Suites et séries de fonctions

1 Etude de convergence :

1.1 Nature de convergences :

Etudier les convergences normale et uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ et sur un segment de $\mathbb{R}$.

SOLUTION :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^n n}{n^2+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur n^2+t^2 ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

La majoration $\left|\dfrac{(-1)^n n}{n^2+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$ ne permet pas de conclure à la convergence absolue de la série.

L'équivalence $\dfrac{(-1)^n n}{n^2+t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne permet pas non plus de conclure

(la suite n'a pas un signe fixe)

Posons $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n} + v_n(t)$ de sorte que $v_n(t) = \frac{(-1)^n n}{n^2+t^2} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n-1}t^2}{n(n^2+t^2)}$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}t^2}{n(n^2+t^2)}\right| \leqslant \frac{t^2}{n^3}$, ce qui montre que la série $\sum v_n(\ )$ converge absolument donc converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

* *

1.2 Suite de fonctions :

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n$

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction F.
Déterminer une relation liant $F(x+1)$ et $F(x)$.
Etudier les variations de F (sans calculer F'). Calculer $F(0)$.

b) Calculer $F(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et un équivalent de $F(x)$ quand $x \to +\infty$

c) Etudier la dérivabilité de F : donner une expression de $F'(x)$ et calculer $F'(0)$.
Montrer que F est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

SOLUTION :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+x} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n\right)$$
$$= \frac{1}{n+1+x} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+x} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= -\frac{1+x}{n(n+1+x)} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ces trois séries sont convergentes.

Donc la série $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge et la suite $(f_n(x))$ aussi.

- $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x+1) - f_{n+1}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x+1} - \ln(n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+x} - \ln(n+1)\right)$

$$f_n(x+1) - f_{n+1}(x) = \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+x}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{1+x} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

en passant à la limite pour x fixé quand $n \to +\infty$, on obtient : $F(x+1) - F(x) = -\dfrac{1}{1+x}$

• Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq x \leq x'$,
alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+x'} \leq \dfrac{1}{k+x'}$ et par sommation, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x') \leq f_n(x)$.
en passant à la limite pour x fixé quand $n \to +\infty$, on obtient : $F(x') \leq F(x)$.
La fonction F est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$ (constante d'Euler)
donc $F(0) = \gamma$

b) On a vu que $\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x+1) = F(x) - \dfrac{1}{1+x}$
Donc $F(1) = F(0) - 1$

$F(2) = F(1) - \dfrac{1}{2}$

$F(3) = F(2) - \dfrac{1}{3}$

....

$F(n) = F(n-1) - \dfrac{1}{n}$

En additionnant ces inégalités, on obtient :

$$\boxed{F(n) = F(0) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} = \gamma - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

• puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = +\infty$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{n \to \infty}{\sim} \ln n$ on en déduit que $F(n) \overset{n \to \infty}{\sim} -\ln n$
Par décroissance de la fonction F, pour tout réel x, $F(m+1) \leq F(x) \leq F(m)$ si m est la partie entière de x. Et puisque $F(m+1) \sim -\ln(m+1) \sim -\ln(m)$, par encadrement, $\boxed{F(x) \overset{n \to \infty}{\sim} -\ln m \sim -\ln x}$

c) Chaque fonction f_n est C^1 sur $[0, +\infty[$ et $f'_n(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^2}$

Donc la suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $h\ :\ x \mapsto -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$

(cette série est bien convergente car $\dfrac{1}{(k+x)^2} \overset{k \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$)

La convergence est elle uniforme ?

$\forall x \in [0, +\infty[,\ |h(x) - f'_n(x)| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R_n$

(reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$)

$\Longrightarrow \displaystyle\sup_{x \in [0, +\infty[} |h(x) - f'_n| = \|h - f'_n\|_\infty^{[0, +\infty[} \leq R_n$

Puisque $\lim R_n = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|h - f'_n\|_\infty^{[0, +\infty[} = 0$

La suite de fonctions (f'_n) converge donc uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction h.

D'après le théorème de dérivation des suites de fonctions, on peut affirmer que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ F'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}}$$

Remarque : Ce calcul montre que $F'(x) < 0$ et on retrouve le résultat que F est décroissante.

En particulier, $\boxed{F'(0) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{-\pi^2}{6}}$

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, Chaque fonction f_n est de classe C^p sur $[0, +\infty[$ et $f_n^{(p)}(x) = (-1)^p p! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)^{p+1}}$

La suite $(f_n^{(p)})$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $h_p\ :\ x \mapsto (-1)^p p! \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{p+1}}$

La majoration $\|h_p - f_n^{(p)}\|_\infty^{[0, +\infty[} \leq p! \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$ montre que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|h_p - f_n^{(p)}\|_\infty^{[0, +\infty[} = 0$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction h_p.

Ceci permet de montrer par récurrence sur p que F est de classe C^p pour tout p et que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,+\infty[,\ F^{(p)}(x) = h_p(x) = (-1)^p p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{p+1}}}$$

* *

1.3 Convergence de suite de fonctions : (ENSI)

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[, \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n^2(t)\,dt$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) et calculer sa limite.

Solution :

♣ $\forall x \in [0,1[, \quad f_0(x) = 1$

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)^2\,dt = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t + 1 \right)^2 dt \\ &= 1 + \int_0^x \left(\frac{t^6}{9} + t^4 + t^2 + 1 + \frac{2t^5}{3} + \frac{2t^4}{3} + \frac{2t^3}{3} + 2t^3 + 2t^2 + 2t \right) dt \\ &= 1 + \frac{x^7}{63} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^2 \\ &= \frac{x^7}{63} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{3} + \frac{2x^4}{3} + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

- par récurrence immédiate on montre que $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[, \quad f_n(x) \geq 1 > 0$
- Montrons par récurrence sur n que $\quad \forall x \in [0,1[, \quad f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$

  c'est vrai pour $n = 1$ car $f_0(x) = 1 \leq 1 + x = f_1(x)$

  Supposons cela vrai à l'ordre n : $\quad \forall x \in [0,1[, \quad f_{n-1}(x) \leq f_n(x)$

  alors, $\forall x \in [0,1[, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\,dt$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \underbrace{(f_n(t) - f_{n-1}(t))}_{\geq 0}.\underbrace{(f_n(t) + f_{n-1}(t))}_{\geq 0}\,dt \quad \geq 0$$

Donc pour tout $x \in [0,1[$, la suite numérique réelle $(f_n(x))$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

- Or remarquons que $f_1(x) = 1 + x$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1 \leq 1 + x + x^2 + x^3$$

$$f_3(x) = \frac{x^7}{63} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{3} + \frac{2x^4}{3} + x^3 + x^2 + x + 1 \leq 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

Montrons alors par récurrence que que pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

On vient de le vérifier pour $n = 1, 2, 3$

Supposons cela vrai jusqu'à l'ordre n.

alors $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n^2(t)\,dt \leq 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 dt = 1 + \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{1-x}$

Donc $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

- Pour tout x de $[0,1[$, la suite $(f_n(x))$ est croissanre et majorée. Elle converge donc. Soit $g(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction g, telle que :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction g, telle que : $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

♣ - Soit $x \in [0,1[$, fixé. $\forall t \in [0,x], \forall n \in \mathbf{N}, f_n(t) \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x} = \text{cte}$

La suite de fonctions $(t \longrightarrow f_n(t))_n$ est donc dominée sur $[0,x]$ par la constante $\dfrac{1}{1-x}$ qui est intégrable sur le segment $[0,x]$. Domination analogue pour son carré.

Par application du théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^x f_n^2(t)\,dt \right) = \int_0^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n^2(t) \right) dt$$

En passant à la limite pour x fixé quand $n \to \infty$ dans l'égalité $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n^2(t)\,dt$, on obtient :

$$g(x) = 1 + \int_0^x g^2(t)\,dt$$

♣ - La suite $(f_n(x))_n$ étant croissante, $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq f_n(x) \leq g(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

Posons $d_n(x) = g(x) - f_n(x)$

Soient $0 \leq x \leq y < 1$

$$d_n(y) - d_n(x) = g(y) - g(x) - (f_n(y) - f_n(x))$$
$$= \int_0^y g^2(t)\,dt - \int_0^x g^2(t)\,dt - \left(\int_0^y f_n^2(t)\,dt - \int_0^x f_n^2(t)\,dt \right)$$
$$= \int_0^y (g^2(t) - f_n^2(t))\,dt - \int_0^x (g^2(t) - f_n^2(t))\,dt$$

$$d_n(y) - d_n(x) = \int_x^y \underbrace{(g^2(t) - f_n^2(t))}_{\geq 0}\,dt \geq 0$$

La fonction $(x \longrightarrow d_n(x))$ est donc croissante sur $[0,1[$.

Pour tout $a \in [0,1[$, on a donc $\sup\limits_{x\in[0,a]} d_n(x) = d_n(a)$

$\forall x \in [0,a], \quad 0 \leq d_n(x) \leq d_n(a) = g(a) - f_n(a)$

donc $\| g - f_n \|_{[0,a]}^{\infty} = \| d_n \|_{[0,a]}^{\infty} \leq g(a) - f_n(a) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty \quad$ car $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = g(a)$

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge donc uniformément sur tout segment } [0,a] \subset [0,1[}$

Chaque fonction f_n étant continue car polynomiale, la limite g est également une fonction continue sur $[0,a]$ et finalement sur $[0,1[$ car ceci est valable pour tout $a \in [0,1[$.

La fonction $(x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x g^2(t)\,dt)$ est alors de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue.

Et la relation $g(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x g^2(t)\,dt$ permet de conclure que g est C^1.

On peut alors dériver cette relation, ce qui donne :

$$g'(x) = g^2(x)$$

Donc $\forall x \in [0,1[, \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \qquad$ (on a vu que $g(x) \geq 1 > 0$)

en intégrant, $\dfrac{-1}{g(x)} = x + k \qquad$ (k constante réelle)

en $x = 0$, $\quad \dfrac{-1}{g(0)} = -1 = k$

donc $\quad \boxed{g(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

****

1.4 Limite uniforme non C^1 :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur l'intervalle $[-1,1]$ par : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$

Montrer que chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une limite qui n'est pas de classe C^1.

SOLUTION :

• Chaque fonction f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ par composition car $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, prend ses valeurs dans $[\frac{1}{n}, +\infty[$, et la fonction $\sqrt{\ }$ est C^1 sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$.

• Il est clair que $\forall x \in [-1,1], \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Cette fonction limite n'est pas dérivable en 0.

• $\forall x \in [-1,1], \ 0 \leq \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}} - |x| = \dfrac{x^2 + \frac{1}{n} - |x|^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\Longrightarrow \forall x \in [-1,1], \ |f_n(x) - |x|\,| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\Longrightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - |x|\,| = \|f_n - g\|_{\infty}^{[-1,1]} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_{\infty}^{[-1,1]} = 0$ et la suite (f_n) converge uniformément sur $[-1,1]$.

• On a ici un exemple d'une suite de fonctions de classe C^1, qui converge uniformément, mais dont la limite n'est pas C^1.

* *

1.5 Limite d'intégrales :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$

a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

La convergence de la suite (f_n) est elle uniforme sur $[0,1]$?

c) Etudier directement la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

SOLUTION :

a) (f_n) converge simplement vers la fonction nulle ω sur $[0,1]$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \frac{2^n t}{1+n2^n t^2}dt = \frac{1}{2n}[\ln(1+n2^n t^2)]_0^1 = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$

$I_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln(n)+n\ln 2}{2n}$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\ln 2}{2}}$

On voit qu'ici, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) = \frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = 0$

Il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

c) $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \dfrac{2^n(1+n2^n x^2) - 2^n(2n2^n x)}{(1+n2^n x^2)^2} = \dfrac{2^n - n4^n x^2}{(1+n2^n x^2)^2}$

$f_n'(x)$ s'annule pour $x = \alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{2})^n}$, est positif sur $[0,\alpha_n]$ et négatif sur $[\alpha_n,1]$

$f_n(0)=0$, f_n croit jusqu'au maximum $f_n(\alpha_n) = \dfrac{2^n\alpha_n}{1+n2^n(\alpha_n)^2} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{n}}$,

puis décroit jusqu'à $f_n(1) = \dfrac{2^n}{1+n2^n}$

Donc $\|f_n - \omega\|_\infty^{[0,1]} = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

* *

1.6 Limite d'intégrales :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Comparer à l'intégrale de la fonction limite.

c) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,+\infty[$.

SOLUTION :

a) (f_n) converge simplement vers la fonction nulle ω sur $[0,+\infty[$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} n^2 x e^{-nx}dx = [-nxe^{-nx}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ne^{-nx}dx$

$I_n = 0 - 0 - [e^{-nx}]_0^{+\infty} = 1$

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 1$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = 0$

Il n'y a pas égalité.

c) $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = n^2(e^{-nx} - nxe^{-nx}) = n^2 e^{-nx}(1-nx)$

$f_n'(x)$ s'annule pour $x = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, est positif sur $[0,\alpha_n]$ et négatif sur $[\alpha_n,+\infty[$

$f_n(0)=0$, f_n croit jusqu'au maximum $f_n(\alpha_n)=ne^{-1}=\dfrac{n}{e}$, puis décroit vers 0 quand $n\to+\infty$

Donc $\|f_n-\omega\|_\infty^{[0,+\infty[}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=\dfrac{n}{e}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$

donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

****

1.7 Limite d'intégrales :

Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^n}dt$

Montrer que la suite (I_n) admet une limite L et calculer un équivalent de I_n-L quand $n\to+\infty$

SOLUTION :

• Pour $n\geq 2$, la fonction $t\overset{f_n}{\longrightarrow}\dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et intégrable car $0\leq\dfrac{1}{1+t+t^n}\leq\dfrac{1}{1+t^2}$

$$\begin{cases}\forall t\in[0,1[,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+t+t^n}=\dfrac{1}{1+t}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1+1^n}=\dfrac{1}{3}\\ \forall t\in]1,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+t+t^n}=0\end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g : $\begin{cases}\forall t\in[0,1[,\quad g(t)=\dfrac{1}{1+t}\\ g(1)=\dfrac{1}{3}\\ \forall t\in]1,+\infty[,\quad g(t)=0\end{cases}$

La majoration $\forall n\geq 2,\ \ 0\leq\dfrac{1}{1+t+t^n}\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{+\infty}f_n(t)dt\right)=\int_0^{+\infty}g(t)dt\quad\text{c'est à dire : }\lim_{n\to\infty}I_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln(2)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}I_n=\ln(2)}$$

• $$I_n-\ln(2)=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^n}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^n}-\int_0^1\frac{dt}{1+t}$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t+t^n}-\frac{1}{1+t}\right)dt+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^n}$$
$$=\underbrace{\int_0^1\frac{-t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}dt}_{J_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^n}}_{J_2}$$

Par le changement de variable $u=t^n$, $t=\sqrt[n]{u}$, $dt=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$, on obtient : $J_1=\dfrac{-1}{n}\displaystyle\int_0^1\frac{u.u^{\frac{1}{n}-1}du}{(1+u^{\frac{1}{n}}+u)(1+u^{\frac{1}{n}})}$

Or $\forall u>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u}=1$ donc $\dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{(1+u^{\frac{1}{n}}+u)(1+u^{\frac{1}{n}})}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2(2+u)}$

La majoration $\forall n\geq 2,\ \forall u\in[0,1],\ 0\leq\dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{(1+u^{\frac{1}{n}}+u)(1+u^{\frac{1}{n}})}\leq\dfrac{1}{3.2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{u^{\frac{1}{n}}du}{(1+u^{\frac{1}{n}}+u)(1+u^{\frac{1}{n}})}\right)=\int_0^1\frac{1}{2(2+u)}du=\frac{1}{2}\Big[\ln(2+u)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Donc $J_1\overset{n\to\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

• Le même changement de variable et un raisonnement analogue donnent :

$$J_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt=\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{u^{\frac{1}{n}-1}du}{1+u^{\frac{1}{n}}+u}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(2+u)}du$$

$$J_2\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n}\int_1^{+\infty}\frac{2+u-u}{u(2+u)}du=\frac{1}{2n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u}-\frac{1}{2+u}du=\frac{1}{2n}\left[\ln\left(\frac{u}{2+u}\right)\right]_1^{+\infty}=\frac{\ln(3)}{2n}$$

La somme des parties principales en $\dfrac{1}{n}$ étant non nulle, $I_n-\ln 2\overset{n\to\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{\ln(3)}{2n}=\dfrac{\ln 2}{2n}$

Finalement, $\boxed{I_n-\ln 2\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{\ln 2}{2n}}$

****

1.8 Développement asymptotique d'une intégrale :

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$

a) Calculer la limite L de la suite (I_n)

b) calculer un équivalent simple de $I_n - L$ quand $n \to +\infty$

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

Calculer un développement asymptotique à trois termes de (I_n)

SOLUTION :

a) En posant $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction constante 1. La domination : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[,\ |f_n(t)| \leqslant 1$ où la fonction constante 1 est continue et intégrabel sur $[0,1[$ permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \int_0^1 1dt = 1 \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 1}$$

b) $$I_n - L = I_n - 1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right) dt = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt = -\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n}\, t\, dt$$

$$= -\frac{1}{n}\left[t\ln(1+t^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$$

$$= -\frac{1}{n}\ln(2) + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$$

En utilisant l'encadrement : $\forall u \in [0,1],\ 0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$, on obtient :

$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$I_n - 1 = -\frac{1}{n}\ln(2) + \underbrace{\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

donc $\boxed{I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{n}}$

On a le développement asymptotique : $\boxed{I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

c) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{k-1}}{k}\right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 (-1)^{k-1}\frac{t^{k-1}}{k}dt\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}$$

L'échange entre l'intégrale et la série étant validée par la convergence de la série $\sum \int_0^1 \left|\frac{\ln(1+t)}{t}\right| dt = \sum \frac{1}{k^2}$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

• Reprenons la relation $I_n = 1 = -\dfrac{1}{n}\ln(2) + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$

Par le changement de variable $u = t^n,\ t = u^{\frac{1}{n}},\ dt = \frac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n}-1}\, du$

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt = \int_0^1 \ln(1+u)\ \frac{1}{n}\ u^{\frac{1}{n}-1}\, du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}\, du$$

Puisque $\forall u \in]0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n}} = 1$ et grâce à la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0,1],\ \left|\dfrac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \dfrac{u}{u}\, u^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}\, du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du = \frac{\pi^2}{12}$$

donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12\, n^2}$

et on obtient le développement asymptotique : $\boxed{I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{\pi^2}{12\, n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

* *

2 Séries de fonctions :

2.1 Dérivabilité et calcul :

Déterminer le domaine de définition de la série $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ où $u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$

Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition et calculer $S'(1)$

Calculer $S(1)$

SOLUTION **:**

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ est défini si et seulement si $1 + \dfrac{x}{n} > 0$

Le domaine de définition de u_n est $\Delta_n =]-n, +\infty[$.

$u_n(x)$ est défini pour tout n si et seulement si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \Delta_n =]-1, +\infty[$

Quand $u \to 0$, $\ln(1+u) - u = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) - u = -\dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \sim -\dfrac{u^2}{2}$

donc, pour tout $x \in]-1, +\infty[-\{0\}$, $|u_n(x)| \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$

La série $\sum u_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout $x \in]-1, +\infty[$ (le cas $x = 0$ est immédiat)

Le domaine de définition de la fonction somme S est donc l'intervalle $]-1, +\infty[$.

• Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x \in]-1, +\infty[,\ u_n'(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{x}{n}}\right) - \dfrac{1}{n}$

$u_n'(x) = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{x}{n(n+x)}$

Soient a et b réels quelconques tels que $-1 < a < 0 < 1 < b$

alors, $\forall x \in [a,b], |x| \leq b,\ 0 < n + a \leq n + x$ et $0 < \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n+a}$

donc $\forall x \in [a,b], |u_n'(x)| \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$

donc $\|u_n'\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$, ce qui montre la convergence normale de la série des normes $\sum \|u_n'\|_\infty$ puisque $\dfrac{b}{n(n+a)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$

Ainsi, - La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1, +\infty[$,

- chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$,

- La série des fonctions dérivées $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle $]-1, +\infty[$,

On en déduit par le théorème de dérivation des séries de fonctions que la fonction somme S est C^1 sur tout segment $[a,b] \subset]-1, +\infty[$ et que $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'n(x)$

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b] \subset]-1, +\infty[$, S est dérivable en tout point de segment $]-1, +\infty[$ et : $\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ S'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(n+x)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}\right)}$

• $S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$

or $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=2}^{p+1}\dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p+1} - 1$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\boxed{S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = -1}$

• $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right]$

or $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{p}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\ln\dfrac{n+1}{n} - \dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{p}\left(\ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{n}\right)$

$$= \ln(p+1) - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$$

rappelons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}=\ln p+\gamma+\varepsilon_p$ avec $\lim \varepsilon_n=0$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\ln(p+1)-(\ln p+\gamma+\varepsilon_p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)-\gamma-\varepsilon_p$

En passant à la limite quand $p\to+\infty$, on obtient $\boxed{S(1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=-\gamma}$

* *

2.2 Continuité et limites aux bornes :

On considère, pour x réel la série $S(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}+\ldots\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)$

1- Montrer que la fonction S est définie et continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Calculer $S(1)$ et étudier la limite de S en $+\infty$

2- Etablir une relation liant $S(x+1)$ et $S(x)$.

3- Calculer un équivalent de $S(x)$ quand $x\to 0^+$ et quand $x\to+\infty$

SOLUTION :

1- Notons, pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}$

Soit $a>0$ quelconque :

$$\forall x\in[a,+\infty[,\ 0\leqslant u_n(x)=\frac{1}{x(x+1).....(x+n)}\leqslant\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

La série géométrique $\sum\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ converge puisque $0<\frac{1}{a}<1$, par majoration la série à terme positif $\sum u_n(x)$ converge aussi.

De plus, l'inégalité précédente entraine que : $\|u_n(\ )\|_{[a,+\infty[}^{\infty}=\displaystyle\sup_{[a,+\infty[}|u_n(x)|\leqslant\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ ce qui montre que la série de fonctionx $\sum u_n(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$. Chaque fonction $u_n(\ )$ étant continue sur cet intervalle, la fonction somme S l'est aussi.

Ceci étant vrai pour tout intervalle $[a,+\infty[,\ a>0$, la fonction S est définie en continue en tout point de l'ouvert $]0,+\infty[$

• $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(1)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{1.2.\ \ldots\ (n+1)}=\frac{1}{(n+1)!}$

donc $S(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e-1$ $\boxed{S(1)=e-1}$

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0$. Puisque la série converge uniformément sur $[1,+\infty[$, d'après le théorème de la double limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}u_n(x)\right)=0$ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}S(x)=0}$

2- $\forall x\in]0,+\infty[,\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(x+1)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ \ldots..\ (x+n+1)}=x\ u_{n+1}(x)$

donc $S(x+1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}x\ u_{n+1}(x)=x\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$

$$=x\ (S(x)-u_0(x))=x\ \left(S(x)-\frac{1}{x}\right)=x\ S(x)-1$$

$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ S(x+1)=x\ S(x)-1}$

3- D'après la question précédente, $\forall x\in]0,+\infty[,\ S(x)=\dfrac{S(x+1)+1}{x}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{S(1)+1}{x}=\dfrac{e}{x}$

$\boxed{S(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{e}{x}}$

Et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}S(x)=0$, $S(x)=\dfrac{S(x+1)+1}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$ $\boxed{S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}}$

* *

2.3 Continuité, dérivabilité, limites aux bornes :

Pour $x \in]-1,+\infty[$, on considère la série : $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$

1- Montrer que la fonction S est définie et continue sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$.
Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2- Etudier la dérivabilité et les variations de la fonction S. Que vaut $S'(0)$?

3- Montrer que pour tout entier p, $S(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.
En déduire la limite de S en $+\infty$ et un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$

4- Calculer $S(x+1) - S(x)$. En déduire la limite de S en -1^+ et un équivalent de $S(x)$ quand $x \to -1^+$

SOLUTION :

1- $\forall x \in]-1,+\infty[,\ u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$

Pour tout $a > 1, \forall x \in]-1,a], |u_n(x)| = \dfrac{|x|}{n\underbrace{(n+x)}_{\geqslant n-1}} \leqslant \dfrac{a}{n(n-1)}$

donc $\|u_n(\ )\|^{\infty}_{]-1,a]} = \sup\limits_{x\in]-1,a]} |u_n(x)| \leqslant \dfrac{a}{n(n-1)}$ et la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement et uniformément sur tout intervalle de la forme $]-1,a]$. Chaque fonction $u_n(\ )$ étant continue sur cet intervalle, la fonction somme S l'est aussi.

Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la fonction S est définie et continue en tout point de $]-1,+\infty[$.

- $\boxed{S(0) = 0}$ $\qquad S_N(1) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$ donc $\boxed{S(1) = 1}$

2- La série de fonction $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

Chaque fonction $u_n(\ )$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$

Pour tout $n \geqslant 2, \forall x \in]-1,+\infty[,\ u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$, donc $u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$ et $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$

alors $\|u_n'(\ )\|^{\infty}_{]-1,+\infty[} = \sup\limits_{x\in]-1,+\infty[} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n'(\ )$ converge normalement et uniformément sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

- $\forall x \in]-1,+\infty[,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$

La fonction S est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

- $\boxed{S'(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}}$

3- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*,\ S(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p} \right)$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*,\ S_N(p) = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p} \right) = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=p+1}^{N+p} \dfrac{1}{n}$

$$S_N(p) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{N+k}$$

En passant à la limite pour p fixé quand $N \to +\infty$, on obtient : $\boxed{S(p) = \sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n}}$

- Il s'en suit que $\lim\limits_{p\to+\infty} S(p) = +\infty$. S étant une fonction croissante, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty.}$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $p = E(x)$ la partie entière du réel x : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$

Par croissance de S , $S(p) \leqslant S(x) < S(p+1)$

$\implies \dfrac{S(p)}{\ln x} \leqslant \dfrac{S(x)}{\ln x} < \dfrac{S(p+1)}{\ln x}$

Or l'égalité $\ln(x) = \ln(p + \underbrace{(x-p)}_{0\leqslant x-p\leqslant 1})$ montre que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(p) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(p+1)$

donc $\dfrac{S(p)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{S(p)}{\ln p} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(p+1)}{\ln(x)} = 1$

Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{\ln(x)} = 1$ et $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$

4- Pour tout $x \in]-1,+\infty[, \forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N(x+1) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1+x} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n+x} =$$

$$S_N(x+1) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient : $\boxed{S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{1+x}}$

• Il s'en suit que $S(x) = S(x+1) - \dfrac{1}{1+x}$ et, puisque que S est continue au point 1,

que $\boxed{S(x) \underset{x\to-1^+}{\sim} -\dfrac{1}{1+x}}$ et que $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} S(x) = -\infty.}$

* *

2.4 Continuité, dérivabilité, limites aux bornes :

On considère, pour x réel, la série $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

1- Quel est le domaine de définition de la fonction S ?

Montrer que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $]-1,1[$.

Etudier la continuité de la fonction S

2- Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

Calculer $S'(0)$. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$

3- Dresser le tableau de variation de S sur $[0,+\infty[\cap \mathscr{D}_S$, avec les limites aux bormes.

SOLUTION :

1- Notons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

• Si $|x| < 1$, $\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et par équivalence avec la série géométrique $\sum |x|^n$ la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

• Si $|x| > 1$, $\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|^n}$ et par équivalence avec la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

• Si $x = \pm 1$, $|u_n(x)| = \frac{1}{2}$ et la série diverge grossièrement.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_S = \mathbb{R} - \{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[}$

• $\forall x \in \mathscr{D}_S - \{0\}$, $u_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = \dfrac{x^n}{x^{2n}+1} = u_n(x)$

En sommant ces égalités, on obtient la relation $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$, qui permet de réduire l'étude à l'intervalle $]-1,1[$.

• Soit $a \in]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a,a]$, $|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right| \leqslant |x|^n \leqslant a^n$

donc $\|u_n(\ )\|_{[-a,a]}^{\infty} = \sup\limits_{[-a,a]} |u_n(x)| \leqslant a^n$ et la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement et uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$. Chaque fonction $u_n(\ )$ étant continue sur cet intervalle, la fonction somme S l'est aussi.

Ceci étant valable pour tout $a \in]0,1[$, pour tout $x_0 \in]-1,1[$ on peut trouver $a \in]0,1[$ tel que $x_0 \in [-a,a]$, la fonction S est donc continue en tout point x_0 de l'ouvert $]-1,1[$

La relation $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$ montre alors que S est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$

Finalement, S est continue sur $\mathscr{D}_S$.

2- • La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$.

• Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in]-1,1[,\ u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^n x^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

• Soit $a \in]0,1[$. $\forall x \in [-a,a]$, $|u_n'(x)| = \dfrac{n|x|^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2} \leqslant n|x|^{n-1} \leqslant na^{n-1}$

donc $\|u_n'(\,)\|^{\infty}_{[-a,a]} = \sup\limits_{[-a,a]} |u_n'(x)| \leqslant n\,a^n$ (série convergente car $0<a<1$)

La série de fonctionx $\sum u_n'(\,)$ converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, on peut affirmer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et sur $]-1,1[$ puisque pour tout $x_0 \in]-1,1[$ on peut trouver $a \in]0,1[$ tel que $x_0 \in [-a,a]$,

et $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}}$

La relation $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ montre alors que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathscr{D}_S$.

• $\forall x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2} = \dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \dfrac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} + \ldots\ldots$

donc $S'(0) = 1$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S(x)-S(0)}{x-0} = S'(0) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S(x)}{x} = 1$

et $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

La relation $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ montre alors que $S(x) = S\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ puisque $\frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

3- Remarquons que pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant x^n$

donc, par sommation : $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \leqslant S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$

$\Longrightarrow \forall x \in]0,1[$, $\dfrac{x}{2(1-x)} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty}$

Et la relation $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ entraîne alors que $\lim\limits_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$

• Le calcul de la fonction dérivée, $\forall x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$ montre que S est croissante sur $[0,1[$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & 1 & & +\infty \\
\hline
 & & +\infty & \| & +\infty & \\
f(x) & & \nearrow & \| & & \searrow \\
 & 0 & & \| & & 0 \\
\hline
\end{array}$$

****

2.5 Continuité aux bornes :

Calculer les sommes suivantes : a) $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(3n+1)}$

b) $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

SOLUTION :

a) Calculer $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(3n+1)}$

Considérons la série entière S définie par :

$\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$

$\forall x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x^3)^n}{n} = -\ln(1-x^3)$

$\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \underbrace{S(0)}_{=0} + \displaystyle\int_0^x S'(t)dt = -\int_0^x \ln(1-t^3)dt$

Pour tout $x \in]-1,1[$, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1-t^3)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,x]$, on peut intégrer par parties comme suit :

$$S(x) = -[t\ln(1-t^3)]_0^x + \int_0^x t\frac{-3t^2}{1-t^3}dt = -x\ln(1-x^3) - \int_0^x \frac{3t^3}{1-t^3}dt$$

$$\frac{t^3}{1-t^3}=\frac{t^3-1+1}{1-t^3}=-1+\frac{1}{1-t^3}=-1+\frac{1}{(1-t)(1+t+t^2)}=-1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)$$
$$S(x)=-x\ln(1-x^3)-\int_0^x\left(-3+\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt$$
$$S(x)=-x\ln(1-x^3)+3x+\int_0^x\frac{1}{t-1}dt-\int_0^x\frac{t+2}{1+t+t^2}dt$$
$$=-x\ln(1-x^3)+3x+\ln|x-1|-\int_0^x\frac{t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt$$
$$S(x)=-x\ln(1-x^3)+3x+\ln(1-x)-\frac{1}{2}[\ln(t^2+t+1)]_0^x-\frac{3}{2}\int_0^x\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$S(x)=-x\ln(1-x^3)+3x+\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^x$$
$$S(x)=3x-x\ln(1-x)-x\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$
$$S(x)=3x+(1-x)\ln(1-x)-(x+\frac{1}{2})\ln(1+x+x^2)-\sqrt{3}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$
finalement,
$$\boxed{\forall x\in]-1,1[, S(x)=3x+(1-x)\ln(1-x)-(x+\frac{1}{2})\ln(1+x+x^2)-\sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

- $\forall x\in[-1,1], \left|\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}\right|\leq\frac{1}{n(3n+1)}\leq\frac{1}{3n^2}$ et donc $\left\|\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}\right\|_\infty^{[-1,1]}\leq\frac{1}{3n^2}$

Ceci montre que la série entière $\sum\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-1,1]$. Chaque fonction polynôme $x\mapsto\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$ étant continue sur $[-1,1]$, la somme S l'est aussi.

donc $A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3n+1)}=S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=3+0-\frac{3}{2}\ln(3)-\sqrt{3}\,\text{Arctan}(\sqrt{3})+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3n+1)}=3-\frac{3}{2}\ln(3)-\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}=3-\frac{3}{2}\ln(3)-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3n+1)}=3-\frac{3}{2}\ln(3)-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

b) Calculer $B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

Considérons la série entière $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{3n+1}}{3n+1}$

$\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^{3n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^3)^n=\frac{1}{1+x^3}$
$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)$$
$\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\underbrace{S(0)}_{=0}+\int_0^xS'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt$
$$S(x)=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^x$$
$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$
$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$$
Pour tout $x\in[0,1]$, la suite $\left(\frac{(-1)^nx^{3n+1}}{3n+1}\right)$ est alternée, de limite nulle, et décroissante en valeurs absolue. La série converge, et son reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par par le terme de rang $n+1$:

$\forall x\in[0,1], \left|\sum_{k=n+1}\frac{(-1)^kx^{3k+1}}{3k+1}\right|\leq\frac{|x|^{3k+4}}{3k+4}\leq\frac{1}{3k+4}$

donc $\|r_n\|_\infty^{[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left| \sum\limits_{k=n+1} \dfrac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1} \right| \leq \dfrac{1}{3k+4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty^{[0,1]} = 0$

La série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$. Chaque fonction étant continue sur $[0,1]$, la somme l'est aussi.

Donc $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim\limits_{x\to1^-} S(x) = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$$

* *

2.6 Dérivabilité et DSE :

Soit g la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

Etudier son domaine de définition $\mathscr{D}_g$.

Montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière sur $\mathscr{D}_g$.

SOLUTION :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leqslant |t|$, donc, pour tout n et tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| = \left|\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{2^n}$, ce qui montre par majoration que la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge absolument en tout point de $\mathbb{R}$

donc $\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}}$

• Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(p)}(x) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^p \sin\left(\frac{x}{2^n} + p\frac{\pi}{2}\right)$

• La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

• $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |u_n^{(p)}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2^p}\right)^n$ (série géométrique convergente)

ce qui montre que $\|u_n^{(p)}(\ )\|_\mathbb{R}^\infty \leqslant \left(\frac{1}{2^p}\right)^n$ et que la série de fonctions $\sum\limits_n u_n^{(p)}(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, g est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{np}} \sin\left(\frac{x}{2^n} + p\frac{\pi}{2}\right)}$$

• g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|g^{(p)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{np}} \sin\left(\frac{x}{2^n} + p\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2^p}} = \frac{2^p}{2^p-1} \leqslant 2$$

Les dérivées successives de la fonction g sont donc uniformément bornées sur $\mathbb{R}$. C'est une condition **suffisante** pour que g soit égale à sa série de Taylor en tout point de $\mathbb{R}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{g^{(p)}(0)}{p\,!} x^p$

Or $g^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{np}} \sin\left(p\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $g^{(p)}(0) = 0$ si p est pair

Si $p = 2m+1$ est impair, $g^{(p)}(0) = g^{(2m+1)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n(2m+1)}} \sin\left(m\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2^{2m+1}}\right)^n$

$$g^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \frac{1}{1-\frac{1}{2^{2m+1}}} = (-1)^m \frac{2^{2m+1}}{2^{2m+1}-1}$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{g^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{2^{2m+1}}{(2^{2m+1}-1)(2m+1)!} x^{2m+1}$

$$\boxed{\begin{array}{c} g \text{ est donc développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{2^{2m+1}}{(2^{2m+1}-1)(2m+1)!} x^{2m+1} \end{array}}$$

* *

2.7 Dérivabilité, DSE :

Pour $x \in J =]-1, +\infty[$, on considère la série : $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

1- Étudier les convergences simple, absolue, uniforme, normale de cette série de fonctions sur J.
Montrer que la fonction S est continue sur l'intervalle $J =]-1, +\infty[$.
Calculer $S(0)$. Étudier la limite de S en $+\infty$

2- Calculer $S(x+1) + S(x)$. En déduire la limite de S en -1^+ et un équivalent de $S(x)$ quand $x \to -1^+$

3- Etudier la dérivabilité et les variations de la fonction S. Que vaut $S'(0)$?
Etudier les variations de la fonction S. Calculer un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$

4- On rappelle que $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $\qquad$ (fonction "dzeta" de Riemann)

a) Pour tout $\alpha > 0$, on définit $Z_A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

Montrer que $\forall \alpha > 1, Z_A(x) = \frac{1 - 2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \zeta(\alpha)$

b) Montrer que les fonctions $u_n(\ )$ sont développables en série entière sur un intervalle commun qu'on précisera : $u_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(n)x^k$

En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(n)x^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_k(n)x^k \right)$, en déduire que S est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide de la fonction ζ.

5- Montrer que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur J et donner une expression pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ de la dérivée $p^{\,e}$ de S.
Quelle est la série de taylor de S. Comparer au résultat de la question précédente.

6- Montrer que $\forall x > 0,\ S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}} dt - \frac{1}{x}$

SOLUTION :

1- Pour tout $x \in J$, $|u_n(x)| = \frac{1}{n+x} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
En aucun point de J la série ne converge absolument. Il n'y a convergence normale sur aucun sous intervalle de J

• Pour tout $x \in J$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n+x}\right)$ est alternée, de limite nulle et décroissante en valeur absolue. Elle converge donc d'après le critère de Leibniz des séries alternées.

De plus, $\forall x \in J,\ |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n}$

donc $\|r_n(\ )\|_{]-1,+\infty[}^{\infty} = \sup_{x \in]-1,+\infty[} |r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et **la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge uniformément sur l'intervalle J.** Elle converge donc aussi simplement sur J. Chaque fonction $u_n(\ )$ étant continue sur cet intervalle, la fonction somme S l'est aussi.

• $\boxed{S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = 0$.

Puisque la série converge uniformément sur $]-1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0}$

2- $\forall x \in J =]-1, +\infty[$,

$$S(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \qquad \text{(par le changement d'indice } n' = n+1)$$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \frac{1}{x+1} \right) = -S(x) - \frac{1}{x+1}$$

donc $\boxed{\forall x \in J =]-1, +\infty[,\ S(x+1) + S(x) = -\frac{1}{x+1}}$

• L'égalité $S(x) = -S(x+1) - \dfrac{1}{x+1}$ et la continuité de S au point 0 entraînent que $\boxed{S(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} -\dfrac{1}{x+1}}$ et que $\boxed{\lim_{x\to -1^+} S(x) = -\infty}$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et $u_n'(x) = -\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$

donc $\forall n \geqslant 2, \forall x \in J,\ |u_n'(x)| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$

donc $\forall n \geqslant 2, \|u_n'(\ )\|^{\infty}_{]-1,+\infty[} = \sup\limits_{x\in]-1,+\infty[} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$ (terme général d'une série de Riemann convergente)

La série numérique $\sum \|u_n'(\ )\|_J^{\infty}$ converge par majoration, et la série de fonctions $\sum u_n'(\ )$ converge normalement et donc uniformément sur l'intervalle J.

Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}}$$

En particulier $\boxed{S'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}}$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie le critère des séries alternées (la suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right)$ est alternée, de limite nulle, et décroissante en valeur absolue). On sait qu'alors le signe de la somme $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ est celui de son premier terme $u_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Donc $\forall x \in]-1,+\infty[, S'(x) > 0$. $\boxed{\text{La fonction } S \text{ est strictement croissante sur } J =]-1,+\infty[.}$ Calculer un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$

• La fonction S étant croissante (et négative) sur $J =]-1,+\infty[$, $\forall x > 0,\ S(x-1) \leqslant S(x) \leqslant S(x+1)$

$\Longrightarrow\ S(x-1) + S(x) \leqslant 2S(x) \leqslant S(x+1) + S(x)$

$\Longrightarrow\ \frac{-1}{x} \leqslant 2S(x) \leqslant \frac{-1}{x+1} \Longrightarrow \boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}}$

4- a) Pour tout $\alpha > 0,\ Z_A(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^\alpha} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^\alpha}$

$$Z_A(\alpha) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}\ \zeta(\alpha)$$

• b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{x^k}{n^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n)x^k$$

avec $b_k(n) = \dfrac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}}$

ce calcul est valable si $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire si $|x| < 1$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(n)x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)x^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{x^k}{n^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{k+1}}\right)x^k \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1-2^k}{2^k}\ \zeta(k+1)x^k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1-2^k}{2^k}\ \zeta(k+1)x^k}$$

5- Pour tout indice de dérivation $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur J,

et $u_n^{(p)}(x) = (-1)^p\ p\,!\ \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^{p+1}}$ (récurrence sans difficulté)

$\forall n \geqslant 2, \forall x \in J,\ |u_n^{(p)}(x)| = p\,! \left|\dfrac{(-1)^{n+p}}{(n+x)^{p+1}}\right| \leqslant \dfrac{p\,!}{(n-1)^{p+1}}$

donc $\forall n \geqslant 2, \|u_n^{(p)}(\ )\|_{]-1,+\infty[}^{\infty} = \sup_{x\in]-1,+\infty[} |u_n^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{p\,!}{(n-1)^{p+1}}$ (terme général d'une série de Riemann convergente)

Donc la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}(\ )$ converge normalement et uniformément sur l'intervalle J.

Par application du théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]-1,+\infty[$, et que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}\,p\,!}{(n+x)^{p+1}}}$$

• $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}\,p\,!}{n^{p+1}} = (-1)^p p\,! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+1}} = (-1)^p p\,! \frac{1-2^p}{2^p}\zeta(p+1)$

La série de taylor de S est :

$$T_S(x) = S(0) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{S^{(p)}(0)}{p\,!}\,x^p = -\ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{1-2^p}{2^p}\zeta(p+1)\,x^p$$

On retrouve la mêm série qu'à la question précédente.

6- $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}dt = \int_0^{+\infty}\left(e^{-tx}\sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-t})^k\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-kt-tx}\right)dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-kt-tx}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{e^{-(k+x)t}}{k+x}\right]_0^{+\infty} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x} = S(x) + \frac{1}{x}$$

(Les calculs de convergence d'intégrale, de commutation intégrale et somme de série sont à justifier)

$$\boxed{\forall x > 0,\ S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}dt - \frac{1}{x}}$$

****

2.8 Série de fonctions 1 :

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$

a) Domaine de définition et de continuité de la fonction f ?

b) Calculer la limite et un équivalent de f en $+\infty$

c) Même question en 0

SOLUTION :

a1) - si $x \neq 0, u_n(x) \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$

La série $\sum_n u_n(x)$ est convergente par équivalence à une série de Riemann.

- si $x = 0, u_n(x) \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum_n u_n(x)$ est divergente

Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}^*$

a2) Par parité, on peut limiter le domaine d'étude de f à $]0,+\infty[$.

Soit $a > 0$. $\forall x \in [a,+\infty[, |u_n(x)| \leq \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2}$

donc $\| u_n \|_{[a,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{n^2}$ et la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Chaque fonction u_n étant continue sur $[a,+\infty[$, la somme f l'est aussi.

Si x_0 est un réel quelconque > 0, il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$.

f est continue en tout point x_0 de $\mathbf{R}_+^*$ et par parité est donc continue sur $\mathbf{R}^*$.

b) Pour tout $x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2}$

Posons $v_n(x) = \dfrac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2}$

- $\| v_n \|_{[1,+\infty[}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement et uniformément sur $[1,+\infty[$.

- $\forall n \geq 1, \lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$

- d'après le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to+\infty} v_n(x))$

c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{x^2}+n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Finalement, $\boxed{f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6x^2} \text{ quand } x \to +\infty}$

c2) Soit $x > 0$ et la fonction g définie par : $\forall t > 0, g(t) = \dfrac{1}{t + x^2t^2}$.
g est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1], g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$.
Intégrons cette inégalité :
$g(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} g(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} g(t)dt \leq \int_k^{k+1} g(k)dt = g(k)$
Sommons (fumé) pour k variant de 1 à p, puis passons à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g(k+1) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + x^2k^2} = f(x)$
donc $f(x) - g(1) \leq \displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x)$
qui donne finalement l'encadrement :
$\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt \leq f(x) \leq \int_1^{\infty} g(t)dt + g(1)$
Or $g(1) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t + x^2t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{1 + x^2t - x^2t}{t(1+x^2t)}dt$
$\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+x^2t} \right) dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+x^2t} \right) \right]_{t=1}^{t\to+\infty}$
$= \ln\left(\dfrac{1}{x^2} \right) - \ln\left(\dfrac{1}{1+x^2} \right) = \ln(1+x^2) - 2\ln(x)$
d'où

$$\ln(1+x^2) - 2\ln(x) \leq f(x) \leq \ln(1+x^2) - 2\ln(x) + \frac{1}{1+x^2}$$

Quand $x \to 0$, chacun des membres encadrants est équivalent à $-2\ln(x)$ donc, finalement :
$\boxed{f(x) \sim -2\ln(x) \text{ quand } x \to 0^+}$

* *

2.9 Équivalent aux bornes, DSE :

a est un réel de $]0,1[$ et f est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$

a) Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
Calculer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$

b) Etudier le développement en série entière de la fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{x}$

SOLUTION :

a) • Posons $u_n(x) = \dfrac{a^n}{n+x}$. Chaque u_n est définie sur $\mathbb{R} - \{-n\}$
Le domaine de définition commun à toutes les fonction $u_n, n \in \mathbb{N}$ est $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$.
Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$. Pour n assez grand ($n > -E(x) + 1$) , $n + x \geqslant 1$
alors $|u_n(x)| = \left| \dfrac{a^n}{n+x} \right| \leqslant |a|^n$ et la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
Le domaine de définition de la fonction f est donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-}$

• Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+\frac{n}{x}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \dfrac{a^n}{1+\frac{n}{x}}$
$\rightsquigarrow \forall x > 0$, $|v_n(x)| = \left| \dfrac{a^n}{1+\frac{n}{x}} \right| \leqslant |a|^n$ donc $\|v_n\|_{[0,+\infty[}^{\infty} \leqslant |a|^n$ et la série de fonctions $\sum v_n(\ )$ converge normalement et uniformément sur $[0, +\infty[$
$\rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v_n(x) = a^n$
$\rightsquigarrow$ La série $\sum a^n$ converge puisque $|a| < 1$
Par application du théorème de la limite aux bornes de l'intervalle (théorème de la double limite) on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} v_n(x) \right)$
c'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+\frac{n}{x}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

L'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{1+\frac{n}{x}}$ montre alors que $\boxed{f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x(1-a)}}$

b) $u_0(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

Pour $n \geqslant 1$, chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ u_n'(x) = -\frac{a^n}{(n+x)^2}$$

chaque u_n est donc $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et $u_n''(x) = 2\dfrac{a^n}{(n+x)^3}$

par une récurrence sans difficulté, pour tout $p \in \mathbb{N}$, chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ u_n^{(p)}(x) = p!(-1)^p\frac{a^n}{(n+x)^{p+1}}$$

Pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in]-1,+\infty[$, $n+x \geqslant n-1$ donc $\left|\dfrac{a^n}{(n+x)^{p+1}}\right| \leqslant \dfrac{|a|^n}{(n-1)^{p+1}} \leqslant |a|^n$

d'où $\forall x \in]-1,+\infty[$, $|u_n^{(p)}(x)| \leqslant p!|a|^n$ et $\|u_n^{(p)}\|_{]-1,+\infty[}^{\infty} \leqslant p!|a|^n$

Pour tout p, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalemment et donc uniformément sur $]-1,+\infty[$. Par application du téorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que f est dérivable à tout ordre $p \in \mathbb{N}$ sur $]-1,+\infty[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p!(-1)^p\frac{a^n}{(n+x)^{p+1}}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(p)}(x) = p!(-1)^p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(n+x)^{p+1}}}$$

• La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, on peut appliquar la formule de Taylor avec reste intégrale entre 0 et tout réel $x \in]-1,+\infty[$ à tout ordre p :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \forall p \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p\,!}f^{(p+1)}(t)dt$$

$T_{f,n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est la somme partielle de la série de Taylor

Soit $a \in]-1,0[$, quelconque, fixé,

$$\forall t \in [a,+\infty[,\ |f^{(p)}(t)| = \left|p\,!(-1)^p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(n+t)^{p+1}}\right| \leqslant p\,!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(n+t)^{p+1}} = p\,!\left(\frac{a}{(1+t)^{p+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a^n}{(n+t)^{p+1}}\right)$$

$$|f^{(p)}(t)| \leqslant p\,!\left(\frac{a}{(1+a)^{p+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}a^n\right) \quad \text{(car pour } n \geqslant 2 \text{ et } t \geqslant a,\ (n+t) \geqslant 2+a \geqslant 1)$$

$$|f^{(p)}(t)| \leqslant p\,!\left(\frac{a}{(1+a)^{p+1}} + \frac{a^2}{1-a}\right) = \mu(a)p\,!$$

donc $\forall x \in [a,+\infty[$, $|f(x) - T_{f,p}(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt\right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p\,!}|f^{(p+1)}(t)|dt$

(en supposant $x \geq 0$)

$$|f(x) - T_{f,p}(x)| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p\,!}\mu(a)(p+1)\,!dt = \mu(a)\left[-(x-t)^{p+1}\right]_0^x = \mu(a)x^{p+1}$$

d'où , si $|x| < 1$, $|f(x) - T_{f,p}(x)| \leqslant \mu(a)x^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (série géométrique convergente)

Calcul du même type si $x < 0$

On a ainsi montré que $\forall x \in]a,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

a étant quelconque, aussi proche de -1 qu'on veut, l'égalité est valable pour tout $x \in]-1,1[$

$\boxed{f \text{ est donc développable en série entière sur l'intervalle }]-1,1[}$

* *

2.10 Série de fonctions et équation différentielle :

1- Soit $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

Etablir une relation de récurrence sur les termes de la suite (w_n) et exprimer w_n à l'aide de factorielles.

2- Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}$: $(x^2-1)y'' + 3xy' + y = 0$

SOLUTION :

1- • $w_{n+1}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \sin^n x\,dx = \Big[\ -\cos x\ \sin^n x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2 x\ \sin^{n-1} x\,dx.$

$\quad = n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\ \sin^{n-1} x\,dx = n(w_{n-1}-w_{n+1})$

d'où $\boxed{(n+1)w_{n+1}=n\ w_{n-1}}$

• $\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}\,w_n$

Pour les indices pairs, on obtient :

$\forall p\in\mathbb{N},\ w_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p}\,w_{2p-2}=\dfrac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}\,w_{2p-4}=\dfrac{(2p-1)(2p-3)...5.3.1}{2p(2p-2)...6.4.2}\,w_0$

$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ w_{2p}=\dfrac{(2p)!}{(2^p\ p!)^2}\,w_0=\dfrac{(2p)!}{(2^p\ p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}}$

(en multipliant en haut et en bas par $2p(2p-2)...6.4.2=2^p\ p!$

et en tenant compte de l'égalité $w_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$)

• Pour les indices impairs, on obtient :

$\forall p\in\mathbb{N},\ w_{2p+1}=\dfrac{2p}{2p+1}\,w_{2p-1}=\dfrac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}\,w_{2p-3}=\dfrac{2p(2p-2)...4.2}{(2p+1)(2p-1)...5.3}\,w_1$

(en multipliant en haut et en bas par $2p(2p-2)...6.4.2=2^p\ p!$

et en tenant compte de l'égalité $w_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx=1$)

$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ w_{2p+1}=\dfrac{(2^p\ p!)^2}{(2p+1)!}}$

2- Recherchons les séries entières solutions de l'équation $\mathcal{E}$:

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et de somme S.

$\forall x\in]-R,R[,\ S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et d'après le théorème de dérivation des séries entières,

$\forall x\in]-R,R[,\ S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0,1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x)=\displaystyle\sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

S est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$\forall x\in]-R,R[,\ (x^2-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=0$

$\Longleftrightarrow \forall x\in]-R,R[,\ (x^2-1)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+3x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0$

$\Longleftrightarrow \forall x\in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=0,1,2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0$

$\Longleftrightarrow \forall x\in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n+1)a_n x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=0$

$\Longleftrightarrow \forall x\in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)^2 a_n-(n+1)(n+2)a_{n+2}]x^n=0=\sum_{n=0}^{+\infty} 0\ x^n$

$\Longleftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)^2 a_n-(n+1)(n+2)a_{n+2}=0$

(par unicité des coefficients d'une séruie entière de rayon non nul)

$\Longleftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}\,a_n$

• Pour les indices pairs, on obtient :

$\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p}\,a_{2p-2}=\dfrac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}\,a_{2p-4}=\dfrac{(2p-1)(2p-3)...5.3.1}{2p(2p-2)...6.4.2}\,a_0$

$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p}=\dfrac{(2p)!}{(2^p\ p!)^2}\,a_0}$ (en multipliant en haut et en bas par $2p(2p-2)...6.4.2=2^p\ p!$)

• Pour les indices impairs, on obtient :

$\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=\dfrac{2p}{2p+1}\,a_{2p-1}=\dfrac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}\,a_{2p-3}=\dfrac{2p(2p-2)...4.2}{(2p+1)(2p-1)...5.3}\,a_1$

$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=\dfrac{(2^p\ p!)^2}{(2p+1)!}\,a_1}$ (en multipliant haut et bas par $2p(2p-2)...6.4.2=2^p\ p!$)

• Réciproquement, dans les deux cas de parité, $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| = |x|^2$ donc les séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$ convergent absolument si $|x|<1$ et divergent grossièrement si $|x|>1$.

Leurs rayons de convergence valent 1.

• Prenons $a_0 = 1$ et sommons la série des termes pairs :

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}x^{2n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n}x^{2n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} t\,dt\right)x^{2n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\sin^{2n} t\,dt$$

posons $v_n(t) = x^{2n}\sin^{2n} t$. $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $|v_n(t)| = |x^{2n}\sin^{2n} t| \le |x|^{2n}$ donc $\|v_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]} \le |x|^{2n}$ et par majoration la série $\sum \|v_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est convergente.

La série de fonctions $\sum v_n(\ )$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t)\,dt\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,dt\right)$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\sin^{2n} t\right)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-x^2\sin^2(t)}$

Le changement de t en $\pi+t$ laisse inchangé l'élément différentiel $\dfrac{dt}{1-x^2\sin^2(t)}$, on peut faire le changement de variable $u=\tan(t)$

$\sin^2(t) = \tan^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}$ et $du = (1+\tan^2(t))dt$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-x^2\sin^2(t)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2(t))dt}{1+\tan^2(t)-x^2\tan^2(t)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2(1-x^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = \frac{2}{\pi(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\frac{1}{1-x^2}+u^2} = \frac{2}{\pi(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}\underbrace{\left[\operatorname{Arctan}(u\sqrt{1-x^2})\right]_0^{+\infty}}_{=\frac{\pi}{2}}$$

Finalement, $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

• En prenant $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{2p+1} = \dfrac{(2^p\ p!)^2}{(2p+1)!}$, un calcul que l'on justifie de la même façon donne :

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(t)dt\right)x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\sin^{2n+1}(t)dt\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}\sin^{2n+1}(t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin(t)}{1-x^2\sin^2(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin(t)}{1-x^2(1-\cos^2(t))}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin(t)}{1-x^2+x^2\cos^2(t))}dt = \int_1^0\frac{-x\,du}{1-x^2+x^2u^2} \qquad (\text{changement } u=\cos(t))$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^1\frac{du}{\frac{1-x^2}{x^2}+u^2} = \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ u\right)\right]_0^1 = \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarquons que si $x=\sin\theta$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

Puisque $x\in]-1,1[$, posons $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ de sorte que $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\cos\theta\ge 0$

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \operatorname{Arctan}(\tan\theta) = \theta = \operatorname{Arcsin}(x)$$

Finalement, $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \frac{\operatorname{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}}$

Les séries entières solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme :

$\boxed{y(x) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}}$ où A et B sont des réels quelconques.

* *

2.11 Intégrale et série : CCP

Existence et calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right)dx$

SOLUTION **:**

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(x) = \sin \frac{(10^n x)}{10^n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right| \leq \frac{1}{10^n} \text{ donc } \|u_n\|_{\mathbb{R}}^{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right| \leq \frac{1}{10^n}$$

La série géométrique $\sum(\frac{1}{10})^n$ étant une série géométrique convergente, par majoration, la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge normalement, donc converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(10^n x)}{10^n}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction $x \mapsto \frac{\sin(10^n x)}{10^n}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et la convergence étant uniforme, la fonction somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est en particulier continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$ et intégrable sur ce segment.

L'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right) dx$ est donc définie.

• Puisque la convergence est uniforme sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} u_n(x)\right) dx$

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(10^n x)}{10^n}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{-\cos(10^n x)}{10^{\,2n}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(10^n \frac{\pi}{4}) - 1}{10^{\,2n}}\right)$$

$$J = -\left((\cos(\tfrac{\pi}{4}) - 1) + \frac{\cos(\frac{5\pi}{2}) - 1}{100} + \frac{\cos(25\pi) - 1}{10000} + \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{\cos(10^n \frac{\pi}{4}) - 1}{10^{\,2n}}\right)\right)$$

or pour tout $n \geq 3$, $10^n \frac{\pi}{4}$ est un multiple entier de 2π et $\cos(10^n \frac{\pi}{4}) = 1$

donc $J = -\left((\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + \frac{-1}{100} + \frac{-1}{5000}\right) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{5000} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5051}{5000} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{J = \frac{5051}{5000} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

****

2.12 Série de fonctions 2 : (Centrale)

Etudier la fonction $f : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

Domaine de définition, continuité, équivalents aux bornes du domaine de définition.

SOLUTION :

• Notons $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$

Pour $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$ (croissance comparée puissance -exponentielle)

donc $e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

Pour $x \leq 0$, $e^{-x\sqrt{n}} \geq 1$ et la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

Donc le domaine de définition de la fonction f est $\boxed{D_f =]0, +\infty[}$

• Soit $a > 0$. $\forall x \in [a, +\infty[, 0 \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$ donc $\| u_n \|_{[a,+\infty[}^{\infty} = e^{-a\sqrt{n}}$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Chaque fonction u_n étant continue sur $[a, +\infty[$, la fonction somme f l'est aussi, comme limite uniforme d'une série de fonctions continues.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est continue sur $]0, +\infty[= D_f$

• Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$. La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ nous permet d'utiliser le théorème de la double limite pour affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

• Soit $A > 0$ et $N = E(A) + 1$.

La fonction $x \to e^{-x\sqrt{2N}}$ est décroissante et on a $\lim_{x\to 0} e^{-x\sqrt{2N}} = 1$

Donc $\exists a > 0$ tel que $e^{-a\sqrt{2N}} \geq \frac{1}{2}$, alors $\forall x \in]0, a], \forall n \in \{1, 2, ..., 2N\}, e^{-x\sqrt{n}} \geq e^{-a\sqrt{2N}} \geq \frac{1}{2}$

alors, en sommant pour n variant de 1 à $2N$,

$$\forall x \in]0, a], f(x) \geq \sum_{n=1}^{2N} e^{-x\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{2} = N \geq A$$

On a ainsi montré que $\forall x A > 0, \exists a > 0, \forall x \in]0, a], f(x) \geq A$, c'est à dire que $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

- Pour $x>0$ fixé, considérons la fonction $g_x : t \to e^{-x\sqrt{t}}$
  g_x est continue, décroissante et positive sur $]0,+\infty[$
  Soit k un entier >0 quelconque . $\forall t\in[k,k+1], g_x(k+1)\le g_x(t)\le g_x(k)$
  En intégrant ces fonctions de t sur $[k,k+1]$,
  $$\int_k^{k+1} g_x(k+1)dt \le \int_k^{k+1} g_x(t)dt \le \int_k^{k+1} g_x(k)dt$$
  $$g_x(k+1) = e^{-x\sqrt{k+1}} \le \int_k^{k+1} g_x(t)dt \le g_x(k) = e^{-x\sqrt{k}}$$
  soir aussi $\displaystyle\int_k^{k+1} g_x(t)dt \le e^{-x\sqrt{k}} \le \int_{k-1}^{k} g_x(t)dt$
  Sommons (fumé) ces inégalités, la première pour k variant de 1 à n, la seconde pour k variant de 2 à n :
  $$\int_1^{n+1} g_x(t)dt \le \sum_{k=1}^{n} e^{-x\sqrt{k}} \le \int_1^{n} g_x(t)dt + e^{-x}$$
  $$\int_1^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \le \sum_{k=1}^{n} e^{-x\sqrt{k}} \le \int_1^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt + e^{-x}$$
  La fonction g_x est continue sur $[1,+\infty[$ et intégrable car $e^{-x\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$
  Passons à la limite quand $n\to\infty$:
  $$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt \le f(x) \le \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt + e^{-x}$$
- Calculons $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt$ par le changement de variable $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$, $dt=2udu$:
  $$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = \int_1^{+\infty} 2ue^{-xu}du, \text{ puis intégrons par parties :}$$
  $$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = \int_1^{+\infty} 2ue^{-xu}du = \left[2u\frac{-e^{-xu}}{x}\right]_{u=1}^{u\to+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xu}}{x}du$$
  $$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2e^{-x}}{x} - 2\left[\frac{e^{-xu}}{x^2}\right]_{u=1}^{u\to+\infty} = \frac{2e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-x}}{x^2}$$
  Reportons dans l'inégalité :
  $$\frac{2e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-x}}{x^2} \le f(x) \le \frac{2e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-x}}{x^2} + e^{-x}$$
- Quand $x\to 0^+$, les deux termes encadrant $f(x)$ sont chacun équivalents à $\dfrac{2}{x^2}$ donc $\boxed{f(x)\sim \frac{2}{x^2} \text{ quand } x\to 0^+}$
- Par ailleurs, $\forall x>0, f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{k}} \ge \underbrace{e^{-x}}_{k=1}$, donc :
  $$e^{-x} \le f(x) \le \frac{2e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-x}}{x^2} + e^{-x}$$
  Quand $x\to+\infty$, les deux termes encadrant $f(x)$ sont chacun équivalents à e^{-x} donc $\boxed{f(x)\sim e^{-x} \text{ quand } x\to+\infty}$

****

2.13 Série de fonctions 3 :

On considère la série de fonctions $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}$

a) Etudier les convergences simple, uniforme et normale de cette série sur $\mathbb{R}$ et sur un segment quelconque.
b) Rechercher la limite et un équivalent de $S(x)$ quand $x\longrightarrow+\infty$
c) Etudier la dérivabilité de S.
d) Calculer la série de Fourier de la fonction f , $2\pi-$périodique et telle que $\forall x\in[0,2\pi[, f(x)=e^{ax}$ (a réel positif fixé)

En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2}$ et une expression de $S'(x)$

Calculer $S'(0)$ et donner la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

e) Retrouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ en approchant $S'(x)$ par un équivalent simple en $+\infty$

SOLUTION **:**

a) Par imparité, on peut restreindre l'étude à $[0,+\infty[$.

• Pour x fixé non nul, $u_n(x)=\dfrac{1}{n}\arctan\dfrac{x}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$
Donc la série de fonctions converge simplement (et absolument) sur $\mathbb{R}$.
• $\left\| u_n \right\|_{\mathbb{R}}^{\infty}=\dfrac{\pi}{2n}$ donc la série $\sum \|u_n\|_{\mathbb{R}}^{\infty}$ diverge. Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$

Pour tout $a>0$, $\left\| u_n \right\|_{[0,a]}^{\infty}=\dfrac{1}{n}\arctan\dfrac{a}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a}{n^2}$

donc la série convergence normalement sur tout segment $[0,a]$
• Il y a convergence uniforme car convergence normale sur tout segment $[0,a]$
Notons $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k}$ la somme partielle d'ordre n.

$$S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k}$$

pour tout $x\geq 2n$, $S(x)-S_n(x)\geq\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\arctan\underbrace{\frac{x}{k}}_{\geq 1}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq\frac{1}{2n}}\arctan(1)\geq n.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{8}$

donc $\left\|S-S_n\right\|_{\mathbb{R}}^{\infty}\geq\dfrac{\pi}{8}$ ne tend pas vers 0 quand $n\to+\infty$
Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ S(x)=\underbrace{\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}}_{S_1(x)}+\underbrace{\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}}_{S_2(x)}$

$S_1(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\underbrace{\arctan\frac{x}{n}}_{\geq\arctan\frac{x}{N_x}}\geq\arctan\frac{x}{N_x}.\left(\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\right)$ et $S_1(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}\leq\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}$

et
Prenons $N_x=E\left(\dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}\right)$ ($E(y)$ désignant la partie entière de y).

alors $\dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}-1<N_x\leq\dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}$ donc $\dfrac{x}{N_x}\geq\sqrt{\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{N_x}=\frac{\pi}{2}$

de plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\sim}\ln(N_x)\overset{n\to\infty}{\sim}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right)=\ln(x)-\ln(\sqrt{\ln x})=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(\ln x)\overset{n\to\infty}{\sim}\ln x$

Donc $\arctan\dfrac{x}{N_x}.\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\right)\sim\dfrac{\pi}{2}\ln(x)$

Par ailleurs $S_1(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\underbrace{\arctan\frac{x}{n}}_{\leq\frac{\pi}{2}}\leq\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}\ln(N_x)\sim\frac{\pi}{2}\ln(x)$

L'encadrement $\arctan\dfrac{x}{N_x}.\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}\right)\leq S_1(x)\leq\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\frac{1}{n}$ et les calculs d'équivalents ci-dessus permettent d'affirmer que $S_1(x)\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2}\ln(x)$

• Pour la deuxième somme, $S_2(x)=\displaystyle\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}\leq\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\frac{x}{n^2}=x\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\leq\frac{x}{N_x}$

$0\leq S_2(x)\leq\dfrac{x}{N_x}\overset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{\ln x}=o(S_1(x))$

Donc $S(x)=S_1(x)+S_2(x)\overset{x\to\infty}{\sim}S_1(x)\overset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2}\ln(x)$

$$\boxed{S(x)\overset{x\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}\ln(x)}$$

c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction $u_n:\ x\longrightarrow\dfrac{1}{n}\arctan\dfrac{x}{n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ u_n'(x)=\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\frac{1}{n^2+x^2}$$

Donc $\left\| u_n' \right\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que la somme S est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

d) $a_n(f) + ib_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)(\cos(nt) + i\sin(nt))dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{at}e^{int}dt =$

$a_n(f) + ib_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{e^{(a+in)t}}{a+in}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{e^{(2a\pi)}-1}{a+in} = \dfrac{2e^{a\pi}}{\pi}\dfrac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a+in} = \dfrac{2e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\dfrac{a-in}{a^2+n^2}$

En prenant les parties réelle et imaginaire,

$$a_n(f) = \frac{2e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\frac{a}{a^2+n^2}$$

$$b_n(f) = -\frac{2e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}$$

La fonction f est 2π- périodique et C^1 par morceaux. Par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier

$S_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big)$ converge en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme

$S_f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^+} f\right]$

En particulier en tout point de $]0, 2\pi[$ où f est continue, $S_f(x) = e^{ax}$

En $x = 0$, $\quad S_f(0) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) = \frac{1}{2}\left[\lim_{0^-} f + \lim_{0^+} f\right] = \frac{e^{2a\pi}+1}{2} = e^{a\pi}\mathrm{ch}(a\pi)$

Donc $\quad \dfrac{e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi} + \dfrac{2ae^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = e^{a\pi}\mathrm{ch}(a\pi)$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2ae^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}\left(e^{a\pi}\mathrm{ch}(a\pi) - \frac{e^{a\pi}\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\right) = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}}$$

Alors, d'après b), $\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi x)}{2x\,\mathrm{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x^2}$

S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $S'(0) = \lim\limits_{x\to 0} S'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi x)}{2x\,\mathrm{sh}(\pi x)} - \dfrac{1}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x\,\mathrm{ch}(\pi x) - \mathrm{sh}(\pi x)}{2x^2\,\mathrm{sh}(\pi x)}\right)$

or $\quad u\,\mathrm{ch}(u) - \mathrm{sh}(u) = u\left(1 + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)\right) - \left(u + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)\right) = \dfrac{u^3}{3} + o(u^3) \overset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^3}{3}$

Donc $\quad \dfrac{\pi x\,\mathrm{ch}(\pi x) - \mathrm{sh}(\pi x)}{2x^2\,\mathrm{sh}(\pi x)} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{\pi^3x^3}{3}}{2\pi x^3} \sim \dfrac{\pi^2}{6}$

et finalement, $\quad \boxed{S'(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{x\to 0} S'(x) = \frac{\pi^2}{6}}$

e) $S(x) = S(1) + \displaystyle\int_1^x S'(t)dt = S(1) + \int_1^x\left(\frac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi t)}{2t\,\mathrm{sh}(\pi t)} - \frac{1}{2t^2}\right)dt$

$$\int_1^x\left(\frac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi t)}{2t\,\mathrm{sh}(\pi t)} - \frac{1}{2t^2}\right)dt = \int_1^x\left(\frac{\pi\,(e^{\pi t}+e^{-\pi t})}{2t\,(e^{\pi t}-e^{-\pi t})} - \frac{1}{2t^2}\right)dt = \int_1^x\left(\frac{\pi\,(1+e^{-2\pi t})}{2t\,(1-e^{-2\pi t})} - \frac{1}{2t^2}\right)dt$$

$$= \int_1^x\left(\frac{\pi\,(1-e^{-2\pi t}+2e^{-2\pi t})}{2t\,(1-e^{-2\pi t})} - \frac{1}{2t^2}\right)dt = \int_1^x\frac{\pi}{2t}dt + \int_1^x\left(\frac{2\pi e^{-2\pi t}}{2t\,(1-e^{-2\pi t})}\right)dt - \int_1^x\frac{1}{2t^2}dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \int_1^x\left(\frac{\pi e^{-2\pi t}}{t\,(1-e^{-2\pi t})}\right)dt$$

La fonction $t \longrightarrow \dfrac{\pi e^{-2\pi t}}{t\,(1-e^{-2\pi t})}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\dfrac{\pi e^{-2\pi t}}{t\,(1-e^{-2\pi t})} \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi e^{-2\pi t}}{t} \leq \pi e^{-2\pi t}$

donc la fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^x\left(\frac{\pi e^{-2\pi t}}{t\,(1-e^{-2\pi t})}\right)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$

L'égalité $S(x) = S(1) + \dfrac{\pi}{2}\ln x + \underbrace{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) + \displaystyle\int_1^x\left(\frac{\pi e^{-2\pi t}}{t\,(1-e^{-2\pi t})}\right)dt}_{\text{limites finies en } +\infty}$ montre alors que $\boxed{S(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\ln x}$

* *

2.14 Série de fonctions 4 : (MINES)

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$.

On définit une suite de fonctions (f_n) par :

$$f_0 = f$$

et $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$

Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ et calculer sa somme.

SOLUTION **:**

♣ La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée :

$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \| f \|^{\infty}$

$\forall x \in [a,b], \quad |f_1(x)| = \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^x \| f \|^{\infty} dt = (x-a) \| f \|^{\infty}$

d'où $\forall x \in [a,b], \quad |f_2(x)| = \left| \int_a^x f_1(t)dt \right| \leq \int_a^x |f_1(t)|dt \leq \int_a^x \| f \|^{\infty} (t-a)dt$

$$|f_2(x)| \leq \frac{(x-a)^2}{2} \| f \|^{\infty}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier n,

$$\forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \| f \|^{\infty}$$

Ceci a été vérifié pour $n = 1, 2$

Supposons le vrai à l'ordre n : $\forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{(x-a)^n}{n!} \| f \|^{\infty}$

alors, $\forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_a^x f_n(t)dt \right| \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!} \| f \|^{\infty} dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \| f \|^{\infty}$$

Il en résulte que pour tout n, $\forall x \in [a,b], \quad |f_{n+1}(x)| \leq \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \| f \|^{\infty}$

et donc $\| f_n \|^{\infty} \leq \dfrac{(b-a)^n}{(n)!} \| f \|^{\infty}$

Or la série réelle $\sum \dfrac{(b-a)^n}{(n)!} \| f \|^{\infty}$ converge (série exponentielle)

Donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [a,b].}$

♣ Notons, $\forall x \in [a,b], S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$\forall x \in [a,b], \quad S(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x)$

$S(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$ et puisque la série converge normalemnt donc uniformément sur $[a,b]$ et donx sur tout $[a,x]$,

$$S(x) = f_0(x) + \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$S(x) = f_0(x) + \int_a^x S(t)dt$$

Chaque fonction f_n est continue sur $[a,b]$ (récurrence immédiate). Puisque la série converge uniformément, sa somme S est aussi continue sur $[a,b]$.

En posant $z(x) = \int_a^x S(t)dt$, z est dérivable sur $[a,b]$ (comme primitive d'une fonction continue) et $z'(x) = S(x)$

Donc z est solution sur $[a,b]$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = f$

La solution générale de l'équation homogène asociée (E_0) : $y' - y = 0$ a pour expression $y(x) = e^x$

Par la méthode de variation de la constante, cherchons une solution de (E) de la forme $u(x) = e^x\lambda(x)$, λ fonction inconnue.

$u'(x) = e^x\lambda(x) + e^x\lambda'(x)$, donc $e^x\lambda'(x) = f(x)$ et $\lambda'(x) = f(x)e^{-x}$

$\lambda(x) = \int_a^x f(t)e^{-t}dt + \text{cte}$

et finalement $z(x) = e^x \int_a^x f(t)e^{-t}dt + \mu e^x$

Or $z(a)=\displaystyle\int_a^a S(t)dt=0$ donc $\mu=0$ et $z(x)=e^x\displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt$

Enfin, $S(x)=z'(x)$ (car $z(x)=\displaystyle\int_a^x S(t)dt$)

$S(x)=z'(x)=e^x\displaystyle\int_a^x f(t)e^{-t}dt+e^xf(x)e^{-x}$

$$\boxed{\forall x\in[a,b],\quad S(x)=f(x)+e^x\int_a^x f(t)e^{-t}dt}$$

****

2.15 Séries de fonctions 5 :

On considère la série de fonctions $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
b) Calculer un équivalent de f en zéro.
c) Calculer un équivalent de f en $+\infty$

SOLUTION :

b) L'étude des variations des fonctions $\varphi : u\longrightarrow \ln(1+u)-u$

et $\psi : u\longrightarrow \ln(1+u)-u+\frac{u^2}{2}$

montre que : $\forall x>-1,\quad \ln(1+u)\le u$

$\forall x>0,\quad \ln(1+u)\ge u-\frac{u^2}{2}$

donc pour tout x réel et tout entier $n\ge 1$

$$\frac{x^2}{n^2}-\frac{x^4}{2n^4}\le \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\le \frac{x^2}{n^2}$$

Pour tout x réel fixé ces trois séries étant convergentes, en sommant de 1 à $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{n^2}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{x^4}{2n^4}\right)\le f(x)\le\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$x^2\dfrac{\pi^2}{6}-x^2\dfrac{\pi^4}{180}\le f(x)\le x^2\dfrac{\pi^2}{6}$ (en utilisant : $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$)

d'où il résulte que $\boxed{f(x)\sim\dfrac{\pi^2}{6}x^2 \text{ quand } x\to+\infty}$

Autre méthode

$$\forall x\neq 0,\ \frac{f(x)}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)}_{u_n(x)}$$

$\ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)\sim\dfrac{x^2}{n^2}$ quand $n\to+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}u_n(x)=\frac{1}{n^2}$

Puisque $\ln(1+u)\le u$, $0\le u_n(x)=\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)\le\dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^2}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}$

Donc $\| u_n \|_{]0,+\infty[}^{\infty}\le\dfrac{1}{n^2}$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to 0}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on retrouve le résultat déja établi.

b) Soit $x\in]0,+\infty[$, fixé.

Considérons la fonction $h : (t\longrightarrow \ln\left(1+\dfrac{x^2}{t^2}\right))$

h est définie, continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $h(t)\sim\frac{x^2}{t^2}$ en $+\infty$)

pour tout $n\ge 1$, $\forall t\in[n,n+1]$, $h(n+1)\le h(t)\le h(n)$

en intégrant, $\displaystyle\int_n^{n+1}h(n+1)dt\le\int_n^{n+1}h(t)dt\le\int_n^{n+1}h(n)dt$

$$h(n+1)\le\int_n^{n+1}h(t)dt\le h(n)$$

En sommant pour n variant de 1 à p et en passant à la limite quand $p\to+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h(n+1) \le \int_1^{+\infty} h(t)dt \le \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) = f(x)$$

et puisque $h(1) = \ln(1+x^2)$

$$f(x) - \ln(1+x^2) \le \int_1^{+\infty} h(t)dt \le f(x)$$

♣ Calculons $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)dt$:

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)dt = \int_1^{+\infty} [\ln(x^2+t^2) - 2\ln(t)]dt$$

Pour $a > 1$, $\displaystyle\int_1^a [\ln(x^2+t^2) - 2\ln(t)]dt = \int_1^a \ln(x^2+t^2)dt - 2\int_1^a \ln(t)dt$

$$= \left[\ t.\ln(x^2+t^2)\ \right]_{t=1}^{t=a} - \int_1^a \frac{2t^2}{x^2+t^2}dt - 2\left[\ t.\ln t\ \right]_{t=1}^{t=a} + 2\int_1^a dt$$

$$= a.\ln(x^2+a^2) - \ln(x^2+1) - 2\int_1^a \frac{t^2+x^2-x^2}{x^2+t^2}dt - 2a\ln a + 2a - 2$$

$$= a.\ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) - 2(a-1) + 2x^2\int_1^a \frac{1}{x^2+t^2}dt + 2a - 2$$

$$= a.\ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) + 2x^2\frac{1}{x}\left[\ \mathrm{Arctan}\frac{t}{x}\ \right]_{t=1}^{t=a}$$

$$= a.\ln\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right) - \ln(x^2+1) + 2x\left(\mathrm{Arctan}\frac{a}{x} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}\right)$$

Passons à la limite pour x fixé quand $a \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt = 2x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}\right) - \ln(x^2+1)$$

$$= 2x\mathrm{Arctan}x - \ln(x^2+1)$$

♣ Reportons ce résultat dans l'encadrement obtenu plus haut :

$$\int_1^{+\infty} h(t)dt \le f(x) \le \int_1^{+\infty} h(t)dt + \ln(1+x^2)$$

on obtient : $2x\mathrm{Arctan}x - \ln(x^2+1) \le f(x) \le 2x\mathrm{Arctan}x$

Quand $x \to +\infty$, $\quad \ln(x^2+1) \sim 2\ln x = o(x) \quad$ et $\quad \lim(\mathrm{Arctan}x) = \frac{\pi}{2}$

Donc $\quad \boxed{f(x) \sim \dfrac{\pi x}{2} \quad \text{quand } x \to +\infty}$

****

2.16 *DSF d'une série de fonctions périodique **Mines - 493**

Soit $a > 0$, x réel. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

b) Montrer que f est développable en série de Fourier.

c) En utilisant un logiciel de calcul formel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2+t^2}$

d) En déduire les coefficients de Fourier de f.

e) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

SOLUTION :

a) • Notons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et x réel, $u_n(x) = \dfrac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$

Chaque fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ car $a^2+(x-2n\pi)^2 \ge a^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) \overset{n\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2\pi^2}$, donc la série double $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x+2\pi-2n\pi)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x+-2(n-1)\pi)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_{n-1}(x)$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) = f(x) \qquad \text{(par décalage d'indice)}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc } 2\pi\text{-périodique.}}$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(-x-2n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x-2(-n)\pi)^2}$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x-2m\pi)^2} = f(x) \quad \text{(par changement d'indice } m=-n \text{)}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$

b) • Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $[b,c]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$ et n_0 assez grand pour que $c-2n_0\pi<0$

$\forall x \in [b,c], \forall n \geq n_0,\ x-2n\pi \leq c-2n\pi \leq c-2n_0\pi < 0$

$$\Longrightarrow (x-2n\pi)^2 \geq (c-2n\pi)^2 > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} \leq \frac{1}{a^2+(c-2n\pi)^2}$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in[b,c]} \left| \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} \right| = \|u_n\|_{[b,c]}^{\infty} \leq \frac{1}{a^2+(c-2n\pi)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2\pi^2}$$

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[b,c]\subset\mathbb{R}$. Chaque fonction u_n étant continue, la fonction somme, $\sum_{n\geq 0} u_n$, est continue sur tout segment et donc continue en tout point de $\mathbb{R}$

• $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall x\in\mathbb{R},\ u_n'(x) = \dfrac{-2(x-2n\pi)}{(a^2+(x-2n\pi)^2)^2}$

$\forall x \in [b,c], \forall n \geq n_0,\ |u_n'(x)| \leq \dfrac{2(2n-b\pi)}{(a^2+(c-2n\pi)^2)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^3\pi^4}$

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[b,c]\subset\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction somme, $\sum_{n\geq 0} u_n$, est de classe C^1 sur tout segment et donc sur $\mathbb{R}$.

• Un raisonnement et des majorations du même type que ci-dessus permettent de montrer que fonction $\sum_{n\leq 0} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f, somme des deux précédentes, est elle aussi C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n'(x) = -2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x-2n\pi}{(a^2+(x-2n\pi)^2)^2}$$

La fonction f est alors 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier est définie, converge en tout point de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$. (th. de Dirichlet)

c) Avec MAPLE :

int(cos(t)/(b2+t**2),t=0..infinity); simplify(");**

donne pour résultat après simplification : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2+t^2} = \frac{\pi e^{-b}}{2b}$

d) La fonction f est paire, donc pour tout n, $b_n(f)=0$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(x-2k\pi)^2} \right) \cos(nt)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\cos(nt) \right) dt$$

Tout comme la série $\sum u_k(t)$, la série $\sum u_k(t).\cos(nt)$ converge normalement et uniformément sur le segment $[0,2\pi]$. Donc $= \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)\cos(nt) \right) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} u_k(t)\cos(nt)dt \right)$

d'où $a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2k\pi)^2} dt \right)$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-2k\pi}^{-2k\pi+2\pi} \frac{\cos(n(u+2k\pi))}{a^2+u^2} du \right) \quad \text{(par le changement de variable } u=t-2k\pi \text{)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nu)}{a^2+u^2} du \quad \text{(regroupement de termes par la relation de Chasles)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\cos(v)}{n^2a^2+v^2} dv \quad \text{(par le changement de variable } nu=v \text{)}$$

$$= \frac{n}{2\pi} \frac{\pi e^{-na}}{2na} = \frac{e^{-na}}{4a} \quad \text{(question précédente, avec } b=na)$$

La série de Fourier de f est : $S_f(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nt)$

$$\begin{aligned}
S_f(x) &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}\cos(nx) \\
&= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}e^{-inx}\right) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-a-ix})^n\right) \\
&= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)}}{1-e^{-(a+ix)}}\right) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)}(1-e^{-a+ix})}{(1-e^{-a-ix})(1-e^{-a+ix})}\right) \\
&= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-(a+ix)} - e^{-2a}}{1-e^{-a-ix}-e^{-a+ix}+e^{-2a}}\right) \\
&= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} Re\left(\frac{e^{-a}(\cos x + i\sin x) - e^{-2a}}{1-2e^{-a}\cos x + e^{-2a}}\right) \\
&= \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} \times \frac{e^{-a}\cos x - e^{-2a}}{1-2e^{-a}\cos x + e^{-2a}} \\
&= \frac{2-3e^{-a}\cos x + e^{-2a}}{4a(1-2e^{-a}\cos x + e^{-2a})}
\end{aligned}$$

f étant égale en tout point à la somme de sa série de Fourier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2-3e^{-a}\cos x + e^{-2a}}{4a(1-2e^{-a}\cos x + e^{-2a})}}$$

****

3 Théorème de Weierstrass :

3.1 $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$:

1-a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ telle que :

$$\forall k \in \{0,1,2,...,n\},\ \int_a^b t^k f(t)dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur l'ouvert $]a,b[$.

b) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0.$

Montrer que f est la fonction nulle.

2- Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(xt)dt = 0.$

Montrer que f est nulle.

SOLUTION :

1- a) Supposons que f admette moins de n zeros sur $]a,b[$, qu'on notera $x_1, x_2, ..., x_p,\ \ p \le n$, rangés par ordre croissant.

f garde un signe constant sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (sinon, étant continue, elle s'annulerait entre x_i et x_{i+1} en vertu du théorème des valeurs intermédiaires)

De ses racines, ne retenons que celles où f s'annule en changeant de signe, que nous renumérotons en $x_1, x_2, ..., x_q,\ \ q \le p \le n$

alors la fonction produit $x \longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, puisque les changements de signe en traversant x_i de la fonction f sont compensés par ceux du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)$

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_a^b t^k f(t)dt = 0$$

donc $\displaystyle\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_q)f(x)dx = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction intégrande est continue, non identiquement nulle et de signe constant sur le segment $[a,b]$.

Donc f admet au moins $n+1$ zeros sur $]a,b[$.

b) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$.

alors, par combinaison linéaire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$.

D'après le théorème de Weïerstrass, il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty^{[a,b]} = 0$ et pour tout n, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)f(t)dt = 0$.

La suite de fonctions $(P_n(t)f(t))$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f^2.

(puisque $\|P_n f - f^2\|_\infty^{[a,b]} \leq \|f\|_\infty^{[a,b]}.\|P_n - f\|_\infty^{[a,b]} \to 0$ quand $n \to +\infty$)

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b P_n(t)f(t)dt\right) = \int_a^b f^2(t)dt = 0$.

f^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle sur $[a,b]$, et f aussi.

2- Prolongeons f par parité à $[-\pi, 0]$, puis à $\mathbb{R}$ par périodicité.

f est alors 2π-périodique continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge alors en tout point x de $\mathbb{R}$ et a pour somme $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ S_f(x) = f(x)$

Les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls car f est paire, et $\forall n \in \mathbb{R},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$ par hypothèse.

Tous les coefficients de Fourier de f sont donc nuls et $S_f(x) = 0$.

D'où $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = S_f(x) = 0$.

* *

3.2 Suites de polynômes :

Soit n un entier fixé, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.

a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré $\leq n$ et que chaque suite de coefficients de (P_k) converge vers le coefficient correspondant de $f(X)$.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

c) Que peut on en déduire sur les degrés si une suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $R[X]$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f non polynomiale ? Que se passe-t-il dans a) si au lieu de supposer la convergence simple sur $[a,b]$ on suppose que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, converge seulement en $n+1$ points de $[a,b]$?

SOLUTION :

a) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Chaque P_k se décompose sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P_k(X) = \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}X^j = a_{k,0} + a_{k,1}X + a_{k,2}X^2 + ... + a_{k,n}X^n$$

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$.

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ points distincts du segment $[a,b]$.

$a_{k,0} + a_{k,1}x_0 + a_{k,2}x_0^2 + ... + a_{k,n}x_0^n = P_k(x_0)$
$a_{k,0} + a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_1^2 + ... + a_{k,n}x_1^n = P_k(x_1)$
....
$a_{k,0} + a_{k,1}x_n + a_{k,2}x_n^2 + ... + a_{k,n}x_n^n = P_k(x_n)$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}}_{W} . \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \cdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(x_0) \\ P_k(x_1) \\ \cdots \\ P_k(x_n) \end{pmatrix}$$

La matrice W a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \displaystyle\prod_{i<j}(x_j - x_i)$

C'est un déterminant de Van de Monde qui n'est pas nul car les x_j sont deux à deux distincts.

Donc $\begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \dots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = W^{-1}. \begin{pmatrix} P_k(x_0) \\ P_k(x_1) \\ \dots \\ P_k(x_n) \end{pmatrix}$ et chaque coefficient $a_{k,j}$ de $P_k(X)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $P_k(x_0), P_k(x_1), \dots, P_k(x_n)$ avec des coefficients fixes, indépendants de k : $a_{k,j} = \sum_{i=0}^{n} W_{i,j}^{-1} P_k(x_i)$

d'après l'hypothèse de convergence simple sur $[a, b]$, pour chaque i, $\lim_{k \to +\infty} P_k(x_i) = f(x_i)$,

donc pour tout j, $\lim_{k \to +\infty} a_{k,j} = \sum_{i=0}^{n} W_{i,j}^{-1} f(x_i)$. Notons cette limite b_j : $\lim_{k \to +\infty} a_{k,j} = b_j$.

Pour tout $x \in [a, b]$, $\quad P_k(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} x^j = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 + ... + a_{k,n}x^n$

donc $f(x) = \lim_{k \to +\infty} P_k(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n = Q(x)$ où $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$

Ainsi, f est bien une fonction polynomiale de degré $\leq n$ et chaque suite $(a_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ de coefficients de (P_k) converge vers le coefficient correspondant b_j de $f(X)$.

b) $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, sur lequel toutes les normes sont équivalentes. En particulier la norme uniforme sur $[a, b]$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, les $n+1$ suites numériques composantes de la suite vectorielle (P_k) convergent (pour tout j, $\lim_{k \to +\infty} a_{k,j} = b_j$). Donc la suite (P_k) converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}_n[X], \| \|_{[a,b]}^{\infty})$ c'est à dire converge uniformément sur $[a, b]$.

c) Si une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f non polynomiale, alosr ces polynômes ne peuvent appartenir tous à un même $\mathbb{R}_n[X]$, donc la suite de leurs degrés n'est par bornée.

La démonstration faite en a) n'utilise que la convergence de la suite (P_k) en $n + 1$ points distincts.

Les conclusions de a) et b) restent valables si au lieu de supposer la convergence simple sur $[a, b]$ on suppose seulement que la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, converge en $n + 1$ points distints de $[a, b]$.

* *

3.3 Espaces de fonctions :

$I = [0, +\infty[$. $B(I, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme :
$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$

1- Montrer que si une suite de fonctions (f_n) de $B(I, \mathbb{C})$ converge uniformément sur I vers une fonction g, alors g est bornée sur I.

Ce résultat est il encore vrai si on ne suppose pas que la convergence est uniforme ?

2- Montrer que l'ensemble F des fonctions continues sur $I = [0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$ est un sous espace vectoriel de $B(I, \mathbb{C})$ et qu'il est fermé.

SOLUTION :

* *

4 Intégrale et série

4.1 Intégrale et série 1 :

Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

SOLUTION :

• La fonction $\quad f : \ x \longrightarrow \frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x}$ est continue sur $]0, 1]$.

$\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ donc $\lim_{0^+} f = 1$ et on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0, 1]$ en posant $f(0) = 1$.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$ est alors bien définie comme étant celle d'une fonction continue sur un segment.

- $\forall n\geq 2,\ \dfrac{1}{n^n}\leq\dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^n}$ est convergente par majoration par une série de Riemannn convergente.
- $\forall x\in]0,1],\ \dfrac{1}{x^x}=e^{-x\ln x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$

  Définissons alors pour $n\geq 0$ et $x\in]0,1],\ \ u_n(x)=\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$
  - chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]0,1]$,
  - la série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme la fonction f
  - Montrons enfin que la série numérique $\sum\int_0^1|u_n(x)|dx$ converge.

  $$\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\ I_{n,p}=\int_0^1 x^p(\ln x)^n dx=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^n\right]_0^1-\int_0^1 n\frac{x^p}{p+1}(\ln x)^{n-1}dx$$
  $$\Longrightarrow\quad I_{n,p}=-\frac{n}{p+1}I_{n-1,p}$$
  d'où $$I_{n,n}=-\frac{n}{n+1}I_{n-1,n}=\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+1)}I_{n-2,n}=.....=(-1)^n\frac{n(n-1).....2.1}{(n+1)(n+1)...(n+1)}I_{0,n}=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}I_{0,n}$$
  avec $$I_{0,n}=\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$
  Ainsi, $$\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n,n}=\int_0^1(x\ln x)^n dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$
  Donc $\displaystyle\int_0^1|u_n(x)|dx=\frac{n!}{(n+1)^{n+1}n!}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\leq\frac{1}{(n+1)^2}$ et la série $\sum\int_0^1|u_n(x)|dx$ est convergente.

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions :
$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$$
donc $$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{(-x\ln x)^n}{n!}dx\right)$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}\quad\text{(par le changement d'indice } m=n+1)$$
Finalement, $$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}}$$

****

4.2 Intégrale et série 2 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x}dx=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n}{(n+1)^2}=2\zeta(3)$ où $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

et $\zeta(s)$ est la série de Riemann $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$

SOLUTION :

- $\forall x\in[0,1[,\ \ln(1-x)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_0=0$ et $\forall n\geq 1,\ a_n=\frac{1}{n}$

  $$\forall x\in[0,1[,\ \ln^2(1-x)=-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}c_nx^n$$
  avec $c_0=a_0.a_0=0$

  $c_1=a_0.a_1+a_1.a_0=0$

  $\forall n\geq 2,\ c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k.a_{n-k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}$ (car $a_0=0$)

  or $\dfrac{1}{x(n-x)}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{n-x}\right)$

  donc $$\forall n\geq 2,\ c_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+...+\frac{1}{2}+1\right)$$
  $$\forall n\geq 2,\ c_n=\frac{2S_{n-1}}{n}$$

$\forall x \in [0,1[,\ \ln^2(1-x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2S_{n-1}}{n} x^n$ et $\frac{\ln^2(1-x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2S_{n-1}}{n} x^{n-1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{S_n}{n+1} x^n}_{u_n(x)}$

$\forall n,\ \int_0^1 |u_n(x)|dx = \left[\frac{S_n}{(n+1)^2} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{S_n}{(n+1)^2} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

Par le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, on peut alors écrire :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)$$

donc $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{(n+1)^2}}$

• Par le changement de variable $t = 1-x$, $\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t} dt$

$\forall t \in [0,1[,\ \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ donc $\forall t \in]0,1[,\ \frac{\ln^2 t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln^2 t$

En intégrant par parties entre $\varepsilon > 0$ et 1, puis en passant à la limita quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient :

$$\int_0^1 t^n \ln^2 t dt = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln^2 t\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{t^n}{n+1} \ln t dt$$

$$= -2\underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \ln t\right]_0^1}_{=0} + 2\int_0^1 \frac{t^n}{(n+1)^2} dt = \frac{2}{(n+1)^3}$$

Puisque la série $\sum \left(\int_0^1 |t^n \ln^2 t| dt\right) = \sum \frac{2}{(n+1)^3}$ converge (série de Riemann) , on peut à nouveau appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions et écrire :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln^2 t\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^n \ln^2 t dt\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 2\,\zeta(3)$$

donc $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t} dt = 2\zeta(3)}$

• Enfin, $\forall n \geq 1,\ \frac{S_n}{(n+1)^2} = \frac{S_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{S_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}$

donc $\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{(n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{S_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$

$= 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{S_n}{n^2} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ (en ajoutant et retranchant 2)

$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx$

$\Longrightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n^2}}$

* *

4.3 Intégrale et série 3 :

Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} dx$

SOLUTION :

• La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ puisque $\mathrm{sh}(x) \overset{x\to 0}{\sim} x$

Par ailleurs $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{e^x} \overset{x\to+\infty}{=} o(e^{-\frac{1}{2}x})$

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, f l'est aussi par majoration.

• $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = 2xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx}$

$$f(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n(x)=xe^{-(2n+1)x}$

- chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

- La série de fonctions $\sum u_n(\ )$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ et a pour somme la fonction f,

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx=\int_0^{+\infty}xe^{-(2n+1)x}dx=\underbrace{\left[x\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}}_{=0}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}dx$

$$\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx=\left[\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx\right)$ converge

d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle quelconque, on en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|u_n(x)|dx\right)$ c'est à dire que :

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{\pi^2}{4}$ et par parité de la fonction f, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{sh}(x)}dx=\frac{\pi^2}{2}}$

$$\boxed{\forall r \in]-1,1[, \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta = 2\pi f(0,0)}$$

$$A \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad B$$

$x \xrightarrow[n\to+\infty]{b} y$