Suites et séries numériques

$\underset{x \to 0}{\sim}$

1 Suites numériques :

1.1 Suites extraites

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{4n+1}) , (u_{4n+3}) et (u_{5n}) convergent . Montrer que la suite (u_n) converge .

medskip ***SOLUTION*** :

Soient $L_1 = \lim u_{2n},\ \ L_2 = \lim u_{4n+1},\ \ L_3 = \lim u_{4n+3},\ \ L_4 = \lim u_{5n}$

La suite $(u_{20n+5}) = (u_{4(5n+1)+1})$ est extraite de (u_{4n+1}) donc elle converge et a pour limite L_2. Elle est également extraite de (u_{5n}) donc elle converge aussi vers L_4. Par unicité de la limite, $L_2 = L_4$.

La suite $(u_{20n+15}) = (u_{4(5n+3)+3})$ est extraite de (u_{4n+3}) donc elle converge et a pour limite L_3. Elle est également extraite de (u_{5n}) donc elle converge aussi vers L_4. Par unicité de la limite, $L_3 = L_4$.

Les suites (u_{4n+1}) et (u_{4n+3}) sont les suites extraites de rangs pairs et impairs respectivement de la suite (u_{2n+1}). Elles convergent et ont même limite car $L_2 = L_3 = L_4$ donc la suite (u_{2n+1}) converge et a pour limite $L_2 = L_3 = L_4$.

La suite (u_{10n}) est extraite de (u_{2n}) et de (u_{5n}) donc $L_1 = L_4$.

Finalement, $\lim u_{2n} = L_1 = L_4 = L_2 = \lim u_{2n+1}$ donc la suite (u_n) converge .

1.2 Convergence

1.2.1 Utilisation d'un développement :

Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

SOLUTION **:**

• Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, u_n présente la forme indéterminée 1^∞. On résoud ce type de forme indéterminée en prenant le logarithme :

• $\ln(u_n) = n\ln(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}) = 3 - 2 = 1$

donc $\ln(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} - 1 \quad$ (puisque $\ln(y) \underset{y\to1}{\sim} y - 1$)

$\Longrightarrow \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} - 1) = n(3\sqrt[n]{2} - 3 - 2\sqrt[n]{3} + 2) = n\left(3(\sqrt[n]{2} - 1) - 2(\sqrt[n]{3} - 1)\right)$

Par ailleurs, $\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1 = \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

donc $3(\sqrt[n]{2} - 1) - 2(\sqrt[n]{3} - 1) = 3\left(\dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - 2\left(\dfrac{\ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$\Longrightarrow \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(3(\sqrt[n]{2} - 1) - 2(\sqrt[n]{3} - 1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\ln(2) - 2\ln(3) + o(1)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 3\ln(2) - 2\ln(3) = \ln\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right) = \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{8}{9}}$

1.2.2 Algorithme de calcul d'une racine carrée :

On considère un réel $a > 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

a) Etudier la convergence de la suite (u_n).

b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$

Calculer v_n en fonction de v_0.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec 100 décimales exactes. Faire ce calcul avec MAPLE, et controler la valeur trouvée avec celle de $\sqrt{2}$ donnée par MAPLE.

SOLUTION **:** a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a - u_n^2}{u_n}\right)$

Pour connaitre le signe, il faut comparer a et u_n^2, ou ce qui revient au même, $\sqrt{a}$ et u_n.

$u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0$, donc $\forall n \geqslant 1,\ u_n \geqslant \sqrt{a}$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a - u_n^2}{u_n}\right) \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle est convergente. Soit L sa limite.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, on obtient : $L^2 = a$

Puisque $\forall n, u_n \geqslant 0$, $L \geqslant 0$. Donc $\boxed{L = \sqrt{a}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \dfrac{u_n + \frac{a}{u_n} \ - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} \ + 2\sqrt{a}} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{u_n^2 + 2u_n\sqrt{a} + a} = \left(\dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2$

donc $v_1 = v_0^2$, $\quad v_2 = v_1^2 = v_0^4$ et par récurrence immédiate, $v_n = (v_0)^{2^n}$

1.2.3 Moyenne arithmético-géometrique :

On considère deux réels $x > 0$ et $b > 0$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = x \\ b_0 = y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{array}\right.$$

a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune.
On notera $\mu(x, y)$ cette limite commune, appelée "moyenne arithmético-géometrique de x et y"

b) Montrer que $\forall x, y, \lambda \in]0, +\infty[,\ \mu(\lambda\, x, \lambda\, y) = \lambda\mu(x, y)$
Il suffit alors de savoir calculer $\mu\left(1, \frac{x}{y}\right)$ pour calculer $\mu(x, y)$
et que : $\forall x, y \in]0, +\infty[,\ \mu(x, y) = \mu(y, x)$

c) Avec MAPLE calculer 10 décimales exactes de $\mu(1, 2)$.

SOLUTION **:**

1.2.4 Suite récurrente 1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$u_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geq 1, \quad u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$ (2 apparait n fois sous les racines)

Etudier la convergence de la suite (u_n).

SOLUTION :

Remarquons que $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $\forall n \geq 1,\ u_n \geq 0$

$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \dfrac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \dfrac{-(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$ est du signe de $2 - u_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2$.

C'est vrai pour $n = 1$. Supposons que $u_n \leq 2$, alors $2 + u_n \leq 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{4} = 2$

Donc $\forall n \geq 1,\ u_n \leq 2$.

Il en résulte que $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{\overbrace{(u_n + 1)}^{\geq 0}\overbrace{(2 - u_n))}^{\geq 0}}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Etant croissante et majorée par 2, la suite (u_n) est convergente et $L = \lim u_n \leq 2$.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, on obtient $L = \sqrt{2 + L}$ soit $L^2 = L + 2$ et donc $L = -1$ ou $L = 2$. La suite (u_n) étant à termes positifs, $L = \lim u_n = 2$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim u_n = 2}$$

1.2.5 Récurrence affine (ENSI)

a) Rechercher les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifient la preopriété (P):
$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + k$, k réel donné.

b) Même question pour la relation (Q) :
$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n + k$

SOLUTION :

a) La suite constante $(c_n)_{n\geq 0}$, de valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifie la propriété (P) si et seulement si :

$\lambda = 2\lambda + 3\lambda + k \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -\dfrac{k}{4}$

Soit désormais $(c_n)_{n\geq 0}$ la suite constante de valeur $-\dfrac{k}{4}$

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}, c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3u_n + k \quad (*)$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle quelconque.

(u_n) est solution de $(P) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + k$

$\Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, (u_{n+2} - c_{n+2}) = 2(u_{n+1} - c_{n+1}) + 3(u_n - c_n) + (k - k)$

(en faisant la différence avec la relation $(*)$)

$\Longleftrightarrow \quad$ la suite $(u_n) - (c_n)$ vérifie la propriété (P_0) :

$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$

Cette dernière relation (P_0) est une relation de récurrence linéaire à deux pas. L'équation caractéristique est : $x^2 = 2x + 3$

Elle a pour solutions -1 et 3.

Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - c_n = \lambda 3^n + \mu(-1)^n$

et finalement, $\boxed{\text{les suites solutions de } (P) \text{ sont les suites } (u_n) \text{ de la forme : } u_n = \lambda 3^n + \mu(-1)^n - \dfrac{k}{4}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

b) Même démarche : on recherche une suite particulière solution de l'équation complète (Q) et on ajoute la solution générale de l'équation homogène (Q_0) : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$

Mais cette fois, il n'existe pas de solution de (Q) constante.

On reherche alors une solution de la forme $(c_n) = (\lambda\, n)$

(c_n) est solution de (Q) $\iff$ $\forall n,\ \lambda(n+2) = -2\lambda(n+1) + 3\lambda n + k$

$\iff \lambda = \dfrac{k}{4}$

Les suites vérifiant la relation (Q_0) : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$ sont les suites de la forme :

$u_n = \lambda 1^n + \mu(-3)^n$ (l'équation caractéristique est : $x^2 = -2x + 3$)

finalement, $\boxed{\text{les suites solutions de } (Q) \text{ sont les suites } (u_n) \text{ de la forme : } u_n = \lambda + \mu(-3)^n + \dfrac{k}{4}n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

1.2.6 ICNA 2008

Etudier la suite (u_n) définie par la donnée des réels u_0 et u_1 et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1}\,\frac{1+u_n}{1+u_{n+1}}$$

SOLUTION : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}(1+u_{n+1}) = u_{n+1}(1+u_n)$

En notant $w_n = u_{n+1}(1+u_n)$, la relation précédente s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n$

La suite (w_n) est donc constante : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 = u_1(1+u_0) = u_{n+1}(1+u_n)$

Si l'un des termes de la suite, u_p, est nul, alors $u_{p+1} = u_p\,\dfrac{1+u_{p-1}}{1+u_p} = 0$ et la suite (u_n) est nulle à partir du rang p.

donc - si $w_0 = 0$, la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

- si $w_0 \neq 0$, alors $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{w_0}{1+u_n}$

La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence homographique.

Les points fixes de la fonction homographique $t \mapsto \dfrac{w_0}{1+t}$ sont les racines de l'équation $x^2 + x - w_0 = 0$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 + 4w_0$

<u>1^{er} *cas :*</u> si $\Delta < 0$ (c'est à dire $w_0 < -\frac{1}{4}$), l'équation n'a pas de racine réelle et la suite réelle (u_n) ne peut pas converger. C'est une suite divergente.

<u>2^{me} *cas :*</u> $\Delta = 0$, c'est à dire $w_0 = -\frac{1}{4}$

alors l'équation $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ a une racine double, $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Si pour un certain p, $a_p = -\frac{1}{2}$, alors $\forall n \geq p, u_n = -\frac{1}{2}$ et la suite est stationnaire de valeur $-\frac{1}{2}$

Dans le cas général, considérons la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{2}}$

alors, $\forall n,\ v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{-\frac{1}{4}}{1+u_n} + \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{2 - \frac{1}{1+u_n}} = \dfrac{4(1+u_n)}{2u_n+1} = \dfrac{2(u_n+\frac{1}{2})+1}{u_n+\frac{1}{2}} = 2 + v_n$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + 2n$.

Il s'ensuit que $\lim(v_n) = +\infty$ et $\boxed{\lim(u_n) = -\frac{1}{2}}$

<u>3^{me} *cas :*</u> $\Delta > 0$, c'est à dire $w_0 > -\frac{1}{4}$

alors l'équation $x^2 + x - w_0 = 0$ a deux racines réelles distinctes, qu'on notera α et β.

Si pour un certain p, $a_p = \beta$, alors $\forall n \geq p, u_n = \beta$ et la suite est stationnaire de valeur β

Dans le cas général, considérons la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

alors, $\forall n,\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{\frac{w_0}{1+u_n} - \alpha}{\frac{w_0}{1+u_n} - \beta} = \dfrac{w_0 - \alpha(1+u_n)}{w_0 - \beta(1+u_n)} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha - \alpha(1+u_n)}{\beta^2 + \beta - \beta(1+u_n)}$

$v_{n+1} = \dfrac{\alpha(\alpha - u_n)}{\beta(\beta - u_n)} = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}\, v_n$

La suite (v_n) est une suite géometrique de raison $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n$.

Les racines α et β sont des réels ni égaux ni opposés. Notons α celui qui a la plus petite valeur absolue : $0 < |\alpha| < |\beta|$ $\quad(\alpha = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2})$

Alors $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ et donc $\lim(v_n) = 0$, qui entraîne finalement que $\boxed{\lim(u_n) = \alpha = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}}$

1.2.7 Suite complexe :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Etudier la convergence de la suite (z_n).

SOLUTION :

- Si $z_0 = 0$, alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 0$
  Sinon, soit $\rho = |z_0| > 0$
- Soit $\theta = \mathrm{Arg}(z_0)\ \in]-\pi, \pi]$
  Si $\theta = \pi$ alors $z_0 = -|z_0|$, $z_1 = 0$ et $\forall n \geq 1; z_n = 0$
- Supposons désormais que $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$

Pour $n \geq 0$, soient $\rho_n = |z_n|$ et $\theta_n = \mathrm{Arg}(z_n)$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n}{2} = \rho_n e^{i\frac{\theta_n}{2}}\,\frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2} = \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}.$$

Cette formule permet de montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,\ \begin{cases} \theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& (1) \\ \theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} & (2) \\ \rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & (3) \end{cases}$

$$(2) \implies \theta_n = \frac{\theta}{2^n}$$

$$(3) \implies \rho_n = \rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}})}$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-2}})}$$

$$\implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^2}\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-3}}\right).\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-3}})}$$

$$..... \implies \rho_n.\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\rho}{2^n}\sin\theta$$

$$\implies \rho_n = \rho\frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \overset{n\to+\infty}{\sim} \rho\frac{\sin\theta}{2^n\frac{\theta}{2^n}} = \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Ainsi, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0 \end{cases}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta}e^{i0} = \dfrac{\rho\sin\theta}{\theta}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{\rho\sin\theta}{\theta}}$$

1.3 Etude de comportement asymptotique:

1.3.1 Recherche d'équivalent (ENSI)

Trouver une relation de récurrence concernant $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ et montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$

SOLUTION : $I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x).\tan^n x\,dx =$

$$= \left[\ \frac{1}{n+1}.\tan^{n+1} x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(\underbrace{\tan x - 1}_{\leq 0})\,dx \leq 0$

La suite (I_n) est décroissante.

donc $\quad I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

et l'encadrement $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$ entraine que $\boxed{I_n \sim \dfrac{1}{2n} \text{ quand } n \to +\infty}$

1.3.2 Intégrale de Wallis, recherche d'équivalent (très classique) :

Soit $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

1- Etablir une relation de récurrence sur les termes de la suite (w_n),
Exprimer w_n à l'aide de factorielles.

2- Étudier les variations de (w_n) et la suite $(n.w_n.w_{n-1})$
En déduire un équivalent de w_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

1- • $w_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, \sin^n x\, dx = \Big[-\cos x\, \sin^n x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2 x\, \sin^{n-1} x\, dx.$

$= n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\, \sin^{n-1} x\, dx = n(w_{n-1} - w_{n+1})$

d'où $\boxed{(n+1)w_{n+1} = n\, w_{n-1}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, w_n$

• Pour les indices pairs, on obtient :

$\forall p \in \mathbb{N},\ w_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p}\, w_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}\, w_{2p-4} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)...5.3.1}{2p(2p-2)...6.4.2}\, w_0$

$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ w_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2}\, w_0 = \dfrac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2}\, \dfrac{\pi}{2}}$

(en multipliant en haut et en bas par $2p(2p-2)...6.4.2 = 2^p\, p!$

et en tenant compte de l'égalité $w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$)

• Pour les indices impairs, on obtient :

$\forall p \in \mathbb{N},\ w_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}\, w_{2p-1} = \dfrac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}\, w_{2p-3} = \dfrac{2p(2p-2)...4.2}{(2p+1)(2p-1)...5.3}\, w_1$

(en multipliant en haut et en bas par $2p(2p-2)...6.4.2 = 2^p\, p!$

et en tenant compte de l'égalité $w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = 1$)

$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ w_{2p+1} = \dfrac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}}$

2- • $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\underbrace{\sin x - 1}_{\leq 0})\, dx \leq 0$

La suite (w_n) est décroissante :

$w_{n+1} \leq w_n \leq w_{n-1} = \dfrac{n+1}{n-1} w_{n+1} \quad$ donc $\quad 1 \leq \dfrac{w_n}{w_{n+1}} \leq \dfrac{w_{n-1}}{w_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n-1}$

on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{w_{n+1}} = 1$ c'est à dire que $w_{n+1} \sim w_n \quad$ quand $\quad n \to +\infty$

L'égalité $(n+1)w_{n+1} = n\ w_{n-1}$ entraîne que $\quad (n+1)w_{n+1}w_n = n\ w_n w_{n-1} \quad$ c'est à dire que la suite $(\underbrace{n w_n w_{n-1}}_{v_n})$ est constante.

$v_1 = w_1.w_0 = \frac{\pi}{2}$

donc $\forall n \geq 1, \quad n\, w_n w_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

• Puisque $w_n \sim w_{n-1}$, il s'ensuit que $n.\ w_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$

et finalement $\quad \boxed{w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \text{ quand } \quad n \to +\infty}$

1.3.3 Racine de polynôme 1 :

1-Montrer que pour tout $n \geq 3$, le polynôme $P_n = X^n - nX + 1$ admet deux racines strictement positives a_n et b_n rangées dans cet ordre croissant.

2- Etudier les variations de la suite (a_n), montrer qu'elle converge et en déterminer un équivalent quand $n \to \infty$

3- Etudier la limite et la rapidité de convergence de la suite (b_n)

(étudier la rapidité de convergence d'une suite (u_n) de limite L revient à rechercher un équivalent simple de $u_n - L$)

SOLUTION :

1- $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

A partir du signe de $P'n(x)$ on peut construire le tableau de variation suivant :

x	0		a_n		1		b_n		$+\infty$
$P_n'(x)$			$-$		0		$+$		
$P_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction polynomiale P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$, . $P_n(0) = 1$ et $P_n(1) = 2 - n < 0$. Etant continue et strictement décroissante, P_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[\underbrace{2-n}_{<0}, 1]$.

Donc il existe un et un seul réel de $[0,1]$ qui donne à P_n la valeur 0. Notons a_n cet unique réel de $[0,1]$.

- La fonction P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc injective.

$P_n(1) = 2 - n < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$. L'image de l'intervale $[1, +\infty[$ par la fonction continue P_n est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est $[2-n, +\infty[$ d'après les valeurs aux bornes. P_n réalise donc une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur l'intervalle $[2-n, +\infty[$.

Puisque $0 \in [2-n, +\infty[$, il existe un et un seul réel b_n dans $[1, +\infty[$ tel que $P_n(b_n) = 0$.

Remarquons que ni a_n ni b_n ne valent 1 puique $P_n(1) = 2 - n \neq 0$

Donc, pour tout $n \geq 3,\ 0 < a_n < 1 < b_n$

2- • Pour placer a_{n+1} par rapport à a_n, recherchons le signe de $P_{n+1}(a_n)$:

x	0		a_{n+1}		1
$P_{n+1}(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	2 - n

$$P_{n+1}(a_n) = P_{n+1}(a_n) - \underbrace{P_n(a_n)}_{0} = (a_n^{n+1} - (n+1)a_n + 1) - (a_n^n - na_n + 1) = a_n^n \underbrace{(a_n - 1)}_{\leq 0} - a_n \leq 0$$

D'après le tableau de variation de P_{n+1}, on en déduit que $a_n \leq a_{n+1}$

La suite (a_n) est décroissante, minorée par 0, donc elle est convergente.

Pour tout $n \geq 2$, $\quad P_n(a_n) = a_n^n - na_n + 1 = 0 \quad$ donc $\quad 0 \leq a_n = \dfrac{1}{n}(a_n^n + 1) \leq \dfrac{2}{n}$

Il en résulte que $\boxed{\lim a_n = 0}$

- Pour n assez grand, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ et donc $0 \leq a_n^n \leq (\frac{1}{2})^n$

L'égalité $na_n = 1 + a_n^n$ entraîne que $\lim na_n = 1$ et que $\boxed{a_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$

3- Remarquons que $P_n(2) = 2^n - 2n + 1 > 0$ pour n assez grand car la suite puissance (n) est négligeable devant la suite géométrique (exponentielle) (2^n) quand $n \to +\infty$. Donc $1 < b_n < 2$.

$\forall n \geq 3,\ b_n^n = n \underbrace{b_n}_{>1} - 1 > n - 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nb_n = +\infty$ et en prenant des équivalents quand $n \to +\infty$, on obtient :

$b_n^n \overset{n\to\infty}{\sim} (nb_n - 1) \overset{n\to\infty}{\sim} nb_n$

Ces suites tendent vers $+\infty$, on peut prendre leurs logarithmes :

$$\ln(b_n^n) = n\ln(b_n) \overset{n\to\infty}{\sim} \ln(nb_n) = \underbrace{\ln(n)}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln(b_n)}_{borne} \overset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

donc $\ln(b_n) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(b_n) = 0$ d'où il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$

Enfin $\ln(b_n) = \ln(1 + \underbrace{(b_n - 1)}_{\to 0}) \overset{n\to\infty}{\sim} (b_n - 1) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

Ainsi, $\boxed{\lim b_n = 1}$ et $\boxed{b_n - 1 \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}}$

1.3.4 Racine de polynôme 2 * :

Soit $P_n(X)$ le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - k)$

a) Montrer qu'il existe une unique racine $r_n \in]0,1[$ telle que $P_n'(r_n) = 0$

b) Montrer que $\forall n > 0, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k - r_n} = 0$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ et déterminer un équivalent de r_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION : a) $P_n(0) = P_n(1) = ... = P_n(n) = 0$

La fonction polynomiale P_n est C^∞ , en lui appliquant le théorème de Rolle, on montre l'existence d'une racine de $P_n'(X)$ dans chacun des $n-1$ intervalles $]0,1[,]1,2[,...,]n-1,n[$. P_n' étant de degré $n-1$, on a là toutes les racines de P_n' qui est scindé dans $\mathbf{R}[X]$. En particulier, P_n' admet une unique racine r_n dans $]0,1[$.

b) $P_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (X-j) \right)$

d'où $\dfrac{P_n'(X)}{P_n(X)} = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{X-j}$ et en remplaçant l'indéterminée par r_n , $\dfrac{\overbrace{P_n'(r_n)}^{=0}}{\underbrace{P_n(r_n)}_{\neq 0}} = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{r_n - j} = 0$

$0 < r_n < 1$ donc pour tout $k \in \{0,1,...,n\}, k-1 < k - r_n < k$ et $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-r_n}$

$0 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k-r_n} = -\dfrac{1}{r_n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k-r_n} > -\dfrac{1}{r_n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

donc $\dfrac{1}{r_n} > \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et puisque la série $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{r_n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$

$\dfrac{1}{r_n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k-r_n}$ et l'encadrement $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-r_n}$ entraine :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-r_n} < \frac{1}{1-r_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

on sait que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon(n) \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$

l'encadrement $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{r_n} < \dfrac{1}{1-r_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$ entraine alors que $\dfrac{1}{r_n} \sim \ln n$

et finalement , $\boxed{r_n \sim \dfrac{1}{\ln n} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty}$

1.3.5 Comportement asymptotique de racine d'équation (Mines):

Montrer que l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution réelle x_n et déterminer un développement asymptotique de (x_n)

SOLUTION : • Soit φ la fonction $x \longrightarrow e^x + x$

$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = e^x + 1 \geq 1$. La fonction φ est strictement croissante et continue sur $\mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

φ réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur$\mathbf{R}$

Pour tout entier n, n admet un unique antécédent par φ, qu'on notera x_n. x_n est l'unique réel tel que $\varphi(x_n) = n$ c'est à dire tel que $e^{x_n} + x_n = n$

• φ étant strictement croissante, φ^{-1} l'est aussi.

Donc $n < n+1 \Rightarrow \varphi^{-1}(n) = x_n < \varphi^{-1}(n+1) = x_{n+1}$

La suite (x_n) est croissante.

Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite $L \in \mathbf{R}$, on aurait $\lim(e^{x_n} + x_n) = e^L + L$, ce qui est incompatible avec l'égalité $e^{x_n} + x_n = n$ quand $n \to +\infty$.

Donc $\lim(x_n) = +\infty$

-Alors $e^{x_n} + x_n \sim e^{x_n} \sim n$ donc $x_n \sim \ln(n)$

Un premier développement asymptotique de (x_n) est $x_n = \ln(n) + o(\ln n)$

-Posons alors $x_n = \ln n + y_n$ (donc $y_n = o(\ln n)$) et cherchons un équivalent de y_n :

$e^{x_n} + x_n = n \quad \Longrightarrow \quad e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n$

$ne^{y_n} + y_n = n - \ln n$ et, en prenant un équivalent pour chaque membre,

$ne^{y_n} \sim n$ donc $\lim e^{y_n} = 1$ et $\lim y_n = 0$

Alors $n(e^{y_n} - 1) = -y_n - \ln n$ et, en prenant un équivalent pour chaque membre, $ny_n \sim -\ln n$

Donc $y_n \sim -\dfrac{\ln n}{n}$

Un deuxième développement asymptotique de (x_n) est $x_n = \ln(n) - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

-Posons maintenant $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n$ (donc $z_n = o(\frac{\ln n}{n})$) et cherchons un équivalent de z_n :

$e^{\ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n} + \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n = n$

Le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne :

$$n\left[\ 1+\left(\ -\frac{\ln n}{n}+z_n\ \right)+\frac{1}{2}\left(\ \frac{\ln^2 n}{n^2}-2z_n\frac{\ln n}{n}+z_n^2\ \right)+o\left(\ -\frac{\ln n}{n}+z_n\ \right)^2\ \right]$$
$$+\ln n-\frac{\ln n}{n}+z_n=n$$

$$nz_n+\frac{\ln^2 n}{2n}-z_n\ln n+\frac{nz_n^2}{2}+o\left(-\frac{\ln n}{n}+z_n\right)^2-\frac{\ln n}{n}+z_n=0$$

puisque $z_n=o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, $\quad o\left(-\dfrac{\ln n}{n}+z_n\right)^2=o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$

donc $nz_n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{z_n}{2}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln n}{n}-\dfrac{\ln^2 n}{2n}+o\left(+\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$

en prenant un équivalent pour chaque membre, $nz_n\sim-\dfrac{\ln^2 n}{2n}$ et donc $z_n\sim-\dfrac{\ln^2 n}{2n^2}$

Ce qui complète le développement asymptotique de (x_n) :

$$\boxed{x_n=\ln(n)-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\right)}$$

1.3.6 Suite récurrente 1 :

La suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}_+^*$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$

Déterminer la limite de (u_n) et un équivalent simple de u_n quand $n\longrightarrow+\infty$

SOLUTION : • Une récurrence immédiate montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est défini et strictement positif.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n}>0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Soit elle est majorée et alors elle converge vers un réel L, soit elle ne l'est pas et alors elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge vers $L\in\mathbb{R}$. Alors $L\geq u_0>0$ (car (u_n) est croissante).

Donc $L=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)=L+\dfrac{1}{L}$ d'où $\dfrac{1}{L}=0$ ce qui est absurde.

Donc la suite ne peut pas converger et $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty}$

• $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}^2=\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)^2=u_n^2+2+\dfrac{1}{u_n^2}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)=2$

Posons $a_n=u_{n+1}^2-u_n^2$ pour $n\geq 0$, de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

Soit $b_n=\dfrac{a_0+a_1+a_2+...+a_n}{n+1}=\dfrac{u_{n+1}^2-u_0^2}{n+1}$

D'après le théorème de Cesaro, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$ donc $\dfrac{u_{n+1}^2-u_0^2}{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}2$

La constante u_0^2 est négligeable devant u_{n+1}^2, de limite infinie, donc $\dfrac{u_{n+1}^2}{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}2$

d'où $u_n^2\sim 2n$ et $u_n\sim\sqrt{2n}$

$$\boxed{u_n\sim\sqrt{2n}\text{ quand }n\to\infty}$$

1.3.7 Suite récurrente 2 :

La suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}_+^*$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$

Déterminer la limite de (u_n) et un équivalent simple de u_n quand $n\longrightarrow+\infty$

SOLUTION :

Méthode analogue. On cherche $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ ait une limite finie quand $n\to+\infty$

On trouve $\alpha=\dfrac{3}{2}$ et $\boxed{u_n\sim\left(\dfrac{3}{2}n\right)^{\frac{2}{3}}}$

1.3.8 Comportement asymptotique de $u_{n+1}=\sin(u_n)$

• La suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin(u_n)$

Déterminer la limite de (u_n) et un équivalent simple de u_n quand $n\to+\infty$

SOLUTION : Remarquons que $u_1=\sin(u_0)\in[-1,1]\subset[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Par imparité de la fonction sinus, le changement de u_0 en son opposé change tous les termes de la suite (u_n) en leurs opposés. On peut donc supposer que $u_1\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Si $u_1=0$, la suite est nulle à partir du rang 1.

Supposons que $u_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors, par récurrence immédiate, pour tout $n \geq 2,\ u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq x$ donc pour tout $n \geq 2,\ 0 \leq u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. Etant minorée par 0, elle est convergente et sa limite $L \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifie $\sin L = L$ donc $L = 0$ car 0 est le seul réel vérifiant cette égalité.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$

• Recherchons un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle quand $n \to +\infty$:

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin(u_n)^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \overset{n\to\infty}{\sim} u_n^\alpha\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6}\right) \quad (\text{ car } (1+u)^\alpha - 1 \overset{u\to 0}{\sim} \alpha u\ )$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \overset{n\to\infty}{\sim} -\alpha\frac{u_n^{2+\alpha}}{6}$$

En prenant $\alpha = -2$, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$

D'après le théorème de Cesaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)}{n} = \frac{1}{3}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}}{n} = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$

donc $u_n^2 \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et finalement, $\boxed{u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$

1.3.9 Comportement asymptotique de $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

La suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 \in]-1, +\infty[$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

Etudier pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie (c'est à dire u_n défini pour tout n), étudier sa convergence et calculer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

Posons $\forall \in]-1, +\infty[,\ f(x) = \ln(1 + x)$

f est croissante sur $]-1, +\infty[$, $(f(x) - x)' = \frac{-x}{1 + x}$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
		-		-	

• Si $u_0 = 0$, alors la suite (u_n) est la suite nulle.

• Si $u_0 > 0$, l'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f, pour tout n, u_n est défini et appartient à $]0, +\infty[$.

dans ce cas, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc convergente. Sa limite L vérifie $f(L) = L$ (car f est continue) et donc $L = 0$ (car l'équation $f(x) = x$ n'admet que 0 pour solution, voir les variations de $x \longrightarrow f(x) - x$)

donc, si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

Recherchons un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle quand $n \to +\infty$:

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = (\ln(1 + u_n))^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right)^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left(\left(1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right)^\alpha - 1\right)$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \overset{n\to+\infty}{\sim} -u_n^\alpha.\alpha.\frac{u_n}{2} \quad (\text{ car } (1+u)^\alpha - 1 \overset{u\to 0}{\sim} \alpha u\ )$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \overset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha\frac{u_n^{\alpha+1}}{2}$$

Prenons $\alpha = -1$, de sorte que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}$

D'après le théorème de Cesaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right)}{n} = \frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}}{n} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = \frac{1}{2}$

Finalement, $\boxed{u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$

• Si $u_0 \in]-1,0[$, supposons que tous les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ soient définis.

pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par -1 car ses termes sont tous définis, donc convergente.

En notant L sa limite et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $L = f(L)$, donc $L = 0$ comme vu plus haut.

donc $0 = L \leq u_n \leq u_0 < 0$, ce qui est impossible.

L'hypothèse faite au départ que tous les termes de la suite sont définis aboutit à une contradiction. Donc seuls un nombre fini de termes u_n sont définis.

1.3.10 * Comportement asymptotique de $u_{n+1} = \ln(1 + a.u_n)$

Soit $a \in]0,1[$ et la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 > 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + a.u_n)$

a) Montrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} b.a^n$

b) Déterminer un équivalent de $(u_n - b.a^n)$ quand $n \to +\infty$

SOLUTION :

a) • Par une récurrence immédiate, pour tout n, $0 \leq u_{n+1} = \ln(1 + a.u_n) \leq a.u_n \leq u_n$, la suite (u_n) est bien définie, décroissante, minorée par 0 donc convergente. Sa limite vérifie $L = \ln(1 + a.L)$ donc $L = 0$.

Par ailleurs, la majoration $u_{n+1} \leq a.u_n$ entraîne par récurrence que $0 \leq u_n \leq a^n u_0$ ce qui montre aussi que $\lim u_n = 0$ puisque $0 < a < 1$.

• Pour montrer que $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} b.a^n$, il faut montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{a^n}\right)_{n\geq 0}$ admet une limite finie.

Soit donc $b_n = \frac{u_n}{a^n}$

pour tout n, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{u_{n+1}}{au_n} = \frac{\ln(1 + au_n)}{au_n} = \frac{au_n - \frac{a^2u_n^2}{2} + o(u_n^2)}{au_n} = 1 - \frac{au_n}{2} + o(u_n)$,

donc $\ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{au_n}{2} = O(a^n)$

Cette équivalence montre que la série $\sum \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ converge absolument, donc que

$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{b_{k+1}}{b_k}\right) = \ln(b_n) - \ln(b_0)$ admet une limite finie l quand $n \to +\infty$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} b_n = e^{\left(\lim_{n\to+\infty} \ln(b_n)\right)} = b > 0$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{a^n} = b$ et donc $\boxed{u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} b.a^n}$

b) • On a montré que $\ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{au_n}{2} \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{ba^{n+1}}{2}$

On sait que si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont deux séries convergentes à termes ≥ 0, alors $ru_n \overset{n\to+\infty}{\sim} rv_n$, où ru_n et rv_n sont les restes d'ordre n de ces séries $\left(ru_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right)$.

Ce résultat vaut aussi pour des séries à termes négatifs.

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(\frac{b_{k+1}}{b_k}\right) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{b}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} a^{k+1}$

$\ln(b) - \ln(b_{n+1}) \overset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{b}{2}\frac{a^{n+2}}{1-a}$

ce qui s'écrit aussi : $\ln(b_n) = \ln(b) + \frac{b}{2}\frac{a^{n+1}}{1-a} + o(a^n)$

$\frac{u_n}{a^n} = b_n = b\exp\underbrace{\left(\frac{b}{2}\frac{a^{n+1}}{1-a} + o(a^n)\right)}_{\to 0\ qd\ n\to\infty}$ et en développant $e^x = 1 + x + o(x)$ en 0 , on obtient :

$u_n = b.a^n\left(1 + \frac{b}{2}\frac{a^{n+1}}{1-a} + o(a^n)\right)$

Soit finalement : $u_n - b.a^n = \frac{b^2}{2}\frac{a^{2n+1}}{1-a} + o(a^{2n})$ et $\boxed{u_n - b.a^n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b^2}{2}\frac{a^{2n+1}}{1-a}}$

1.3.11 Développement asymptotique **

Soient $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^k sur $[0,1]$ et $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer un équivalent de u_n quand $n \to \infty$

b) Même question si on suppose que f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f(0) \neq 0$

c)On suppose que f est de classe C^4 sur $[0,1]$ et que $f(0) = 0$. Déterminer un équivalent et un développement à quatre termes de u_n quand $n \to +\infty$.

Solution :

a) $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}$

La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue et croissante sur $[0,+\infty[$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [k,k+1]$, $\sqrt{k} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{k+1}$ et en intégrant entre k et $k+1$, $\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t}dt \leq \sqrt{k+1}$

soit aussi : $\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t}dt$ et en sommant pour k variant de 1 à n,

$$\int_0^n \sqrt{t}dt \leq \sum_{k=0 \ ou \ 1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t}dt \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}n\sqrt{n} \leq \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} \leq \frac{2}{3}((n+1)\sqrt{n+1} - 1)$$

Les deux termes encadrant $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}$ sont équivalents entre eux, donc $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$

Et finalement $\boxed{u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{3}\sqrt{n}}$

b) f étant de classe C^1 sur $[0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$

$$\forall k \in [[0,n^2]],\ f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + \int_0^{\frac{k}{n^2}} f'(t)dt$$

$$\text{donc} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = nf(0) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{k}{n^2}} f'(t)dt}_{r_n} \qquad (1)$$

f' est bornée sur le segment $[0,1]$ car est continue. Soit $M_1 = \sup_{[0,1]} |f'(t)|$

$$\text{alors} \quad |r_n| \leq \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{k}{n^2}} |f'(t)|dt \leq \sum_{k=0}^{n} M_1\frac{k}{n^2} = \frac{M_1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{M_1 n(n+1)}{2n^2} = \frac{M_1(n+1)}{2n} \leq M_1$$

Donc (r_n) est bornée et l'égalité (1) montre que $\boxed{u_n \overset{n\to\infty}{\sim} nf(0)}$

c) f est de classe C^4 sur $[0,1]$, donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f"(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)dt$$

$$\forall k \in [[0,n^2]],\ f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + f'(0)\frac{k}{n^2} + f"(0)\frac{k^2}{2n^4} + f^{(3)}(0)\frac{k^3}{6n^6} + \int_0^{\frac{k}{n^2}} \frac{(\frac{k}{n^2}-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)dt$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = nf(0) + \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{f"(0)}{2n^4}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6n^6}\sum_{k=0}^{n} k^3 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{k}{n^2}} \frac{(\frac{k}{n^2}-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)dt}_{r_n}$$

Soit $M_4 = \sup_{[0,1]} |f^{(4)}(t)|$

$$\text{alors} \quad |r_n| \leq \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{k}{n^2}} \frac{(\frac{k}{n^2}-t)^3}{3!}|f^{(4)}(t)|dt \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{M_4}{6}\int_0^{\frac{k}{n^2}}\left(\frac{k}{n^2}-t\right)^3 dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{M_4}{24}\left[-\left(\frac{k}{n^2}-t\right)^4\right]_0^{\frac{k}{n^2}}$$

$$\text{donc} \quad |r_n| \leq \frac{M_4}{24n^8}\sum_{k=0}^{n} k^4$$

Rappelons que : $\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = O(n^5) \end{array} \right.$

$$u_n = nf(0)+f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}+f"(0)\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}+f^{(3)}(0)\frac{n^2(n+1)^2}{24n^6}+r_n \quad \text{et } r_n = O\left(\frac{n^5}{n^8}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$u_n = nf(0)+f'(0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)+f"(0)\left(\frac{1}{6n}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{12n^3}\right)+f^{(3)}(0)\left(\frac{1}{24n^2}+\frac{1}{12n^3}+\frac{1}{24n^4}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$u_n = nf(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\left(\frac{f'(0)}{2}+\frac{f"(0)}{6}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{f"(0)}{4}+\frac{f^{(3)}(0)}{24}\right)\frac{1}{n^2}+\left(\frac{f"(0)}{12}+\frac{f^{(3)}(0)}{12}\right)\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Finalement, $\boxed{u_n = nf(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\left(\frac{f'(0)}{2}+\frac{f"(0)}{6}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{f"(0)}{4}+\frac{f^{(3)}(0)}{24}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

En particulier, si $f(0) = 0$, alors $\lim u_n = \frac{1}{2}f'(0)$

1.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass *

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Montrer que de la suite (u_n) on peut extraire (au moins) une suite monotone.

Pour cela, considerer l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n, x_k < x_n\}$. Montrer que si X n'est pas borné, on peut extraire de (u_n) une suite décroissante, et que si X est borné, on peut extraire de (u_n) une suite croissante.

b) Démontrer le **théorème de Bolzano-Weierstrass** :

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Ce théorème est il encore valable pour une suite complexe ?

pour une suite dans un espace vectoriel normé de dimension finie ?

pour une suite dans un espace vectoriel normé quelconque ?

SOLUTION :

a) • Dans le cas où l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n, x_k \le x_n\}$ est non borné (ce qui équivaut à dire infni puisque X est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$),

soit $n_1 \in X$. $\forall k \ge n,\ x_k \le x_{n_1}$, donc $\exists n_2 \in X,\ n_2 \ge n_1$ (sinon X serait majoré)

et donc $x_{n_2} \le x_{n_1}$

puisque X n'est pas majoré, $\exists n_3 \in X,\ n_3 \ge n_2$ et donc $x_{n_3} \le x_{n_2}$ puisque $n_2 \in X$.

puis $\exists n_4 \in X,\ n_4 \ge n_3$ et donc $x_{n_4} \le x_{n_3}$ puisque $n_3 \in X$.

On construit ainsi une suite strictement croissante d'entiers $n_1 \le n_2 \le ... \le n_p$ telle que $x_{n_p} \le ... \le x_{n_2} \le x_{n_1}$

Le processus ne s'arrête jamais car pour tout p, X n'étant pas majoré, $\exists n_{p+1} \in X,\ n_{p+1} \ge n_p$ et $x_{n_{p+1}} \le x_{n_p}$ (puisque $n_p \in X$).

On a ainsi construit une suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, extraite de (x_n) et décroissante (au sens large).

• Dans le cas où l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n, x_k \le x_n\}$ est borné (c'est à dire fini car c'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$), soit $N = \max(X)$ le plus grand élément de X.

soit $n_1 > N$. Puisque $n_1 \notin X$, $\exists n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} > x_{n_1}$

Puisque $n_2 \notin X$, (car $n_2 > n_1 > N$) , $\exists n_3 > n_2$ tel que $x_{n_3} > x_{n_2}$

En poursuivant le processus indéfiniment, ce qui est possible car pour tout entier n_p on peut trouver un entier $n_{p+1} > n_p$, on construit une suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, extraite de (x_n) et strictement croissante.

• Dans les deux cas, on a montré l'existence d'une suite monotone (au sens large) extraite de la suite (x_n).

b) • Soit (x_n) une suite réelle bornée.

D'après a), on peut en extraire une suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ monotone. La suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, monotone et bornée est donc convergente.

• Pour une suite complexe (X_n) ou à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on prend une base de cet espace sur $\mathbb{R}$. Les suite numériques composantes $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n, ..., (x_n^m)_n$ (si $m = \dim_{\mathbb{R}} E$) sont bornées (car (X_n) l'est), donc on peut extraire de chacune une suite convergente.

Soit $(x_{n_p}^1)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente extraite de $(x_n^1)_n$

De la suite bornée $(x_{n_p}^2)_{p\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergente $(x_{n_{p_q}}^2)_{q\in\mathbb{N}}$

Les deux suites $(x_{n_{p_q}}^1)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n_{p_q}}^2)_{q\in\mathbb{N}}$ provenant de la même extraction $q \longrightarrow n_{p_q}$ sont convergentes.

Puis de la suite bornée $(x_{n_{p_q}}^3)_{q\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergente $(x_{n_{p_{q_r}}}^3)_{r\in\mathbb{N}}$

Les trois suites $(x^1_{n_{p_{q_r}}})_{r\in\mathbb{N}}$, $(x^2_{n_{p_{q_r}}})_{r\in\mathbb{N}}$ et $(x^3_{n_{p_{q_r}}})_{r\in\mathbb{N}}$ provenant de la même extraction $r \longrightarrow n_{p_{q_r}}$ sont convergentes.

Et ainsi de suite jusqu'à la suite $(x^m_n)_n$

On a ainsi construit une extraction $k \longrightarrow n_k$ (application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement coisssante) telle que les m suites extraites $(x^1_{n_k})_k, (x^2_{n_k})_k, ..., (x^m_{n_k})_k$ convergent.

La suite $(X_{n_k})_k$ est alors une suite extraite de (X_n) convergente.

Le théorème de Bolzano-Weiertrass est donc encore valable pour une suite complexe ou pour une suite dans un espace vectoriel normé de **dimension finie**.

• Ce théorème n'est plus vrai en dimension infinie :

Soir SB l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme uniforme $N_\infty((u_n)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit Δ^p la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice p, et qui vaut 1 :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^p_n = \delta_{p,n}$ (symbole de Kronecker)

Alors la suite $(\Delta^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais aucune suite extraite n'est convergente.

1.5 Sommes de Riemann :

1.5.1 Exemple 1 :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

SOLUTION : $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1-0}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f\ :\ t \longrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Puisque f est continue sur ce segment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\ \arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

1.5.2 Exemple 2 :

Etudier la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

SOLUTION :

$\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\left(\ln(n!) - n\ln(n)\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\ \ln(k) - \ln(n)\Big) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f\ :\ t \longrightarrow \ln(t)$ sur le segment $[0,1]$ partagé en n intervalles égaux.

Mais la fonction ln n'est pas continue sur $[0,1]$ et on ne peut pas conclure par le théorème sur les sommes de Riemann.

La fonction ln est continue et croissante sur $]0,1]$, donc, pour tout $k \in [[1,n]]$,

$\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}],\quad \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \ln t \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$

et en intégrant, $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \overset{(1)}{\leq} \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln t\ dt \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

En sommant pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$\ln(u_n) \leq \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\ dt$

Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \ln t\ dt = \Big[\ t\ \ln t\Big]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} dt = -\alpha\ln\alpha - 1 + \alpha \quad \overset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} \quad -1$

En passant à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = -1$$

et par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$

Remarque : On aurait pu aussi employer la formule de Stirling

2 Séries :

2.1 Etude de la convergence d'une série

2.1.1 Nature de série 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$

SOLUTION :

• Par une récurrence immédiate, u_n est défini pour tout n et $u_n > 0$.

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \text{ donc, par encadrement, } \lim u_n = 0$$

alors $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$, $\quad u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

• L'équivalence $(-1)^n u_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne permet pas de conclure quand à la nature de $\sum (-1)^n u_n$.

Recherchons un développement de u_n à un ordre supérieur.

Puisque $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, posons $u_n = \dfrac{1}{n} + v_n$ et recherchons un équivalent de v_n.

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad v_{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \quad \text{donc} \quad v_{n+1} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{-u_n}{n+1}$$

(car $e^x - 1 \overset{x\to 0}{\sim} x$)

$$v_{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{-u_n}{n+1} \sim \frac{-1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad v_n \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{(n-1)n} \sim \frac{-1}{n^2}$$

donc $v_n \sim \dfrac{-1}{n^2} = \dfrac{-1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{absolument\ convergentes}$ et $\boxed{\sum (-1)^n u_n \text{ converge.}}$

2.1.2 Nature de série 2

Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$?

SOLUTION :

$$\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= (-1)^n\left(\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3}\right)^3}{6} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$u_n = (-1)^n \dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $(-1)^n \dfrac{\pi}{2n}$ est une série semi-convergente et $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ une série absolument convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$

2.1.3 Nature de série 3 * :

Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\pi e n!)$?

SOLUTION :

Rappelons la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

En appliquant cette formule à la fonction $x \to e^x$ sur le segment $[0,1]$ à l'ordre $n+1$, on obtient :

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n+1)!} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt}_{r_n}$$

$$|r_n| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt\right| \leq \frac{e}{(n+1)!}\left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{(n+2)}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+2)!}$$

$$\pi e n! = \pi n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n+1)!} + r_n\right)$$

$$= \pi \left(\underbrace{n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + ... + \frac{n!}{(n-2)!}}_{entier\ pair\ =2m} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n)!} + \frac{n!}{(n+1)!} + n!.r_n \right)$$
$$= \pi \left(2m + n + 1 + \frac{1}{(n+1)} + n!.r_n \right)$$

La majoration $|r_n| \leq \dfrac{e}{(n+2)!}$ permet d'écrire $n!r_n = \dfrac{b_n}{n^2}$ avec (b_n) suite bornée.

$$u_n = \sin(\pi e n!) = \sin\left(2\pi m + \pi n + \pi + \frac{\pi}{(n+1)} + \pi n!.r_n\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{(n+1)} + \pi n!.r_n\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{(n+1)} + \pi n!.r_n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement, $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}$ est une série semi-convergente et $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ une série absolument convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$

2.1.4 Nature de série 4 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ suivant la valeur du réel a.

SOLUTION :

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right) = \ln\left(\frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}}}\right) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$$
$$= \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Les termes $\dfrac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}$, $o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, $\dfrac{a^2}{2n^2}$, $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ sont ceux de séries absolument convergentes.

Notons w_n la somme de ces 4 termes. La série $\sum w_n$ est convergente.

alors $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{a+1}{2} \cdot \dfrac{1}{n} + w_n$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, car elle vérifie le critère des séries alternées.

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

La série $\sum u_n$ converge donc si et seulement si $a + 1 = 0$, si et seulement si $a = -1$.

2.1.5 Série $\sum n(a_n - a_{n+1})$:

1- Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante, pour laquelle la série $\sum a_n$ converge.
Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

2- Montrer que $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

SOLUTION : 1- Puisque la série $\sum a_n$ converge, $\lim a_n = 0$.

Puisque (a_n) est décroissante et de limite nulle, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$.

En considérant le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$: $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ na_{2n} \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n$$

L'encadrement $0 \leqslant 2na_{2n} \leqslant 2r_n$ montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$

Par ailleurs, $0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} \leqslant 2r_n + a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$ et finalement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0}$, ce qui montre que $\boxed{a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$

2- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + ... + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + n(a_n - a_{n+1})$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n - na_{n+1}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$,

$\boxed{\text{la série } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ converge}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$

2.1.6 Suite ou série ?

La suite (u_n) est définie par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs, et par la relation:

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{u_{n+1} + u_n}$ Etudier la convergence de la suite (u_n).

***SOLUTION* :** Puisque $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, on montre par une récurrence sans difficulté que chaque u_n est défini et strictement positif

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1}}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{u_n(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1} + u_n}$

donc $u_{n+2} - u_{n+1}$ est de signe opposé à $u_{n+1} - u_n$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. On sait que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\{u_{n+1} - u_n\} = \{v_n\}$ converge.

- La suite $(v_n) = (u_{n+1} - u_n)$ est de signes alternés, d'après ce qui précède.
- La relation $|v_{n+1}| = |u_{n+2} - u_{n+1}| = \dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n}|u_n - u_{n+1}| = \underbrace{\dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n}}_{<1}|v_n| < |v_n|$

montre que la suite $(|v_n|)$ est décroissante.

- Si $v_n = u_{n+1} - u_n > 0$, alors $u_{n+1} > u_n > 0$ donc $u_{n+1} + u_n > 2u_n$ et $\dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n} < \dfrac{1}{2}$

on a alors $|v_{n+1}| < \frac{1}{2}|v_n|$

Si $v_n = u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors $v_{n+1} \geqslant 0$ et le calcul précédent montre que $|v_{n+2}| < \frac{1}{2}|v_{n+1}|$

dans tous les cas, on a : $|v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|$ et $|v_{n+2}| \leqslant |v_{n+1}|$

ou : $|v_{n+1}| \leqslant |v_n|$ et $|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{2}|v_{n+1}|$

et donc $\forall n,\ |v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|$

par récurrence, $\forall n,\ |v_{2n}| \leqslant \frac{1}{2^n}|v_0|$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = 0$ et, puisque $(|v_n|)$ est décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

- La série $\{v_n\}$ converge, d'après le critère des séries alternées. La suite (u_n) converge donc.

2.1.7 Suite et série :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs ou nuls et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$

Montrer que : la suite (u_n) converge $\iff$ la série $\sum a_n$ converge.

***SOLUTION* :**

Dans tous les cas, puisque $\forall n, a_n \geq 0$ et $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont > 0

$\forall n, u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

- Supposons que la suite (u_n) converge. Alors sa limite L est strictement positive car $0 < u_0 \leq L$

Puisque que la suite (u_n) converge, la série $\{u_{n+1} - u_n\}$ converge.

Alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \overset{n\to+\infty}{\sim} L(u_{n+1} - u_n)$ et par équivalence la série à termes positifs $\sum a_n$ converge.

- Supposons que la série $\sum a_n$ converge.

(u_n) étant croissante, pour tout $n, u_n \geq u_0 > 0$

donc $0 \leq u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \leq \dfrac{a_n}{u_0}$ et cette dernière série converge par hypothèse.

Donc par majoration la série $\{u_{n+1} - u_n\}$ converge et la suite (u_n) aussi.

2.1.8 Suite et série : (CCP)

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 > 0$ et par la relation :

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{n+1}{x_n}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant n+1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant x_1 + n - 1$

c) Etdudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{x_n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{x_n}$

SOLUTION :

a) Une récurrence immédiate permet de montrer que x_n est défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'égalité $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{x_n} > 0$ montre que la suite (x_n) est strictement croissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n, x_n \geqslant n+1$

La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ admet son minimum sur $]0, +\infty[$ pour $x = 1$ (voir le signe de la dérivée), et qui vaut 2. Donc $x_1 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geqslant 2$. La relation est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons que $x_n \geqslant n+1$. Montrer que $x_{n+1} \geqslant n+2$ équivaut à prouver que $x_n + \dfrac{n+1}{x_n} \geqslant n+2$ ou encore que $x_n^2 - (n+2)x_n + (n+1) \geqslant 0$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - (n+2)X + (n+1)$ a pour discriminant $\delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2$ et a pour racines $\alpha_1 = \frac{n+2+n}{2} = n+1$ et $\alpha_2 = \frac{n+2-n}{2} = 1$

Par hypothèse de récurrence, $x_n \geqslant n+1$, x_n est à l'extérieur des racines α_1 et α_2, donc $Q(x_n) \geqslant 0$, ce qui entraîne que $x_{n+1} \geqslant n+2$

La relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant n+1$ est ainsi montrée par récurrence.

b) Les relation $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{n+1}{x_n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant n+1$ entraînent que $x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{n+1}{n+1} = x_n + 1$

Ajoutons ces relations :

$$\begin{aligned} &x_2 \leqslant x_1 + 1 \\ &x_3 \leqslant x_2 + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &x_n \leqslant x_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

on obtient $x_n \leqslant x_1 + n - 1$

c) Les inégalités précédentes montrent que $n+1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n - 1$ d'où l'on déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

L'équivalence $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ montre que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

• La suite (x_n) étant croissante (voir a)), la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est décroissante et de limite nulle.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{x_n}$ vérifie le critère de Leibniz des séries alternées. Elle est donc convergente.

2.1.9 Critère de Raabe - Duhamel *:

On considère une suite (u_n) de réels strictment positifs, pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + w_n$ où α est un réel > 0 et w_n le terme général d'une série absolument convergente.

a) Rechercher un équivalent de (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum u_n$

b) Reprendre l'étude en montrant que la suite $(v_n) = (n^\alpha u_n)$ converge.

SOLUTION **:** Par hypothèse, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + w_n$ où $\alpha > 0$ et w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

$\Longrightarrow\ \forall n \geqslant 1, \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + w_n\right)$

en sommant cette relation de l'indice 1 à l'indice n,

$$\forall n \geqslant 1, \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{k} + w_k\right)$$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\alpha}{k} = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} w_k = 0$ (puisque $\sum w_k$ converge)

En utilisant le développement limité $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + O(u^2)$, on peut écrire :

$\ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{k} + w_k\right) = -\dfrac{\alpha}{k} + w_k + O\left(\dfrac{1}{k} + w_k\right)^2 = -\dfrac{\alpha}{k} + w'_k$ où w'_k est le terme général d'une série absolument convergente.

d'où, $\forall n \geqslant 1, \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = -\alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w'_k}_{W'_n}$

$\Longrightarrow\ \forall n \geqslant 1, \ln(u_{n+1}) = \ln(u_1) - \alpha\left(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n\right) + W'_n$

$\Longrightarrow\ \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = e^{\ln(u_1) - \alpha\gamma + \varepsilon_n + W'_n} e^{-\alpha \ln(n)}$

En posant $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_1) - \alpha\gamma + \varepsilon_n + W'_n$ (limite finie car $\sum w'_k$ converge), on obtient :

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^L}{n^\alpha} \text{ et finalement, } \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^L}{(n-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^L}{n^\alpha}}$$

On en conclut, par comparaison à une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$, et diverge ssi $\alpha \leqslant 1$

b) On considère la suite $(v_n) = (n^\alpha u_n)$.

$$\forall n \geqslant 1, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1-\frac{\alpha}{n}+w_n\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha$$
$$= \left(1-\frac{\alpha}{n}+w_n\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

(en utilisant le développement limité $\ln(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} \alpha u + O(u^2)$)

$$\forall n \geqslant 1, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+w_n+\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha^2}{n^2}+w_n\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\alpha}{n}O\left(\frac{1}{n^2}\right)+w_nO\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= 1+\underbrace{w_n-\frac{\alpha^2}{n^2}+w_n\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\alpha}{n}O\left(\frac{1}{n^2}\right)+w_nO\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{t_n,\ terme\ general\ d'une\ serie\ absolument\ convergente}$$

$\Longrightarrow \ln(v_{n+1})-\ln(v_n) = \ln(1+t_n)$, et $|\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)| = |\ln(1+t_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |t_n|$

Par équivalence, la **série** $\sum(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n))$ est absolument convergente, la **suite** $(\ln(v_n))$ est convergente, vers un réel L, et par continuité de la fonction exponentielle, la suite $(v_n) = (n^\alpha u_n)$ est convergente vers $L' = e^L > 0$

La relation $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = L' > 0$ montre alors que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L'}{n^\alpha}}$

2.1.10 Séries-intégrales** (Mines)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$ et $f(0) \in [0,1]$.

Justifier que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur unintervalle $[f(0), A[$ dont on notera g la réciproque.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ converge $\iff$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{g(n)}{n^2}$ converge.

SOLUTION **:** $f \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante et continue sur $[0,+\infty[$, donc $f([0,+\infty[)$ est un l'intervalle $[f(0), \lim\limits_{+\infty} f[$ ($\lim\limits_{+\infty} f$, finie ou infinie, existe car f est croissante) et f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[f(0), \lim\limits_{+\infty} f[$

• Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ converge. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{f(n)} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ et puisque f est croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (x réel, n était entier)

f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[f(0),+\infty[$ et puisque $f(0) \in [0,1]$, $g(n) = f^{-1}(n)$ est défini pour tout n entier ≥ 1 et tous les termes de la suite $\left(\frac{g(n)}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ sont bien définis.

La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{f(x)}$ étant continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ a même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ est convergente.

La fonction $h : t \longrightarrow \frac{g(t)}{t^2}$ n'est pas nécessairement décroissante.

Cependant, la fonction g est croisssante comme fonction réciproque d'une fonction croissante.

Pour tout $n \geq 1$, $\forall x \in [n, n+1]$, $g(n) \leq g(x) \leq g(n+1)$ et $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}$

donc $\frac{g(n)}{(n+1)^2} \leq \frac{g(x)}{x^2} \leq \frac{g(n+1)}{n^2}$ et en intégrant entre n et $n+1$, $\displaystyle\frac{g(n)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1}\frac{g(x)}{x^2}dx \leq \frac{g(n+1)}{n^2}$,

puis en sommant de $n=1$ à $n=N$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{g(n)}{(n+1)^2} \overset{(1)}{\leq} \int_1^{N+1}\frac{g(x)}{x^2}dx \overset{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^{N}\frac{g(n+1)}{n^2} = \sum_{n=2}^{N+1}\frac{g(n)}{(n-1)^2}$.

Remarquons que $\frac{g(n)}{(n+1)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{g(n)}{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{g(n)}{(n-1)^2}$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{g(x)}{x^2}dx$ converge, alors par la majoration (1), la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{(n+1)^2}$ converge et par équivalence $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2}$ aussi.

L'inégalité (2) permet de montrer que réciproquement, si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2}$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{g(x)}{x^2}dx$ converge aussi.

Donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{g(n)}{n^2}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t^2}dt$ ont même nature. Montrons donc que cette dernière intégrale converge.

• Pour tout $y\geq 1$, $\int_1^y \frac{g(t)}{t^2}dt = \left[\frac{-g(t)}{t}\right]_1^y + \int_1^y \frac{g'(t)}{t}dt$

$$\int_1^y \frac{g(t)}{t^2}dt = g(1) - \underbrace{\frac{g(y)}{y}}_{\geq 0} + \int_{g(1)}^{g(y)} \frac{1}{f(u)}du$$

(par le changement de variable $u = g(t)$, $du = g'(t)dt$, $t = f(u)$)

$$\int_1^y \frac{g(t)}{t^2}dt \leq g(1) + \int_{g(1)}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}du$$

(on a vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ était convergente.)

La fonction $y \longrightarrow \int_1^y \frac{g(t)}{t^2}dt$ est croissante sur $[1,+\infty[$ (car $\frac{g(t)}{t^2}\geq 0$), est majorée par $g(1)+\int_{g(1)}^{+\infty}\frac{1}{f(u)}du$, donc admet une limite finie quand $y\to+\infty$.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(t)}{t^2}dt$ est convergente et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{g(n)}{n^2}$ aussi.

• Réciproquement, si la série $\sum_{n\geq 1}\frac{g(n)}{n^2}$ converge, alors $g(n)$ est défini pour tout n entier et $A = \lim_{+\infty} f = +\infty$

L'étude précédente a montré qu'alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(u)}{u^2}du$ était convergente.

La fonction $\frac{1}{f}$ étant toujours continue positive et décroissante, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ a même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$. Montrons donc que cette dernière converge.

• Pour tout $y\geq 1$, $\int_1^y \frac{1}{f(t)}dt = \int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g'(u)}{u}du$ (changement de variable $t = g(u)$)

$$\int_1^y \frac{1}{f(t)}dt = \left[\frac{g(u)}{u}\right]_{f(1)}^{f(y)} + \int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g(u)}{u^2}du = \frac{y}{f(y)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g(u)}{u^2}du$$

L'inégalité (2) ci-dessus a permis de montrer que, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2}$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{g(x)}{x^2}dx$ convergeait aussi.

Donc $\lim_{y\to+\infty}\int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g(u)}{u^2}du = \int_{f(1)}^{+\infty}\frac{g(u)}{u^2}du$ Reste à étudier la limite de $\frac{y}{f(y)}$

• Pour tout $n\geq 1$, notons $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{g(k)}{k^2}$ le reste d'ordre n de la série convergente $\sum\frac{g(n)}{n^2}$:

$$\frac{g(n)}{n^2} + \frac{g(n+1)}{(n+1)^2} + ... + \frac{g(2n-1)}{(2n-1)^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{g(k)}{k^2} = r_{n-1}$$

mais aussi $r_{n-1} \geq \frac{g(n)}{n^2} + \frac{g(n+1)}{(n+1)^2} + ... + \frac{g(2n-1)}{(2n-1)^2} \geq \frac{g(n)}{n^2} + \frac{g(n)}{(n+1)^2} + ... + \frac{g(n)}{(2n-1)^2}$ (car g croisssante)

$$r_{n-1} \geq g(n)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \geq g(n)\frac{n}{4n^2}$$

(il y a n termes dans la parenthèse, tous supérieurs à $\frac{1}{4n^2}$)

donc $\frac{g(n)}{n} \leq 4r_{n-1}$, ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty}\frac{g(n)}{n} = 0$

L'encadrement $\frac{g(m)}{m+1} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(m+1)}{m}$ si $m = E(x)$ (partie entière) montre alors que $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$ (x réel)

En prenant $y = g(x)$ (donc $x = f(y)$), il s'ensuit que $\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{f(y)} = 0$ (car quand $y\to+\infty$, $x = f(y)\to+\infty$)

Reprenons l'égalité $\int_1^y \frac{1}{f(t)}dt = \frac{y}{f(y)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g(u)}{u^2}du$:

Quand $y\to+\infty$, $\frac{y}{f(y)}\to 0$ et $\int_{f(1)}^{f(y)}\frac{g(u)}{u^2}du \to \int_{f(1)}^{+\infty}\frac{g(u)}{u^2}du$

Donc $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{f(t)}dt$ admet une limite finie quand $y \to +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{f(t)}dt$ converge et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ aussi.

2.2 Calculs de sommes de série :

2.2.1 Somme 1 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n(n+1)}$ où $R(n)$ est le reste de la division de n par 5.

a) Etudier la convergence de la série.

b) Calculer la somme partielle $S_{5n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

En déduire la somme de la série.

***SOLUTION* :**

a) $0 \leq \dfrac{R(n)}{n(n+1)} \leq \dfrac{4}{n^2}$

donc $\displaystyle\sum \frac{R(n)}{n(n+1)}$ converge par majoration par une série de Riemann convergente.

b) Pour tout k, $\begin{cases} R(5k) = 0 \\ R(5k+1) = 1 \\ R(5k+2) = 2 \\ R(5k+3) = 3 \\ R(5k+4) = 4 \end{cases}$, Sachant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$,

$$S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} R(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[1.\left(\frac{1}{5k+1} - \frac{1}{5k+2}\right) + 2.\left(\frac{1}{5k+2} - \frac{1}{5k+3}\right) + 3.\left(\frac{1}{5k+3} - \frac{1}{5k+4}\right) + 4.\left(\frac{1}{5k+4} - \frac{1}{5k+5}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} - \underbrace{\frac{5}{5k+5}}_{\frac{1}{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n$$

On sait que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

D'où $\quad S_{5n} = \ln(5n) + \gamma + \varepsilon_{5n} - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 5 + \varepsilon_{5n} - \varepsilon_n$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_{5n} = \ln 5}$

2.2.2 Somme 2 :

Soit p_n le nombre de chiffres dans l'écriture de l'entier naturel n en base 10. (par ex. $p_{100} = p_{999} = 3$)

Nature et somme éventuelle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{p_n}{n(n+1)}$

***SOLUTION* :**

• Soit q un entier ≥ 1. Pour tout n tel que $10^q \leq n \leq 10^{q+1} - 1$, $\quad p_n = q+1$

or $10^q \leq n \leq 10^{q+1} - 1 \iff 10^q \leq n < 10^{q+1} \iff q \leq \log_{10} n < q+1$

$\iff q = E(\log_{10} n)$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x)

Donc $p_n = E(\log_{10} n) + 1 = E\left(\dfrac{\ln n}{\ln 10}\right) + 1 \sim \dfrac{\ln n}{\ln 10}$ quand $n \to +\infty$

Donc $\dfrac{p_n}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $n \to +\infty$ $\quad$ (car $\ln n = o(\sqrt{n})$)

Par majoration par une série de Riemann convergente, on conclut que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{p_n}{n(n+1)}$ converge.

• Pour tout $N>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1}\frac{p_n}{n(n+1)}=\sum_{q=0}^{N}\left(\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1}\frac{p_n}{n(n+1)}\right)$

$$\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1}\frac{p_n}{n(n+1)}=\sum_{q=0}^{N}\left(\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1}\frac{q+1}{n(n+1)}\right)=\sum_{q=0}^{N}\left((q+1)\underbrace{\sum_{n=10^q}^{10^{q+1}-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{\text{somme "télescopique"}}\right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1}\frac{p_n}{n(n+1)}&=\sum_{q=0}^{N}(q+1)\left(\frac{1}{10^q}-\frac{1}{10^{q+1}}\right)\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}+\frac{2}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{100}-\frac{3}{1000}+...+\frac{N}{10^{N-1}}-\frac{N}{10^N}+\frac{N+1}{10^N}-\frac{N+1}{10^{N+1}}\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}....+\frac{1}{10^{N-1}}+\frac{1}{10^N}-\frac{N+1}{10^{N+1}}\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{N+1}{10^{N+1}}=0$ (croissance comparée puissance-exponentielle), en passant à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p_n}{n(n+1)}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{10^q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p_n}{n(n+1)}=\frac{10}{9}}$$

2.2.3 Somme 3 :

Soient m un entier naturel non nul, b un nombre réel et $(a_n)_{n\geq1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases}a_n=1 & \text{si} \quad n \quad \text{n'est pas multiple de } m\\ a_n=b & \text{si} \quad n \quad \text{est multiple de } m\end{cases}$$

Dire quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ selon la valeur de b.

Calculer la somme de la série quand elle converge.

Donner un équivalent de la somme partielle d'ordre n quand elle diverge.

SOLUTION **:**

Notons $\displaystyle S_n=\sum_{h=1}^{n}\frac{a_h}{h}$.

$$S_{km}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m-1}+\frac{b}{m}+\frac{1}{m+1}+...+\frac{1}{2m-1}+\frac{b}{2m}+\frac{1}{2m+1}+...+\frac{1}{km-1}+\frac{b}{km}$$

Rajoutons et retranchons $\displaystyle\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+...+\frac{1}{km}$

$$S_{km}=\sum_{h=1}^{km}\frac{1}{h}+(b-1)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+...+\frac{1}{km}\right)=\sum_{h=1}^{km}\frac{1}{h}+\frac{b-1}{m}\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h}$$

On sait que $\displaystyle\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h}=\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ avec $\lim\varepsilon_n=0$ et γ la constante d'Euler.

d'où $\displaystyle S_{km}=\ln(km)+\gamma+\varepsilon_{km}+\frac{b-1}{m}(\ln(k)+\gamma+\varepsilon_k)$

$$S_{km}=\frac{m+b-1}{m}\underbrace{\ln(k)}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln(m)}_{cte}+\underbrace{\frac{m+b-1}{m}\gamma}_{cte}+\underbrace{\varepsilon_{km}+\frac{b-1}{m}\varepsilon_k}_{\lim=0}$$

• Si $\dfrac{m+b-1}{m}\neq0$, alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}S_{km}=\infty$ et la série diverge.

• Si $\dfrac{m+b-1}{m}=0$, c'est à dire si $b=-m+1$, alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}S_{km}=\ln(m)$

pour tout $p\in\{1,2,...,m-1\}$, $\displaystyle S_{km+p}=S_{km}+\frac{1}{km+1}+\frac{1}{km+2}+...+\frac{1}{km+p}$

or $\displaystyle 0\leq\frac{1}{km+1}+\frac{1}{km+2}+...+\frac{1}{km+p}\leq\frac{m-1}{km+1}\longrightarrow0$ quand $k\to+\infty$

donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{km+1}+\frac{1}{km+2}+...+\frac{1}{km+p}\right)=0$

Il s'ensuit que pour tout $p\in\{1,2,...,m-1\}$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}S_{km+p}=\lim_{k\to+\infty}S_{km}=\ln(m)$

Donc les p suites extraites $(S_{km+p})_{k\geq0}$ pour $p\in\{1,2,...,m-1,m\}$ convergent vers la même limite $\ln(m)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(m)$. $\boxed{\text{La série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ converge et a pour somme } \ln(m).}$

• Si $\dfrac{m+b-1}{m} \neq 0$, l'égalité $S_{km} = \dfrac{m+b-1}{m} \underbrace{\ln(k)}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln(m)}_{cte} + \underbrace{\frac{m+b-1}{m}\gamma}_{cte} + \underbrace{\varepsilon_{km} + \frac{b-1}{m}\varepsilon_k}_{\lim=0}$

montre que $S_{km} \sim \dfrac{m+b-1}{m}\ln(k) \sim \dfrac{m+b-1}{m}\ln(km)$ quand $k \to +\infty$

S_{km} étant un infiniment grand quand $k \to +\infty$ et chacune des sommes $\left(\dfrac{1}{km+1} + \dfrac{1}{km+2} + ... + \dfrac{1}{km+p}\right)$ un infiniment petit, on en déduit que pour tout $p \in \{1, 2, ..., m-1\}$, on a aussi $S_{km+p} \sim \dfrac{m+b-1}{m}\ln(km)$

Donc $\boxed{S_n \sim \dfrac{m+b-1}{m}\ln(n) \text{ quand } n \to +\infty.}$

2.2.4 Somme 4 : CCP + Centrale

1- Nature et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

2- Nature et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

SOLUTION :

1 - • $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

La série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge comme somme de deux séries convergentes.

• $$S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=2}^{2n+1} \ln\left(\frac{k+(-1)^k}{k}\right) = \sum_{p=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) + \ln\left(\frac{2p}{2p+1}\right)\right) = 0$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0}$$

2- La convergence se démontre comme en 1-)

• $$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{p=1}^{n} -\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) + \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$
$$= \sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{(2p-1)(2p+1)}{(2p)^2}\right) = \ln\left(\frac{1.\,[3.5.....(2n-1)]^2\,(2n+1)}{(2.\,4\,.6\ \ ...\ .\,2n)^2}\right) = \ln\left(\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{(2^n.n!)^4}\right)$$

Utilisons la formule de Stitling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{(2^n.n!)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} 4\pi n\ (2n+1)}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(2\pi n)^2} = \frac{n(2n+1)}{\pi n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}$$

2.2.5 Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$:

1- On considère une fonction f décroissante sur $[a, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. (on peut supposer a entier)

Montrer que la série de terme général $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$ est convergente.

2- a) Quelles sont les natures des séries $\sum \frac{\ln n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$?

b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$

En utlisant la question 1), calculer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$

c) Exprimer T_{2n} en fonction de termes de la suite (S_n).

En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\gamma\ln 2-\frac{\ln^2(2)}{2}$ où γ est la constante d'Euler.

SOLUTION : 1- $\forall n\geqslant a, \forall t\in[n,n+1],\ f(n+1)\leqslant f(t)\leqslant f(n)$

$\Longrightarrow \int_n^{n+1}f(n+1)dt\leqslant\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant\int_n^{n+1}f(n)dt=f(n)$

$\Longrightarrow -f(n)\leqslant-\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant-f(n+1)$ et en ajoutant $f(n)$ à chaque membre :

$$\Longrightarrow 0\leqslant\underbrace{f(n)-\int_n^{n+1}f(t)dt}_{w_n}\leqslant f(n)-f(n+1)$$

$\Longrightarrow 0\leqslant w_n\leqslant f(n)-f(n+1)$

La série $\sum w_n$ est donc à termes positifs. Son terme général est majoré par $f(n)-f(n+1)$, et cette dernière série est convergente : en effet, $\displaystyle\sum_{k=a}^{n}f(k)-f(k+1)=f(a)-f(n+1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(a)$

Par majoration, $\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ est convergente}}$

2- a) Soit g la fonction $t\mapsto\frac{\ln(t)}{t}$. $\forall t>0,\ g'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}.t-\ln(t)}{t^2}=\dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$

donc $\forall t>e,\ g'(t)<0$. La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$. Donc la série de terme général $w_n=g(n)-\int_n^{n+1}g(t)dt$ est convergente.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w_k=\sum_{k=1}^{n}g(k)-\int_1^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}dt=S_n-\frac{1}{2}\left[\ln^2(t)\right]_1^{n+1}=S_n-\frac{1}{2}\ln^2(n+1)$

d'où $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}w_k+\frac{1}{2}\ln^2(n+1)$

Puisque la série $\sum w_n$ converge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w_k$ a une limite finie S_w et $\frac{1}{2}\ln^2(n+1)$ tend vers $+\infty$.

Donc $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln^2(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln^2(n)}$

b) La série $\sum\frac{\ln n}{n}$ diverge car $\frac{\ln n}{n}\geqslant\frac{1}{n}$. La série $\sum\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ converge (critère des séries alternées)

c) $\displaystyle T_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln k}{k}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2+\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$

$\displaystyle T_{2n}=S_n-S_{2n}+\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

L'égalité $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}w_k+\frac{1}{2}\ln^2(n+1)$ entraîne :

$$S_n=\frac{1}{2}\ln^2(n+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}w_k-\sum_{k=n+1}^{+\infty}w_k=\frac{1}{2}\ln^2(n+1)+S_w+o(1)$$

$\displaystyle T_{2(n-1)}=S_{n-1}-S_{2n-2}+\ln 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$=\frac{1}{2}\ln^2(n)+S_w-\frac{1}{2}\ln^2(2n)-S_w+\ln 2\left[\ln(n)-\frac{1}{n}+\gamma\right]+o(1)$

$=\frac{1}{2}[\ln^2(n)-\ln^2(2n)]+\ln 2\,[\ln n+\gamma]+o(1)$

$=\frac{1}{2}[\ln(n)-\ln(2n)][\ln(n)+\ln(2n)]+\ln 2\,[\ln n+\gamma]+o(1)$

$=\frac{1}{2}[-\ln(2)][2\ln(n)+\ln 2]+\ln 2\,[\ln n+\gamma]+o(1)$

$=-\ln 2.\ln n-\frac{\ln^2(2)}{2}+\ln 2.\ln n+\gamma\ln 2+o(1)$

$T_{2(n-1)}=-\frac{\ln^2(2)}{2}+\gamma\ln 2+o(1)$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\lim_{n\to+\infty}T_{2(n-1)}=-\frac{\ln^2(2)}{2}+\gamma\ln 2}$

2.2.6 Convergence et somme de série :

On considère trois réels a,b,u_0 strictement positifs et la suite (u_n) telle que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{n+a}{n+b}u_n.$

1- Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ suivant les valeurs de a et b.

2- Calculer alors la somme de la série $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

SOLUTION :

1 - • Remarquons que si $a = b$, la suite (u_n) est constante et la série $\sum u_n$ est divergente.

• Supposons désormais que $a \neq b$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) + \ln(u_n)$

On va alors sommer l'égalité $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$, qui est "telescopique"

$$\Longrightarrow \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}\right) = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)$$

$$= \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + w_n \text{ où } w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

en sommant pour l'indice variant de 1 à n, on obtient :

$$\Longrightarrow \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = (a-b)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) + (w_1 + w_2 + ... + w_n)$$

On sait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n$ et γ est la constante d'Euler,

donc $u_{n+1} = u_1 \ \exp\left[(a-b)(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) + (w_1 + w_2 + ... + w_n)\right]$

$\Longrightarrow u_{n+1} = \dfrac{u_1}{n^{b-a}} \ \exp\left[(a-b)(\gamma + \varepsilon_n) + (w_1 + w_2 + ... + w_n)\right]$

Puisque $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum w_n$ converge, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(a-b)(\gamma + \varepsilon_n) - (w_1 + w_2 + ... + w_n)\right] = (a-b)\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$$

En appelant λ le réel strictement positif $e^{(a-b)\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k}$, le calcul précédent montre que :

$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{b-a}}$ $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1}$

• **Remarque :** autre calcul :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{1+a}{1+b}\, u_1 \\ u_3 = \frac{2+a}{2+b}\, u_2 \\ \ldots\ldots. \\ u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\, u_n \end{cases} \quad \text{en multipliant terme à terme ,} \quad u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+a}{k+b}\, u_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{a}{k}}{1+\frac{b}{k}}\, u_1$$

il est alors naturel de regarder ce que devient cette égalité en prenant les logarithmes :

$$\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1+\frac{a}{k}}{1+\frac{b}{k}}\right) + \ln(u_1) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\tfrac{a}{k}\right) - \ln\left(1+\tfrac{b}{k}\right)\right)$$

et on reprend le calcul précédent à partir du développement limité

$$\ln\left(1+\frac{a}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{k}\right) = \frac{a-b}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

2- Pour tout $n \geqslant 1, (n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$

L'idée consiste ensuite à exploiter cette égalité, telescopique par rapport à la suite $(n\ u_n)$:

$$(n+1)u_{n+1} - nu_n = (1-b)u_{n+1} + au_n$$

en sommant pour l'indice variant de 0 à n et en notant $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$(n+1)u_{n+1} = (1-b)(U_{n+1} - u_0) + aU_n$$

L'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{b-a}}$ avec $b-a>1$ entraîne que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$0 = (1-b)(S-u_0) + aS \text{ soit } \boxed{S = \frac{(b-1)\ u_0}{b-a-1}}$$

2.2.7 Convergence et somme de série :

Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+a)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + b\right]$ converge, et calculer alors sa somme.

SOLUTION :

• $u_n = (n+a)\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + b = (n+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + b = (n+a)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) + b$

$$= 1 + b + \frac{a - \frac{1}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } b = -1 \text{ et } a = \tfrac{1}{2}}$$

• $$\sum_{k=1}^{n} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(k + \tfrac{1}{2}\right) \ln(k+1) - \left(k + \tfrac{1}{2}\right) \ln(k) - 1\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - \tfrac{1}{2}\ln(k+1) - \tfrac{1}{2}\ln(k) - 1\right]$$

$$= (n+1)\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln((n+1)!) - n$$

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

donc $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + \varepsilon_n)$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

$\Longrightarrow \ln(n!) = n(\ln(n) - 1) + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \ln(1 + \varepsilon_n)$

Redescendons l'indice d'une unité pour faciliter le calcul :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1\right] = n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \ln((n)!) - (n-1)$$

$$= n\ln(n) + \tfrac{1}{2}\ln(n) - \left(n(\ln(n) - 1) + \tfrac{1}{2}\ln(n) + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \ln(1+\varepsilon_n)\right) - (n-1)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \ln(1 + \varepsilon_n)$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1\right] = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi)}$$

2.2.8 Calculs de sommes de séries :

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(2n+1)}$

d) Pour quelles valeurs du réel λ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \lambda\ln(n)$ converge-t-elle ?

Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

SOLUTION :

Pour les exercices qui suivent, on rappelle que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

où γ est un réel appelé "constante d'Euler",

et que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

a) • $\dfrac{1}{n(2n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$

Par équivalence avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum \frac{1}{n(2n+1)}$ converge aussi.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = H_n - 2\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) = 2H_n - 2H_{2n+1} + 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = 2(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) - 2(\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1}) + 2 = -2\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 2$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k+1)} = 2 - 2\ln 2}$

b) • $\dfrac{1}{n^2(n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$

Par équivalence avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^3}$, la série $\sum \frac{1}{n^2(n+1)}$ converge aussi.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{n+1}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1}$

c) • $\dfrac{1}{n^2(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$

Par équivalence avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{2n^3}$, la série $\sum \frac{1}{n^2(2n+1)}$ converge aussi.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{4}{2k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 4 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \right)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 2H_n + 4 \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 4H_n + 4H_{2n+1} - 4$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + 4\left(\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - \ln(n) - \gamma - \varepsilon_n\right) - 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + 4\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 4\varepsilon_{2n+1} - 4\varepsilon_n - 4$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(2k+1)} = \frac{\pi^2}{6} + 4\ln(2) - 4}$

d) • La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+3} - \lambda \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{1+\frac{3}{2n}} - \lambda\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{9}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \lambda\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2\lambda}{2n} + \underbrace{\frac{\mu}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{series\ convergentes}$$

La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge si et seulement si } \lambda = \tfrac{1}{2}}$

• Lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\ln(n) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\ln(n) = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}\ln(n)$?

$$u_n = \ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n\right) - \frac{1}{2}\ln(n)$$

$$u_n = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \varepsilon_{2n+1} + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\gamma}$

2.2.9 Reste de série de Riemann :

1- a) Pour quelles valeurs du réel α la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Lorsqu'elle converge, on note $\zeta(\alpha)$ sa somme : $\displaystyle\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

On note alors, pour tout entier $n \geqslant 0, u_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Calculer un équivalent de $u_n(\alpha)$ quand $n \to +\infty$

b) Pour quelles valeurs du réel α la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha)$ converge-t-elle ?

Lorsqu'elle converge, calculer sa somme à l'aide de la fonction ζ.

SOLUTION :

1-a) On sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

La méthode de comparaison série-intégrale donne l'encadrement :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant u_n(\alpha) \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad \text{et l'équivalent :}$$

$$u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

b) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha)$ converge donc si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, si et seulement si $\alpha > 2$

Si $\alpha > 2$, pour tout $n \geqslant 1$, $U_n = u_0(\alpha) + u_1(\alpha) + ... + u_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} + ... + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

$$U_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) + \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$U_n = \frac{1}{1^\alpha} + 2\frac{1}{2^\alpha} + 3\frac{1}{3^\alpha} + ... + n\frac{1}{n^\alpha} + (n+1)u_n(\alpha)$$

$$U_n = \frac{1}{1^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{3^{\alpha-1}} + ... + \frac{1}{n^{\alpha-1}} + (n+1)u_n(\alpha)$$

or $(n+1)u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{\alpha-1} . \dfrac{1}{n^{\alpha-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha-1)$ $\qquad \boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) = \zeta(\alpha-1)}$

2.2.10 Reste de série harmonique alternée

Soit r_n le reste d'ordre n de la série harmonique alternée : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Calculer un équivalent simple de r_n quand $n \longrightarrow +\infty$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r_k$ converge et calculer sa somme.

SOLUTION :

• Pour tout n, $\displaystyle\sum_{k=2n}^{2n+2p+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{h=n}^{n+p} \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2h+1}\right)$ (en groupant les termes deux à deux)

$$= \sum_{h=n}^{n+p} \frac{1}{2h(2h+1)}$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, $\quad r_{2n-1} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2h(2h+1)}$

or $\dfrac{1}{2h(2h+1)} \overset{h\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4h^2}$ $\quad$ donc $\displaystyle\sum_{h=n}^{+\infty} \frac{1}{2h(2h+1)} \overset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{h=n}^{+\infty} \frac{1}{4h^2} \sim \frac{1}{4n}$

(voir **Section 8** sur les sommations d'équivalents)

Ainsi $\quad r_{2n-1} \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$

On peut faire un calcul analogue pour r_{2n} ou remarquer que $r_{2n} = \underbrace{r_{2n-1}}_{\sim \frac{1}{4n}} - \dfrac{1}{2n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{2n} = -\dfrac{1}{4n}$

(pourquoi a-t-on pu faire ici une différence d'équivalents ?)

Finalement, quelque soit la parité, $\boxed{r_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}}$

• L'équivalent ne permet pas de conclure quant à la convergence de la série $\sum r_n$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = r_0 + r_1 + r_2 + ... + r_n = -1 &+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n} + r_n \\
&+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n} + r_n \\
&\qquad\ - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n} + r_n \\
&\qquad\qquad .... \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{(-1)^n}{n} + r_n \\
= \underbrace{-1 + 1 + -1 + ... + (-1)^n}_{n\ termes} &+ n.r_n
\end{aligned}$$

$$R_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} + n.r_n$$

or $r_n \sim \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ $\quad$ donc $r_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad$ et $n.r_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2} + o(1)$ $\quad$ (o(1) est une suite de limite nulle) alors $\quad R_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2} + o(1) = \dfrac{1}{2} + o(1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

Donc $\lim R_n = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{\infty} r_n \text{ converge et a pour somme } \frac{1}{2}}$

2.2.11 Moyenne pondérée

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une série à termes réels positifs ou nuls, convergente, et soit $y_n = \dfrac{u_1+2u_2+...+nu_n}{n(n+1)}$

Montrer que $y_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, et calculer sa somme.

SOLUTION :

• Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série convergente $\sum u_n$: $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\forall n \geq 1,\ r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

$\forall n \geq 1,\ u_n = r_{n-1} - r_n$

donc $y_n = \dfrac{u_1+2u_2+...+nu_n}{n(n+1)} = \dfrac{(r_0-r_1)+2(r_1-r_2)+...+(n-1)(r_{n-2}-r_{n-1})+n(r_{n-1}-r_n)}{n(n+1)}$

$y_n = \dfrac{r_0+r_1+r_2+...+r_{n-1}-n.r_n}{n(n+1)} = \dfrac{r_0+r_1+r_2+...+r_{n-1}}{n}\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{r_n}{(n+1)}$

d'après le théorème de Cesaro, puisque $\lim u_n = 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{r_0+r_1+r_2+...+r_{n-1}}{n} = 0 \quad$ et l'égalité précédente montre que $\quad y_n = o\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

• Reprenons l'égalité $y_k = \dfrac{r_0+r_1+r_2+...+r_{k-1}}{k(k+1)} - \dfrac{r_k}{(k+1)}$

$$y_1+y_2+...+y_n = \left(\frac{r_0}{1.2} - \frac{r_1}{2}\right) + \left(\frac{r_0+r_1}{2.3} - \frac{r_2}{3}\right) + \left(\frac{r_0+r_1+r_2}{3.4} - \frac{r_3}{4}\right) + ... + \left(\frac{r_0+r_1+...+r_{n-1}}{n(n+1)} - \frac{r_n}{n+1}\right)$$

$$= r_0\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) + r_1\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}\right) + r_2\left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$..... + r_{n-2}\left(\frac{1}{(n-1).n} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n-1}\right) + r_{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n}\right) - \frac{r_n}{n+1}$$

or $\dfrac{1}{p.(p+1)} + \dfrac{1}{(p+1)(p+2)} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)} = \sum_{k=p}^{n} \dfrac{1}{k.(k+1)} = \sum_{k=p}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n+1}$

donc $\quad y_1+y_2+...+y_n = r_0\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) + r_1\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) + r_2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{3}\right) + ...$

$$..... + r_{n-2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) + r_{n-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{r_n}{n+1}$$

$$y_1+y_2+...+y_n = r_0 - \frac{r_0+r_1+r_2+...+r_{n-1}+r_n}{n+1}$$

puisque $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{r_0+r_1+r_2+...+r_{n-1}+r_n}{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(y_1+y_2+...+y_n) = r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ce qui montre que $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ converge et a pour somme } \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$

2.2.12 * Changement de l'ordre des termes d'une série :

On réordonne les termes de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ en prenant un terme négatif, suivi de deux termes positifs, c'est à dire de la manière suivante :

$u_1 = -\dfrac{1}{1},\quad u_2 = \dfrac{1}{2},\quad u_3 = \dfrac{1}{4},$

$u_4 = -\dfrac{1}{3},\quad u_5 = \dfrac{1}{6},\quad u_6 = \dfrac{1}{8},$

$u_7 = -\dfrac{1}{5},\quad u_8 = \dfrac{1}{10},\quad u_9 = \dfrac{1}{12}$, ... plus généralement,

$$\begin{cases} u_{3k+1} = -\dfrac{1}{2k+1} \\ u_{3k+2} = \dfrac{1}{4k+2} \\ u_{3k+3} = \dfrac{1}{4k+4} \end{cases}$$

Montrer que la série ainsi obtenue converege et calculer sa somme.

Comparer avec la somme de la série initiale.

SOLUTION **:** • Soit $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$U_{3n} = u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_{3n} = \underbrace{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}_{v_1}\underbrace{-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{v_2}\underbrace{-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}_{v_3}+...\underbrace{-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}}_{v_n}$$

Posons $v_n = -\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}$, de sorte que $u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_{3n} = v_1+v_2+...+v_n$

c'est à dire $U_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k$

$$v_k = -\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k} = \frac{-4k+2k+2k-1}{4k(2k-1)} = -\frac{1}{4k(2k-1)} \overset{k\to\infty}{\sim} -\frac{1}{8k^2}$$, série de Riemann cvgte.

Donc $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{3n} u_k\right) = \lim_{n\to\infty} U_{3n}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Puisque $\begin{cases} U_{3n+1} = U_{3n}+u_{3n+1} \\ U_{3n+2} = U_{3n}+u_{3n+1}+u_{3n+2}\end{cases}$ et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} U_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} U_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} U_{3n}$

Donc la suite (U_n) converge et la série $\sum u_n$ aussi.

• Rappelons que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ où γ est la constante d'euler et (ε_n) une suite de limite nulle.

$$\begin{aligned}
U_{3n} &= -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+...-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}\\
&= \left(-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-...-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\ln(2n)+\gamma+\varepsilon_{2n}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n\Big) = -\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_n-\varepsilon_{2n}\Big)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} U_{3n} = -\frac{1}{2}\ln(2)$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{2}\ln(2)}$

Remarque : : A comparer avec le résultat $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$

En changeant l'ordre des termes d'une série **semi-convergente**, la somme de la série peut être modifiée.

Remarque :

On peut montrer que lorsqu'une série est **semi-convergente**, il est possible de réarranger l'ordre de ses termes de telle manière que sa somme soit égale à tout nombre arbitraire choisi au départ.

Par contre, pour une série **absolument convergente**, un changement dans l'ordre des termes ne modifie pas la somme de la série.

2.2.13 Série des restes d'ordre n

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$, une suite à termes positifs.

On définit, pour tout entier n : $b_n = na_n$, $B_n = b_0+b_1+...+b_n$,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\ \ R_n = r_0+r_1+...+r_n$$

a) Déterminer une relation liant R_n, B_n et r_n

b) Montrer que si $\sum b_n$ converge alors pour tout $n\geq 1$, $(n+1)r_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$.

c) Montrer que les deux séries $\sum b_n$ et $\sum r_n$ ont même nature et comparer leurs sommes lorsqu'elles convergent.

Application : on pose $a_n = 1/n^{\alpha}$ et $Z(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ pour les α tels que cette somme est définie.

SOLUTION **:**

a) Pour tout $n\geq 1$,

$R_n = r_0+r_1+...+r_n$

$= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + ... \qquad (r_0)$

$+a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + ... \qquad (r_1)$

$+a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + ... \qquad (r_2)$

....

$+a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + ... \qquad (r_{n-2})$

$+a_n + a_{n+1} + ... \qquad (r_{n-1})$

$a_{n+1} + ... \qquad (r_n)$

d'où $R_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + (n-1)a_{n-1} + na_n + (n+1)(a_{n+1} + ...)$

$R_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n + (n+1)r_n$

$\forall n \geq 1,$ $\boxed{R_n = B_n + (n+1)r_n}$

b) Supposons que $\sum b_n$ converge.

Pour tout entiers n et p,

$(n+1)(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}) \leq (n+1)a_{n+1} + (n+2)a_{n+2} + (n+3)a_{n+3} + ... + (n+p)a_{n+p}$

$(n+1)(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}) \leq b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + ... + b_{n+p}$

puisque les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, on peut passer à la limte, pour n fixé, lorsque $p \longrightarrow +\infty$:

$$(n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \ .$$

ce qui donne bien la relation : $\boxed{(n+1)r_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k}$

c)• Supposons que la série $\sum b_n$ converge. Alors la combinaison des résultats a) et b) montre que :

$$\forall n \geq 1, \ R_n = B_n + (n+1)r_n \leq B_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b \in \mathbb{R}^+$$

Ceci montre que la suite des sommes partielles (R_n) de la série $\sum r_n$ à termes positifs est majorée.
Cette série est donc convergente.

Le passage à la limite dans l'inégalité $R_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$ montre par ailleurs que :

$$S_r = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \leq S_b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

• Supposons que la série $\sum r_n$ converge.

L'inégalité de la question a) montre que $\forall n \geq 1, \ B_n \leq R_n$

Puisque la série $\sum r_n$ converge, la suite de ses sommes partielles, (R_n) est majorée :

$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \leq M$

Donc, par l'inégalité précédente,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \leq M$, ce qui montre que la série $\sum b_n$ converge puisque ses sommes partielles sont majorées.

Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité $\forall n \geq 1, \ B_n \leq R_n$, on obtient :

$S_b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq S_r = \sum_{k=1}^{\infty} r_k$, ce qui montre que $S_r = S_b$ compte tenu de l'autre inégalié.

En conclusion, $\boxed{\text{si l'une des séries } \sum b_n \text{ ou } \sum r_n \text{ converge, alors l'autre converge aussi et les deux séries ont la même somme.}}$

2.3 Sommation de relations de comparaison et applications

2.3.1 Sommation d'équivalences * (*à considérer comme du cours*)

Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes réels positifs ou nuls, équivalentes $(u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n)$.

a) Lorsqu'elles convergent, montrer que les suites des restes d'ordre n respectifs sont équivalentes.

b) Lorsqu'elles divergent, montrer que les suites des sommes partielles d'ordre n respectives sont équivalentes.

***SOLUTION* :**

• a) Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. (si l'une converge, l'autre aussi par équivalence)

Soient $ru_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $rv_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ leurs restes d'ordre n respectifs.

Par hypothèse, $u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < \epsilon$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ (1-\epsilon)v_n \leq u_n \leq (1-\epsilon)v_n$ Sommons ces inégalités de l'indice n à l'indice $n+p$:

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ (1-\epsilon)(v_{n+1}+v_{n+2}+...+v_{n+p}) \leq u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p} \leq (1-\epsilon)(v_{n+1}+v_{n+2}+...+v_{n+p})$

puis passons à la limite, pour n fixé, quand $p \to +\infty$:

$\forall n \geq n_0, \ \ (1-\epsilon) r v_n \leq r u_n \leq (1-\epsilon) r v_n$ qui équivaut à dire que :

$\forall n \geq n_0, \ \ \left| \dfrac{r u_n}{r v_n} - 1 \right| < \epsilon$

On a ainsi montré que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{r u_n}{r v_n} = 1$ c'est à dire que $\boxed{r u_n \overset{n \to \infty}{\sim} r v_n.}$

• b) Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Soient $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ leurs sommes partielles d'ordre n respectives.

Par hypothèse, $u_n \overset{n \to \infty}{\sim} v_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \ \ \left| \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \epsilon$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ \ (1-\epsilon) v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon) v_n$ Sommons ces inégalités de l'indice $n_0 + 1$ à l'indice n :

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ \ (1-\epsilon)(v_{n_0+1} + v_{n_0+2} + ... + v_n) \leq u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + ... + u_n \leq (1+\epsilon)(v_{n_0+1} + v_{n_0+2} + ... + v_n)$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ \ (1-\epsilon)(V_n - V_{n_0}) \leq U_n - U_{n_0} \leq (1+\epsilon)(V_n - V_{n_0})$

En supposant que (v_n) n'est pas la suite nulle, pour n assez grand, $V_n > 0$

donc pour $n \geq n_0, \ \ (1-\epsilon) \dfrac{V_n - V_{n_0}}{V_n} + \dfrac{U_{n_0}}{V_n} \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq (1+\epsilon) \dfrac{V_n - V_{n_0}}{V_n} + \dfrac{U_{n_0}}{V_n}$

$\Longrightarrow \ \ 1 - \epsilon + \dfrac{U_{n_0} - (1-\epsilon) V_{n_0}}{V_n} \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq 1 + \epsilon + \dfrac{U_{n_0} - (1+\epsilon) V_{n_0}}{V_n}$

les numérateurs $U_{n_0} - (1 \pm \epsilon) V_{n_0}$ ne dépendent pas de n. Puisque $\lim V_n = +\infty$ ($\sum v_n$ diverge), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, \ \ \left| \dfrac{U_{n_0} - (1 \pm \epsilon) V_{n_0}}{V_n} \right| < \epsilon$

donc, pour $n \geq \max(n_0, n_1), \ \ 1 - 2\epsilon \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq 1 + 2\epsilon$

On a ainsi montré l'existence d'un entier $n_2 = \max(n_0, n_1)$ tel que $\forall n \geq n_2, \ \ \left| \dfrac{U_n}{V_n} - 1 \right| < 2\epsilon$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$ et $\boxed{U_n \overset{n \to \infty}{\sim} V_n.}$

2.3.2 ENSAM 2008

Déterminer la limite et un équivalent de la suite (u_n) définie par :

$u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n u_n}$

***SOLUTION* :** • Par recurrence, il est immédiat que $\forall n \geq 1, \ u_n > 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n u_n} > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Dès lors, il n'y a que deux possibilités :

- soit la suite converge vers une limite réelle l.
- soit la suite diverge vers $+\infty$

Si la suite convergeait vers un réel l, alors, par croissance, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_1 \leq u_n$ et en passant à le limite quand $n \to +\infty$, on obtiendrait l'inégalité $0 < u_1 \leq l$

L'égalité $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n u_n}$ donnerait alors $u_{n+1} - u_n \overset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{l} \dfrac{1}{n}$, ce qui entraînerait que par équivalence, la série $\{u_{n+1} - u_n\}$ divergerait (puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge) et la suite (u_n) aussi. De par cette contradiction avec l'hypothèse de départ, on en conclut que la suite (u_n) ne converge pas, et donc qu'elle diverge vers $+\infty$.

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall n \geq 1, \ (u_{n+1})^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n + \dfrac{1}{n u_n} \right)^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha \left[\left(1 + \dfrac{1}{n u_n^2} \right)^\alpha - 1 \right]$

$(u_{n+1})^\alpha - u_n^\alpha \overset{n \to +\infty}{\sim} u_n^\alpha \left(\dfrac{\alpha}{n u_n^2} \right) = \dfrac{\alpha}{n u_n^{2-\alpha}}$

En prenant $\alpha = 2$, on obtient $(u_{n+1})^2 - u_n^2 \overset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$

Ce sont deux séries divergentes à termes positifs équivalentes. On sait qu'alors leurs sommes partielles sont équivalentes :

$\sum\limits_{k=1}^{n} \left((u_{k+1})^2 - u_k^2 \right) \overset{n \to +\infty}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k} \overset{n \to +\infty}{\sim} 2 \ln(n)$

$(u_{n+1})^2 - u_1^2 \overset{n \to +\infty}{\sim} (u_{n+1})^2 \overset{n \to +\infty}{\sim} 2 \ln(n)$

d'où $u_n \overset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n-1)} \overset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln n}$

$\boxed{u_n \overset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln n}}$

2.3.3 Equivalent de $u_n - L$ *

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n-1}$$

a) Etudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite L

b) Calculer un équivalent de $(u_n - L)$ quand $n \to +\infty$

SOLUTION **:** a) *Première méthode :*

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{3}{n}} + ... + \frac{1}{2+\frac{2n-1}{n}}\right)$$

Posons $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{2-0}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \quad \text{où } x_k = \tfrac{2k+1}{n}$$

La subdivision $x_k,\ k = 0....n-1,\quad 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{3}{n} < ... < \dfrac{2n-1}{n} < 2$ est une subdivision du segment $[0,2]$ sur lequel la fonction f est continue.

u_n étant une **somme de Riemann** associée à cette subdivision, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2+t}dt = \frac{1}{2}\ln 2}$$

Deuxième méthode :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n-1}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + ... + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}\right)$$

$$u_n = \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + ... + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)$$

Notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On sait que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$

Alors, $u_n = H_{4n} - H_{2n} - \dfrac{1}{2}(H_{2n} - H_n)$

$$u_n = \ln(4n) + \gamma + \varepsilon_{4n} - (\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}) - \frac{1}{2}(\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - \ln(n) - \gamma - \varepsilon_n)$$

$$u_n = \frac{1}{2}\ln(2) + \varepsilon_{4n} - \frac{3}{2}\varepsilon_{2n} + \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}\ln 2}$

b) Notons $v_n = u_{n+1} - u_n$

alors $v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + ... + +v_{n+p} = u_{n+p+1} - u_n$

et en passant à la limite à n fixé quand $p \to \infty$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k = L - u_n$

$$v_k = u_{k+1} - u_k = \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{(4k+1)(4k+3)(2k+1)} \sim \frac{1}{32k^3}$$

$\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k = Rv_{n-1}$ est le reste d'ordre $n-1$ de la série $\sum v_k$

On sait que si $v_k \sim w_k$ alors $Rv_k \sim Rw_k$

(d'après le théorème de sommation des équivalences pour une série convergente, cf 8.1 ci-dessus)

Donc $L - u_n = Rv_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{32k^3} \sim \frac{1}{32}\int_{k=n}^{\infty}\frac{dx}{x^3}dx = \frac{1}{64n^2}$

(méthode de comparaison séries-intégrales)

Finalement, $\boxed{u_n - \dfrac{\ln 2}{2} \sim \dfrac{-1}{64n^2}}$

2.3.4 Equivalent du reste d'une série de Riemann et application * *

On donne $\alpha > 0$ et on définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) converge ?

b) Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to \infty$ dans le cas où la suite (u_n) diverge et équivalent de $u_n - L$ quand dans le cas où la suite (u_n) converge vers L.

SOLUTION :

Remarquons que pour toute valeur de α et de u_1, la suite (u_n) est entièrement définie, à termes strictement positifs, et croisssante (car $u_{n+1} - u_n > 0$).

a) • Supposons que la suite (u_n) converge et soit L sa limite. Alors $L \geq u_1 > 0$

Puisque la suite (u_n) converge, la série $\{u_{n+1} - u_n\}$ converge également.

Or $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^\alpha u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{L.n^\alpha}$. Donc $\alpha > 1$.

• Réciproquement, supposons $\alpha > 1$.

$\forall n \geq 1, u_n \geq u_1$ car (u_n) est croissante, donc $0 \leq u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^\alpha u_n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha u_1}$

Par majoration par une série de Riemann convergente, la série à termes positifs $\{u_{n+1} - u_n\}$ converge et la suite (u_n) aussi.

En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge} \iff \alpha > 1}$

b) ♣ ***Calculs préliminaires :***

Soit $\alpha > 0$. Recherchons un équivalent de la somme patielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$,

et un équivalent du reste d'ordre n, $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$

La fonction $f_\alpha : t \longrightarrow \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$;

Pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$

En intégrant ces fonctions de t entre k et $k+1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt$

soit $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$

• Dans le cas où $\alpha \leq 1$, sommons ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$ pour celle de gauche, et de 1 à n pour celle de droite :

$$\frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{1^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où l'on tire l'encadrement : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{1^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$

soit : $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$ lorsque $\alpha = 1$

et $\dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \dfrac{1}{(1-\alpha)} \leq S_n \leq 1 + \dfrac{n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \dfrac{1}{(1-\alpha)}$ lorsque $\alpha < 1$

Il en résulte que $\boxed{S_n \overset{n\to\infty}{\sim} \ln n \quad \text{lorsque } \alpha = 1}$

et que $\boxed{S_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \quad \text{lorsque } \alpha < 1}$

• Dans le cas où $\alpha > 1$, sommons les inégalités pour k variant de n à $n+p$ pour celle de gauche, et de $n-1$ à $n+p$ pour celle de droite, puis passons à la limite quand $p \to +\infty$:

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p+1)^\alpha} + ... \leq \int_n^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha} + ...$$

d'où l'on tire l'encadrement : $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq r_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$

soit : $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq r_n \leq \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

d'où il résulte que $\boxed{r_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad \text{lorsque } \alpha > 1}$

♣ ***Retour au problème :***

• si $\alpha > 1$, la suite (u_n) converge vers une limite L et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^\alpha u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{L.n^\alpha}$

Par application du théorème de sommation d'équivalents pour des séries convergentes (voir exercice précédent 8.1), en notant R_n le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, et r_n le reste d'ordre n de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, on obtient :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{L} r_n$$

et par application du résultat préliminaire, $\quad r_n \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

or $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_{k+1}-u_k) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}(u_{k+1}-u_k)\right) = \lim_{p\to+\infty}(u_{k+p+1}-u_{n+1}) = L-u_{n+1}$

donc $\quad L-u_{n+1} \sim \dfrac{1}{L}r_n \sim \dfrac{1}{L(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

$$\boxed{\text{si } \alpha>1,\quad u_n - L \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{L(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

• si $\alpha \leq 1$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

En élevant au carré l'égalié $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$ on obtient :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1}^2 = {u_n}^2 + \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2} \qquad \text{or } \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2} = o\left(\frac{2}{n^\alpha}\right) \qquad \text{car } \alpha>0 \quad \text{et} \quad \lim u_n = +\infty$$

donc $u_{n+1}^2 - {u_n}^2 \quad \sim \quad \dfrac{2}{n^\alpha}$

En posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_{n+1}^2 - u_1^2$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^\alpha}$,

d'après le théorème de sommation d'équivalents pour des séries divergentes (voir ex. précédent),

$S_n \overset{n\to\infty}{\sim} s_n$

donc $\quad S_n = u_{n+1}^2 - u_1^2 \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$ si $\alpha<1 \quad$ et $\quad S_n = u_{n+1}^2 - u_1^2 \sim 2\ln n \quad$ si $\alpha = 1$

Finalement
$$\boxed{\begin{array}{l} u_n \sim \dfrac{\sqrt{2}\ n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{1-\alpha}} \quad \text{si} \quad \alpha<1 \\[2ex] u_n \sim \sqrt{2\ln n} \quad \text{si} \quad \alpha=1 \end{array}}$$

2.3.5 Equivalent de $u_n - L$ *

Pour quels entiers n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$ converge-t-elle ?

Calculer $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et calculer un équivalent de $I_n - L$ quand $n \to +\infty$

***SOLUTION* :** a) $\forall n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\dfrac{1}{1+x^n} \sim \dfrac{1}{x^n}$ quand $x \to +\infty$

donc $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $n \geq 2$

- si $x \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1$
- si $x \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = 0$
- pour $x = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$

Donc la suite de fonctions $(f_n) = (x \longrightarrow \frac{1}{1+x^n})_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,\infty[$

vers la fonction $g : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

Chaque fonction f_n est majorée sur $[0,+\infty[$ par la fonction $F : x \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$, qui est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$

Par application du théorème de convergence dominèe, on en déduit que :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx$

donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 1dx + \int_1^\infty 0dx = 1}$

b) $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx - 1$

$I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx - 1 + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$

$I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^n}}du$

(par le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ dans la deuxième intégrale)

$I_n - 1 = \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}dx + \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{u^n+1}du = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{x^n+1}dx$

Faisons le changement de variable $v = x^n, x = \sqrt[n]{v} = v^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}dv$

$I_n - 1 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{v^{1-\frac{2}{n}}-v}{v+1}v^{\frac{1}{n}-1}dv = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{v^{-\frac{1}{n}}-v^{\frac{1}{n}}}{v+1} = \frac{1}{n}\int_0^1 v^{\frac{1}{n}}\frac{v^{-\frac{2}{n}}-1}{v+1}dv$

or $v^{-\frac{2}{n}} - 1 = e^{-\frac{2}{n}\ln(v)} - 1 \sim -\frac{2}{n}\ln(v)$ quand $n \to +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(v^{-\frac{2}{n}} - 1) = -2\ln(v)$

par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} v^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(v)} = e^0 = 1$

Posons $h_n(v) = n.v^{\frac{1}{n}}\frac{v^{-\frac{2}{n}}-1}{v+1}$ de sorte que $I_n - 1 = \frac{1}{n^2}\int_0^1 h_n(v)dv$

Ainsi la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction k :

$v \longrightarrow \frac{-2\ln(v)}{v+1}$

Soit, pour $v \in [0,1]$ fixé, et pour m entier ≥ 2, $\varphi(m) = m.(v^{-\frac{2}{m}} - 1) = m.(e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)} - 1 + m.\frac{2}{m^2}e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}.\ln(v)$

$\varphi'(m) = e^{-\frac{2}{m}\ln(v)}(1 + \frac{2}{m}\ln(v)) - 1$

Soit alors $\psi(z) = e^z(1-z) - 1$ (où $z = -\frac{2}{m}\ln(v) \in \mathbf{R}_+$)

$\psi'(z) = e^z(1-z) - e^z = -ze^z < 0$

ψ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$, $\psi(0) = 0$ donc $\psi(x) \leq 0$ sur $[0,+\infty[$.

Il s'ensuit que $\varphi'(m) \leq 0$ sur $[2,+\infty[$ et que

$\forall n \geq 2, h_n(v) \leq h_2(v) = 2.\sqrt{v}\frac{v^{-1}-1}{v+1} \sim \frac{2}{\sqrt{v}}$ quand $v \longrightarrow 0^+$

h_2 est continue et intégrable sur $]0,1]$

Par application du théorème de convergence dominèe, on en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)dx = \int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dx$

Donc $(I_n - 1) \sim \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dv$ quand $n \to +\infty$

• Enfin calculons $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt$:

$\forall t \in]0,1[, \frac{\ln(t)}{t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k t^k \ln(t)}_{u_k(t)}$

$$\int_0^1 |u_k(t)|dt = -\int_0^1 \overset{\rightharpoonup}{t^k}\underset{\rightharpoondown}{\ln(t)}dt = \underbrace{\Big[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\Big]_{t\to0^+}^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{t^k}{k+1}dt = \frac{1}{(k+1)^2}$$

La série $\sum_{k\geq0}\int_0^1 |u_k(t)|dt$ est convergente, d'après le théorème de d'intégration des séries de fonctions, on peut alors affirmer que $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)dt\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 u_k(t)dt\right)$

Donc $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Finalement, $(I_n - 1) \sim \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-2\ln(v)}{v+1}dv \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$ quand $n \to +\infty$

$\boxed{(I_n - 1) \sim \frac{\pi^2}{6n^2} \text{ quand } n \to +\infty}$

2.4 Thèmes divers :

2.4.1 Comparaison de séries ** :

1- Soit $(u_n)_{n\geqslant0}$ une suite réelle positive, et (v_n) telle que $\forall n,\ v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$

a) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

b) Que peut on dire si la série $\sum u_n$ diverge ?

SOLUTION **:** 1- a) Par hypothèse la série $\sum u_n$ converge.

Supposons que $\sum v_n$ converge aussi. Alors $\lim v_n = 0$, donc $\lim(1+n^2u_n) = +\infty$, donc $\lim n^2u_n = +\infty$

et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 u_n}$, et donc $u_n.v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

On sait que si a et b sont deux réels positifs ou nuls, leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ est plus petite que leur moyenne arithmétique $\dfrac{a+b}{2}$ (il suffit de voir que $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$)

donc $u_n + v_n \geqslant 2\sqrt{u_n v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$

donc la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge, donc l'une au moins des séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a ainsi montré par l'absurde que la série $\sum v_n$ diverge.

b) En prenant $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ (série divergente), alors $(v_n) = \left(\frac{1}{1+n}\right)$ est une série divergente.

En prenant $(u_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (série divergente), alors $(v_n) = \left(\frac{1}{1+n\sqrt{n}}\right)$ est une série convergente.

On ne peut donc rien dire de général sur la série $\sum v_n$ lorqu'on suppose que la série $\sum u_n$ diverge.

2.4.2 Une généralisation du théorème de Cesaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite $L \in \mathbb{C}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes réels positifs ou nuls, divergente.

a) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$ converge ver L.

En déduire le théorème de Cesaro.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite L.

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$ quand $n \longrightarrow +\infty$

***SOLUTION* :**

a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall n \geq n_0, \quad |w_n - L| = \left|\frac{u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n}{v_0 + v_1 + \dots + v_n} - L\right| = \left|\frac{u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n - L(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}{v_0 + v_1 + \dots + v_n}\right| =$$

$$|w_n - L| = \left|\frac{(u_0 - L)v_0 + \dots + (u_n - L)v_n}{v_0 + v_1 + \dots + v_n}\right| \leq \frac{|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|v_{n_0-1} + |u_{n_0} - L|v_{n_0} + \dots + |u_n - L|v_n}{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$|w_n - L| \leq \frac{|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|v_{n_0-1}}{v_0 + v_1 + \dots + v_n} + \frac{|u_{n_0} - L|v_{n_0} + \dots + |u_n - L|v_n}{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

or pour $n \geq n_0, |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\forall n \geq n_0, \quad |w_n - L| \leq \frac{|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|v_{n_0-1}}{v_0 + v_1 + \dots + v_n} + \frac{\varepsilon}{2}.\underbrace{\frac{v_{n_0} + \dots + v_n}{v_0 + v_1 + \dots + v_n}}_{\leq 1}$$

$|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|$ est une constante, et puisque $\{v_n\}$ est une série à termes réels positifs divergente, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\dots+v_n) = +\infty$, donc il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $v_0+\dots+v_{n_1} \geq \dfrac{2(|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|v_{n_0-1})}{\varepsilon}$

alors $\forall n \geq n_1$, $\quad \dfrac{|u_0 - L|v_0 + \dots + |u_{n_0-1} - L|v_{n_0-1}}{v_0 + v_1 + \dots + v_n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ et donc $\quad |w_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a ainsi montré que $\quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \ \Rightarrow\ |w_n - L| \leq \varepsilon$,

c'est à dire que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L}$

• En prenant $(v_n) = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, on retrouve le théorème de Cesaro.

b) Soient $v_0 = 0$ et $v_k = \dfrac{1}{k}$ si $k \geq 1$.

d'après a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = L \quad$ donc $\quad u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dots + \dfrac{u_n}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} L.\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} L.\ln(n)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \overset{n\to\infty}{\sim} L.\ln(n)}$$

2.4.3 Somme partielle et reste *

1- Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que la série $\sum u_n$ soit divergente

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, est divergente. ($Sn = u_0 + u_1 + \dots + u_n$)

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ est convergente.

2- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes réels positifs, telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note r_n son reste d'ordre n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

a) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{r_{k-1}}$ diverge

b) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\sqrt{r_{k-1}}}$ converge

SOLUTION **:**

1-a) La suite (S_n) est croissante comme somme partielle d'une série à termes positifs.

Pour tout n et tout p , $\frac{u_n}{S_n} + \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{u_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{u_n + u_{n+1} + ... + u_{n+p}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_{n-1}}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_{n+p}}$

Puisque la série $\sum u_n$ est divergente, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, donc, pour tout n fixé, $\lim_{p\to+\infty} S_{n+p} = +\infty$

Pour tout n fixé, $\lim_{p\to+\infty} 1 - \frac{S_{n-1}}{S_{n+p}} = 1 - 0 = 1$, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0, \quad 1 - \frac{S_{n-1}}{S_{n+p}} \geq \frac{1}{2}$

On a ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p_0 \geq n$ tel que $\frac{u_n}{S_n} + \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{u_{n+p_0}}{S_{n+p_0}} \geq \frac{1}{2}$

Ceci contredit le critère de Cauchy des séries qui dit que pour tout $\varepsilon > 0$ (par exemple pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$) ,

il existe $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_n}{S_n} + \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{u_{n+p}}{S_{n+p}} \right| < \varepsilon$

Remarque : Si on est allergique au critère de Cauchy, en notant $S'_n = \frac{u_0}{S_0} + \frac{u_1}{S_1} + ... + \frac{u_n}{S_n}$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p_0 \geq n$ tel que $\frac{u_n}{S_n} + \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{u_{n+p_0}}{S_{n+p_0}} = S'_{n+p_0} - S'_{n-1} \geq \frac{1}{2}$, ce qui interdit la convergence de la suite (S'_n) , car en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtiendrait $0 \geq \frac{1}{2}$.

b) La série de terme général $\frac{u_n}{S_n^2}$ est à termes positifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$

donc $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^2} \leq \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_n} \leq \frac{1}{S_0} \qquad$ (somme "telescopique")

Les sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ étant majorées, cette série converge.

2- a) Remarquons que $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = r_{n-1} - r_n$ et que la suite (r_n) est décroissante.

Pour tout n et tout p , $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_k}{r_{k-1}} = \frac{u_n}{r_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{r_n} + ... + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} + \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + ... + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_{n+p-1}}$

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_k}{r_{k-1}} \geq \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} + \frac{r_n - r_{n+1}}{r_{n-1}} + ... + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_{n+p}}{r_{n-1}} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n-1}}$$

La suite des restes d'ordre n d'une série convergente est de limite nulle : $\lim r_n = 0$

donc, pour tout n fixé, $\lim_{p\to+\infty} \left(1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n-1}}\right) = 1 - \frac{0}{r_{n-1}} = 1$

donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0, \quad 1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n-1}} \geq \frac{1}{2}$

On a ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p_0 \geq n$ tel que $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_k}{r_{k-1}} \geq \frac{1}{2}$ et on termine le raisonnement comme dans la question 1-a) précédente.

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_k}{\sqrt{r_{k-1}}} = \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k})(\sqrt{r_{k-1}} + \overbrace{\sqrt{r_k}}^{\leq \sqrt{r_{k-1}}})}{\sqrt{r_{k-1}}}$

$$\leq \frac{(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}).2.\sqrt{r_{k-1}}}{\sqrt{r_{k-1}}} = 2.(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k})$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{\sqrt{r_{k-1}}}\leq 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=2.(\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n})\leq 2\sqrt{r_0}=2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}u_n}$

Ses sommes partielles étant majorées, la série $\sum\frac{u_k}{\sqrt{r_{k-1}}}$ converge, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{\sqrt{r_{k-1}}}\leq 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}u_n}$.

2.4.4 Somme partielle et reste : Centrale - Supelec

u_n étant le terme général d'une suite réelle, on note $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme partielle de rang n de la série $\sum u_n$ et $r_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ le reste d'ordre lorsque la série converge.

a) Soit $\{u_n\}$ une série convergente à termes positifs..

Montrer que la suite de terme général $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n-1}}}$ est croissante et divergente

Montrer que la série $\sum a_nu_n$ converge

Commenter sur l'exemple où $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha>1$ et en calculant directement un équivalent de a_nu_n

b) Soit $\{u_n\}$ une série divergente à termes positifs.

Trouver une suite décroissante et de limite nulle (a_n) telle que telle que la sétie de terme général a_nu_n soit divergente.

Commenter sur l'exemple où $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha\leq 1$ et en calculant directement un équivalent de a_nu_n

SOLUTION **:** a) La suite (r_n) est positive, décroissante et de limite nulle. Il en résulte immédiatement que la suite (a_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

$a_nu_n=\dfrac{u_n}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n-1}}}=\dfrac{r_{n-1}-r_n}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n-1}}}=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ku_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n}\leq\sqrt{r_0}$ (somme "télescopique")

Ses sommes partielles étant majorées, la série $\sum a_ku_k$ converge.

• Lorsque $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha>1$, $r_n\overset{n\to\infty}{\sim}\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ (méthode de comparaison séries-intégrales)

donc $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n-1}}}\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha-1}\,n^{\frac{\alpha-1}{2}}}$

donc $a_nu_n\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^\alpha}.\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha-1}\,n^{\frac{\alpha-1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha-1}\,n^{\frac{3\alpha-1}{2}}}$

et puisque $\alpha>1$, on a encore $\frac{3\alpha-1}{2}>1$ et la série $\sum a_nu_n$ converge.

b) Soit $\{u_n\}$ une série divergente à termes positifs : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

Par une démarche analogue au a), $u_{n+1}=U_{n+1}-U_n=(\sqrt{U_{n+1}}-\sqrt{U_n})(\sqrt{U_{n+1}}+\sqrt{U_n})$

La série de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{U_{n+1}}+\sqrt{U_n}}=\sqrt{U_{n+1}}-\sqrt{U_n}$ est divergente car

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{\sqrt{U_{k+1}}+\sqrt{U_k}}=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{U_{k+1}}-\sqrt{U_k})=\sqrt{U_{n+1}}-\sqrt{U_0}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

En posant $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{U_n}+\sqrt{U_{n-1}}}$, on obtient une suite (a_n) à termes positifs décroissante (car (U_n) est croissante), de limite nulle (car $\lim U_n=+\infty$), telle que la série $\sum a_nu_n$ soit divergente.

• Lorsque $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha\leq 1$, $U_n\overset{n\to\infty}{\sim}\displaystyle\int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-1\right)$ (méthode de comparaison séries-intégrales)

$U_n\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$ et donc $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{U_n}+\sqrt{U_{n-1}}}\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{1-\alpha}\,n^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2}$

d'où $a_nu_n\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{1-\alpha}\,n^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2}.\dfrac{1}{n^\alpha}=\dfrac{\sqrt{1-\alpha}}{2\,n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$

et puisque $\alpha\leq 1$, on a encore $\frac{1+\alpha}{2}\leq 1$ et la série $\sum a_nu_n$ diverge.

2.5 Produit infini :

On définit une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$

a) Etudier la convergence de (u_n) suivant la valeur de u_0.

b) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k$

SOLUTION **:**

Soit f la fonction $x \longrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

Ele est définie, continue et croissante sur $[-1,+\infty[$, dérivable sur $]-1,+\infty[$

• Les intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont stables par f. (voir tableau de variations)

Donc : - Si $u_0 \in [0,1]$, alors u_n est défini pour tout n et appartient à $[0,1]$.

- Si $u_0 \in [1,+\infty[$, alors u_n est défini pour tout n et appartient à $[1,+\infty[$.

En particulier, si $u_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

• $\forall x \geq 0, \quad f(x) = x \iff x^2 = \dfrac{1+x}{2} \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

Le seul point fixe de f dans $[0,+\infty[$ est $x = 1$.

• $\forall x \geq 0,\ (f(x)-x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} - 1 \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 1 < 0$

La fonction $(x \longrightarrow f(x) - x)$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, nulle en 1, donc positive sur $[0,1[$ et négative sur $]1,+\infty[$

Tableau de variations :

x	-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$	/ /	/ /	+		0	-	

• Si $u_0 \in [0,1[$, alors $\forall n,\ u_n \in [0,1[$ (car $[0,1[$ est stable par f)

donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ (voir le signe de $f(x) - x$ sur $[0,1[$)

La suite (u_n) est croissante, majorée par 1, donc convergente. Puisque $\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de la fonction f au point $L = \lim u_n$, $L = f(L)$ donc $L = 1$ (seul point fixe de f sur $[0,+\infty[$)

Donc, $\boxed{\text{si } u_0 \in [0,1[\text{, alors } \lim u_n = 1}$

• Si $u_0 \in]1,+\infty[$, alors $\forall n,\ u_n \in]1,+\infty[$ (car $]1,+\infty[$ est stable par f)

donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ (voir le signe de $f(x) - x$ sur $]1,+\infty[$)

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 1, donc convergente. Ici encore, en passant à la limite dans l'égalié $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $L = f(L)$ et donc $L = 1$.

Donc, $\boxed{\text{si } u_0 \in]1,+\infty[\text{, alors } \lim u_n = 1}$

Dans tous les cas, pour toute valeur de $u_0 \geq 0$, $\lim u_n = 1$.

b)La relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ ou $u_{n+1}^2 = \dfrac{1+u_n}{2}$ rappelle l'égalite $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$

• Si $u_0 \in [0,1[$, soit $\theta = \arccos(u_0)$ de sorte que $u_0 = \cos\theta$ $(\theta \in]0,\pi/2])$

alors $u_1 = \sqrt{\dfrac{1+u_0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $(\cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ car $\theta \in]0,\pi/2])$

si $u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$, alors $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\theta}{2^n}}{2}} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

Ceci montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

Alors, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = \cos\theta.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right).....\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos\theta.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)................\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}})}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)......\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}_{=\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{2^{n-2}})}$$

$$= \frac{1}{4}\cos\theta.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{4}\right).....\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)$$

....

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cos\theta . \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) . \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n} \cos\theta . \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2^{n+1}}$$

d'où $$\prod_{k=0}^{n} u_k = \frac{\sin 2\theta}{2^{n+1} . \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sin 2\theta}{2^{n+1} . \frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

Donc $$\boxed{\prod_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = \frac{u_0\sqrt{1-u_0^2}}{\text{Arccos}(u_0)}}$$

• Si $u_0 \in]1, +\infty[$, on fait un calcul analogue à partir des formules $\text{ch}^2(\theta) = \dfrac{1+\text{ch}(2\theta)}{2}$ et $\text{sh}(2\theta) = 2\text{sh}(\theta)\text{ch}(\theta)$ en posant $u_0 = \text{ch}\theta$