3 Séries entières ; solutions **PSI* - 2012-2013**

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

1 Rayon de convergence et sommation de séries entières :

1.1 Etudes de convergence et de sommes de séries :

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1- $\sum \dfrac{x^n}{n^n}$

2- $\sum \dbinom{2n}{n} x^{2n}$

3- $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \, x^n$ où π_n désigne la n^e décimale du nombre π

$\pi_0 = 3, \ \pi_1 = 1, \ \pi_2 = 4, \ \pi_3 = 1, \ \pi_4 = 5, \ \pi_5 = 9$ etc ......

Donner 2 valeurs du réel x pour lesquelles on peut calculer exactement $S(x)$.

4- Rayon de convergence et calcul de la somme $S_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{1+2+3+...+n}$

5- Rayon de convergence et calcul de la somme $S_5(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, x^n$ où $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n}$

6- Rayon de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n} x^n$

7- Rayon de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$

8- Domaine de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n!} x^n$

9- Domaine de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} x^n$ et $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n} x^n$

10- Domaine de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!+2!)}{(n+2)!} x^n$

SOLUTIONS :

1- Notons $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \dfrac{1}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n.e} \quad \text{(puisque } \lim_{n\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e\text{)}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et $R = +\infty$.

2- Pour $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ notons $u_n = \dbinom{2n}{n} x^{2n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} x^2 = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} x^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} x^2 = \frac{2(2n+1)}{n+1} x^2 \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 4x^2$$

Si $4x^2 > 1$ $(\iff |x| > \frac{1}{2})$ la série $\sum u_n$ diverge, d'après le critère de d'Alembert.

Si $4x^2 < 1$ $(\iff |x| < \frac{1}{2})$ la série $\sum u_n$ converge, d'après le critère de d'Alembert.

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$

3- $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \pi_n \leq 9$, donc, pour tout x, $|\pi_n x^n| \leq 9|x|^n$

Cette dernière série majorante est une série géométrique de raison $|x|$ qui converge si $|x| < 1$. Par majoration, la série $\sum \pi_n x^n$ converge aussi lorsque $|x| < 1$. Donc $R \geq 1$.

Pour $x = 1$, la série entière est la série $\sum \pi_n$, qui diverge grossièrement puisque la suite (π_n) ne converge pas vers 0, le nombre π ayant un nombre infini de décimales non nulles. Donc $R \leq 1$.

Et finalement, $R = 1$.

• Pour $x = 0, \ S(0) = \pi_0 = 3$.

Pour $x = \frac{1}{10}, \ S(\frac{1}{10}) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi_n}{10^n} = \pi$

4- $\forall n\in\mathbb{N},\ 1+2+3+..+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ et $R=\frac{1}{1}=1$.

La série converge absolument aux bornes -1 et 1.

- $\forall x\in[-1,1],\ S_4(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)$

- Si $x=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{p+1}$ et en passant à la limite quand $p\to+\infty$, $S(1)=2$.

- Si $x\in[-1,1[$, on peut séparer la série en **deux séries convergentes** :

$S_4(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{2}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (chgmnt d'indice $n'=n+1$ dans la 2^e somme)

$\forall x\in[-1,1[,\ S_4(x)=-2\ln(1-x)-\dfrac{2}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)=\dfrac{2(1-x)}{x}\ln(1-x)+2$

5- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}=1+\dfrac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})}\quad\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad 1$

donc $R=\frac{1}{1}=1$. (critère de d'Alembert)

- Considérons la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=1$

et la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par : $b_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=\frac{1}{n}$

Leur produite de Cauchy est la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} c_0=a_0b_0=0\\ c_1=a_0b_1+a_1b_0=1\\ c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=1+\frac{1}{2}\\ \vdots\\ \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{a_{n-k}}_{=1}\underbrace{b_k}_{=\frac{1}{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=u_n \end{cases}$$

La série entière $\sum a_nx_n$ a pour rayon de convergence 1, et $\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

La série entière $\sum b_nx_n$ a pour rayon de convergence 1, et $\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

d'après le théorème sur le produit de Cauchy de séries entières, on peut affirmer que :

$\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

donc $\forall x\in]-1,1[,\ S_5(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

6- $S(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$

7 - $R=+\infty$ (immédiat par le critère de d'Alembert)

- Si $x>0$, $x=(\sqrt{x})^2$ et $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!}=\mathrm{ch}(\sqrt{x})$

- Si $x<0$, $x=-(\sqrt{-x})^2$ et $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left((-\sqrt{-x})^2\right)^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!}=\cos(\sqrt{-x})$

8- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\cos(n\theta)}{n!}x^n\right|\leq\dfrac{|x|^n}{n!}$ donc la série converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ S(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{n!}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{i\theta}x)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-i\theta}x)^n}{n!}$

(les deux séries convergent)

$S(x)=\dfrac{1}{2}(\exp(xe^{i\theta})+\exp(xe^{-i\theta}))=\dfrac{1}{2}(e^{x\cos\theta+ix\sin\theta}+e^{x\cos\theta-ix\sin\theta})$

$S(x)=\dfrac{e^{x\cos\theta}}{2}(e^{ix\sin\theta}+e^{-ix\sin\theta})=e^{x\cos\theta}\cos(e^{x\sin\theta})$

Finalement, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n=e^{x\cos\theta}\cos(e^{x\sin\theta})}$

Remarque : ce même calcul montre aussi que :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n=e^{x\cos\theta}\sin(e^{x\sin\theta})}$$

9- • La série dérivée, $\sum\sin(n\theta)x^{n-1}$, a un rayon de convergence ≥ 1 puisque $\left|\sin(n\theta)x^{n-1}\right|\leq|x|^{n-1}$

Mais elle ne converge pas pour $x=1$ (divergence grossière sauf si $n=0[\pi]$). Donc son rayon de convergence est 1.

Il en va de même de la série de départ.

$$\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}x^{n-1}$$

$$S'(x)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{i\theta})^{n-1}-e^{-i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{-i\theta})^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{i\theta})^{n}-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-i\theta})^{n}\right)$$

$$S'(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}-\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}\right)$$

$$S'(x)=\frac{1}{2i}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{x^2-2x\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt=0+\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_0^x$$

$$S(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$S(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)$$

On peut se ramener au cas où $\theta\in]-\pi,\pi[$ et, par imparité, au cas où $\theta\in[0,\pi[$.

Alors $\frac{\pi}{2}-\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\operatorname{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$

et finalement, $S(x)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}x^n=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\frac{\pi}{2}-\theta}$$

• Calcul analogue pour l'autre série :

$$\forall x\in]-1,1[,\ T'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}x^{n-1}$$

$$T'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{i\theta})^{n-1}+e^{-i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{-i\theta})^{n-1}\right)$$

$$T'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}+\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}\right)$$

$$T'(x)=\frac{1}{2}\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2x}{x^2-2x\cos\theta+1}=\frac{\cos\theta-x}{x^2-2x\cos\theta+1}$$

$$\forall x\in]-1,1[,\ T(x)=T(0)+\int_0^x T'(t)dt=0-\frac{1}{2}\left[\ln(t^2-2t\cos\theta+1)\right]_0^x$$

$$T(x)=-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n=-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)}$$

10- $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!+2!)}{(n+2)!}x^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!+2}{(n+3)!}\times\frac{(n+2)!}{(n!+2!)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\qquad\text{Donc }\boxed{R=\tfrac{1}{1}=1}$$

• $\forall x\in]-1,1[,S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)x^n+\frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}+\frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}+\frac{2}{x^2}(e^x-1-x)$$

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{2}{x^2}(e^x-1-x)$$
$$S(x)=\frac{-1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{x^2}(-\ln(1-x)-x)+\frac{2}{x^2}(e^x-1-x)$$
$$\boxed{S(x)=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}(e^x-1-x)}$$

1.2 Rayons de convergence :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_a fini non nul.
Que peut on dire des rayons de convergence des séries entières suivantes :
$\sum a_n x^{2n}$, $\sum a_n^2 x^n$, $\sum a_{2n} x^n$, $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$, $\sum \frac{1}{a_n}x^n$ (en supposant de plus que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\neq 0$)

SOLUTION **:**

• $a_n x^{2n}=a_n(x^2)^n$, série qui converge absolument si $|x^2|<R$ ($\Longleftrightarrow |x|<\sqrt{R}$) , et diverge grossièrement si $|x^2|>R$ ($\Longleftrightarrow |x|>\sqrt{R}$)
donc $\boxed{R_1=\sqrt{R}}$

• Soit $x>0$. $a_n^2x^n=(a_n\sqrt{|x|})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\sqrt{|x|}<R$ donc $R_2\geqslant R$ d'après le lemme d'Abel.
$a_n^2x^n=(a_n\sqrt{|x|})^2$ ne tend pas vers 0 si $\sqrt{|x|}>R$ (divergence grossière de la série)
donc $\boxed{R_2=R^2}$

• Soit $x>0$. $a_{2n}x^n=a_{2n}(\sqrt{|x|})^{2n}$, série qui converge si $\sqrt{|x|}<R$, comme extraite d'une série $\sum a_n x^n$ absolument coonvergente.
donc $\boxed{R_3\geqslant R^2}$

• Soit $0<r<R$. La série $\sum a_n r^n$ converge, donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée (car convergente de limite nulle)
$\exists M\in\mathbb{R}_+,\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n r^n|\leqslant M$ donc $|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$
alors, $\forall x\in\mathbb{R},\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n!}\left|\frac{x}{r}\right|^n$ et cette dernière série exponentielle converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
donc $\boxed{R_4=+\infty}$

• Si $0<|x|<R$, la série $\sum a_n|x|^n$ converge, donc $\lim a_n|x|^n=0$, donc la suite $\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ ne converge pas. Ceci lorsque $0<|x|<R$, c'est à dire si $\frac{1}{R}<\frac{1}{|x|}$
donc $\boxed{R_5\leqslant\frac{1}{R}}$

2 Convergence et sommation de séries entières :

2.1 Equation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=0$

SOLUTION :

La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=0$ a pour rayon de convergence 1 (critère de d'Alembert). Elle diverge grossièrement en 1 et -1.

Rappelons que : $\forall x\in]-1,1[,\ \displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ et, par dérivation (justifier...) :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0,1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad\text{et}$$
$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0,1,2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

Décomposons le polynôme $3X^2+9X+4$ sur la base $(1,\ X+1,\ (X+1)(X+2))$ de $\mathbb{R}_2[X]$:
$3X^2+9X+4=3(X+1)(X+2)-2$

Donc, si $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big((3(n+1)(n+2)-2\Big)x^n=3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=\frac{6}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1-x)}=\frac{6-2(1-x)^2}{(1-x)^3}=\frac{-2x^2+4x+4}{(1-x)^3}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=0 \iff |x|<1$ et $-2x^2+4x+4=0$

$$\iff \quad |x|<1 \text{ et } x^2-2x-2=0$$
$$\iff \quad |x|<1 \text{ et } x=1+\sqrt{3} \text{ ou } x=1-\sqrt{3}$$

Finalement, $\boxed{\text{l'équation } \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+9n+4)x^n=0 \quad \text{a pour unique solution} \quad 1-\sqrt{3}.}$

2.2 Calcul d'une somme :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}$$

1- A l'aide de MAPLE, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n)

2- En introduisant la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$, calculer une expression de u_n pour n entier quelconque.

Vérifier avec MAPLE que sur les 10 premier termes de la suite, la formule obtenue donne le même résultat que les 10 termes déja calculés.

SOLUTION **:**

1- >**u[0]:=1;**
for n from 0 to 9 do u[n+1]:=add(u[k]*u[n-k],k=0..n) od;
on obtient en particulier :

$u_1=1$
$u_2=2$
$u_3=5$
$u_4=14$ .... $u_{10}=16796$

2- Supposons que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ ait un rayon de convergence R non nul et posons :

$$\forall x\in]-R,R[,\ S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$$

Soit $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ la série entière produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ par elle même :

$$\begin{cases} c_0=u_0u_0=1 \\ c_1=u_0u_1+u_1u_0=2 \\ c_2=u_0u_2+u_1u_1+u_2u_0=5 \\ \dots \\ \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}=u_{n+1} \end{cases}$$

On sait que la série produit a un rayon de convergence supérieur ou égal au minimum des rayons des deux séries entières dont elle est le produit, et que si $|x|$ est strictement inférieur à ce plus petit rayon, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^n\right)$$

Donc, $\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n\right)^2$

$\implies \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n\right)^2=S^2(x)$

$\implies \forall x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^{n+1}=xS^2(x)$ (en multipliant par x)

$\implies \forall x\in]-R,R[,\ S(x)-u_0=xS^2(x)$

$\implies \forall x\in]-R,R[,\ xS^2(x)-S(x)+1=0$

Pour tout $\forall x\in]-R,R[,\ S(x)$ est racine du polynôme du second degré $xY^2-Y+1=0$

Son discriminant, $\Delta=1-4x$ est positif si et seulement si $x\leq\dfrac{1}{4}$

donc, $\forall x\in]-R,R[\cap]-\infty,\frac{1}{4}]-\{0\},\ S(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $S(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Il se peut à priori que pour certains x, on ait $S(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$

et que pour d'autres, on ait $S(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Mais alors la fonction S serait discontinue.

donc, soit $\forall x \in]-R,R[\cap]-\infty,\frac{1}{4}]-\{0\},\ S(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$,

soit $\forall x \in]-R,R[\cap]-\infty,\frac{1}{4}]-\{0\},\ S(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

Or une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence et en particulier au point 0.

La première formule, qui entraine que $S(x) \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ est donc impossible.

Donc, $\boxed{\forall x \in]-R,R[\cap]-\infty,\frac{1}{4}]-\{0\},\ S(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$

• Développons alors en série entière la fonction obtenue :

on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in]-1,1[,\ (1+u)^{\alpha}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n$

donc $\forall u \in]-1,1[,\ \sqrt{1+u}=(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}u^n$

$\forall u \in]-1,1[,\ \sqrt{1+u}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})...(\frac{-2n+3}{2})}{n!}u^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\ ...\ (2n-3)}{2^n n!}u^n$

en multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.6\ ...\ (2n-2)=2^{n-1}(n-1)!$, on obtient :

$\forall u \in]-1,1[,\ \sqrt{1+u}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}u^n$

en remplaçant u par $-4x$, on obtient :

$\forall u \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\ \sqrt{1-4x}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}(-4x)^n=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$

donc, $\forall x \in]-R,R[\cap]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[-\{0\},\ S(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\dfrac{2}{2x}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}x^n$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}x^n}$$

On peut vérifier ce résultat sur les premiers termes de la suite par :

>for n from 0 to 10 do v[n]:=(2*n)!/n!/(n+1)! od;

• Il reste à s'affranchir de l'hypothèse faite en début de calcul et non encore démontrée; hypothèse selon laquelle $R>0$.

On peut penser à démontrer que pour tout n, $u_n \le 4^n$, propriété satisfaite par la suite (v_n). Mais l'hérédité n'est pas aisée à prouver.

Considérons plutôt la série entière $T(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$ de rayon $R'=\frac{1}{4}$

Le calcul précédent montre que $\forall x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\ T(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ et donc que $sT^2(x)-T(x)+1=0$

L'égalité $sT^2(x)=T(x)-1$, en développant $T^2(x)$ par une série produit, montre alors que

$v_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}v_kv_{n-k}$

de là, il s'ensuit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=v_n=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$

2.3 Suite récurrente, série entière et équation différentielle :

Soit (a_n) la suite définie par $a_0=a_1=1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n+2}$$

a) Etudier la limite de la suite (a_n).

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ n'est pas nul et calculer la somme $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. (on pourra utiliser une équation différentielle)

En déduire que $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$ et un équivalent de a_n quand $n\to+\infty$

SOLUTION :

a) Par les conditions initiales $a_0=a_1=1>0$ et la relation de récurrence, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n>0$.

de plus $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+2} > 0$, la suite (a_n) est strictment croissante à partir du rang 2.

dès lors $a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+2} \geq \dfrac{a_1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

La série $\sum \frac{1}{n+2}$ étant une série divergente, par minoration, la série $\sum (a_{n+2} - a_{n+1})$ l'est aussi.

La suite (a_n) est donc divergente et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$

b) Les termes de la suite étant tous > 0, la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$ entraîne que

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}$$

or $0 < \dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}} \leq \dfrac{1}{n+2}$ (puisque $a_n < a_{n+1}$)

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1$

On en conclut par le critère de d'Alembert adapté aux séries entières que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{1} = 1$.

- $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\, x^{n+2} = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \right) x^{n+2}$$

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$$

$$S(x) = a_0 + a_1 x + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} = a_0 + a_1 x + x(S(x) - a_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$$

Par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = a_1 + S(x) - a_0 + xS'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$S'(x) = S(x) + xS'(x) + xS(x) \quad \text{(puisque } a_0 = a_1 = 1\text{)}$$

La fonction S est donc solution sur l'intervalle $]-1,1[$ de l'équation différentielle (E) : $(x-1)y' + (x+1)y = 0$

La solution générale de l'équation linéaire (E) est $y(x) = \lambda \exp(\int^x \frac{1+t}{1-t} dt)$

$$\int^x \frac{1+t}{1-t} dt = \int^x \frac{t-1+2}{1-t} dt = \int^x \left(-1 + \frac{2}{1-t} \right) dt = -x - 2\ln(1-x)$$

La solution générale de (E) est donc $y(x) = \lambda \exp(-x - 2\ln(1-x)) = \lambda \dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, S(x) = \lambda \dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

or $S(0) = a_0 = 1 = \lambda$ donc $\boxed{S(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}}$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{a_n} x^n$ et $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)}_{b_n} x^n$

La série produit de celles ci-dessus est $\sum c_n x^n$ avec pour tout n, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)}$

- $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1) = n\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

donc $\boxed{c_n \overset{+\infty}{\sim} n\, e^{-1} = \dfrac{n}{e}}$

2.4 Calcul d'une somme à l'aide d'une équation différentielle :

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, de somme $S(x)$.

1- Déterminer le rayon de convergence de cette série, et montrer que la fonction somme, S, est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$

2- Calculer $S(x)$ lorsque $x > 0$.

En déduire la valeur de la somme $\sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$

SOLUTION :

1 -• Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1!)^2}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{4}$$

La série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 4$.

• $\forall x \in]-4, 4[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0,1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$x(x-4)S'(x) + (x+2)S(x) = (x-4)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + (x+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-4n+2)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-4n+2)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n$$

$$= 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((-4n+2)a_n + n a_{n-1})x^n$$

Or $\quad a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(n.(n-1)!)^2}{2n(2n-1)[(2n-2)!]} = \dfrac{n}{4n-2}\dfrac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!} = \dfrac{n}{4n-2}a_{n-1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-4n+2)a_n + n a_{n-1} = 0$

On a ainsi montré que :

$$\forall x \in]-4, 4[,\ x(x-4)S'(x) + (x+2)S(x) = 2a_0 = 2 \quad (\text{puisque } \binom{0}{0} = 1)$$

La fonction S est donc solution sur l'ouvert $]-4, 4[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$

2 -• $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle du premier ordre, linéaire. Son équation homogène associée est :

$(\mathcal{E}_\prime)$: $x(x-4)y' + (x+2)y = 0$

$\dfrac{x+2}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4}$ en multipliant par $(x-4)$ puis en remplaçant x par 4, on obtient $b = \frac{3}{2}$

et par un procédé analogue, $a = -\frac{1}{2}$

$\dfrac{x+2}{x(4-x)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x-4}\right)$ Cette fonction de x a pour primitive $\dfrac{1}{2}(\ln|x| - 3\ln|x-4|)$

La solution générale de $(\mathcal{E}_\prime)$ est donnée par :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-4|} = \lambda\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x-4|^3}}$$

Sur l'intervalle $]0, 4[$, la solution générale de $(\mathcal{E}_\prime)$ a pour forme :

$y(x) = \lambda\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}$ où λ est une constante réelle quelconque.

Recherchons une solution particulière de l'équation complète $(\mathcal{E})$ par la méthode de variation de la constante:

Notons $y_0(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}$ et recherchons une solution particulière de $(\mathcal{E})$ de la forme $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$ où $\lambda(x)$ est une fonction inconnue :

$\forall x \in]0, 4[,\ y'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$

La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]0, 4[\iff \forall x \in]0, 4[,\ x(4-x)y'(x) - (x+2)y(x) = -2$

$\iff \forall x \in]0, 4[,\ x(4-x)(\lambda'(x)y_0(x) + \underline{\lambda(x)y_0'(x)}) - \underline{(x+2)\lambda(x)y_0(x)} = -2$

$\iff \forall x \in]0, 4[,\ x(4-x)(\lambda'(x)y_0(x) = -2$ (car y_0 est solution de $(\mathcal{E}_\prime)$)

$\iff \forall x \in]0, 4[,\ \lambda'(x) = \dfrac{-2}{x(4-x)y_0(x)} = -2\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$

Sur l'intervalle $]0, 4[$, calculons une primitive $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx$ par le changement de variable $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$

alors $u^2 x = 4 - x$, $\quad x = \dfrac{4}{u^2+1}$, $\quad dx = \dfrac{-8udu}{(u^2+1)^2}$

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx = \int u\frac{u^2+1}{4}\frac{-8udu}{(u^2+1)^2} = \int \frac{-2u^2}{u^2+1}du = -2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = -2\int 1 - \frac{1}{u^2+1}du$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}dx = -2u + 2\mathrm{Arctan}\, u = -2\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$$

donc $\lambda(x) = 4\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} - 4\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$

Une solution particulière de l'équation complète $(\mathcal{E})$ est :

$$y_1(x) = \lambda(x)y_0(x) = 4\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}} = \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$$

et la solution générale de l'équation complète est :

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_0(x) = \frac{4}{4-x} - 4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}} + \mu\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

- S est une solution de $(\mathcal{E})$, donc

$$\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-4,4[,\ S(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(\mu - 4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Quand x tend vers 0, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4}{4-x} = 1$, $\quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{8} \xrightarrow{x\to 0^+} 0$

$$\mu - 4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}} \xrightarrow{x\to 0^+} \mu - 2\pi$$

L'examen de la limite en 0 n'impose aucune contrainte sur la valeur de μ.

Regardons la dérivabilité en 0 :

$$\forall x \in]0,4[,\ \frac{S(x)-S(0)}{x} = \frac{S(x)-1}{x} = \frac{1}{4-x} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(4-x)^3}}\left(\mu - 4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Quand x tend vers 0, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4}$, $\quad \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(4-x)^3}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$

Pour que $\frac{S(x)-S(0)}{x}$ ait une limite finie quand $x \to 0$ il faut donc que la limite de $\left(\mu - 4\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$ soit nulle, c'est à dire que $\mu = 2\pi$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in]-4,4[,\ S(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(\pi - 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)}$

- $\sigma = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = S(1) = \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3^3}}\left(\pi - 2\text{Arctan}\sqrt{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\pi - 2\frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{\sigma = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}}$$

2.5 Sommation de série entière **Oral Centrale :**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $S_p(A)$ son spectre (ensemble de ses valeurs propres)

1- Que peut on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum \text{tr}(A^p)x^p$?

2- Lorsqu'elle converge, on note $F(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\text{tr}(A^p)x^p$.

Calculer $F(z)$ en fonction du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ et de son dérivé.

SOLUTION :

1- La matrice A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

et une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = P.T.P^{-1}$

alors, pour tout $p \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^p) = \text{tr}(T^p) = \lambda_1^p + \lambda_2^p + ... + \lambda_n^p$

donc $\text{tr}(A^p)x^p = (\lambda_1^p + \lambda_2^p + ... + \lambda_n^p)x^p$

Notons $\mu = \max\limits_{\lambda \in S_p(A)}|\lambda| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|)$

- Si $\mu = 0$, toutes les valeurs propres sont nulles, et pour tout $p \geqslant 1$ $\text{tr}(A^p) == 0$
- Supposons désormais $\mu \neq 0$. Alors, si pour tout $k \in \{1,2,...,n\}$, $|\lambda_k x| < 1$, chacune des séries $\sum \lambda_k^p\, x^p$ converge absolument, donc $\boxed{R \geqslant \min\limits_{k=1..n}\frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\max\limits_{k=1..n}|\lambda_k|}}$

2- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,

$$F(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{tr}(A^p)z^p=\sum_{p=0}^{\infty}(\lambda_1^p+\lambda_2^p+...+\lambda_n^p)x^p=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\lambda_k^p x^p\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k x}.$$

• Pour tenir compte de leur ordre de multiplicité, renumérotons les valeurs propres de A , $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ avec pour ordres de multiplicité respectifs, $r_1,r_2,...,r_m$

ainsi, $\chi_A(X)=(X-\lambda_1)^{r_1}(X-\lambda_2)^{r_2}...\,...(X-\lambda_m)^{r_m}=\prod_{k=1}^{m}(X-\lambda_k)^{r_k}$ (au signe près)

en dérivant, $\chi_A'(X)=\sum_{k=1}^{m}r_k(X-\lambda_k)^{r_k-1}\prod_{\substack{j=1...m\\ j\neq k}}(X-\lambda_j)^{r_j}=\sum_{k=1}^{m}r_k\frac{\chi_A(X)}{X-\lambda_k}$

donc $\dfrac{\chi_A'(\frac{1}{z})}{\chi_A(\frac{1}{z})}=\sum_{k=1}^{m}r_k\dfrac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{z}{1-\lambda_k z}$

et finalement, $\boxed{F(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\mathrm{tr}(A^p)z^p=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1-\lambda_k x}=\dfrac{\chi_A'(\frac{1}{z})}{z\,\chi_A(\frac{1}{z})}.}$

2.6 Calcul de sommes de séries :

1- Etudier la convergence et, le cas échéant, calculer $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ où : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k^2}$

2- Convergence et calcul éventuel de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$

SOLUTION :

1- $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2 2^{n-k}}$

En posant : $a_0=0$ et $\forall n\geqslant 1,\ a_n=\dfrac{1}{n^2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\dfrac{1}{2^n}$, le produit de Cauchy (c_n) des suites (a_n) et (b_n) est défini par :

$\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\dfrac{1}{2^{n-k}}=u_n$ (cette égalité est vraie pour $n=0$ en posant $u_0=0$)

donc (u_n) est le produit de Cauchy des suites (a_n) et (b_n).

La série $\sum a_n$ converge et a pour somme $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, la série $\sum b_n$ converge et a pour somme $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, la série produit $\sum u_n$ converge donc et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\frac{\pi^2}{6}.\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{3}$$

2- On considérera la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}n^2\,x^n$, de somme $S(x)$.

Son rayon de convergence vaut 1 (critère de d'Alembert), de sorte que la série converge pour $x=\frac{1}{2}$ et $S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ est bien défini.

On sait que $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, et par dérivation,

$\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0,1}^{\infty}n\,x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$, et $\dfrac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\,x^n$

or $n^2=(n+1)(n+2)-3(n+1)+1$

donc $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{3}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}$

$\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\dfrac{2-3(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^3}=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

En particulier pour $x=\frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}=6$ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=6}$

2.7 Sommation de séries :

Calculer les sommes suivantes : a) $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(3n+1)}$

b) $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

SOLUTION :

a) Calculer $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(3n+1)}$

Considérons la série entière S définie par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n} = -\ln(1-x^3)$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \underbrace{S(0)}_{=0} + \int_0^x S'(t)dt = -\int_0^x \ln(1-t^3)dt$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1-t^3)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,x]$, on peut intégrer par parties comme suit :

$$S(x) = -[t\ln(1-t^3)]_0^x + \int_0^x t\frac{-3t^2}{1-t^3}dt = -x\ln(1-x^3) - \int_0^x \frac{3t^3}{1-t^3}dt$$

$$\frac{t^3}{1-t^3} = \frac{t^3-1+1}{1-t^3} = -1 + \frac{1}{1-t^3} = -1 + \frac{1}{(1-t)(1+t+t^2)} = -1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2}\right)$$

$$S(x) = -x\ln(1-x^3) - \int_0^x \left(-3 + \frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt$$

$$S(x) = -x\ln(1-x^3) + 3x + \int_0^x \frac{1}{t-1}dt - \int_0^x \frac{t+2}{1+t+t^2}dt$$

$$= -x\ln(1-x^3) + 3x + \ln|x-1| - \int_0^x \frac{t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt$$

$$S(x) = -x\ln(1-x^3) + 3x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}[\ln(t^2+t+1)]_0^x - \frac{3}{2}\int_0^x \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$S(x) = -x\ln(1-x^3) + 3x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^x$$

$$S(x) = 3x - x\ln(1-x) - x\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$

$$S(x) = 3x + (1-x)\ln(1-x) - (x+\frac{1}{2})\ln(1+x+x^2) - \sqrt{3}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, S(x) = 3x + (1-x)\ln(1-x) - (x+\frac{1}{2})\ln(1+x+x^2) - \sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

• $\forall x \in [-1,1], \left|\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}\right| \le \frac{1}{n(3n+1)} \le \frac{1}{3n^2}$ et donc $\left\|\frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}\right\|_\infty^{[-1,1]} \le \frac{1}{3n^2}$

Ceci montre que la série entière $\sum \frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-1,1]$. Chaque fonction polynôme $x \mapsto \frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$ étant continue sur $[-1,1]$, la somme S l'est aussi.

donc $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(3n+1)} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 3 + 0 - \frac{3}{2}\ln(3) - \sqrt{3}\,\text{Arctan}(\sqrt{3}) + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(3n+1)} = 3 - \frac{3}{2}\ln(3) - \sqrt{3}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 3 - \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(3n+1)} = 3 - \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

b) Calculer $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Considérons la série entière $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$

$\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^3)^n=\frac{1}{1+x^3}$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)$$

$\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\underbrace{S(0)}_{=0}+\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt$

$$S(x)=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^x$$

$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$

$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$$

Pour tout $x\in[0,1]$, la suite $\left(\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)$ est alternée, de limite nulle, et décroissante en valeurs absolue.
La série converge, et son reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par par le terme de rang $n+1$:

$\forall x\in[0,1],\left|\sum_{k=n+1}\frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1}\right|\leq\frac{|x|^{3k+4}}{3k+4}\leq\frac{1}{3k+4}$

donc $\|r_n\|_\infty^{[0,1]}=\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}\frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1}\right|\leq\frac{1}{3k+4}$ et $\lim_{n\to+\infty}\|r_n\|_\infty^{[0,1]}=0$

La série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$. Chaque fonction étant continue sur $[0,1]$, la somme l'est aussi.

Donc $B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$$

2.8 Nombre d'involutions * (Mines - 468)

Une involution de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$ est une application σ de $\{1,2,...,n\}$ dans lui-même qui vérifie $\sigma_o\sigma=Id$.

Pour $n\geq1$, on note u_n le nombre d'involutions de $\{1,2,...,n\}$. On convient que $u_0=1$

a) Calculer u_n pour $n\in\{1,2,3\}$

Montrer que $\forall n\geq2,\ u_n=u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}$

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ converge si $x\in]-1,1[$. On note $S(x)$ sa somme.

c) Montrer que $\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=(x+1)S(x)$

d) En déduire une expression de $S(x)$ et une expression de u_n.

e) Vérifier l'exactitude des résultats trouvés sur les 10 ou 15 premiers termes avec MAPLE.

SOLUTION :

a) Notons S_n le groupe des permutations de $\{1,2,...,n\}$. $u_n=\mathrm{Card}\{\sigma\in S_n/\sigma_o\sigma=Id\}$

$S_1=\{Id\}$ et $u_1=1$

$S_2=\{Id,\tau_{1,2}\}$ et $u_2=2$ (une transposition $\tau_{i,j}$ est toujours involutive)

$S_3=\{Id,\tau_{1,2},\tau_{1,3},\tau_{2,3},(1,2,3),(1,3,2)\}$ et $u_3=4$

Soit $n\geq2$ et soit σ une involution de $\{1,2,...,n\}$.

- Si $\sigma(n)=n$, l'ensemble $\{1,2,...,n-1\}$ est stable par σ et la restriction de σ à $\{1,2,...,n-1\}$ est une involution de $\{1,2,...,n-1\}$. Il y a donc u_{n-1} involutions de $\{1,2,...,n\}$ de ce type.

- Sinon, $\sigma(n)=m\neq n$, alors $\sigma(m)=n$ car σ est involutive. Le nombre m est l'un quelconque des nombres $1,2,...,n-1$, et son choix étant fait, la restriction de σ à $\{1,2,...,m-1,m+1,...,n-1\}$ est une involution de cet ensemble. Il y en a u_{n-2} car $\{1,2,...,m-1,m+1,...,n-1\}$ compte $n-2$ éléments.

Le décompte de ces deux cas qui s'excluent mutuellement permet d'affirmer que $\boxed{u_n=u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}}$

On peut remarquer que cette égalité est bien vérifiée pour $n=3$.

b) Montrons par récurrence que $0\leq\frac{u_n}{n!}\leq1$

u_n est bien positif puisque c'est un cardinal.

- On vérifie que cette relation est vraie pour $n \leq 3$.
- Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $n-1$.

alors $\dfrac{u_n}{n!} = \dfrac{u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}}{n!} = \dfrac{1}{n}\dfrac{u_{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n}\dfrac{u_{n-2}}{(n-2)!} \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{n} \leq 1$

ce qui montre que la relation est alors vraie à l'ordre n.

On a ainsi prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \dfrac{u_n}{n!} \leq 1$

Alors, si $|x| < 1$, $\left|\dfrac{u_n}{n!}x^n\right| < |x|^n$, terme général d'une série géométrique convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n \text{ converge absolument si } x \in]-1,1[}$.

c) $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$

Par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_{n-2}}{(n-2)!}x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}x^n = S(x) + xS(x) \qquad \text{(par changement d'indice de sommation)}$$

$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est donc solution de l'équation différentielle } (E) :\ y' - (x+1)y = 0}$.

d)• L'équation (E) est linéaire et homogène; sa solution générale a pour expression : $y(x) = \lambda e^{\frac{x^2+2x}{2}}$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[, S(x) = \lambda e^{\frac{x^2+2x}{2}}$

La relation $S(0) = a_0 = 1$ donne $\lambda = 0$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, S(x) = e^{\frac{x^2+2x}{2}}}$.

• $\forall x \in]-1,1[, S(x) = e^x.e^{\frac{x^2}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$

Posons, pour n entier quelconque $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$, $\beta_{2n} = \dfrac{1}{2^n n!}$ et $\beta_{2n+1} = 0$ de sorte que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad \text{et} \quad e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

La série produit de Cauchy de ces deux séries entières a pour expression : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \beta_{2k}\alpha_{n-2k} \quad \text{(puisque les } \beta_{2h+1} \text{ sont nuls)}$$

$$\gamma_n = \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^k k!}\frac{1}{(n-2k)!}$$

Et puisque les deux séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ sont absolument convergentes pour tout $x \in]-1,1[$,

la série produit l'est aussi et $\forall x \in]-1,1[$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right).\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$

donc $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = e^x.e^{\frac{x^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n!\,\gamma_n = n! \sum_{h=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^k k!}\frac{1}{(n-2k)!}}$

e) • Calcul des a_n par la formule de récurrence :

```
>u[0]:=1;    u[1]:=1;
for k from 2 to 10 do u[k]:=u[k-1]+(k-1)*u[k-2] od:
for k from 2 to 10 do v[k]:=u[k]/k! od;
```

• Calcul des a_n par la formule trouvée en d) :

```
>for n from 0 to 10 do v[n]:= add(1/2**k/k!/(n-2*k)!,k=0..floor(n/2)) od;
```

- Calcul des premiers termes du développement de $S(x)$:

```
>f:=x->exp(x+ x*x/2);
series(f(x),x,15);
```

2.9 Nombre de dérangements* (Mines)

Définition : On appelle dérangement d'ordre n toute permutation $\sigma \in S_n$ qui n'a aucun point fixe, c'est à dire telle que : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \sigma(i) \neq i$.

On note d_n le nombre de dérangements de S_n

a) Donner une relation exprimant d_n en fonction de d_{n-1} et d_{n-2}

En déduire que $\forall n \geq 1, d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et donner un équivalent de d_n quand $n \to +\infty$

b) Que vaut la fonction génératrice $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k!} z^k$, pour z complexe ?

SOLUTION

a) Considérons s un dérangement d'ordre $n, n \geq 3$, c'est à dire une permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ qui n'a aucun point fixe. Soient $j = s(n)$ et $i = s^{-1}(n)$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & ... & n & ... & \gamma & j \end{pmatrix}$$

Premier cas : Si $i = j$, la valeur de j et la restriction s' de s au sous ensemble $\{1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n-1\}$ permettent de définir s.

Autrement dit, s est définie par la donnée de $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et de s', dérangement de l'ensemble $\{1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n-1\}$, ensemble qui possède $n-2$ éléments. Il y a donc $(n-1).d_{n-2}$ manières de définir s ainsi.

Deuxième cas : Si $i \neq j$, notons $\tau_{j,n}$ la transposition de $\{1, 2, ..., n\}$ qui échange j et n et laisse les $n-2$ autres indices inchangés.

Alors la restriction s" de $(\tau_{j,n})_o s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & ... & j & ... & \gamma & n \end{pmatrix}$

à l'ensemble $\{1, 2, ..., n-1\}$ est un dérangement de cet ensemble.

Il suffit donc de connaître l'indice i et le dérangement s" pour déterminer s. Ce qui donne $(n-1).d_{n-1}$ manières de définir s ainsi.

Au terme de cet inventaire, $d_n = (n-1).d_{n-1} + (n-1).d_{n-2}$

$$d_n = (n-1).(d_{n-1} + d_{n-2})$$

$d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$

On vérifie que la formule $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ est vraie pour $n = 1, 2, 3$

Supposons la vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$.

Alors $d_n = (n-1).d_{n-1} + (n-1).d_{n-2}$

$d_n = (n-1).(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1).(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$

$d_n = n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1).(n-1)!.\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

$d_n = n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + n! \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$

$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$, donc $d_n \sim e^{-1}.n!$

b) Soient, pour $k \in \mathbf{N}$, $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ et $b_k = 1$

Soit $\{c_k\}$ la série produit de Cauchy des séries $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$

$c_0 = a_0 b_0 = 1$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1.1 + (-1).1 = 0 = \frac{d_1}{1!}$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1.1 + (-1).1 + \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{d_2}{2!}$

et $\forall n \geq 2, c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{d_n}{n!}$

$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - c_0$

$f(z) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k).(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k) - c_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \right) . \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) -1$

$f(z) = (e^{-z}).\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{e^{-z} - 1 + z}{1-z}.$

3 Développements en série entière :

3.1 Développements classiques :

Développer en série entière les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos a + 1}$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = \ln(2-x)$

d) $f(x) = \ln(-x^2 + x + 6)$

e) $f(x) = \ln(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

f) $f(x) = \text{Arctan}\dfrac{2(1-x)}{1+4x}$

SOLUTION :

b) $2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $\ln(2-x) = \ln(2(1-\frac{x}{2})) = \ln 2 + \ln(1 - \frac{x}{2}) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ pour $x \in [-2, 2[$

d) $-x^2 + x + 6 = -(x-3)(x+2)$ est positif pour $x \in]-2, 3[$

$\forall x \in]-2, 3[, \;\; \ln(-x^2 + x + 6) = \ln(x+2)(3-x) = \ln(2+x) + \ln(3-x)$

$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n n} + \ln 3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n}$

La première somme est valable pour $|x| < 2$ et la deuxième pour $|x| < 3$

Donc pour tout x tel que $|x| < 2$, $\quad f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n}$

e) $\ln(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = \ln\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right) = \ln(1-x^5) - \ln(1-x)$ $\quad$ si $\quad [x[< 1$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{5n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\quad a_n = \frac{1}{n}$ si $n \neq 0$ [5] $\quad$ et $\quad a_{5n} = \frac{6}{5n}$

f) $f(x) = \text{Arctan}\dfrac{2(1-x)}{1+4x}$

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f =]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4}, +\infty[$

$\forall x \in \mathscr{D}_f, \; f'(x) = \dfrac{\frac{-2(1+4x) - 8(1-x)}{(1+4x)^2}}{1 + \left(\frac{2(1-x)}{1+4x}\right)^2} = -\dfrac{10}{(1+4x)^2 + (2-2x)^2} = -\dfrac{10}{5 + 20x^2} = \dfrac{-2}{1+4x^2}$

$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \; \frac{-2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n}$

$\forall x \in]-\frac{1}{4}, +\infty[, \; f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ car f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$

donc $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[, \; f(x) = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \int_0^x f'(t)dt = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} t^{2n} dt$

$= \text{Arctan}\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$

(d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières).

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\quad \text{Arctan}\frac{2(1-x)}{1+4x} = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}}$$

Remarque : On portera attention, à chaque ligne du calcul, au domaine de validité de celui-ci.

3.2 DSE d'une fraction rationnelle

Soit $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible ($P(X)$ et $Q(X)$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux).

Les racines du dénominateur $Q(X)$ sont alors les **pôles** de la fraction $R(X)$.

1- Montrer que toute fraction rationnelle $R(X)$ qui n'a pas 0 pour pôle est développable en série entière sur un voisinage de 0.

2- Développer en série entière $R(X) = \dfrac{1}{X^2 - 8X + 25}$

SOLUTION :

1- Toute fraction rationnelle peut se décomposer en élémets simples dans $\mathbb{C}[X]$:

$$R(X) = E(X) + \sum_i \frac{\alpha_i}{X - a_i} + \sum_j \frac{\beta_j}{(X - b_j)^2} + ... + \sum_k \frac{\gamma_k}{(X - c_k)^m}$$

où $E(X)$ est un polynôme (la partie entière de la fraction) , les α_i, β_j, ... γ_k des complexes, les a_i, b_j, ... c_k des complexes non nuls.

alors $\dfrac{\alpha_i}{z - a_i} = -\dfrac{\alpha_i}{a_i}\dfrac{1}{1 - \frac{z}{a_i}}$ se décompose en série entière sous la forme $-\dfrac{\alpha_i}{a_i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a_i}\right)^n$ lorsque $\left|\dfrac{z}{a_i}\right| < 1$

c'est dire si $|z| < |a_i|$.

Cet élément simple est développable en série entière avec pour rayon $|a_i|$

• De même $\dfrac{1}{z - b_j}$ se développe en série entière avec pour rayon $|b_j|$ et $\dfrac{1}{(z - b_j)^2}$ aussi comme produit de deux séries entières de rayon $|b_j|$.

Il en va de même pour tous les autres termes de la forme $\dfrac{\gamma_k}{(z - c_k)^m}$

• En tant que somme, $R(z)$ se développe en série entière avec pour rayon $r \geq \min(|a_i|, |b_j|, ..., |c_k|)$

Mais pour lorsque z est le complexe parmi les a_i, b_j, ... c_k le plus petit en module, la fraction $R(z)$ n'est pas définie. Donc $r = \min(|a_i|, |b_j|, ..., |c_k|)$

2- a) calcul effectif :

$$\frac{1}{X^2 - 8X + 25} = \frac{1}{(X - 4 - 3i)(X - 4 + 3i)} = \frac{\frac{i}{6}}{(X - 4 + 3i)} - \frac{\frac{i}{6}}{(X - 4 - 3i)}$$

$$\frac{1}{z^2 - 8z + 25} = \frac{i}{6(-4 + 3i)}\frac{1}{(1 - \frac{z}{4-3i})} + \frac{i}{6(4 + 3i)}\frac{1}{(1 - \frac{z}{4+3i})}$$

$$\frac{1}{z^2 - 8z + 25} = \frac{i}{6(-4 + 3i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4 - 3i}\right)^n + \frac{i}{6(4 + 3i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4 + 3i}\right)^n$$

pour tout z tel que $\left|\dfrac{z}{4 + 3i}\right| < 1$ c'est à dire $|z| < |4 + 3i| = 5$

Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 5$, on a :

$$\frac{1}{z^2 - 8z + 25} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{(4 - 3i)^{n+1}} + \frac{i}{(4 + 3i)^{n+1}}\right) z^n$$

b) Emploi d'une relation de récurrence :

On sait que la fraction $\dfrac{1}{X^2 - 8X + 25}$ qui n'a pas 0 pour pôle, est développable en série entière sur un voisinage de 0.

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ce développement, de rayon $r > 0$..

Pour tout z tel que $|z| < r$, $\displaystyle 1 = (z^2 - 8z + 25)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} - 8\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} + 25\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, z^n - 8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, z^n + 25\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

d'où, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul,

$1 = 25a_0$ donc $a_0 = \dfrac{1}{25}$

$0 = -8a_0 + 25a_1$ donc $a_1 = \dfrac{8}{625}$

et pour tout $n \geq 2,\ 0 = a_{n-2} - 8a_{n-1} + 25a_n$

Donc la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \geq 2,\ a_n = \dfrac{8}{25}a_{n-1} - \dfrac{1}{25}a_{n-2}$

et les conditions initiales : $a_0 = \dfrac{1}{25}$, $a_1 = \dfrac{8}{625}$

3.3 * DSE de Arctan$(a + x)$

a étant un réel > 0 donné, la fonction $x \longrightarrow \text{Arctan}(a + x)$ admet elle un développement en série entière ?
Si oui, le calculer. On pourra utiliser $\theta = \text{Arctan}(a)$

SOLUTION :

la fonction $f_a\ :\ x \longrightarrow \text{Arctan}(a+x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \dfrac{1}{1+(a+x)^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \frac{1}{1+(a+x)^2} = \frac{1}{(x+a-i)(x+a+i)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+a+i} - \frac{1}{x+a-i}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(a+i)(1+\frac{x}{a+i})} - \frac{1}{(a-i)(1+\frac{x}{a-i})}\right)$$

$$a + i = \tan(\theta) + i = \frac{\sin(\theta) + i\cos(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{et} \quad |a+i| = \frac{1}{|\cos(\theta)|} = \sqrt{a^2+1}$$

$$\text{d'où} \quad a+i = \frac{ie^{-i\theta}}{\cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{a+i} = -ix\cos(\theta)e^{i\theta}$$

$$\text{Ainsi,} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(a+i)(1-ix\cos(\theta)e^{i\theta})} - \frac{1}{(a-i)(1+ix\cos(\theta)e^{-i\theta})}\right)$$

Si $|ix\cos(\theta)e^{i\theta})| < 1$ c'est à dire si $|x| < \dfrac{1}{|\cos(\theta)|} = \sqrt{a^2+1}$ alors,

$$f_a'(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(a+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{a+i}\right)^n - \frac{1}{(a-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{a-i}\right)^n\right)$$

$$f_a'(x) = \frac{i}{2}\left(-i\cos(\theta)e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ix\cos(\theta)e^{i\theta}\right)^n - i\cos(\theta)e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-ix\cos(\theta)e^{-i\theta}\right)^n\right)$$

$$f_a'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n e^{i(n+1)\theta} + (-i)^n e^{-i(n+1)\theta}\right)(\cos\theta)^{n+1}x^n$$

$$f_a'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}e^{i(n+1)\theta} + e^{-i\frac{n\pi}{2}}e^{-i(n+1)\theta}\right)(\cos\theta)^{n+1}x^n$$

$$f_a'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2} + (n+1)\theta\right)(\cos\theta)^{n+1}x^n$$

$$\forall x \in \left]-\sqrt{a^2+1}, \sqrt{a^2+1}\right[,\ f_a(x) = f_a(0) + \int_0^x f_a'(t)dt$$

$$f_a(x) = \text{Arctan}(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2} + (n+1)\theta\right)(\cos\theta)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f_a(x) = \text{Arctan}(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} + n\theta\right)\cos^n(\theta)}{n}x^n$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \left]-\sqrt{a^2+1}, \sqrt{a^2+1}\right[,\ \text{Arctan}(a+x) = \text{Arctan}(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} + n\theta\right)\cos^n(\theta)}{n}x^n}$$

3.4 * DSE de la fonction tangente

1-a) Soit $a > 0$ et $f\ :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a, a[\ f^{(n)}(x) \geq 0$

Ecrire la formule de Taylor $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$ avec un reste intégrale et montrer que pour tout $x \in [0, a[$, la série de Taylor converge.

b) Soient x et y tel que $0 < x < y < a$.

Montrer que $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$. En déduire que $\forall x \in [0, a[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

2-a) Montrer que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b) Montrer que les coefficients de ce développement $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont donnés par :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

c) Utiliser cet algorithme pour calculer les termes du développement jusqu'à l'ordre 15 avec MAPLE. Comparer avec le résultat donné directement par MAPLE.

SOLUTION :

1-a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, a[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Toutes les dérivées $f^{(k)}(0)$ sont positives par hypothèses, et les x^k le sont aussi lorsque $x \in [0, a[$.

La série de Taylor $\displaystyle\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est donc une série à termes positifs ou nuls.

Par ailleurs, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \overbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}^{\geq 0} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\geq 0} dt \geq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, a[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(x) \leq f(x)$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ étant majorées, cette série converge.

Donc la série de taylor de f converge en tout point $x \in [0, a[$.

1-b) • Soient x et y tel que $0 < x < y < a$.

Le changement de variable $t = \dfrac{x}{y} u$ donne :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x}{y} \int_0^y \frac{(x - \frac{x}{y}u)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right) du$$

$$R_n(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)} \int_0^y \frac{(y-u)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right) du$$

Or, $f^{(n+2)}$ étant positive, la fonction $f^{(n+1)}$est croissante et $f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right) \leq f^{(n+1)}(u)$ puisque $\frac{x}{y} < 1$.

Donc $0 \leq R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{(n+1)} \displaystyle\int_0^y \frac{(y-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = \left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)} R_n(y)$

• Pour tout $x \in [0, a[$ on peut trouver y tel que $0 < x < y < a$.

Et puisque $\frac{x}{y} < 1$, l'encadrement $0 \leq R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{(n+1)} R_n(y)$

montre alors que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ et l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ montrer que :

Pour tout $x \in [0, a[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

Donc en tout point de $[0, a[$, f est égale à sa série de Taylor. Elle est donc somme d'une série entière.

2-a) • Pour n entier naturel quelconque, soit P_n la proposition :

"il existe un polynôme $Q_n(X)$ à coefficients réels postifs tel que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n)}(x) = Q_n(\tan(x))$ "

Puisque $\tan' = 1 + \tan^2$, la proposition P_1 est vraie, il suffit de prendre $P_1(X) = 1 + X^2$.

Supposons la proposition P_n vérifiée :

il existe un polynôme $Q_n(X)$ à coefficients réels postifs tel que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n)}(x) = Q_n(\tan(x))$

Alors $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n+1)}(x) = Q_n'(\tan x)(1 + \tan^2 x)$

Soit alors $Q_{n+1}(X) = (X^2+1)Q_n'(X)$.

$Q_{n+1}(X)$ est bien un polynôme à coefficients réels positifs ou nuls car X^2+1 et $Q_n'(X)$ le sont,

et on a bien : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n+1)}(x) = Q_{n+1}(\tan(x))$

La proposition P_n est ainsi montrée pour tout entier naturel n par récurrence.

• La fonction "tan" est de classe C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et toutes ses dérivées sont ≥ 0 d'après la question précédente. On en conclut d'après la question 1-b qu'elle est développable en série entière sur $[0,\frac{\pi}{2}[$:

$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Or la fonction tangente étant impaire, toutes ses dérivées d'ordre pair sont nulles en 0.

$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

Par imparité des deux membres, l'égalité se prolonge à $]-\frac{\pi}{2},0]$ de sorte que finalement,

$$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

b) $a_0=\tan(0)=0$ et $a_1=\dfrac{\tan'(0)}{1!}=1$

$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et par dérivation,

$$\tan'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,a_nx^{n-1}=1+\tan^2x=1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2$$

Notons $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ le produit de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ par elle-même :

on a alors : $b_0=a_0a_0=0$, $b_1=a_0a_1+a_1a_0=0$, $b_2=a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0=1$ et plus généralement,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

En identifiant les coefficients dans les deux séries entières

$\tan'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n=1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2=1+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ on obtient :

$\forall n\geq 1,\ (n+1)\,a_{n+1}=b_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$ soit aussi $\forall n\geq 1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$

c) >**a[0]:=0; a[1]:=1; n:=15;**

> **for k from 1 to n do a[k+1]:=add(a[i]*a[k-i],i=0..k)/(k+1) od;**

Comparer les résultats obtenus avec :

>**series(tan(x),x,16);**

3.5 Fausse série entière

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\dfrac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$

a) Domaine de définition de f ?

b) Montrer que pour $x\in]-1,1[$, $f(x)$ peut s'écrire comme somme d'une série entière, $\sum a_nx^n$ dont on précisera le coefficient a_n en fonction de n.

Calculer $f(x)$ pour $x\in]-1,1[$ et calculer $\lim_{x\to1^-}f(x)$. Comparer à $f(1)$.

SOLUTION :

• $\forall x\in]-1,1[,\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{2n+2}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+2}=-\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\frac{1}{2}\ln(1-x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)$$

donc $\lim_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\ln 2}{2}$

• $\forall n\in N^*,\ \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}\right)=\sum_{k=0}^{2n+2}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ln 2$

Donc $\boxed{f(1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}\right)=\ln 2\neq\lim_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\ln 2}{2}}$

4 Etude aux bornes

4.1 Coefficients périodiques :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe périodique de période p $(\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+p}=u_n)$, non nulle $(\exists k\in\mathbb{N},\ u_k\neq 0)$
et $P(X)$ le polynôme $u_0+u_1X+...+u_{p-1}X^{p-1}$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum u_n z^n$

b) On note $S(z)=\sum_0^{+\infty} u_n z^n$. Calculer $S(z)$ en fonction de $P(z)$ quand la somme est définie.

c) Montrer que $S(x)$ admet une limite finie quand $x\to R^-$ si et seulement si $u_0+u_1+...+u_{p-1}=0$
et exprimer alors cette limite à l'aide de P'

SOLUTION :

a) La suite $(u_n)_{n\geq 0}=(u_n1^n)$, périodique, est bornée $(\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq \max(|u_0|,|u_1|,...,|u_{p-1}|)$
D'après le lemme d'Abel, pour tout complexe z tel que $|z|<1$, la série $\sum u_n z^n$ converge. Donc $R\geq 1$.
Mais (u_n) étant périodique et non nulle, elle n'a pas pour limite 0 et la série $\sum u_n 1^n$ diverge grossièrement.
Donc $R\leq 1$

Finalement $\boxed{R=1}$

b) Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$,

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nz^n=\sum_{n=0}^{p-1}u_nz^n+\sum_{n=p}^{+\infty}u_nz^n=P(z)+\sum_{n=p}^{+\infty}u_{n-p}z^n=P(z)+\sum_{n'=0}^{+\infty}u_{n'}z^{n'+p}$$

$$S(z)=P(z)+z^p\sum_{n=0}^{+\infty}u_nz^n=P(z)+z^pS(z)$$

d'où $(1-z^p)S(z)=P(z)$ et $S(z)=\dfrac{P(z)}{1-z^p}$ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\quad |z|<1\implies S(z)=\dfrac{P(z)}{1-z^p}}$

c) • Si $u_0+u_1+...+u_{p-1}=P(1)\neq 0$, quand $x\to 1^-$, $|P(x)|\longrightarrow |P(1)|\neq 0$ et $1-x^p\longrightarrow 0$ donc $|S(x)|=\left|\dfrac{P(x)}{1-x^p}\right|\longrightarrow +\infty$

• Si $P(1)=0$, alors $S(x)=\dfrac{P(x)}{1-x^p}=\dfrac{P(x)-P(1)}{(1-x)(1+x+x^2+...+x^{p-1})}=\dfrac{-1}{1+x+x^2+...+x^{p-1}}\dfrac{P(x)-P(1)}{x-1}$

et $\boxed{\lim_{x\to 1^-}S(x)=\dfrac{-P'(1)}{p}}$

4.2 Convergence et continuité aux bornes

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs ou nuls.

a) On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ converge pour $|x|<1$ et sa somme $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ a une limite finie L quand $x\longrightarrow 1^-$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge et a pour somme L.

b) Etudier la réciproque.

SOLUTION :

a) La série $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ étant à coefficients positifs, la fonction S est positive et croissante sur l'intervalle $[0,1[$ et pour tout entier n, $\forall x\in[0,1[$, $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leq\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=S(x)\leq L$

En passant à la limite quand $x\longrightarrow 1^-$, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}a_k\leq L$

Ses sommes partielles étant majorées, la série à termes ≥ 0 , $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge, et en passant à la limite quand $n\longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient : $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\leq L$

La fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est maintenant définie et croissante sur le segment $[0,1]$ (car est à coefficients positifs)

Donc $\forall x \in [0,1],\ S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leq S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

En passant à la limite quand $x \longrightarrow 1^-$, on obtient : $L = \lim_{x\to 1^-} S(x) \leq S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Les deux inégalités montrent enfin que $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge et a pour somme } L.}$

b) Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $x \in [0,1]$ et montrons que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Le problème ne se pose que si le rayon de convergence R est égal à 1, puisque si $R > 1$, la somme $S(x)$ est continue sur l'ouvert $]-R, R[$ et en particulier au point 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $\left|\sum_{n=0}^{n_0} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$ c'est à dire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \varepsilon < \sum_{n=0}^{n_0} a_n < \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Le polynôme $\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n$ étant une fonction continue de x, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$1-\eta < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n\right| < \varepsilon \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{n=0}^{n_0} a_n - \varepsilon < \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n < \sum_{n=0}^{n_0} a_n$$

Les coefficients a_n étant positifs et x aussi,

$$1-\eta < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n - 2\varepsilon < \sum_{n=0}^{n_0} a_n - \varepsilon < \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n < \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

donc $\quad 1-\eta < x < 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|S(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| < 2\varepsilon$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,\ \ 1-\eta < x < 1 \ \Longrightarrow\ \left|S(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| < 2\varepsilon$,

c'est à dire que $\boxed{\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k}$

4.3 Série entière et intégrales de Fresnel :

a) Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right], \quad (1+i)\int_0^x S((1+i)t)dt = \int_0^x S(t)dt + i\int_0^x S(x+it)dt \qquad (1)$

b) En utilisant la fonction $f \ :\ z \longrightarrow e^{-z^2}$ montrer la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \cos u^2 du$ et $\int_0^{+\infty} \sin u^2 du$ et calculer leurs valeurs.

SOLUTION :

a) • Soit, pour n entier naturel quelconque, P_n le polynôme t^n.

$$(1+i)\int_0^x P_n((1+i)t)dt = (1+i)\int_0^x ((1+i)t)^n dt = (1+i)^{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = (1+i)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Par ailleurs, $\int_0^x P_n(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et

$$i\int_0^x P_n(x+it)dt = i\int_0^x (x+it)^n dt = \left[\frac{(x+it)^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^x = \frac{(1+i)^{n+1}x^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$$

ce qui montre que $\quad (1+i)\int_0^x P_n((1+i)t)dt = \int_0^x P_n(t)dt + i\int_0^x P_n(x+it)dt$

• Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, la relation (1) est encore vérifiée.

Et par convergence uniforme sur le segment $[0,x]$, (lorsque $t \in [0,x] \subset \left[0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right[$, $(1+i)x \in [0, x\sqrt{2}] \subset [0, R[$ puisque $|1+i| = \sqrt{2}$) la relation (1) est vérifiée pour toute série entière.

• La fonction $f\ :\ z\ \longrightarrow\ e^{-z^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. ($e^{-z^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$)

On peut lui appliquer la relation (1) pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(1+i)\int_0^x e^{-((1+i)t)^2}dt=\int_0^x e^{-t^2}dt+i\int_0^x e^{-(x+it)^2}dt$$

$$(1+i)\int_0^x e^{-2it^2}dt=\int_0^x e^{-t^2}dt+i\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt \qquad (2)$$

• Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt=0$:

$$\left|\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt\right|\leq\int_0^x|e^{-x^2+t^2-2ixt}|dt=\int_0^x e^{-x^2+t^2}dt=\int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}e^{-x^2+t^2}dt+\int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x e^{-x^2+t^2}dt$$

$$\forall t\in\left[0,x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right],\ \ 0\leq t^2\leq\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x^2-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

$$\text{donc}\quad\int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}e^{-x^2+t^2}dt\leq\int_0^{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}e^{-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}}dt\leq xe^{-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}}\quad\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$$

$$\forall t\in\left[x-\frac{1}{\sqrt{x}},0\right],\ \ 0\leq e^{-x^2+t^2}\leq e^0=1\quad\text{et donc}\quad\int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x e^{-x^2+t^2}dt\leq\int_{x-\frac{1}{\sqrt{x}}}^x dt=\frac{1}{\sqrt{x}}\ \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt=0$

• Reprenons (2) : $\displaystyle(1+i)\int_0^x e^{-2it^2}dt=\int_0^x e^{-t^2}dt+i\int_0^x e^{-x^2+t^2-2ixt}dt$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\qquad\text{(intégrale de Gauss)}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+i)\int_0^x e^{-2it^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2it^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2(1+i)}$

et par le changement $u=\sqrt{2}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2it^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}e^{-iu^2}du=\frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{4}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-iu^2}du$ converge et vaut $\displaystyle\frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos u^2du=\int_0^{+\infty}\sin u^2du=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

4.4 Etude aux bornes **Oral Centrale :**

Soit (a_n) une suite complexe convergente de limite $\alpha\in\mathbb{C}$.

1- Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$?

2- Lorsqu'elle converge, on notera $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(x-1)S(x)=\alpha$

3- Trouver un équivalent quand $x\to1^-$ de $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Arctan}(n)x^n$

SOLUTION :

1- Si $\alpha\neq0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha}{\alpha}\right|=1$ et $R=1$

• Si $\alpha=0$, la suite (a_n) est bornée car convergente, donc $|a_nx^n|\leqslant M|x|^n$ où $M=\sup_n|a_n|$, par majoration par une série géométrique, la série entière converge si $|x|<1$ et son rayon de convergence est $\geqslant1$

2- • Supposons d'abord que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ |a_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

alors, pour tout $x\in[0,1[$,

$$\left|(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty}a_nx^n\right|\leqslant|1-x|\sum_{n=n_0}^{\infty}\underbrace{|a_n|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}}.|x^n|\leqslant|1-x|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=n_0}^{\infty}|x^n|=(1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^{n_0}}{1-x}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{n_0-1}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{n_0-1}a_n$ (somme finie) et $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1}a_nx^n=0$

donc $\exists\eta>0,\ \forall x,1-\eta<x<1\implies\displaystyle\left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1}a_nx^n\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall x \in [0,1[,\ 1-\eta < x < 1 \implies |(1-x)S(x)| \leqslant \left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n\right| + \left|(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a ainsi montré que :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, 1-\eta < x < 1 \implies |(1-x)S(x)| \leqslant \varepsilon$

c'est à dire que : $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)S(x) = 0$

- Soit (a_n) une suite complexe convergente de limite $\alpha \in \mathbb{C}$.

En posant $a_n = \alpha + b_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

alors, $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha + b_n)x^n = \frac{\alpha}{1-x} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}_{T(x)}$

d'après l'étude qui précède, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)T(x) = 0$ et donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)S(x) = \alpha}$

3- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Arctan}(n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\pi}{2(1-x)}$

4.5 Equivalents aux bornes du domaine de convergence *

a) On considère deux suites non nulles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls.

On suppose que :
- $*$ $a_n \overset{n\to\infty}{\sim} b_n$ (1)
- $*$ la série $\sum a_n$ diverge (2)
- $*$ la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. (3)

a1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} S_a(x) = +\infty$

a2) Montrer que $S_a(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} S_b(x)$

a3) On note $A_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ en fonction de $S_a(x)$

a4) Montrer que $S'_a(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} S'_b(x)$

b) **Applications :**

b1) Calculer un équivalent quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=0}^{+\infty}(5n^3 - 8n^2 + n + 3)x^n$

p étant un entier quelconque, calculer un équivalent quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, x^n$

b2) Calculer un équivalent quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln n\, x^n$

b3) On rappelle que la suite $(w_n) = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis vérifie les propriétés suivantes : $w_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $w_n \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Calculer le dévelopement en série entière de la fonction $\left(x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

En déduire un équivalent quand $x \to 1^-$ de $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

b4) Calculer un équivalent quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n$

b5) Calculer un équivalent quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ (on pourra utiliser a2) et a3))

b6) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n!} \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)} x^n$

SOLUTION :

a1) Soit $A > 0$ (aussi grand qu'on veut)

Puisque $\sum a_n$ diverge, il existe $n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ a_0 + a_1 + ... + a_n \geq A + 1$

Le polynôme $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ étant continu, $\lim\limits_{x\to 1^-}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_0 + a_1 + ... + a_n$

donc il existe $\eta > 0, \quad 1-\eta < x < 1 \implies a_0 + a_1 + ... + a_n - 1 \leq a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

donc $\quad 1-\eta < x < 1 \implies A \leq a_0 + a_1 + ... + a_n - 1 \leq a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \leq S_a(x)$

On a ainsi montré que $\quad \forall A > 0, \exists \eta > 0, \quad 1-\eta < x < 1 \implies A \leq S_a(x)$

c'est à dire que : $\boxed{\lim_{x\to 1^-} S_a(x) = +\infty}$

a2) Soit $\varepsilon > 0$ les suites (a_n) et (b_n) étant équivalentes, $\exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \ \ a_n(1-\varepsilon) < b_n < a_n(1+\varepsilon)$

$\implies \forall n \geq n_0, \ \ -a_n\varepsilon < b_n - a_n < a_n\varepsilon \quad \implies \quad |b_n - a_n| < a_n\varepsilon$

La suite (a_n) n'étant pas nulle, $\exists k_0, a_{k_0} \neq 0$ et pour tout $x \in]0,1[, S_a(x) > a_{k_0}x^{k_0} > 0$

$$\forall x \in]0,1[, \quad \left|\frac{S_b(x)}{S_a(x)} - 1\right| = \frac{\left|\sum_{n=0}^{n_0}(b_n - a_n)x^n\right|}{S_a(x)} \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0}|b_n - a_n|x^n}{S_a(x)} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\overbrace{|b_n - a_n|}^{\leq \varepsilon a_n}x^n}{S_a(x)}$$

or $\quad \dfrac{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|a_n - b_n|x^n}{S_a(x)} \leq \dfrac{\varepsilon.\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}a_n x^n}{S_a(x)} \leq \dfrac{\varepsilon.S_a(x)}{S_a(x)} \leq \varepsilon$

et $\quad \forall x \in]0,1[, \quad \dfrac{\sum_{n=0}^{n_0}|b_n - a_n|x^n}{S_a(x)} \leq \dfrac{\sum_{n=0}^{n_0}|b_n - a_n|}{S_a(x)} \qquad (\text{ car } 0 < x < 1 \text{ })$

$\sum_{n=0}^{n_0}|b_n - a_n|$ est indépendant de x et $\lim_{x\to 1^-} S_a(x) = +\infty$, donc $\exists \eta > 0, \ \ \forall x \in]1-\eta, 1[, \quad \dfrac{\sum_{n=0}^{n_0}|b_n - a_n|}{S_a(x)} < \varepsilon$

donc $\quad \forall x \in]1-\eta, 1[, \quad \left|\dfrac{S_b(x)}{S_a(x)} - 1\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

On a ainsi montré que $\quad \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x, \ \ 1-\eta < x < 1 \implies \left|\dfrac{S_b(x)}{S_a(x)} - 1\right| \leq 2\varepsilon,$

c'est à dire que $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{S_b(x)}{S_a(x)} = 1 \quad$ ou encore que $\quad \boxed{S_b(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} S_a(x)}$

a3) La suite de terme général $A_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ est le produit de Cauchy des suites (a_n) et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$

Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}1.x^n$ ayant pour rayon de convergence 1, la série produit $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1. La minoration $a_n \leq A_n$ entraîne la divergence de la série $\sum A_n$ et la série $\sum A_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. La suite (A_n) vérifie donc les conditions (2) et (3).

Donc $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}A_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = S_a(x)\dfrac{1}{1-x}$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}A_n x^n = \frac{S_a(x)}{1-x}}$$

a4) Par les hypothèses (2) et (3), la série $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[,$ et est dérivable sur $]-1,1[$: $\quad \forall x \in]-1,1[, \ \ S'_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}n.a_n x^{n-1}$

L'hypothèse (1) entraîne les mêmes conclusions pour la série $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$

(1) $\quad \implies \quad n.a_n \overset{n\to\infty}{\sim} n.b_n$

Les suites $(n.a_n)$ et $(n.n_n)$ vérifient également les conditions (1), (2) et (3),

donc $\quad \sum_{n=0}^{+\infty}n.a_n x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty}n.b_n x^n \quad$ soit $\quad x.S'_a(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} x.S'_b(x)$

et finalement, $\boxed{S'_a(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} S'_b(x)}$

b) **Applications**

b1) • On sait que $\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n \quad$ et par le théorème de dérivation des séries entières,

$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$

$\dfrac{2}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$\dfrac{6}{(1-x)^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

Or, $(5n^3 - 8n^2 + n + 3) \overset{n\to\infty}{\sim} 5n^3 \overset{x\to 1^-}{\sim} 5n(n-1)(n-2)$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(5n^3 - 8n^2 + n + 3)x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} 5n(n-1)(n-2)x^n = 5x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = \frac{30x^3}{(1-x)^4}$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(5n^3 - 8n^2 + n + 3)x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{30}{(1-x)^4}}$

• Plus généralement, $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-p+1)x^{n-p}$

(récurrence sans difficulté)

Or $\quad n^p \overset{n\to\infty}{\sim} n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-p+1)x^n = \frac{p! x^p}{(1-x)^{p+1}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p! x^p}{(1-x)^{p+1}}$

Donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}}$

b2) Rappelons que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad$ avec $\quad \lim \varepsilon_n = 0$

et donc $\quad 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \ln n$

D'après a2), on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \; x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n$

Définissons les suites (a_n) et (b_n) par : $\quad a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, \; a_n = \frac{1}{n}$

et $\quad \forall n \geq 0, \; b_n = 1$

Soit (c_n) le produit de Cauchy de ces deux suites : $c_0 = a_0 b_0 = 0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \qquad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + \frac{1}{2}$

et $\forall n \geq 1, \; c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n}$

Pour $x \in]-1,1[$, les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes, il en va de même de la série produit $\sum c_n x^n$, et

$\forall x \in]-1,1[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$, c'est à dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = -\ln(1-x)\frac{1}{1-x}$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \; x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$

b3) $\forall x \in]-1,1[, \; \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})...(-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}(-x)^n$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}}{n!}(-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n$$

Or $\quad \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \dfrac{2}{\pi} w_{2n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

D'après le résultat a), on peut affirmer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{\pi n}}$

et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}}$

b4) • **Première méthode :**

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{n}-1) \quad \text{(méthode de comparaison série - intégrale)}$$

donc $\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et d'après a1),

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ puis d'après a3),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2(1-x)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}}}$$

• **Deuxième méthode :**

On a montré que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ et par dérivation (cf a4) : $\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}} \overset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{-\sqrt{\pi}}{(1-x)^{3/2}}$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{x\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{3/2}}$

b5) Soit (a_n) la suite telle que $a_n = 1$ si $\exists k$ tel que $n = 2^k$et $a_n = 0$ sinon, de sorte que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(2^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

La suite (a_n) vérifie les propriétés (2) et (3) car ses termes sont nuls, sauf une infinité d'entre eux, qui valent 1.

Soit $A_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. La suite (A_n) vérifie elle aussi les propriétés (2) et (3).

n étant donné, soit m la plus grand entier tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$: $m = E(\log_2 n) = E\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)$

A_n est le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à n qui sont des puissances de 2, c'est à dire le nombre d'entiers k tels que $2^k \leq n$, or ces entiers sont $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^m$, il y en a $m+1$. Donc $A_n = E(\log_2 n)+1 = E\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)+1$

Dès lors, $A_n \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln 2}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{+\infty} \ln n\, x^n$ (d'après a1))

$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)\ln 2}$ (d'après b2))

$\frac{1}{(1-x)}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)\ln 2}$ (d'après a3))

et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \overset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln 2}$

Finalement, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} \overset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln 2}}$

4.6 Croissance d'une série entière à l'infini : *

On considère une série entière $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence R non nul.

1- Montrer que pour tout réel r tel que $0 < r < R$ et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-imt}dt = 2\pi a_m r^m$.

2- On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence infini.

a) Montrer que si S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors S est constante.

b) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $S(z) = O(z^p)$ quand $z \to +\infty$, alors $S(z)$ est un polynôme de degré $\leq p$.

SOLUTION : 1- $\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-imt}dt = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n e^{int}\right)e^{-imt}dt$

$= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{a_n r^n e^{i(n-m)t}}_{u_n(t)}\right)dt \qquad \| u_n \|_{[0,2\pi]}^{\infty} = \sup_{t\in[0,2\pi]} |a_n r^n e^{i(n-m)t}| = |a_n| r^n$, série cvgte.

par convergence normale donc uniforme de la série de fonctions sur le segment $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-imt}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-m)t}\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt\right)}_{0\ si\ n\neq m}$$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 2\pi & \text{si} \quad m = n \end{cases}$

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-imt}dt = 2\pi a_m r^m$

2 -a) Si S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |S(z)| \leq M$

donc, pour tout $m \geq 1$, $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-imt}dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |S(re^{it})e^{-imt}|dt \leq \int_0^{2\pi} M dt = 2\pi M$

$\Longrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall r > 0,\ |2\pi a_m r^m| \leq 2\pi M$

$\Longrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall r > 0,\ |a_m| \leq \dfrac{M}{r^m}$

donc, pour tout $m \geq 1, a_m = 0$ (faire tendre r vers $+\infty$)

Il en résulte que S est une fonction constante.

2 -b) Supposons que $S(z) = O(z^p)$ quand $|z| \to +\infty$, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |S(z)| \leq M|z^p|$

alors le même calcul montrer que pour tout $m > p$, pour tout $r > 0$, $|a_m| \leq \dfrac{M}{r^{m-p}}$

et donc, pour tout $m > p$, $a_m = 0$ (faire tendre r vers $+\infty$)

Il en résulte que $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n z^n$ est une fonction polynomiale de z.