n+1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{-2i\sin(n+\frac{1}{2})x}{-2i\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$$

• $\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \dfrac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{x}{2})}\Im m\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$$

• Soit $a \in]0,\pi[$. Pour tout $x \in [a,\pi]$, $\frac{a}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \sin(\frac{a}{2}) \leq \sin(\frac{x}{2}) \leq 1$

et donc $0 \leq K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \leq \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\sin^2(\frac{a}{2})}$

d'où $\|K_n\|_\infty^{[a,\pi]} \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{a}{2})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,\pi]$ pour tout $a \in]0,-\pi[$.

K_n étant paire, cette démonstration vaut aussi pour l'intervalle $[-\pi,-a]$

b) L'application $(f,g) \mapsto f*g$ est clairement bilinéaire.

$$f * D_n = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right) = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$$

$f*D_n(x)$ représente donc la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f prise au point x.

C'est un polynôme trigonométrique.

3 - a) • $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad k=0 \\ \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik} = 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$

• On en déduit que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = 2\pi$

(seul le terme pour $k=0$ a une contribution non nulle)

puis que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt)}_{=2\pi} = \frac{1}{2\pi(n+1)}(n+1)2\pi = 1$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f*K_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - f(x)\,.\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt}_{=1}$

$$\Longrightarrow |f*K_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$ donc est uniformément continue sur ce segment, et sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

ainsi $\exists\eta > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

donc pour tout $t \in [-\eta,\eta]$, $|f(x-t)-f(x)| < \varepsilon$ (puisqu'alors $|(x-t)-x| = |t| < \eta$)

donc $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\underbrace{|f(x-t)-f(x)|}_{\leq\varepsilon}K_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}K_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt = \varepsilon$ (1)

par ailleurs, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt$

$\displaystyle\leq \frac{\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|dt + \int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dt\right)$ (K_n est paire)

$\displaystyle\leq \frac{\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}dt \leq 2\|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty}\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}$

Or la suite de fonctions $(K_n(\ ))$ converge uniformément sur $[\eta,\pi]$ vers la fonction nulle.

Donc $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0, \|K_n\|_{[\eta,\pi]}^{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{\mathbb{R}}^{\infty}}$

et donc $\displaystyle\forall n \geq n_0, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\eta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \leq \varepsilon$ (2)

En sommant (1) et (2), pour tout x réel,

$\forall n \geq n_0, |f*K_n(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ et donc $\|f*K_n - f\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq 2\varepsilon$

On a ainsi montré que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|f*K_n - f\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq 2\varepsilon$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f*K_n)_{n\geq1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

4- a) • $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^n) = \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)^n)$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(\cos x)^{n-k}(i\sin x)^k\right)$$

$$= \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \begin{pmatrix} n \\ 2h \end{pmatrix} (\cos x)^{n-2h}(-1)^h(\sin^2 x)^h = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \begin{pmatrix} n \\ 2h \end{pmatrix} (-1)^h(\cos x)^{n-2h}(1-\cos^2 x)^h$$

En posant $T_n(X) = \displaystyle\sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \begin{pmatrix} n \\ 2h \end{pmatrix} (-1)^h X^{n-2h}(1-X^2)^h$ on définit bien un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie la propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.

- Si un autre polynôme $U_n(X)$ vérifie la même propriété, alors,

$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) - U_n(\cos x) = \cos(nx) - \cos(nx) = 0$.

Le polynôme $T_n - U_n$, ayant une infinité de racines, est le polynôme nul et $T_n = U_n$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+1}(\cos x) + T_{n-1}(\cos x) = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos(nx) = 2\cos x\ T_n(\cos x)$

(d'après la relation $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$)

Le polynôme $T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X) - 2X\,T_n(X)$ admettant une infinité de racines, est le polynôme nul donc $T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$

5- a) $h = g_o \cos$ est 2π-périodique car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ l'est, et continue comme composée de deux fonctions continues.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

On sait que $h * D_n$ est la somme partielle de rang n de la série de Fourier de la fonction h .

(d'après la question 2-b)

donc $h * D_n$ s'écrit aussi :

$h * D_n(x) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ a_k(h)\cos(kx) + b_k(h)\sin(kx)\ ) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(h)\cos(kx)$ puisque les coefficients b_n sont nuls par parité de la fonction h.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h * D_n(x) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(h)T_k(\cos(x))$

En posant $P_n(X) = \dfrac{a_0(h)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(h)T_k(X)$, $P_n(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h * D_n(x) = P_n(\cos(x))$

et alors $\forall x \in \mathbb{R},\ h * K_n(x) = h * \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k\right)(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} h * D_k(x)\right) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_k(\cos(x))$

En posant $Q_n(X) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(X)$, $Q_n(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h * K_n(x) = Q_n(\cos(x))$

Or $\|h * K_n - h\|_\infty^{\mathbb{R}} = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |h * K_n(x) - h(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |Q_n(\cos x) - g(\cos x)| = \sup_{t\in[-1,1]} |Q_n(t) - g(t)| = \|Q_n - g\|_\infty^{[-1,1]}$

et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|h * K_n - h\|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$ (d'après 3-b) , il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|Q_n - g\|_\infty^{[-1,1]} = 0$, ce qui montre que la suite des fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction g.